STEMkey

Teaching standard STEM topics with a key competence approach

STEMkey Module O2

Functies

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Deze module voor het hoger onderwijs is gebaseerd op het werk binnen het project "Teaching standard STEM topics with a key competence approach (STEMkey)". Coördinatie: Prof. Dr. Katja Maaß, International Centre for STEM Education (ICSE) aan University of Education Freiburg, Germany. Partners: Charles University, Constantine the Philosopher University, Haceteppe University, Institute of Education of the University of Lisbon, Norwegian University of Science and Technology, University of Innsbruck, University of Maribor, University of Nicosia, Faculty of Science of the University of Zagreb, Utrecht University, Vilnius University..

Het project STEMkey is medegefinancierd door het Erasmus+ programma van de Europese Unie onder subsidienummer 2O2O-I-DEO1-KA203.005671. Noch de Europese Unie/Europese Commissie, noch de Duitse Academische Uitwisselingsdienst DAAD zijn verantwoordelijk voor de inhoud of aansprakelijk voor enig verlies of schade voortvloeiend uit het gebruik van deze bronnen.

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

INHOUD

Samenvatting **3**
Introductie op het onderwerp **4**
Sleutelcompetenties **5**
Interdisciplinaire benadering **5**
Leerdoelen en leeropbrengst **6**
Modulestructuur **7**
Deel 0. Introductie – Lesgeven over functies 8
Deel 1A. Functionele afhankelijkheid ontdekken 10
Deel 1B. Functies als wiskundige modellen in verschillende contexten 13
Deel 2A. Verschillende representaties van functies 17
Deel 2B. Grafieken vanuit een breder standpunt 21
Deel 3. Kwadratische functies in het echte leven 24
Materialen en bronnen **28**
Evaluatie **28**
Referenties **30**

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Samenvatting

Deze module richt zich op het wiskundige onderwerp functies. Functies zijn een fundamenteel concept in de wiskunde en ze zijn nodig voor het mathematiseren van veel soorten problemen vanaf de eerste jaren in het onderwijs. Natuurkundige wetten worden bijvoorbeeld gemodelleerd door functies, evenals bepaald gedrag van biologische systemen. Ze kunnen worden gebruikt "*om verschijnselen te begrijpen, ontwikkelingen te voorspellen of processen te optimaliseren*" (Drijvers, et al., 2019). In het wiskundeonderwijs worden functies echter meestal maar met een klein aantal praktijkvoorbeelden (interdisciplinair of transdisciplinair) behandeld en blijven de geïntroduceerde concepten uit verschillende vakken vaak geïsoleerd en niet verbonden met wiskunde. In deze module willen we daarom het onderwijs in dit onderwerp ondersteunen in het kader van een sleutelcompetentiebenadering door het concept te extraheren uit verschillende contexten die voorkomen in levensechte situaties en in standaardonderwerpen in andere schoolvakken. Het doel van de module is ook om een discussie op gang te brengen met wiskundedocenten over het onderwijs- en leerpotentieel van deze rijke situaties.

We vertrekken van open realistische situaties die leerlingen uitnodigen om ze wiskundig te modelleren. We nemen de beschrijving van wiskundig modelleren over als "*toegepast wiskundig probleem oplossen*" (Blum, 1993), waarbij het "*vooral gaat om het verbinden van wiskunde en de wereld om ons heen, het toepassen van wiskunde en het (her)uitvinden van wiskunde om problemen op te lossen*". Daarom is het "*een onmisbaar element in betekenisvol wiskundeonderwijs*" (Drijvers et al., 2019). In deze module zal de aanpak van onderzoekend leren gebruikt worden (Dorier & Maass, 2014, Bruder & Prescott 2013). Op metaniveau zullen we ook bespreken hoe we met open taken kunnen werken en hoe we klassikale activiteiten kunnen 'orkestreren' die de constructie van kennis, het onderzoeken van strategieën en presentatievaardigheden van leerlingen ondersteunen. Open taken ondersteunen de actieve betrokkenheid van alle leerlingen en zijn geschikt voor een diverse populatie. Hierbij ligt het gebruik van digitale hulpmiddelen, zoals Geogebra, Mathematica, spreadsheets enz., voor de hand.

Concreet bestaat de module uit activiteiten die zijn verdeeld over drie delen. In het eerste deel richten we ons op het proces van mathematiseren, wiskundig modelleren en het herkennen van functies in het echte leven. Het functie-concept wordt opgebouwd via verschillende niet-standaard activiteiten en voorbeelden. We geloven dat deze aanpak leerkrachten in staat kan stellen om hun leerlingen te ondersteunen bij het opbouwen van fundamentele kennis. Het tweede deel behandelt omzettingen tussen verschillende representaties van functies. Wiskundig gezien kan een functionele afhankelijkheid op veel manieren worden weergegeven, met behulp van afbeeldingen (grafieken), tekst, tabellen of symbolen/formules (Bloch, 2003). Het begrijpen van elke weergave en het omzettingsproces is een van de fundamentele vaardigheden in het wiskundeonderwijs. Het derde deel bevat meer uitgewerkte voorbeelden van toepassingen. In deze voorbeelden bieden we een aanpak om het begrip van functies te verdiepen in elementaire, interessante en toegankelijke problemen.

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Introductie op het onderwerp

Wiskunde bestudeert ruimte en vormen, het gebruik van getallen en symbolen en abstract redeneren. De efficiëntie van het gebruik van wiskundige taal in natuurwetenschappen, economie en in aspecten van het sociale leven is opmerkelijk. Door het proces van wiskundig modelleren vertaalt men het werkelijke probleem in een wiskundig model, om vervolgens het resultaat van wiskundige methoden te interpreteren als een precieze oplossing die zinvol is in de begincontext. Dit aspect van wiskunde, hoe fascinerend het ook is, blijft vaak verborgen voor studenten.

Het onderwerp functies is een van de meest fundamentele onderwerpen in de wiskunde. In de onder- en bovenbouw van het voortgezet onderwijs in veel landen wordt het geleidelijk ontwikkeld, met verschillende accenten afhankelijk van het curriculum, het onderwijstype, de interesses van leerlingen en culturele/onderwijskundige tradities. Meestal begint men met de introductie van lineaire functies en het verband met verhoudingen (recht evenredigheid). In sommige onderwijssystemen duurt het jaren voordat leerlingen in aanraking komen met andere typen functies of de algemene definitie van een functie zien. Dit kan verschillende hardnekkige misvattingen veroorzaken, bijvoorbeeld de overtuiging dat "alle functies lineair zijn". Tegelijkertijd zien we curricula en lesmaterialen waarin het gebruik van verschillende representaties van functies niet expliciet wordt behandeld en waarin de contextproblemen niet realistisch of motiverend genoeg zijn voor de leerlingen.

