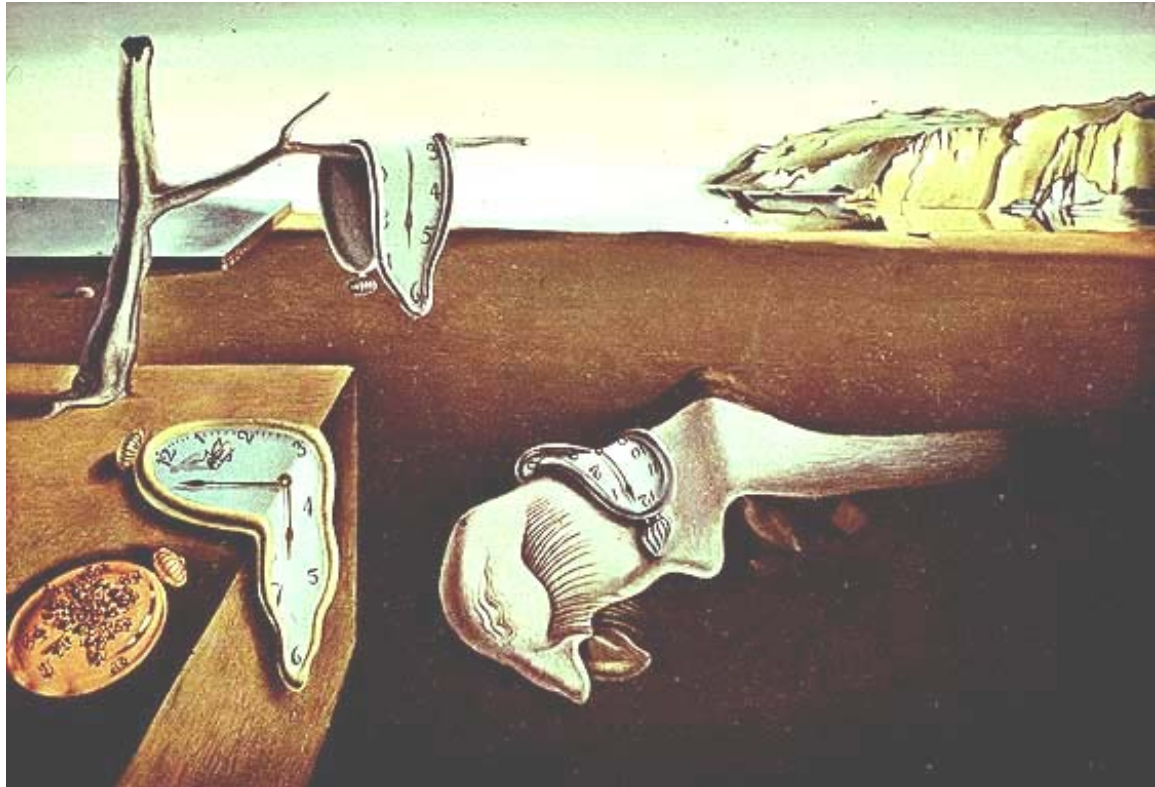


# WISKUNDE B-DAG 2006

vrijdag 24 november



## TUSSEN DE WIJZERS VAN DE TIJD



De Wiskunde B-Dag wordt gesponsord door



en

getal en ruimte



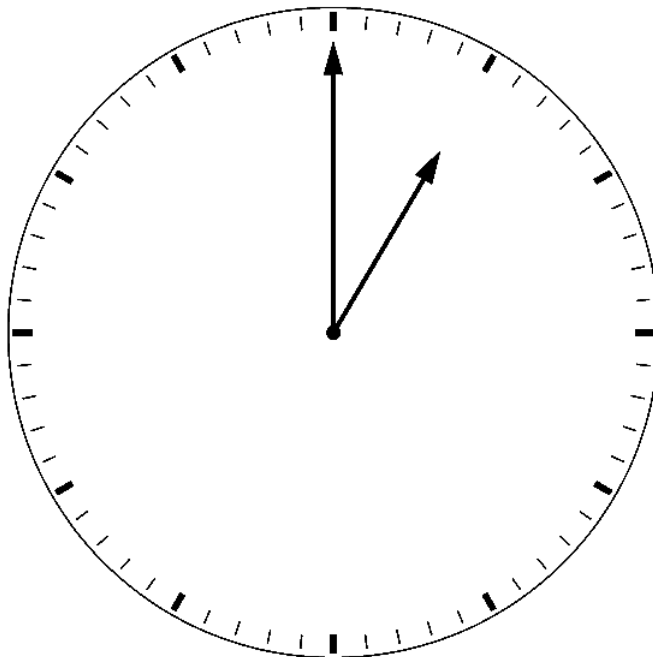
# Inleiding

De wiskunde B-dag opdracht van dit jaar staat geheel in het teken van de tijd.

De tijd zoals die wordt aangeduid op klokken met een kleine urenwijzer, een grotere minutenwijzer en eventueel een derde, wat haastig ronddraaiende, secondenwijzer.

De klok die we bedoelen is er wel één waarvan de wijzers perfect vloeiend en regelmatig rondgaan. Dus niet zo'n schok-en-spring toestand als op het station. Daar hobbelt de secondenwijzer stuitend zijn rondjes, wacht een tijdje bovenaan tot de minutenwijzer zijn stapje gedaan heeft en sjokt dan weer verder.

Hieronder zie je een klok die we op het oog hebben, ontdaan van alle versierselen die er vaak aan toegevoegd worden om de aantrekkelijkheid voor de eventuele koper te vergroten.



Het is op deze klok 1 uur precies. Binnenkort haalt de grote wijzer de kleine in!

Dat gebeurt vlak ná 5 over 1.

Immers, de minutenwijzer begint met een achterstand, maar loopt zoveel sneller dan de urenwijzer dat hij de voorsprong van de kleine wijzer snel ongedaan zal maken.

Als opwarmer voor het denken van deze dag krijg je deze twee instapvragen:

- A. Hoeveel keer per 12 uur staan de minuten- en de urenwijzer precies op elkaar?**
