Stoffige Algebra?

M. Kindt
OW&OC, RU Utrecht

Een van de laatste activiteiten van het Hawexteam is het ontwerpen van overbruggingspakketjes voor leerlingen die van havo naar vwo willen. Belofte (aan de experimenteerscholen) maakt schuld, vandaar. Voor leerlingen die het vak wiskunde A willen voortzetten op het vwo zal dat boekje gaan over het differentiëren, in het bijzonder van veeltermfuncties. Daarbij gaat het zowel om begripsvorming als om techniek. Allereerst het hele complex van koorde en raaklijn, gemiddelde snelheid en snelheid in een flits, globale en lokale verandering, (gemiddelde-) toenamendiagram en hellinggrafiek, en tenslotte de hellingfunctie, ofwel de afgeleide. Dit alles voor de A-leerling verklaard. Daarna het trucjesapparaat en de verwerking. Voor dat laatste zal nog wat stoffige algebra moeten worden opgehaald.

Tabelvermenigvuldiging

Door het Hawexteam is steeds verkondigd dat het havo A-programma qua begripsvorming een goede propaedeuse voor de 'toegepaste analyse' is, dat schept dus verplichtingen. We zullen nog een keer alles uit de kast moeten halen.
Zo kwam ik er weer eens toe om na te denken over zulke laag-bij-de-grondse zaken als 'ontbinding in factoren', 'vergelijkingen met veeltermen', enzovoorts. Sinds het boekje *Aanschouwelijk Algebra* (oorspronkelijke titel: *Vision in Elementary Mathematics*) van W.W. Sawyer bij ontwerpers en auteurs enig aanzien geniet, is het idee van de tabelvermenigvuldiging wel bekend.
Neem bijvoorbeeld de opdracht om het produkt

$$(x^2 + 3x - 2) \cdot (x^2 - x + 6)$$

uit te werken.
Het tabelletje wordt zó:

$\cdot$	x^2	$3x$	-2
x^2	x^4	$3x^3$	$-2x^2$
$-x$	$-x^3$	$-3x^2$	$2x$
6	$6x^2$	$18x$	-12

fig. 1

De uitkomst wordt dus $x^4 + 2x^3 + x^2 + 20x - 12$.
Handig toch? Waarom zou je het anders doen? Onder elkaar (zoals in ouderwetse algebraboekjes staat, het vak heette toen nog stelkunde) is natuurlijk ook prima, maar die tabel biedt betere didactische waar, naar mijn stellige overtuiging. (Zou stelkunde misschien afgeleid zijn van stellig en niet van stel ... zoals ik altijd gedacht heb?)
Ineens schiet me een fraai gedicht van K. Schippers te binnen:

> $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
> *je schoonheid min je ogen noem ik a*
> *de geest die in je dartelt b*
> *je ogen*
> *c*
> *opgeteld en minstens een kwadraat gegeven*
> $(a + b + c)^2$

Het gedicht stamt uit de bundel *Een leeuwerik boven het weiland.* De formule (ik heb hem nog als een van de vele merkwaardige produkten uit het hoofd moeten leren, de dichter waarschijnlijk ook), laat zich, prozaïsch dat wel, verklaren met een 3×3-tabel. Misschien is het hier nog aardiger om het weiland uit de titel van de dichtbundel op Mondriaanse wijze te verdelen:

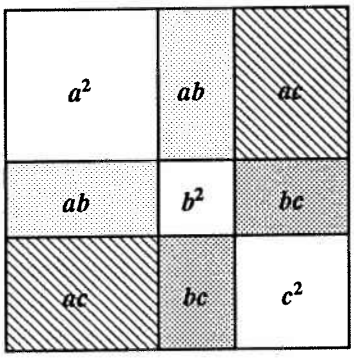


fig. 2

Van het oppervlaktemodel naar de tabel is maar een kleine stap; een voordeel van de tabel is dat mintekens niet storen.
Inmiddels heb ik besloten dat de tabel als hulpmiddel in het boekje komt (ook dat gedicht van Schippers trouwens). De tabel geeft houvast en mag van mij ook ge-

bruikt worden bij wat er nog aan merkwaardige produkten resteert in de schoolalgebra. Een veilige methode waarbij de kans op slordige fouten kleiner is dan bij lineaire uitwerking en ... die bovendien redelijk doorzichtig is.
Het ontbinden in factoren van een veelterm is een kwestie van achteruitlopen.
Neem als voorbeeld: $x^2 + 15x + 44$.