Met deze module proberen we deze problemen aan te pakken door het begrip functie op een meer holistische manier te benaderen. We hebben voorbeelden, taken en activiteiten gekozen die de huidige manier van lesgeven van docenten uitdagen, maar ook ondersteuning bieden bij het implementeren van een meer diverse kijk op het concept functies. Het doel van de module is om een ingewikkelder 'web' van activiteiten te bieden waardoor leerlingen functies op een meer omvattende manier begrijpen. We richten ons op praktische activiteiten die toekomstige docenten in staat stellen zich bewust te worden van de ontwikkelingsstadia van het begrip functie en dieper in te gaan op de belangrijke aspecten die vaak niet in schoolboeken worden gepresenteerd of niet voldoende worden omgezet en uitgewerkt om op de juiste manier in de dagelijkse onderwijspraktijk te worden gesitueerd.

Sleutelcompetenties

De belangrijkste focus van deze module is de ontwikkeling van de wiskundige sleutelcompetentie, door de EU gedefinieerd als:

> *Wiskundige competentie is het vermogen om wiskundig denken te ontwikkelen en toe te passen om een reeks problemen in alledaagse situaties op te lossen. Voortbouwend op een gedegen beheersing van gecijferdheid, ligt de nadruk op proces en activiteit, evenals op kennis. Wiskundige competentie omvat, in verschillende mate, het vermogen en de bereidheid om wiskundige denkwijzen (logisch en ruimtelijk denken) en presentaties (formules, modellen, constructies, grafieken en diagrammen) te gebruiken.*

De module houdt ook verband met andere sleutelcompetenties zoals kritisch denken en natuurwetenschappelijke en digitale competenties. Alle onderwerpen in deze module dragen bij aan de wiskundige competentie door activiteiten te benoemen die gebruikt kunnen worden om de competentie te ontwikkelen en activiteiten om de competentie in de klas te onderwijzen.

Interdisciplinaire benadering

In deze module gebruiken we de volgende onderwijsbenaderingen:

- onderzoekend leren,
- gebruik van levensechte contexten/situaties,
- interdisciplinaire verbindingen tussen de bèta-vakken,
- rekening houden met de behoeften van meisjes en de diversiteit van leerlingen
- gebruik van digitale hulpmiddelen om inzicht te verdiepen.

Het onderwerp functies is nauw verweven met wiskundig modelleren en het toepassen van wiskunde op problemen in de echte wereld. In de activiteiten bespreken we problemen uit verschillende contexten: natuurkunde, biologie, economie enz. Sommige problemen zijn gesitueerd in het dagelijks leven en de activiteiten vragen zowel van de leerlingen als van de leerkrachten om kritisch na te denken. Door deze voorbeelden ontwikkelen de leerlingen de houding dat wiskunde relevant en toepasbaar is, en de leerkrachten krijgen de mogelijkheid om rijkere onderwijs- en leersituaties te ontwikkelen die wiskunde verbinden met natuurwetenschappen en andere gebieden. De taken vragen leerlingen creatief te zijn en zichzelf in de rol te plaatsen van een actieve burger die verantwoordelijkheid neemt voor zijn oordelen, argumenten creëert en zijn redenering verdedigt.

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Leerdoelen en leeropbrengst

Inzicht in de geleidelijke ontwikkeling van het begrip functie en het ontstaan en gebruik ervan in contextuele, natuurwetenschappelijke en alledaagse situaties ondersteunt leerkrachten bij het ontwikkelen van wiskundige basisprocessen: wiskundig modelleren, mathematiseren en omgaan met verschillende wiskundige representaties.

Toekomstige leerkrachten zullen de vaardigheden hebben ontwikkeld om voort te bouwen op de vaardigheden van leerlingen op het gebied van modelleren, om activiteiten te orkestreren en te organiseren die de ontwikkeling van het concept van functies in zijn veelzijdige aard ondersteunen en om positieve houdingen ten opzichte van het nut van wiskundige modellen (voornamelijk functies) te verbeteren. Hun studenten zullen in staat zijn om zich bezig te houden met de wiskundige vaardigheden en deze toe te passen op contextuele situaties op zowel conceptueel als praktisch niveau met behulp van technologie bij het leren en oplossen van problemen.

Doelen van de module:

Onderwerpen/doelen	Kennis	Vaardigheden	Attitude
Zien van afhankelijkheden en modelleren met functies in de echte wereld	Kennis van de modelleercyclus; concept van een functie (functionele afhankelijkheid, functioneel verband	Beschouwen van variabelen, bepalen van parameters, opstellen van hypothesen, interpreteren van conclusies	Kritische waardering en nieuwsgierigheid naar de bruikbaarheid van wiskunde als hulpmiddel om de wereld te beschrijven, te begrijpen en te voorspellen
Ontwikkelen en gebruiken van het begrip functie in verschillende representaties	Functioneel verband en afhankelijkheid in verschillende representaties: tekst, tabellen, formules en grafieken	Omzetten van representaties in elkaar, kiezen van een passende representatie voor het oplossen van een probleem	Bereidheid en vertrouwen om functies te gebruiken en waardering voor de veelomvattende aard van wiskundige concepten
Herkennen en gebruiken van (eigenschappen van verschillende) elementaire (basis)functies	Rijen als discrete functies; lineaire, kwadratische en exponentiele functies	Herkennen van overeenkomsten en verschillen in de eigenschappen van elementaire (basis)functies	Vertrouwen in het ontdekken en gebruiken van eigenschappen van verschillende functies

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Modulestructuur

De module bestaat uit een inleidende activiteit en drie hoofdonderdelen. De totale duur van de module is 525 minuten, maar sommige activiteiten kunnen worden weggelaten. De activiteiten zijn bedoeld om een discussie op gang te brengen tussen (aankomende) wiskundedocenten die zich voorbereiden op het lesgeven in de onderbouw van het voortgezet onderwijs. De activiteiten kunnen worden aangepast voor jongere of oudere leerlingen.

De structuur van de module is als volgt:

Deel 0. Inleiding – Lesgeven over functies - 25 minuten

Deel 1. Het concept van een functie opbouwen vanuit de context - 150 minuten

Deel 2. Omzettingen tussen verschillende representaties van functies - 215 minuten

Deel 3. Het toepassen van (kwadratische) functies in het echte leven - 135 minuten

Deel 0: Introductie	**Deel 1: Functies opbouwen vanuit de context**	**Deel 2: Verschillende representaties van functies**	**Deel 3: Functies toepassen in het echte leven**
Doel 0.1: Problemen aankaarten	Doel 1.1: Het concept van een functie begrijpen en het onderscheiden van het concept van een verband	Doel 2.1: Vocabulaire opbouwen om over verschillende aspecten van functies te praten	Doel 3.1: Verschillende elementaire functies en hun karakteristieke eigenschappen herkennen
Doel 0.2: Wiskundige competentie op het gebied van functies bevorderen	Doel 1.2: Onderdelen van de modelleercyclus begrijpen	Doel 2.2: Verschillende representaties in elkaar omzetten	Doel 3.2: Algebraïsche uitdrukkingen schrijven die functionele modellen beschrijven
Doel 0.3: Motiveren tot verandering van de lesaanpak	Doel 1.3: Herkennen van functionele afhankelijkheden in echte contexten	Doel 2.3: Vlotheid in het aflezen en maken van grafieken van functies	Doel 3.3: Functies gebruiken om voorspelingen te doen

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Deel 0. Introductie – Lesgeven over functies

Het raamwerk voor sleutelcompetenties noemt wiskundige geletterdheid als een van de acht sleutelcompetenties en definieert het als "het vermogen om grafieken, diagrammen, formules en andere presentaties te gebruiken". Het doel van deze activiteiten is om vragen op te werpen en de verandering te motiveren in het lesgeven over het functiebegrip vanuit een perspectief dat modelleeractiviteiten bevordert. Toekomstige docenten kunnen zien dat deze benadering meer gericht is op interdisciplinaire toepassingen, maar verder benadrukken we dat ook de ontwikkeling van het begrip functie diepgaander zal worden behandeld met de nadruk op begrip.