- B. Hoe laat precies haalt op bovenstaande klok de minutenwijzer de urenwijzer in?**

We spreken over 'per 12 uur' en niet 'per dag', omdat het tweede deel van een dag van 24 uren (een etmaal) een exacte herhaling is van het eerste gedeelte. Bij het bestuderen van de gewone klok beperken we ons dus tot een **periode van 12 uren**, te beginnen om 12 uur precies tot aan het tijdstip waarop het voor het eerst weer 12 uur is.

De secondenwijzer telt voorlopig niet mee. Alleen in het laatste deel van de opgave duikt hij op.

## Waar draait het om op deze wiskunde B-dag?

De instapproblemen geven al een beeld van de richting waarin de opgave zal gaan: over de wijzers van de klok en allerlei bijzondere standen ervan.

Wie is er geïnteresseerd in het antwoord van vragen zoals die van de instap? Niet de treinreizigers, ook niet de bezitter van een peperdure design-watch zoals hiernaast.

Jij en wij van de wiskunde-B-dag juist wel: want wiskunde gaat over verrassende vragen en mogelijk nog verrassender antwoorden.

Niet alleen de antwoorden mogen verrassen, liever nog de toelichtingen daarop. Een uitleg als “*het komt omdat je het kan zien als je het uitrekent*” is niet echt verhelderend.

Een goede uitleg is als het aansteken van een lamp in een donkere schatkamer. Je knippert even met de ogen, maar daarna zucht je: ‘Ach, natuurlijk, zo mooi zit het in elkaar. Cool!’