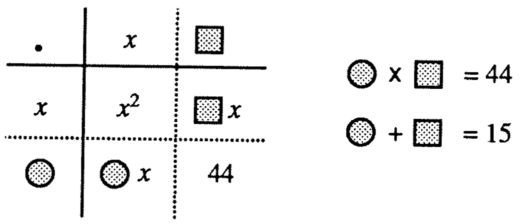


fig. 3

Een niet al te moeilijk puzzeltje, dat tot $(x + 4)(x + 11)$ leidt. Grappig dat ook $x^2 - 16$ zich prima volgens dit schema laat ontbinden, die merkwaardige produkten hoeven echt niet gekend te worden. Nog wat mijmerend denk ik dat de leerling ook onontbindbare veeltermen ('priemveeltermen') tegen moet komen. Voor de hand ligt zoiets als $x^2 + 16$.

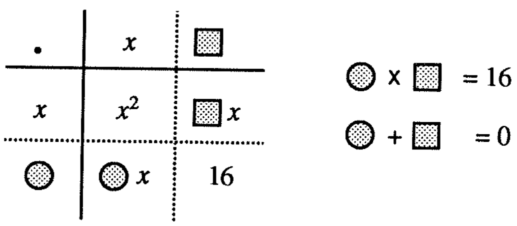


fig. 4

Twee getallen die tegengesteld zijn, hebben noodzakelijk een negatief produkt; en daarmee is een onoplosbaar conflict blootgelegd.
Kan ik nog een stapje verder, met $x^2 + x + 2$ bijvoorbeeld ? Gezocht zijn getallen met som 1 en produkt 2. Een beetje logisch redeneren leert dat beide getallen positief zouden moeten zijn. Als tevens de som 1 is, denk ik aan breuken, in ieder geval aan twee getallen tussen 0 en 1. Het produkt kan natuurlijk geen 2 worden.
Ook $x^2 + x + 1$ is dan natuurlijk een priemveelterm, maar hoe zit het met $x^2 + x + \frac{1}{2}$?
Wacht eens, samen 1, dan is het produkt maximaal $\frac{1}{4}$, denk maar aan een rechthoek met lengte plus breedte is 1. Die $\frac{1}{4}$ is duidelijk de grenswaarde waarvoor $x^2 + x + ...$ nog in factoren kan worden ontbonden. Een visioen van een alternatieve behandeling van de discriminant van een vierkantsvergelijking doemt op...

Spelen met een visioen

Ik stel me een klas voor, mag een brugklas zijn (zelfs jonger, maar daar heb ik geen ervaring mee). Handenwrijvend en fris van zin kom ik het lokaal binnen, enthousiast val ik met de deur in huis:
'Twee getallen zijn samen 10. Je vermenigvuldigt ze. Wat komt er uit?'
Hypothetische reacties:
'Gekke vraag.'
'Kun je niet weten.'
'Kan van alles zijn.'
Ik fantaseer maar een paar verstandige antwoorden.
'Kan van alles zijn, wat voor alles ?'
Algauw verschijnt er een mooi rijtje op bord:

$$
\begin{aligned}
1 \times 9 &= 9\\
2 \times 8 &= 16\\
3 \times 7 &= 21\\
4 \times 6 &= 24\\
5 \times 5 &= 25\\
6 \times 4 &= 24\\
7 \times 3 &= 21
\end{aligned}
$$