Hele klas	Duur: 25 minuten

Kennis
- het begrip lineair model

Vaardigheden
- conclusies trekken binnen een context op basis van wiskundige gegevens

Attitude
- herkennen van de waarde van wiskunde (functies) als hulpmiddel voor het oplossen van problemen in de praktijk

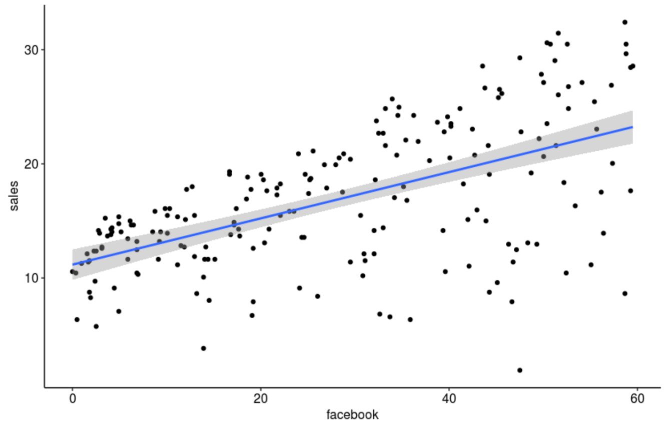
Activiteit. Hoe geef jij les over functies?

In deze korte activiteit worden toekomstige leerkrachten uitgenodigd om hun ervaringen met het leren over functies te bespreken. De discussie kan op gang worden gebracht door vragen zoals:
Hoe werd het begrip functies geïntroduceerd in jouw onderwijs? Kun je de geleidelijke ontwikkeling van het concept die je hebt ervaren beschrijven? Was de benadering van je leerkrachten gericht op de formele en algebraïsche aspecten van functies of op toepassingen van functies? In welke context gebruiken we functies en heb je enkele favoriete voorbeelden? Kun je enkele uitdagingen noemen bij het leren en onderwijzen van functies? Hoe zou je functies in de toekomst willen onderwijzen?

De discussie kan worden uitgebreid met het volgende probleem:

Stel je voor dat je wilt nagaan hoe de omzet van je bedrijf afhangt van de investering die je doet in reclame. Wat is het effect van Facebook-reclame op de omzet van het bedrijf, gezien de effecten van YouTube en advertenties in kranten?

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union



Het startpunt van de discussie ligt bij jet bedenken van wat voor soort gegevens we kunnen verkrijgen en hoe deze gegevens kunnen worden gebruikt om voorspellingen te doen. We kunnen denken aan het tekenen van een scatterplot (puntenwolk) waarin **paren van datapunten** een verband laten zien tussen verkoopcijfers en advertentie-investeringen op een bepaald platform (bijvoorbeeld Facebook). De cruciale conclusie is dat men een bepaald patroon, een correlatie of een trend in de gegevens kan waarnemen. Dit leidt ons naar de notie van een **lineair model** als een hulpmiddel dat kan worden gebruikt om **voorspellingen te doen voor de toekomst**.

Voor sommige studenten zal lineaire regressie uit de wiskunde bekend zijn, maar ze beschouwen het misschien alleen als een "black box" voor het verkrijgen van de formule (parameters van het lineaire model) en leggen misschien niet uit hoe de methode werkt of wat het betekent dat het verkregen lineaire model optimaal is. Ons voorstel is om het belang te benadrukken van de bespreking van verschillende mogelijke manieren waarop men een lineair model kan beschouwen (bv. door een lijn te trekken door twee willekeurige punten of door een lijn zo te trekken dat de helft van de punten aan één kant van de lijn ligt enz. Het voorstel is om studenten te betrekken bij creatief denken en het formuleren van hun eigen argumenten, voordat ze verder gaan met de technische en conceptueel veeleisende methode van de kleinste kwadraten. Sterker nog, in programma's waar studenten de methode niet onderwezen krijgen, kan het zeer motiverend zijn om deze discussie te voeren over de betekenis van de optimale lijn, die dan door software berekend kan worden.

De opdracht is gekozen in de context die relevant zou kunnen zijn voor leerlingen en het is de bedoeling dat het alleen dient als motivatie voor de initiële discussie over het concept van een model. Een docent die de context interessant vindt, zou kunnen opmerken dat de gegevens die in de bron van de taak worden gegeven niet geschikt zijn voor de toepassing van lineaire regressie, omdat de variantie (verstrooiing) van de gegevens van links naar rechts toeneemt. Niettemin kunnen dergelijke voorbeelden ook aanleiding geven tot de discussie in hoeverre de methode toepasbaar is op de werkplek en in hoeverre het een noodzaak is om vereenvoudigde modellen te overwegen bij het leren van nieuwe wiskundige concepten en hulpmiddelen. Verdere ontwikkeling van de methode wordt besproken in de laatste activiteit van de module als een toepassing van kwadratische functies.

Bron: https://towardsdatascience.com/predicting-the-impact-of-social-media-advertising-on-sales-with-linear-regression-b31e04f15982

Deel 1A. Functionele afhankelijkheid ontdekken

Wiskunde is alomtegenwoordig in het dagelijks leven, maar dit kan onopgemerkt blijven. Wiskunde uit zich in patronen en structuren, maar ook in bepaalde relaties tussen waarneembare verschijnselen. Deze verschillende patronen en relaties kunnen worden beschreven met een enkel wiskundig concept - een functie. Formeel gezien is een functie een speciaal soort relatie, dat wil zeggen een regel die aan elk element van een verzameling (het domein van een functie) een uniek element van de tweede verzameling (het bereik) koppelt, maar dit formele concept kan op veel manieren worden begrepen en weergegeven en het kost tijd voor leerlingen om de vaardigheid van het herkennen van functies en het gebruik ervan om problemen op te lossen onder de knie te krijgen.

In de literatuur zijn er een paar prominente modellen die de ontwikkeling van functioneel denken beschrijven, d.w.z. het mentale proces dat betrokken is bij het begrijpen en gebruiken van het concept van een functie. De APOS-theorie van E. Dubinsky (1984) promoot de vier ontwikkelingsstadia: Actie, Proces, Object, Schema. De vier stadia worden op vergelijkbare wijze gebruikt door Pittalis et al. (2020) die een functie beschrijven als:

(1) een input-output toewijzing,

(2) een proces van co-variatie van de afhankelijke en onafhankelijke variabele,

(3) een correspondentierelatie,

(4) een wiskundig object dat kan worden gemanipuleerd, vergeleken met andere objecten of beschouwd als onderdeel van een complexere wiskundige structuur.