### **De indeling van de opgave.**

Deel **A** gaat door op instapvraag **A**. Er volgen nog enkele voorbeelden van nutteloze vragen met mogelijk fraaie antwoorden. Kenmerk: globaal kijken en redeneren.

Deel **B** is meer theoretisch van aard en is een vervolg op instapvraag **B**, met precies rekenen en redeneren. Het gebruik van grafieken en algebra kan daarbij helpen. Kenmerk: precisie.

In deel **C** worden de wijzers van de klok verwisseld. Onderzoek zelf hoe je daar de kennis van de delen **A** en **B** kunt toepassen of zoek andere, eigen aanpakken. Kenmerk: pas je kennis van de delen **A** en **B** toe op een nieuwe situatie of wees eigenwijs en volg je eigen strategieën.

Deel **D** is voor de echte tijd-geesten. Zij krijgen hier de kans om zich te bewijzen!

Wees niet bezorgd als je daar niet aan toekomt; het graaft echt diep. Kenmerk van deel **D**: neem de tijd en de ruimte voor eigen ideeën en aanpakken.

### **Het eindproduct**

Je hebt de problemen van het klokkijken op een aantal manieren bekeken. Daarbij heb je de vragen gevolgd, of (eigenwijs als je bent) eigen wegen bewandeld.

Dus wordt het eindproduct:

***Een werkstuk waarin de wijzers van de klok jou raadsels voorleggen waarvoor jij de oplossingen aandraagt, en waarbij antwoorden een competitie aangaan op helderheid en schoonheid.***

Laat je niet verleiden tot alleen maar het beantwoorden van de individuele vragen, maar geef een samenhangend verslag van je bevindingen van deze dag dat goed leesbaar is voor degene die niet de specifieke vragen voor zich heeft liggen.

### **Verdere tips**

- Zorg dat het werk goed kopieerbaar is, dus gebruik zwarte schrijf- en tekenmaterialen.
- Denk ook aan de beschikbare tijd op deze dag! Het samenstellen van het verslag kost tijd. Zorg dus dat je daar tijdig mee start.
- Verdeel werkzaamheden wanneer je overeenstemming hebt over de aanpak.

***Ten slotte: veel succes en plezier met deze opgave***

## Deel A Redeneren over wijzerstanden

Instapvraag **A** kan worden vervolgd met vragen over andere speciale standen van de twee wijzers.

- A1** Als de twee wijzers in elkaars verlengde staan, zoals bij precies 6 uur, dan maken de twee wijzers een hoek van 180 graden.  
Hoe vaak in een periode van 12 uur is er sprake van zo'n stand van 180 graden?

Een hoek van nul graden of 180 graden is eenduidig bepaald: je weet precies wat is bedoeld. Maar bij de vraag hoe vaak de twee wijzers een hoek van 90 graden maken, komt toch (als het goed is...) de tegenvraag "wat bedoel je met een hoek van 90 graden?". Er zijn namelijk altijd twee hoeken aan te wijzen. Als de ene hoek 90 graden is, dan is er ook tegelijkertijd een hoek van 270 graden. In deze opgave spreken we af:

**de hoek tussen twee wijzers is altijd de kleinste van de twee mogelijke hoeken.**

Dus bij precies 3 uur en precies 9 uur maken de twee wijzers een hoek van 90 graden, maar er zijn nog wel meer wijzerstanden te vinden met een hoek van 90 graden.

- A2** Hoe vaak, in een periode van 12 uur, vormen de twee wijzers een hoek van 90 graden, van 120 graden, van 30 graden?

Als je de gevonden antwoorden op bovenstaande vragen helder wilt communiceren met personen die de letterlijke opgave niet kennen, dan is het verstandig om na te denken over hoe je dit wilt doen. Daarbij kun je denken aan illustraties met grafische voorstellingen, aan een notatie die is gebaseerd op rekenactiviteiten, of aan ..... vul zelf maar in!