Hou maar op.
Ik provoceer: uitkomst kan van alles zijn, ook 30 bijvoorbeeld. Je hoopt dan dat de intuïtie sterk genoeg is. Groter dan 25, daar geloven we niet in. De symmetrie in het rijtje zal wel effect hebben of is dat al te speculatief? Als de klas vertrouwd is met negatieve getallen kan het onderzoek nog wat worden uitgebreid:

$$
\begin{aligned}
0 \times 10 &= 0\\
-1 \times 11 &= -11\\
-2 \times 12 &= -24\\
-3 \times 13 &= -39\\
&\ldots
\end{aligned}
$$

Het lijkt er dus echt op dat 25 het maximaal bereikbare produkt is. Maar wacht even, hier is nog een rijtje:

$$
\begin{aligned}
0 \times 9 &= 0\\
1 \times 8 &= 8\\
2 \times 7 &= 14\\
3 \times 6 &= 18\\
4 \times 5 &= 20\\
5 \times 4 &= 20\\
6 \times 3 &= 18
\end{aligned}
$$

Is 20 nu de grootst mogelijke uitkomst?
Zou er twijfel zijn? Zou het idee van 'eerlijk verdelen' al sluimeren? Desnoods een beetje sturen of, beter, ze zelf wat rijtjes laten produceren.
Onherroepelijk zal er een moment komen waarop $4\frac{1}{2} \times 4\frac{1}{2}$ wordt bekeken, uitkomst $20\frac{1}{4}$; geen spectaculaire winst, maar toch winst.
Zo zal het inzicht groeien dat het produkt maximaal is, als de som eerlijk verdeeld wordt. Inzicht? Nee, overtuiging, maar dan wel gebaseerd op een aantal voorbeelden. Kortom inductie.
Of is het meer: aan de voorbeelden is een zekere wetmatigheid geconstateerd. De symmetrie in de tabel, het naar elkaar toegroeien (krimpen) van de factoren gepaard gaande met de toename van het produkt, voedt de overtuiging. Maar weet je zonder rekenen al zeker dat

$4{,}87 \times 5{,}13$ ook kleiner is dan 5×5?
Wiskunde zou wiskunde niet zijn als er geen andere boeg voorhanden was.

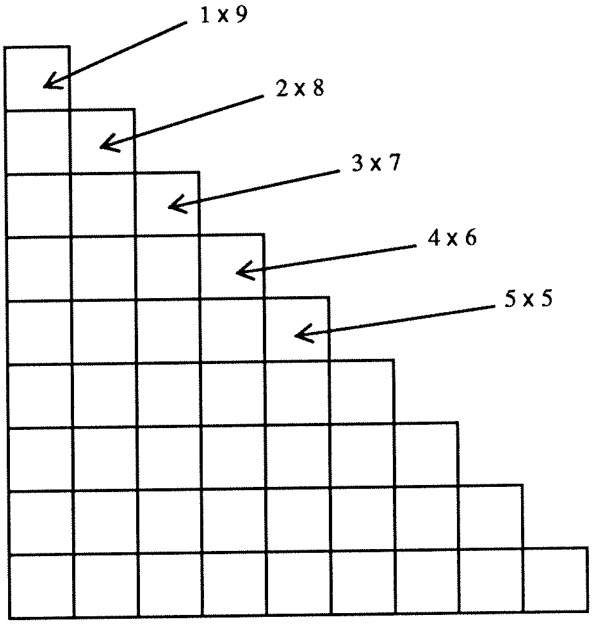


fig. 5

In de figuur wordt duidelijk wat er gebeurt als je een trapje lager gaat: de oppervlakte groeit totdat het midden bereikt is, en neemt daarna weer af.
Of beter: ga uit van een vierkant; maak de ene zijde een beetje langer en de andere datzelfde beetje korter. Wat gebeurt er met de oppervlakte?