Voordat ze de formele definitie hierboven gebruiken, komen leerlingen dus eerst algebraïsche uitdrukkingen tegen (zoals $2x$-1) die kunnen worden gezien als ‘machientjes’ (een actie), waarin een letter kan worden vervangen door een getal (de invoer) om een ander getal (de uitvoer) te verkrijgen. Gaandeweg ontwikkelen leerlingen het inzicht dat de invoer kan variëren binnen een bepaalde reeks waarden (bijvoorbeeld gehele getallen van 1 tot 100 of de reële getallen) en breidt het beeld van een machine zich uit tot dat van een co-variatie tussen variabelen.

In dit stadium beschrijven de leerlingen co-variationele processen in woorden als bepaalde afhankelijkheden tussen twee grootheden (bijvoorbeeld evenredigheid) en ontwikkelen ze geleidelijk andere manieren om dit te representeren zoals tabellen, formules en grafieken. Ze zijn zich misschien nog niet bewust van het belang van de keuze van het domein en het bereik en denken alleen aan functies in termen van hun ‘regel’ (bijv. y=5x+2 of f(x)=2^x). Dit niveau van begrip van het concept van functies is nog niet formeel, maar het is zeker rijk genoeg om functies te kunnen gebruiken voor het oplossen van problemen (modelleren) en voor de betrokkenheid van leerlingen. Aan de andere kant is dit stadium in sommige landen wat overhaast en is het een gemiste kans om wiskundige concepten te ontwikkelen die verweven zijn met de ontwikkeling van competenties om deze concepten toe te passen. De hele module richt zich op het opvullen van deze leemte door de nadruk te leggen op het elementaire gebruik van functies in een context. Daarom zijn bijna alle activiteiten gebaseerd op situaties (of problemen) die geschikt zijn om in de onderbouw van het voortgezet onderwijs te behandelen, maar die ook in een hogere fase aangepast of (opnieuw) gebruikt

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

zouden kunnen worden. In de bovenbouw zou men verder kunnen gaan met het ontwikkelen van een meer formele definitie van functie (bijv. het benadrukken van de rol van het domein en het bijectieve karakter en het vinden van de inverse) en zelfs naar meer uitgewerkt gebruik van functies in de analyse, waarbij de functie wordt beschouwd als een object dat kan worden gemanipuleerd (bijv. geïntegreerd, vermenigvuldigd met een andere functie of waarvan de grafiek kan worden getransformeerd). Dit deel van de module bestaat uit drie activiteiten die de overgang tussen de eerste drie fasen overbruggen, terwijl de andere delen van de module activiteiten bieden die diepere vragen over het concept functie en voorbeelden van toepassingen/modelleren uitlokken.

We eindigen dit korte overzicht met te wijzen op enkele beperkingen. D. Tall (1999) reflecteert bijvoorbeeld op de APOS-theorie en plaatst vraagtekens bij het idee dat actie voor object gaat en beroept zich daarbij op neurologische bevindingen over de cognitieve ontwikkeling (zoals het bestaan van gespecialiseerde hersendelen voor visuele waarneming). Gemotiveerd door dergelijke overwegingen benadrukken we dat de ontwikkeling van functioneel denken niet voor alle leerlingen hetzelfde zal zijn en niet noodzakelijkerwijs de bovenstaande volgorde van stadia volgt. Ook zullen sommige leerlingen sneller verschillende verbindingen ontwikkelen en zullen verschillende leerlingen verschillende representaties begrijpelijker vinden. In het digitale tijdperk kunnen we zeker te maken krijgen met nieuwe leerroutes van leerlingen die meer gericht zijn op visualisaties (bijvoorbeeld het gebruik van grafieken in plaats van het lezen van tekst) en het gebruik van technologie als hulpmiddel bij het oplossen van problemen of als bron van nieuwe kennis.

Individueel of in tweetallen	Duur: 3 x 20 minuten

Kennis
- schrijven van een functionele regel die een rij beschrijft
- definitie(s) van een functie
- onderscheid maken tussen het begrip functie en het begrip relatie
- verschillende stadia van het ontwikkelen van functioneel denken formuleren

Vaardigheden
- herkennen van een functionele afhankelijkheid in levensechte situaties
- inductief redeneren

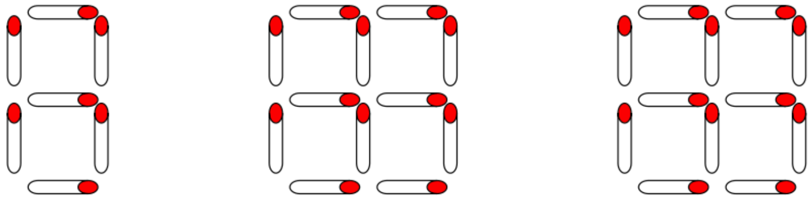
Attitude
- erkennen dat functies alomtegenwoordig zijn in het dagelijks leven
- de geleidelijke ontwikkeling van wiskundige kennis waarderen

Activiteit. Een patroon ontdekken

Bij deze activiteit krijgen de deelnemers een (korte, eindige) rij van vormen bestaande uit een bepaald aantal elementen (bijvoorbeeld lucifers). De vormen worden groter en vormen een patroon dat ontdekt moet worden. De taak is om het aantal lucifers in de n-de vorm te vinden (voor een concreet gegeven of algemeen getal n) en het antwoord ($5n+2$) kan op veel verschillende manieren worden bereikt. Met toekomstige leerkrachten wordt besproken hoe verschillende rijen vormen kunnen worden gevormd en met welke doelen. Wat is de rol van inductief redeneren en voor welke leeftijd is de taak geschikt? Wat zijn de verschillende **strategieën** en **patronen** die men kan gebruiken om deze taak op te lossen? Er kan verder worden gediscussieerd over de verschillende didactische mogelijkheden van de taak wanneer die wordt aangeboden aan basisschoolleerlingen (**algebraïsche uitdrukkingen**

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

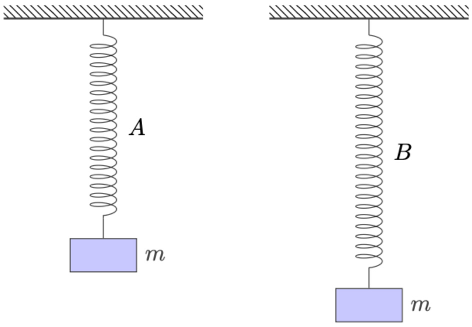
introduceren) of aan middelbare scholieren (het verschil tussen een **discreet en continu model/functie**). Dergelijke discussies kunnen ook bijdragen aan de bewustwording van de overgang van een input-outputperspectief naar denken in termen van co-variatie.