Sommige standen van de twee wijzers zijn vanzelfsprekend mogelijk, andere zijn (bijna) vanzelfsprekend onmogelijk. Over deze (on)mogelijkheden gaat de volgende vraag.

- A3** Vier keer de vraag "Hoe laat is het?"  
Twee keer is er wel een tijdstip te vinden en twee keer is dat onmogelijk. Zoek het maar uit...  
De tijdstippen zelf hoef je niet te berekenen; het gaat om het beredeneren *waarom* de stand van de twee wijzers (on)mogelijk is.
- a. De wijzers staan in elkaars verlengde en de minutenwijzer staat vrij dicht bij de '11'.  
Hoe laat is het?
  - b. De wijzers maken een hoek van 90 graden en de minutenwijzer staat precies horizontaal.  
Hoe laat is het?
  - c. De wijzers staan symmetrisch ten opzichte van de horizontale lijn door het draaipunt van de wijzers en de urenwijzer staat in de buurt van de '8'.  
Hoe laat is het?
  - d. De wijzers staan allebei precies horizontaal.  
Hoe laat is het?

### **De kappersklok**

Bij de kapper kijk je in de spiegel. Als er achter je een gewone klok hangt, zie je die, maar wel in spiegelbeeld. Stel je nu voor dat het een klok is zonder cijfers. En schakel je hersenen even uit: je kijkt in de spiegel en je ziet wat je ziet, zonder interpretatie van je hersenen over hoe het in het echt is.

- A4**
- a. Je ziet in de spiegel dat het ongeveer 5 over 2 is. Hoe laat is het echt?
  - b. Zijn er tijdstippen op de dag dat het niet uit maakt of je naar de echte klok of naar de gespiegelde klok kijkt?
  - c. Als je een tijdje blijft kijken, zou je de klok in de spiegel achteruit zien draaien. Raar. Maar als je een korte blik op de klok in de spiegel werpt, zie je altijd een wijzerstand die ook echt mogelijk is. Leg dat uit.

## Deel B Rekenen aan wijzerstanden

Bij deel A ben je er al mee geconfronteerd: niet alle standen van de twee wijzers van de klok komen voor. De drie plaatjes hieronder laten dat zien.

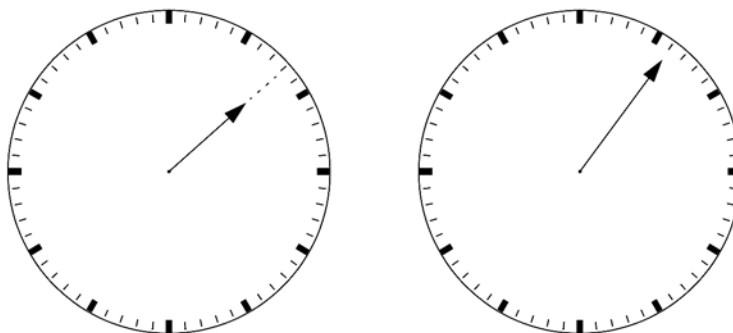


Als de minutenwijzer op de 9 staat, kan de urenwijzer nooit exact op de 10 staan. We werken alleen met heel goede klokken deze dag.

Bij deze voorbeelden is de redenering simpel: de urenwijzer staat precies op een heel uur. Dan moet de minutenwijzer precies op twaalf staan.

Maar wat kan er eigenlijk wel?

**B1** Hier zijn twee verschillende klokken afgebeeld.



- Op de linkerklok zie je alleen de *urenwijzer*. Die wijst precies naar streepje 8. Geef de mogelijke stand(en) van de *minutenwijzer*.
- Op de rechterklok zie je alleen de *minutenwijzer*. Die wijst precies naar streepje 6. Geef de mogelijke stand(en) van de *urenwijzer*.