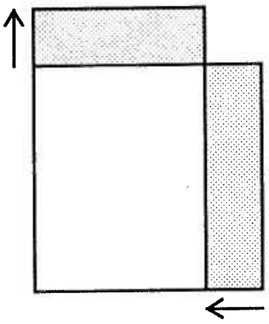
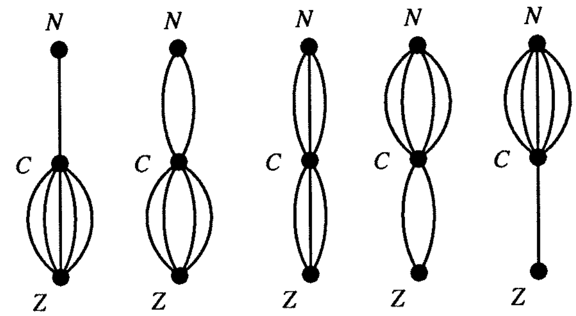


fig. 6

De grijze strookjes zijn even breed, maar niet even lang, dus ... Een heus bewijs. Leuk die meetkunde.
Met algebra kan het ook: als je bijvoorbeeld 10 niet eerlijk verdeelt, dan is het ene getal wat meer dan de helft en het andere *dat zelfde* minder. Een doel van algebraonderwijs zou toch moeten zijn om zoiets te vertalen in expressies met variabelen, dus bijvoorbeeld:
ene getal = $5 + k$, andere getal = $5 - k$
Produkt (tabelletje!) = $25 - k^2$, kleiner dus dan 25. Ik geloof niet dat ik nog voor de brugklas sta ...

Leerstoflijn

Waar het me even om ging was het schetsen van de mogelijke eerste stap van een leerstoflijn, een lijn die zou moeten uitkomen bij discriminant en vierkantsvergelijking. Fundament is de stelling: *als de som van twee variërende getallen vaststaat, dan is het produkt variabel en maximaal als de som eerlijk verdeeld wordt.*
Dit principe kan op allerlei manieren worden ingeleid en ontdekt. Behalve het voorafgaande, gefingeerde klassegesprek noem ik er nog een paar.
Een instapspel bijvoorbeeld: de klas wordt ingedeeld in paren, elk paar kiest twee getallen onder de 100, dat wil zeggen de ene leerling kiest, de ander vult aan tot 100; vervolgens rekent elk paar het produkt uit; reep chocola voor de grootste uitkomst.
Of: in het beloofde land arriveren vele goudzoekers; elk krijgt een touw van 100 m en mag daarmee een rechthoek uitzetten om naar hartelust te delven; Joe wil een zo groot mogelijke oppervlakte om zijn geluk te beproeven; hoe doet hij dat ?
Of:



Aantal wegen is in elk plaatje 6, aantal trajecten N-C-Z = ...

fig. 7

En zo zijn er talrijke variaties denkbaar.
De tweede fase zou ik inleiden met een puzzeltje: neem twee getallen in gedachten, maak de som en het produkt bekend; is het mogelijk om de oorspronkelijke getallen te vinden?
Diverse strategieën kunnen de revue passeren, waaronder de bekende: kijk eerst naar het produkt, dat laat minder splitsingen toe (ik denk voorlopig alleen aan gehele getallen). Een drupje getallentheorie (deelbaarheid, ontbinding in factoren) is nooit weg. Bij wat grotere getallen zijn benaderende zoekstrategieën heel natuurlijk.
Bijvoorbeeld: som = 100, produkt = 1824. 1824 zit nogal ver van het maximum 2500, laten we voorzichtig beginnen: $10 \times 90 = 900$, $20 \times 80 = 1600$, $30 \times 70 = 2100$, het eerste getal zit dus tussen 20 en 30, het tweede tussen 80 en 70, en het zoeken duurt niet lang meer.
Uitbreiding van het spel tot negatieve getallen, vraagt wat logisch redeneren met behulp van de tekenregels voor het vermenigvuldigen:

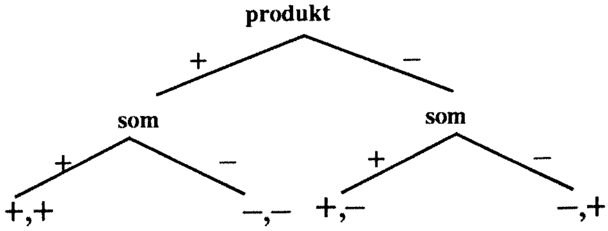


fig. 8

Ook hier zijn vragen in meetkundige of andere contexten te bedenken (van een rechthoekig land weet ik de omtrek en de oppervlakte, ...).
Terug naar het voorbeeld: som = 100, produkt = 1824. De trial-and-error-methode is leerzaam en gezond, en moet (alsjeblieft!) niet te gauw worden overheerst door eentje die recht op het doel afgaat.
Laat ik nu eens een wat minder uitgekiend produkt nemen: 1850.
$24 \times 76 = 1824$, $25 \times 75 = 1875$, de oplossing zit er tussenin. $24{,}5 \times 75{,}5 = 1849{,}75$, dat zit al aardig in de buurt. Enzovoort.
Langzaam maar zeker zal er behoefte ontstaan aan een meer directe weg. Misschien herinneren we ons het bewijs van de maximumstelling.
100 is te verdelen in de helft plus of min iets, zeg $50 + k$ en $50 - k$. Het produkt wordt dan $2500 - k^2$ en dat moet gelijk zijn aan 1850. Kortom: $k^2 = 650$.
Mijn rekenmachine geeft voor de gezochte getallen: 75,495098 en 24,504902. Even controleren, ja hoor, in het venster komt 1850.
De tweede fase lijkt voltooid. Het probleem: 'som ($= S$) en produkt ($= P$) zijn bekend, ra ra wat zijn de oorspronkelijke getallen?' kan in alle gevallen worden opgelost. In alle gevallen?
Nou ja, P mag niet meer zijn dan $\frac{S}{2} \times \frac{S}{2}$, ofwel $S^2 - 4P \geq 0$. (Herkent u de discriminant?) Dit criterium is in fase 1 immers ontdekt (en als het goed is, herontdekt in fase 2).

Derde fase: het ontbinden van de drieterm $x^2 + px + q$. Het begin van dit artikel wijst de weg, maar we kunnen nu meer dan de onderwijstraditie wil ... Neem bijvoorbeeld $x^2 + 100x + 1850$. Het algoritme van fase 2 leidt tot de ontbinding: $(x + 75{,}495098)(x + 24{,}504902)$. Dat is toch wel even slikken. Mag dat van de algebraïcus? Toch maar liever: $(x + 50 + \sqrt{650})(x + 50 - \sqrt{650})$?

Vierde fase: het oplossen van tweede-graadsvergelijkingen. Fluitje van een cent na het ontbinden in factoren, niet waar? Kijk bijvoorbeeld naar: $x^2 + 6x + 4 = 0$.
Eerst ontbinden. 6 splitsen in $3 + k$ en $3 - k$. Produkt is $9 - k^2$. Moet 4 zijn. Dus $k^2 = 5$. Dus $k = \sqrt{5} = 2{,}236$ ....
De vergelijking wordt nu: $(x + 3 + \sqrt{5})(x + 3 - \sqrt{5}) = 0$ en de oplossingen zijn dus $-3 - \sqrt{5}$ en $-3 + \sqrt{5}$.
Het werkt. Kan bijna uit het hoofd. Geen *abc*-formule of kwadraatafsplitsen. Gek eigenlijk dat dit niet de standaardmethode is. Misschien is er wel een plekje op de wereld, waar men niet anders kent ...
Ik ben nu wat hard van stapel gelopen en geheel voorbijgegaan aan het verband tussen de ontbinding in (lineaire) factoren en het oplossen van de vergelijking. In de onderwijspraktijk is dit vaak een schoolvoorbeeld van intimidatie-didactiek. De regel: 'produkt = 0, dan een van de factoren = 0' wordt in de boekjes meestal met veel bravoure geponeerd. Maar wie kent niet de leerling die het probleem $x(x + 6) = 135$ zó meent te moeten oplossen: $x = 135$ of $x + 6 = 135$?