Activiteit. Hangende veren

Deze korte activiteit is bedoeld om de discussie op gang te brengen over het gebruik van symbolen in het wiskundeonderwijs en de mate waarin leerlingen meer vertrouwen op procedurele benaderingen dan op contextueel en conceptueel begrip. De volgende opgave staat centraal.

Twee hangende veren A en B hebben lengtes die kunnen worden berekend met de formules y=20+0,4x en y=14+0,6x, respectievelijk, waarbij y de lengte van de veer is (in centimeters) en x het gewicht (in grammen) dat aan de veer hangt. Gebruik de gegeven vergelijkingen om uit te leggen hoe het kan dat de twee veren even lang zijn als er een bepaald gelijk gewicht aan beide veren hangt. Teken een plaatje/diagram/schema om dit te laten zien.



Om de opgave op te lossen, moet een leerling de betekenis van de **vergelijking** begrijpen als een co-variationele afhankelijkheid. De vergelijkingen kunnen afzonderlijk worden beschouwd als regels die laten zien hoe de lengte verandert als je het gewicht dat aan een bepaalde veer hangt verandert. De coëfficiënten in de vergelijking worden geïnterpreteerd als de beginlengte van de veer (zonder gewicht) en de veerconstante. De oplossing is gebaseerd op de interpretatie dat zowel de waarde van *x* als de waarde *y* dan gelijk moeten zijn, wat alleen mogelijk is voor één specifiek paar waarden dat wordt verkregen als oplossing van het stelsel van twee lineaire vergelijkingen. De taak biedt de mogelijkheid om het taalgebruik en typische misvattingen van leerlingen te bespreken (bv. het verschil tussen een vergelijking en een functie). Omdat de taak zich in een fysieke context afspeelt, kan hij worden beschouwd vanuit het perspectief van modelleren, maar het wiskundige model is al gegeven, dus het blijft zaak om de aandacht te richten op **interpretatie en het begrijpen van het gegeven model.**

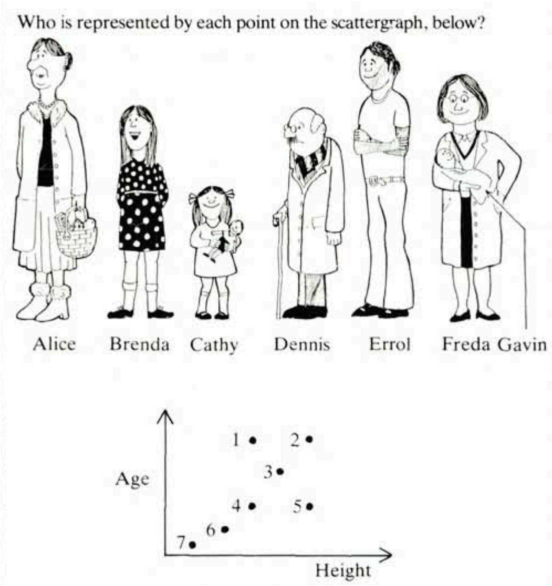
Activiteit. Relaties vs. functies

Functies zijn speciale relaties en functionele afhankelijkheid is slechts een speciaal soort afhankelijkheid. De studenten worden uitgenodigd om verschillende voorbeelden te bedenken van **discrete en continue relaties**, waarvan sommige functioneel zijn en andere niet. Bijvoorbeeld de relaties tussen moeders en kinderen, de afstand van een persoon die

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

in een bepaalde richting loopt vanaf een gegeven punt, getallen en deelbaarheid, tijdsafhankelijke beweging enz.

Met betrekking tot de gegeven taak wordt de studenten gevraagd om te discussiëren over de verschillende strategieën waarmee de leerlingen zouden kunnen redeneren, de mogelijke misvattingen die voortkomen uit het feit dat de lengte op de horizontale as wordt weergegeven en de verschillende manieren om functies te beschrijven.
De discussie wordt afgesloten met de verduidelijking van wat de formele definitie van een functie is (als een speciale relatie) en wat de minder formele benaderingen zijn die geschikt zijn voor leerlingen. Merk op dat de activiteit ook kan worden gekoppeld aan de discussie over lineaire regressie die in de eerste en de laatste activiteit van de module wordt gepresenteerd.



Bron: De taal van functies en grafieken, Shell Centre for Mathematical Education Publications, 1985.

Activiteit. Functies in het dagelijkse leven ontdekken
In deze module verkennen we het begrip functie, een van de belangrijkste hulpmiddelen in de wiskunde om een co-variationele situatie te beschrijven. Deze korte activiteit is een oefening in **divergent denken en creativiteit**. De deelnemers moeten veel functies bedenken die een fenomeen of relatie beschrijven die ze op dat moment om zich heen zien. De discussie moet deze creatieve stroom van voorbeelden sturen in de richting van het nadenken over de doelen van de les en de doelen die een docent wil bereiken met de leerlingen. De belangrijkste vraag is dus: Waarom denk je dat dit een waardevol voorbeeld is en tot welke resultaten draagt het bij?

Deel 1B. Functies als wiskundige modellen in verschillende contexten

Mathematiseren, zoals gebruikt in OECD/PISA, verwijst naar de organisatie van de waargenomen werkelijkheid door het gebruik van wiskundige ideeën en concepten. Het is de organiserende activiteit waarbij verworven kennis en vaardigheden worden gebruikt om onbekende regelmatigheden, relaties en structuren te ontdekken (Treffers en Goffree, 1985). Dit proces wordt ook wel **horizontaal mathematiseren** genoemd. Het vereist activiteiten zoals:

- het identificeren van de specifieke wiskunde in een algemene context;
- schematiseren
- een probleem formuleren en visualiseren
- relaties en regelmatigheden ontdekken

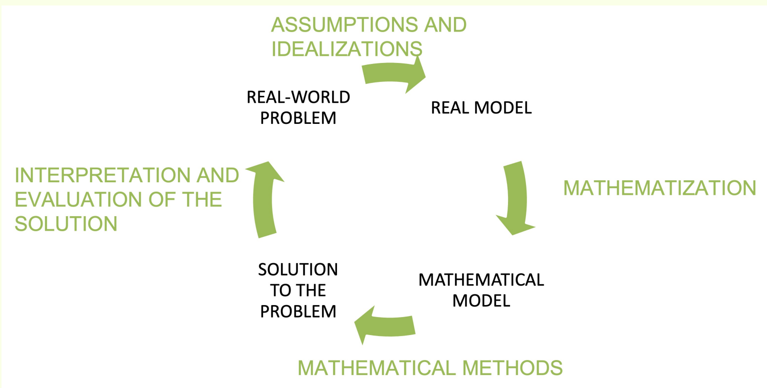
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

- overeenkomsten herkennen tussen verschillende problemen.

Zodra het probleem is omgezet in een wiskundig probleem, kan het worden opgelost met wiskundige hulpmiddelen. Dat wil zeggen dat wiskundige hulpmiddelen kunnen worden toegepast om het wiskundig gemodelleerde 'echte' probleem te manipuleren en te verfijnen. Dit proces wordt **verticaal mathematiseren** genoemd en is herkenbaar in de volgende activiteiten:

- een relatie weergeven door middel van een formule;
- regelmatigheden bewijzen
- modellen verfijnen en aanpassen
- modellen combineren en integreren
- generaliseren.