"De grote wijzer staat op streepje 6" betekent dat het 6 minuten na een heel uur is. Als de kleine wijzer op streepje 8 staat, heeft dat niets met 8 uur te maken. Er is daarom behoefte aan meer helderheid. De onderverdeling in 60 streepjes heeft te maken met de minutenaanduiding; de twaalf dikkere streepjes van deze zestig geven de uren weer (lopend van 1 tot en met 12). De combinatie van een minutenwijzerstand en een bijpassende urenwijzerstand geeft een tijdstip weer.

We gaan vooral kijken naar mogelijke *wijzerstanden* van de uren- en minutenwijzer en daarbij horende *tijdstippen*.

Om deze twee (*wijzerstanden* en *tijdstippen*) uit elkaar te houden spreken we af:

**de wijzerstanden worden uitgedrukt in graden ten opzichte van de verticale stand naar boven.**

Om precies 10 over 3 is de grote minutenwijzerstand dus 60 graden en de kleine urenwijzerstand iets meer dan 90 graden.

- B2** a. De hoek tussen de twee wijzers verandert voortdurend. Welke hoeken komen voor tussen de tijdstippen tien over drie (3:10 uur) en tien over half vier (3:40)?  
 b. Hoe groot is de hoek tussen de twee wijzers om 8 voor half vijf (4:22 uur)?

De grote wijzer doorloopt een ronde van 360 graden in één uur en begint dan weer opnieuw; de kleine wijzer heeft voor één ronde precies twaalf uren nodig voordat hij weer opnieuw kan beginnen. Er is daarom nog een onderscheid dat belangrijk genoeg is om bij stil te staan.

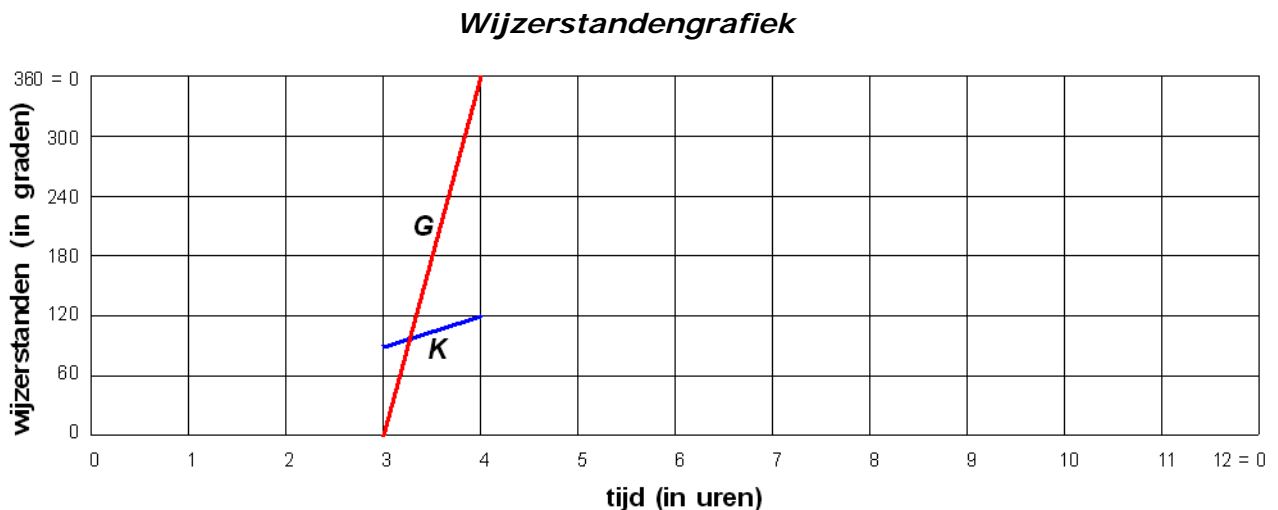
Als we alleen maar kijken naar de stand van de grote wijzer (in graden ten opzichte van de verticale stand), dan vergeten we daarbij hoeveel volledige ronden van 360 graden de wijzer al heeft gemaakt. Er is dus een verschil tussen de **stand van de wijzer ten opzichte van de verticale stand** en de **hoek die is afgelegd vanaf het begintijdstip 12 uur (beter gezegd: 0 uur)**. Bij het geval "10 over 3" hierboven heeft de grote wijzer al meer dan drie volledige ronden afgelegd.