Om het eufemistisch te zeggen: de standaardmethode van het eerst uitwerken, daarna op nul herleiden, daarna weer ontbinden, daarna het toepassen van de regel van het nul zijn, is minder 'natuurlijk' dan men denkt.
Mijn ervaring (van vroeger, dat wel) is, dat je onbedorven leerlingen gerust $x(x + 6) = 135$ kunt voorleggen. Met de uitdaging om een oplossing door *proberen* te vinden, uiteraard. Het aloude trial-and-error levert ongetwijfeld iets op. Iets geraffineerder is het om naar de mogelijke ontbindingen van 135 te kijken, lukt het om de ene factor 6 meer dan de andere te krijgen? Je vindt zo $x = 9$, maar waar blijft die andere oplossing? Spiegeling op de getallenlijn leert dat x ook -15 mag zijn.

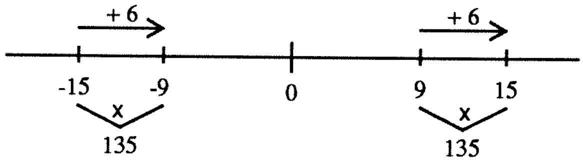


fig. 9

Nu ik toch die getallenlijn erbij heb gehaald, het probleem:

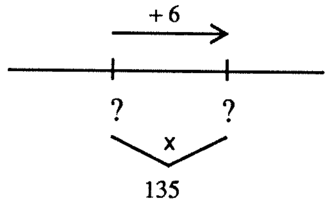


fig. 10

laat ook een slimme strategie toe (hint: noem het gemiddelde van de twee factoren m, ...).
Ik wil hier in dit artikel niet verder op ingaan. Wat ik wil benadrukken is dat de 'nulregel' voorafgegaan moet worden door het opdoen van ruime ervaring met een probeer-aanpak van sommetjes als $(x + 2)(x - 7) = 36$. Een opgave als $(x + 2)(x - 7) = 0$ kan dan als bijzonder (en comfortabel!) te voorschijn komen!

Terugblik

Ten gerieve van de wiskunde B-programma's (havo en vwo) en het vwo A-programma is veelterm-algebra onvermijdelijk. Onvermijdelijk, is dat niet een beetje te negatief?
Wat ik hier geschetst heb als mogelijke leerstoflijn is de uitwerking van een spontaan ideetje. Gevaarlijk dus. Hoe gemakkelijk laat je je niet meeslepen door een inval en hoe teleurstellend kan de onderwijspraktijk zijn? Toch kan ik het gevoel niet bedwingen dat dit idee veelbelovend is. Veelbelovend, omdat het stoelt op twee zeer concrete probleemstellingen:
- *Som vast; gevraagd: maximaal produkt.*
- *Som en produkt bekend; gevraagd: de getallen.*

Dit zijn probleemstellingen waarvan ik overtuigd ben, dat er voor de leerling van alles zelf aan te ontdekken