Het oplossen van problemen door wiskundig modelleren wordt in de literatuur op verschillende manieren getheoretiseerd. Terwijl sommige benaderingen modelleren beschouwen als een activiteit met een open einde, beschouwen andere het vinden van een (gedeeltelijke) oplossing voor het probleem als het einde van het proces. Verder zijn er iteratieve benaderingen die het verbeteren van het proces beschouwen op een spiraalvormige of cyclische manier. Wij gebruiken een benadering van de **modelleercyclus** die uit vier fasen bestaat (Kaiser 1995, Blum 1996). Beginnend met een echte probleemsituatie moeten we eerst bepaalde vereenvoudigingen en aannames maken. Op die manier komen we tot een reëel model van de situatie. Vervolgens bouwen we via het proces van mathematisering een **wiskundig model** gebaseerd op vergelijkingen, variabelen en functies. De derde fase bestaat uit het oplossen van het probleem met behulp van wiskundige hulpmiddelen. Ten slotte wordt de oplossing geïnterpreteerd in de begincontext en evalueren we de correctheid en bruikbaarheid van de verkregen oplossing.



Tweetallen en een klassikale discussie	Duur: 2 x 45 minuten

Kennis

- verschillende stadia/fasen van de modelleercyclus herkennen
- onderscheid maken tussen een werkelijke situatie, het werkelijke model en het wiskundige model ervan

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

- onderscheid maken tussen horizontaal en verticaal mathematiseren

Vaardigheden

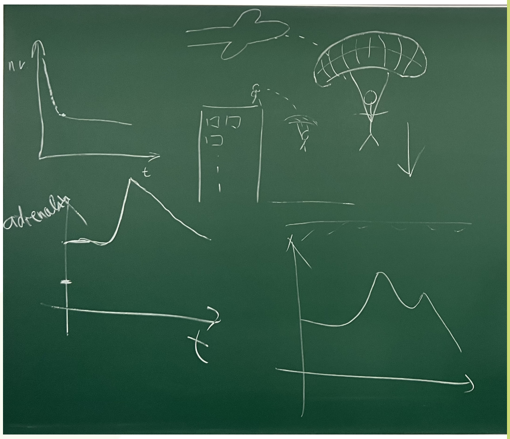
- Bespreken en herkennen van verschillende aspecten/parameters van een werkelijke situatie.

Attitude

- functies accepteren als hulpmiddel voor het oplossen van problemen in de echte wereld

Activiteit. Parachutesprong

Beschouw een situatie waarin iemand met een parachute uit een vliegend vliegtuig springt. Deze situatie kan gebruikt worden om rijke discussies te organiseren op een drievoudige manier. In dit deel van de module gebruiken we de situatie om het eerste deel van de modelleercyclus ofwel het horizontaal mathematiseren te bespreken. De toekomstige leerkrachten maken kennis met het idee van een echt model en worden gevraagd naar de mogelijke **doelen, aannames en parameters** die belangrijk zijn om te in ogenschouw te nemen wanneer ze de sprong proberen te modelleren. Op een ander moment kan de situatie gebruikt worden om uitgebreider mathematiseren te oefenen, zoals het beschrijven van de situatie met functies en grafieken (kwalitatief) en uiteindelijk om de theorie van lineaire gewone differentiaalvergelijkingen te ontwikkelen en toe te passen om de baan van de springer te beschrijven, maar voor nu beschouwen we alleen de waarde van de situatie om natuurkundige aspecten te bespreken.



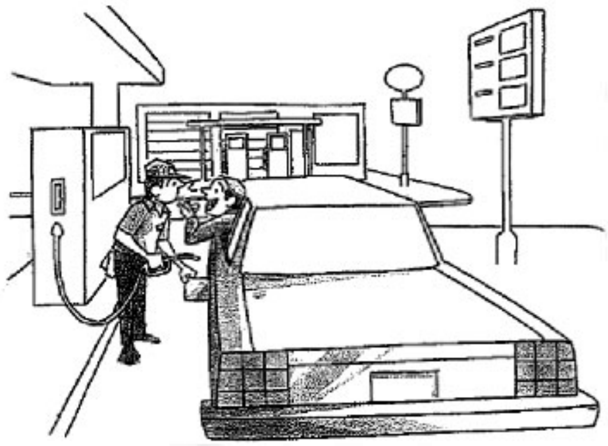
De activiteit benadrukt de noodzaak om het probleem in fasen te bespreken, beginnend bij alledaagse ervaringen en beschrijvingen in woorden, vervolgens naar het doen van fysische/natuurkundige aannames en uiteindelijk eindigend in het wiskundige model. We bespreken met de studenten wat voor relevante gegevens de leerlingen zouden kunnen betrekken. Zouden ze nadenken over verschillende redenen voor de sprong? Welke grootheid zullen ze modelleren (hoogte, snelheid of iets anders)? Zullen ze de situatie **kritisch** bekijken, bijvoorbeeld door veiligheidsmaatregelen te betrekken en op zoek te gaan naar echte gegevens? Hoe kan de aandacht worden verlegd naar de natuurkundige en wiskundige aspecten? Zullen de leerlingen beseffen hoe cruciaal het is om de grootte van de parachute en de luchtweerstand als belangrijkste componenten van het model te beschouwen, samen met de zwaartekracht?

Als eerste stap naar de beschrijving van de situatie kunnen leerlingen eenvoudige tekeningen maken. Dit proces van vereenvoudiging is een belangrijk onderdeel van het ontwikkelen van modelleer-vaardigheden en kan worden gevolgd door een discussie over de verschillen tussen het springen uit een vliegtuig (waarbij de sprong dus begint met

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

enige horizontale snelheid) en het springen uit een gebouw (bijna als een vrije val van een lagere hoogte).
Het tekenen van plaatjes biedt ook de mogelijkheid om het verschil te bespreken tussen een schets van de baan van de springer en een grafiek die een functionele afhankelijkheid beschrijft in een abstract coördinatenstelsel. Als de situatie eenmaal besproken is met studenten die goed overweg kunnen met grafieken van functies, kan de discussie op een **creatievere** manier gevoerd worden door de deelnemers te vragen om na te denken over verschillende grafische voorstellingen van verschijnselen die verband houden met deze situatie. Bijvoorbeeld vragen naar de afhankelijkheid van het adrenalineniveau in het bloed van een springer tijdens de sprong. Als er genoeg tijd is, kunnen toekomstige leerkrachten ook **wiskundige beschrijvingen** (snelheid-tijd grafiek, differentiaalvergelijking enz.) van de val op internet onderzoeken en proberen er iets zinnigs over te zeggen.