Voor de grote wijzer (de minutenwijzer) gebruiken we de letter 'g' op twee manieren:

- g** is de door de grote wijzer afgelegde hoek vanaf het begintijdstip 0 uur;
- G** is de stand van de grote wijzer (in graden) ten opzichte van de verticale stand.

Voor het geval "10 over 3" geldt dus: **g** = 1140 graden en **G** = 60 graden.

In een wijzerstandengrafiek kan de wijzerstand (in graden) worden uitgezet tegen de tijd (in uren). Hieronder zijn de standen van de grote wijzer **G** en de kleine wijzer **K** weergegeven voor alle tijdstippen **t** vanaf 3 uur tot aan 4 uur.



*Merk op dat de 12 (uur) bij de horizontale as en de 360 (graden) bij de verticale as beide zijn vervangen door het getal 0. Dat geeft goed weer dat de tijd en de wijzerstand dan aan een nieuwe ronde beginnen.*

Bij de twee getekende stukken horen de volgende algebraïsche beschrijvingen:

$$G = 360t - 1080 \quad \text{voor} \quad 3 \leq t < 4$$

$$K = 30t$$

De volledige grafieken van **G** en **K** en alle bijbehorende algebraïsche beschrijvingen (voor alle waarden **t** van **t** = 0 tot aan **t** = 12) kunnen handig worden gebruikt bij het rekenen aan wijzerstanden. Maar natuurlijk mag je ook eigen wegen volgen. Voorwaarde is dan natuurlijk wel dat je je keuze helder verantwoordt.

In deel **A** is gevraagd hoe vaak bepaalde wijzerstanden voorkomen tijdens een periode van 12 uur. Een logische vervolgvraag is nu:

- B3** Op welke exacte tijdstippen
- staan de twee wijzers precies op elkaar?
  - staan de twee wijzers recht tegenover elkaar?
  - maken de twee wijzers een hoek van 90 graden, van 120 graden, van 30 graden?

*Let op! Met exact bedoelen we niet "in minuten of in seconden of in tienden van seconden nauwkeurig".*

*In een exact tijdstip kan ook een breukvorm voorkomen, zoals bij 2 uur en  $12\frac{3}{7}$  minuut.*

Ook voor andere soorten vragen kan de grafische of de algebraïsche voorstelling van dienst zijn. Maar ook nu geldt weer: als je eigen manieren hebt om deze vragen te beantwoorden, gebruik die dan met een heldere verantwoording van de keuzes die je maakt.

- B4** Zoals hiernaast vertoont een horloge zich graag in advertenties. De wijzers op exact gelijke hoeken met de verticale as door het draaipunt van de wijzers, als uitnodigende armen iets omhoog naar de koper toegespreid. Stilstaand!

- Op welke tijd staat het horloge dan exact?
- Er zijn meer symmetrische standen ten opzichte van deze verticale as (ook al zijn die minder gebruikelijk in de reclame). Bij welke tijdstippen is dat het geval?
- De wijzers staan symmetrisch ten opzichte van de *horizontale* as door het draaipunt van de wijzers en de kleine wijzer staat in de buurt van de 8. Hoe laat is het precies?