valt. Ze laten een natuurlijke aanpak toe en wat belangrijk is, er dienen zich verschillende sporen aan die elk hun eigen wiskundig-didactische waarde hebben. Kortom, er is voldoende ruimte voor een didactiek gebaseerd op reconstructie (in plaats van reproduktie), de terminologie ontleen ik aan [4].
Het 'vanuit-het-midden-denken' moet natuurlijk op goede wijze worden gestimuleerd, want het gevaar van het forceren van een trucje loert om de hoek.
Overigens is deze methode zeer oud, ze komt in feite heel dicht bij de methode die de Babyloniërs gebruikten om vierkantsvergelijkingen te kraken. En ook Diophantos schijnt zich ervan te hebben bediend.
Nadenkend over een mogelijke oogst, schiet me van alles te binnen:
- symmetrie-eigenschap(pen) van de parabool in het bijzonder en andere grafieken in het algemeen laten zich op een vertrouwde manier vertalen in algebraische uitdrukkingen;
- bekende (ingeklede) optimaliseringsproblemen (altijd spannend!) laten zich elementair (dus zonder differentiaalrekening) oplossen; daarbij is het duale van ons eerste principe ook vaak handig (ik bedoel: produkt is vast, som is minimaal bij 'eerlijke' verdeling van het produkt!);
- ouderwetse (maar wat mij betreft springlevende) zaken als rekenkundig en meetkundig gemiddelde zijn binnen handbereik;
- uitbreiding naar drie (of meer) variabelen van het optimaliseringsprincipe vraagt weinig fantasie (of juist toch als je naar een meetkundige voorstelling zoekt!); terzijde: met de heel knappe leerling kan zelfs de derde-graadsvergelijking worden verkend.

Om nog even de kracht van het 'eerlijk-verdeel-principe' te illustreren, los ik het bekende doosjesvraagstuk op.

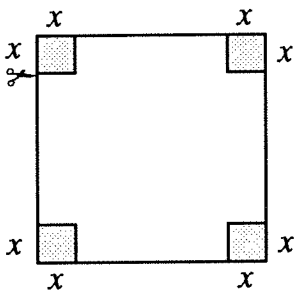


fig. 11

U weet wel: uit een vierkant vel karton (zeg van 20 bij 20) worden vierkante hoekjes (zijde x) geknipt, zodat er een doosje gevouwen kan worden. Gevraagd: voor welke x is de inhoud het grootst?

Oplossing
Het gaat om het maximaliseren van het produkt $x(20-2x)(20-2x)$, ofwel $4x(10-x)(10-x)$. De som van de factoren is helaas niet constant, maar daar valt wat aan te doen. Bekijk $2x(10-x)(10-x)$ en het is duidelijk dat de som van de factoren nu gelijk is aan 20. Eerlijke verdeling leidt tot $x = 3\frac{1}{3}$ en dit is de optimale x, ook voor het doosje!

Ik kon de verleiding niet weerstaan en ben toch weer even doorgestoten naar de bovenbouw. Al die jaren Hewet en Hawex gaan je tenslotte niet in de koude kleren zitten. Maar waar het me om ging was een algoritme voor het oplossen van de vierkantsvergelijking. Een algoritme dat in elk stadium door zeer veel leerlingen kan worden doorzien. En wie durft dat te zeggen van de *abc*-formule annex discriminant? Diep in mijn hart heb ik altijd gedacht dat de Babylonische aanpak de meest eenvoudige was, alleen ik had steeds een andere vorm voor ogen die me net even te getruct leek. Van de hier geschetste opzet geloof ik dat niet. De grotere nadruk op ontbindbaarheid van veeltermen doet denken aan stoffige zaken uit oude stelkunde-boeken, factorstelling en dergelijke. Maar komen er, een enkele keer, onder het stof geen mooie dingen te voorschijn?

Literatuur

[1] Sawyer, W.W.: *Aanschouwelijk Algebra*, Het Spectrum, Utrecht/Antwerpen, 1969.
[2] Schippers, K.: *Een leeuwerik boven een weiland*, Querido, Amsterdam, 1980.
[3] Waerden, B.L. van der: *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*, Springer Verlag, Berlijn-Heidelberg, 1983.
[4] Treffers, A., E. de Moor en E. Feijs: *Vijf fundamentele leerprincipes van de reconstructiedidactiek*, Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool, Zwijsen, Tilburg, 1989.
[5] Kindt, M.: *Microscopie van de parabool*, Nieuwe Wiskrant, jrg. 1, nr. 3, 1982.