Activiteit. Welke benzinepomp?
Een andere modelleersituatie om te overwegen is het kopen van benzine bij twee verschillende benzinestations. Het ene tankstation heeft hogere prijzen, maar het ligt op de weg van huis naar werk. Het tweede ligt niet op die weg en vereist een omweg, maar heeft goedkopere benzine. Met welke parameters zou je rekening houden? Kun je een functie schrijven die berekent hoe efficiënt het is om benzine te kopen met een omweg? Kun je de situatie concreter maken en een plaatje tekenen?



"Just enough to get me across the street to the cheaper station."
(Parade, 12 Nov 2005)

De activiteit kan worden voortgezet door een concrete versie van de taak te bespreken en meer aandacht te besteden aan de wiskundige aspecten van het model (verschillende vergelijkingen opstellen en oplossen, een probleem herformuleren als een optimalisatieprobleem van een bepaalde functie). Welke **fasen van de modelleercyclus** kunnen worden weggelaten (omdat ze al gegeven zijn) als we de volgende opgave behandelen?

> *Frank koopt meestal benzine bij de pomp op zijn route tussen huis en werk voor de prijs van 2,00 EUR per liter. Bij een benzinepomp op 5 kilometer van zijn route wordt benzine verkocht voor 1,80 EUR per liter. Loont het om van zijn gebruikelijke route af te wijken om goedkopere benzine te kopen?*

Deze verzameling activiteiten biedt een belangrijk schema voor wiskundig modelleren, wat precies het gebruik van wiskunde is bij het oplossen van interdisciplinaire problemen. Elke fase omvat kritisch denken. In de eerste fasen moeten we nadenken over de kwaliteit van onze gegevens en waarschijnlijk meerdere bronnen overwegen om het probleem beter te begrijpen. In de latere fasen moeten we de oplossing evalueren en nadenken over de kwaliteit van het oplossingsproces. De voorbeelden tonen de relevantie van

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

wiskunde voor natuurkunde en economie aan, en dus zijn het echte voorbeelden van interdisciplinariteit.

Deel 2A. Verschillende representaties van functies

Een functionele afhankelijkheid kan worden beschreven in woorden (tekst), met behulp van symbolen (formule), tabellen (paren) of grafieken. We zeggen dat we verschillende representaties gebruiken (Duval, 1995). In het eerste deel van de module hebben we het proces van identificatie en herkenning van functies in levensechte contexten besproken. We hebben al enkele van de representaties gebruikt, maar de nadruk lag op het opbouwen van het concept van een functie ongeacht de representatie, wat betekent dat van leerlingen wordt verwacht dat ze hun eigen concepties van de functies hebben, of dat ze het concept alleen begrijpen in een concrete situationele context op basis van de geziene voorbeelden. In dit deel maken we elk van de representaties explicieter en door middel van een reeks activiteiten bouwen we aan de vaardigheid om omzettingen tussen deze representaties te maken. We beginnen met alledaagse voorbeelden in de vorm van een beschrijving (tekst) die vervolgens worden weergegeven in andere representaties en gaan dan langzaam naar verschillende andere omzettingen (bijv. tussen grafieken en formules).

Individueell or in tweetallen	Duur: 4 x 20 minuten

Kennis

- functies voorstellen met symbolen (in formules)
- tekenen van grafieken op basis van tabellen, regels en beschrijvingen
- lezen en interpreteren van grafieken van functies in woorden
- vergelijkingen oplossen en de oplossing interpreteren in de context

Vaardigheden

- *o*mzettingen tussen verschillende representaties van functies begrijpen
- geschikte representaties kiezen op basis van het type probleem
- de efficiëntie van benaderingen op basis van verschillende representaties evalueren.

Attitude

- de veelomvattende aard van functies (en wiskunde in het algemeen) waarderen
- de overtuiging opbouwen dat het zinvol is om wiskunde te gebruiken

Activiteit. Grafieken schetsen op basis van beschrijvingen

Begrijpend lezen en wiskundige relaties in woorden uitdrukken zijn zeer onderschatte vaardigheden, die meer aandacht zouden moeten krijgen. Aan de studenten wordt gevraagd hoe zij leerlingen zouden aanmoedigen om zich bezig te houden met nauwkeuriger beschrijven van wiskundige uitdrukkingen. Deze activiteit is gebaseerd op de ervaringen met een typische taak waarbij **(omgekeerd) evenredig** moet worden gedacht.

De taak zelf vraagt de leerlingen om hun oplossing te vergelijken met die van medeleerlingen en om er kritisch over te zijn. Er wordt verwacht dat de leerlingen zich zullen ‘vastzetten’ in de opvatting dat een grafiek van een functie een rechte lijn moet zijn, d.w.z. dat ze zullen

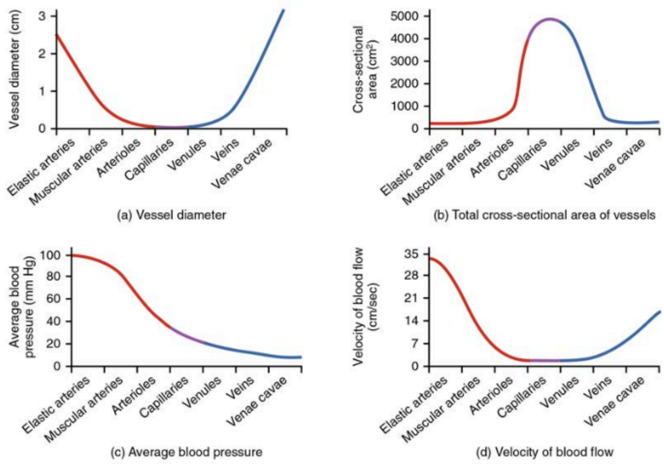
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

aandringen op 'lineair denken'. Door dit obstakel te overwinnen, gaan de leerlingen zich realiseren dat er veel nuttige functies zijn die niet lineair zijn.

De leerlingen wordt gevraagd onderstaand assenstelsel te gebruiken om de uitspraak: "*Hoe meer mensen ons helpen, hoe sneller we klaar zijn met het* ***plukken van de aardbeien***" te **illustreren. De grafieken moeten worden vergeleken en besproken met medeleerlingen.**

Activiteit. Grafieken interpreteren

Grafieken van functies kunnen heel informatief zijn, maar je moet wel weten hoe je ze moet lezen. De opdracht (afkomstig uit een anatomiecursus) is om informatie af te lezen uit een grafiek waarin de ‘waarden’ op de x-as vaten in een menselijk lichaam zijn.



Grafieken moeten **in woorden** worden uitgelegd en we onderscheiden drie niveaus van complexiteit. Op het eerste niveau leest de leerling een enkele grafiek, bijvoorbeeld "*de haarvaten hebben de kleinste diameter*". Op het tweede niveau trekt de leerling conclusies aan de hand van twee grafieken, bijvoorbeeld "*de haarvaten hebben de kleinste diameter, maar er zijn er zoveel dat ze het grootste deel van de doorsnede in beslag nemen*". Op het derde niveau bespreekt de leerling de grafieken vanuit een meer formeel wiskundig perspectief, bijv. *de grafieken zijn continu, hoewel er zeven soorten vaten zijn die als labels op de horizontale as staan*. Dit leidt tot de interpretatie dat de volgorde waarin de vaattypes zijn geschreven een continu spectrum vormen, een feit dat gemakkelijker kan worden uitgelegd door een expert in anatomie. Het voorbeeld kan dus opnieuw de discussie over discrete versus continue modellen op gang brengen en het belang van interdisciplinariteit aantonen.