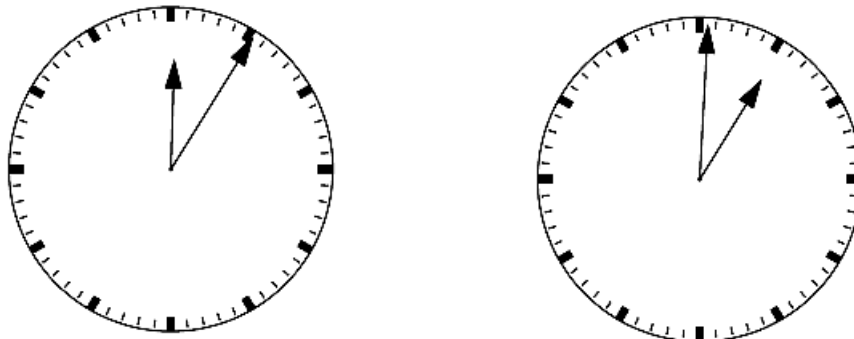


- B5** Door een defect is midden in de nacht om 0 uur de kleine wijzer de verkeerde kant uit gaan lopen. De grote wijzer loopt wel gewoon in de goede richting. Bereken ook nu op welke tijdstippen de wijzers van deze klok precies op elkaar staan.
- B6** Bedenk zelf tenminste twee problemen die je met de grafische of algebraïsche beschrijvingen kunt oplossen. Natuurlijk is het erg aardig als je ook de oplossingen kunt verwoorden.



## Deel C Nachtmerrie?

Even na middernacht wordt je wakker en je ziet op de wekker dat het net twaalf uur is geweest. Je valt weer in slaap, maar na ongeveer een uur wordt je opnieuw wakker. Je schrikt! De tijd lijkt stil te staan. Gelukkig beseft je al snel dat je de grote en de kleine wijzer bij het kijken had verwisseld.



Dat je bij het verwisselen van de twee wijzers wijzerstanden ziet die ongeveer kloppen is wel duidelijk. Kijk maar naar de hierboven getekende standen. De vraag is echter of bij verwisseling van de twee wijzers van een wijzerstand, de nieuwe stand ook weer een exacte wijzerstand oplevert, en zo ja, hoe die *precies* is te berekenen.

De volgende gedachtengang helpt je hopelijk op weg bij dit onderzoek.

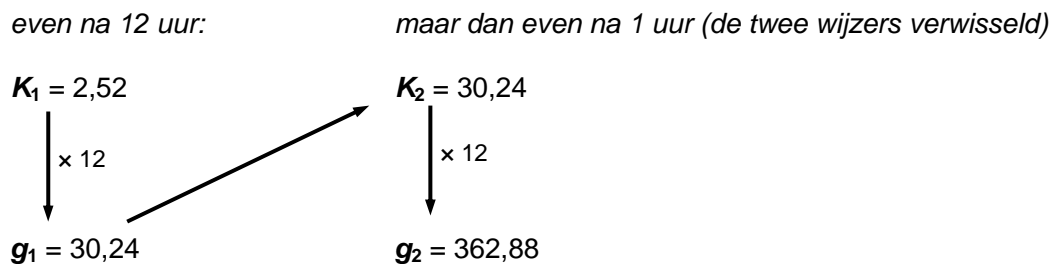
Bekijk de standen van de grote en de kleine wijzer op de linkerklok hierboven (noem die voor het gemak even  $G_1$  en  $K_1$ ).

Omdat de grote wijzer 12 keer zo snel rondloopt als de kleine wijzer, geldt voor de *afgelegde hoek* van de wijzers in graden:  $g = 12 K$ .

Omdat  $g_1$  iets meer dan 30 graden is, moet  $K_1$  dus iets meer dan 2,5 graden zijn.

Bij de rechterklok moet het net andersom zijn:  $G_2$  iets meer dan 2,5 graden en  $K_2$  iets meer dan 30 graden. Maar de minutenwijzer heeft dan al wel meer dan een complete ronde van 360 graden doorlopen! Dus  $g_2$  moet dan iets meer dan 362,5 graden zijn.

Een eerste poging om met behulp van een beginschatting de preciese tijdstippen te vinden kan schematisch als volgt worden weergegeven. Met een aangenomen beginschatting van  $K_1 = 2,52$  voor de linkerklok kunnen de andere waarden worden berekend:



Voor de stand van de grote wijzer even na 1 uur geldt dus  $G_2 = 2,88$  graden.

Niet echt slecht, maar dat moet beter kunnen! Het gat tussen  $K_1$  en  $G_2$  kan worden verkleind.

Bekijk heel goed hoe in dit schema is gerekend en probeer met een andere beginschatting voor  $K_1$  op de linkerklok de waarde van  $G_2$  op de rechterklok gelijk aan  $K_1$  te krijgen.

Kijk nu terug op de manier waarop je de berekeningen hebt georganiseerd.

Probeer dat rekenschema op een meer algemeen niveau te beschrijven en gebruik dat om de twee kernvragen te beantwoorden:

**C1** Hoeveel exacte wijzerstanden zijn er in een periode van 12 uur te vinden, waarbij verwisseling van de twee wijzers ook weer een exacte wijzerstand oplevert?

**C2** Bereken een aantal van deze exacte wijzerstanden.

## Deel D Uren, minuten en seconden: een uitdaging voor de *echte* tijd-geesten

De secondenwijzer speelde tot nu toe geen rol. In dit deel nemen we hem wel mee!  
Per minuut doorloopt de secondenwijzer één volle ronde. In een periode van 12 uren maakt hij dus 720 volle rondes.

Voor de secondenwijzer is er dus, net als voor de minutenwijzer, een onderscheid nodig tussen de *wijzerstand ten opzichte van de verticale (naar boven) stand* en de *hoek die is afgelegd vanaf 0 uur*.  
Afspraak:

- $s$  is de afgelegde hoek van de secondenwijzer vanaf het begintijdstip 0 uur;
- $S$  is de secondenwijzerstand (in graden) ten opzichte van de verticale stand.

Op  $t = 0$  (12 uur) staan de drie wijzers precies op elkaar.

- D1** Onderzoek of er meer tijdstippen zijn waarop de drie wijzers precies op elkaar staan.  
Je kunt hierbij natuurlijk gebruik maken van de resultaten die je in deel **B** al hebt gevonden.

Een boeiende vraag is:

- D2** Zijn er tijdstippen mogelijk waarbij de urenwijzer, de minutenwijzer en de secondenwijzer onderling hoeken van 120 graden maken?

### **Andere tijdsindeling; nieuwe kansen?**

Tot nu toe is steeds gewerkt met de gebruikelijke tijdsindeling:

- In 1 volle ronde van de urenwijzer doorloopt de minutenwijzer 12 volle rondes;
- in 1 volle ronde van de minutenwijzer doorloopt de secondenwijzer 60 volle rondes.

Deze tijdsindeling zou je de (12, 60)-indeling kunnen noemen.

Misschien ben je wat teleurgesteld bij de gevonden antwoorden van **D1** en **D2** bij deze tijdsindeling.

Mooie standen van de drie wijzers komen daarbij niet echt vaak voor.

Maar misschien biedt een andere tijdsindeling wel de oplossing van dit probleem!

We definiëren de **( $p, q$ )-indeling** van de tijd als volgt:

- 1 volle ronde van de urenwijzer is gelijk aan  $p$  volle rondes van de minutenwijzer;
- 1 volle ronde van de minutenwijzer is gelijk aan  $q$  volle rondes van de secondenwijzer.

Bij de (10, 10)-verdeling hoort dus:

- In 1 volle ronde van de urenwijzer doorloopt de minutenwijzer 10 volle rondes;
- in 1 volle ronde van de minutenwijzer doorloopt de secondenwijzer 10 volle rondes.

De finale vraag van deze Wiskunde B-dag opgave is:

- D3** Bij welke ( $p, q$ )-indeling van de tijd zijn er tijdstippen te vinden waarop de drie wijzers onderling een hoek van 120 graden maken?