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Bron van de illustratie: *Blood Flow, Blood Pressure and Resistance*, Anatomy and Physiology II, course on Lumen Learning. Link: https://courses.lumenlearning.com/suny-ap2/chapter/blood-flow-blood-pressure-and-resistance-no-content/

Activiteit. Groei vergelijken

In deze activiteit kunnen de toekomstige leerkrachten zich ervan bewust worden dat de rekenkundige en meetkundige rijen discrete analogieën zijn van de lineaire respectievelijk de exponentiële functie. In het algemeen zullen veel mensen zich bewust zijn van het idee dat "de exponentiële functie sneller groeit dan de lineaire", maar deze activiteit stelt deze bewering ter discussie en vraagt de deelnemers om nauwkeuriger af te bakenen wanneer dit geldt. We gebruiken de volgende opdracht:

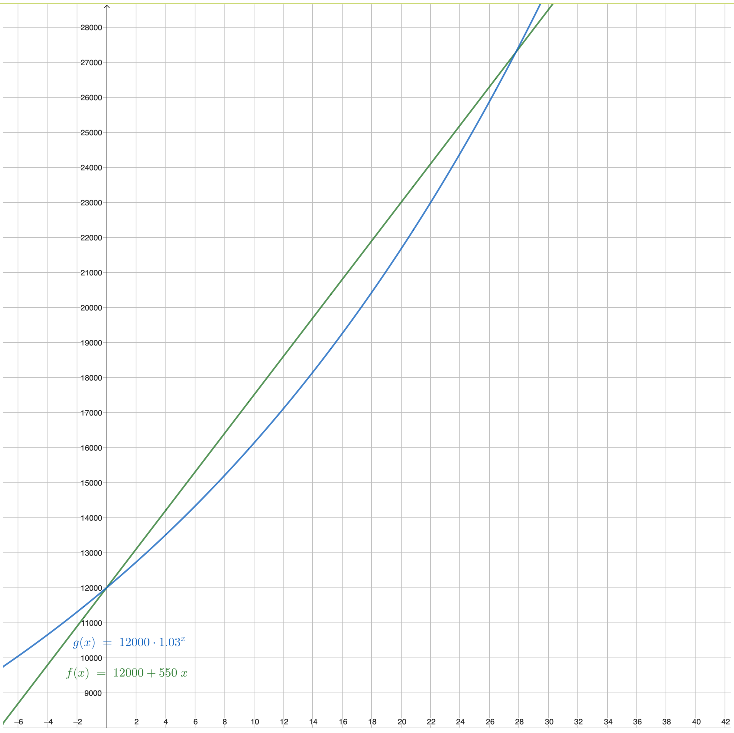
In 2018 had Andy 12000 EUR. Elk jaar voegde hij 550 EUR toe op zijn rekening. In 2018 had Barbara 12000 EUR. Elk jaar ontving ze 3% rente op het totaal (omdat ze het geld op de rekening liet staan). Bereken het bedrag dat ze ieder elk jaar tot en met 2030 zullen hebben, maak een algemene formule voor het bedrag dat ze na x jaar zullen hebben en vergelijk de groei.

Al op het niveau van het ontdekken van patronen, kunnen leerlingen de volgende tabel maken en misschien meer waarden of de algemene regel vinden die de afhankelijkheid van de hoeveelheid geld van tijd beschrijft.

x	Andy (12000+550x)	Barbara ($12000 \cdot 1.03^x$)
5	14 750	13 911
10	17 500	16 127
15	20 250	18 696
20	23 000	21 673
25	25 750	25 125
30	28 500	29 127

De gegevens kunnen worden gepresenteerd in een puntenwolk, maar er kan ook een algemene regel algebraïsch worden geschreven (als formule) en de grafiek van de reële functie kan worden getekend. Uit de grafieken kan geconcludeerd worden dat de exponentiële groei op korte termijn langzamer zal gaan, maar na een bepaald moment in de tijd juist veel sneller dan de lineaire groei (in dit geval vanaf ongeveer 27 jaar).

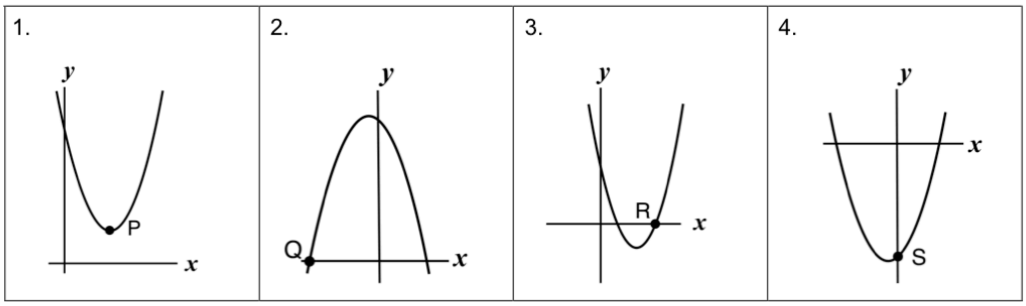
Tenslotte ondersteunt de context de ontwikkeling van begrip van exponentiële functies met niet-gehele exponenten. Het is bijvoorbeeld voor de hand liggend om een vraag te stellen als: *Welke rente op maandbasis levert een jaarlijkse rente van 3% op*? Een eenvoudigere vraag is om een halfjaarlijkse rente te overwegen. Als het vereiste rentepercentage r % is, dan hebben we $(1+r)$^2=1,03, waaruit we direct de waarde van r kunnen bepalen.



Activiteit. De grafiek en de formule met elkaar verbinden

De grafiek van een functie kan getekend worden door een paar punten te bepalen en deze punten dan te verbinden, maar de grafiek kan ook getekend worden door de basis-grafiek te transformeren. Om je voor te bereiden op het tekenen van grafieken op verschillende manieren, moet je verschillende algebraïsche manieren kennen om functies te schrijven. In de opdracht moeten de formules worden verbonden met grafieken en kan de meer ambitieuze uitleg over transformaties van grafieken worden gebruikt, bijvoorbeeld redeneren over de grafieken op basis van de nulpunten of toppen (extreme waarden).

A. $y = x^2 - 6x + 8$	B. $y = (x-6)(x+8)$	C. $y = (x-6)^2 + 8$	D. $y = -(x+8)(x-6)$



De activiteiten zijn gerelateerd aan andere sleutelcompetenties zoals geletterdheid. Drie ervan worden gegeven in contexten die vertrouwd zijn voor de leerlingen, zodat ze ook hun eigen ervaring kunnen activeren bij het redeneren over de oplossingen. De laatste taak wordt volledig in de wiskundige context gegeven, maar er kan aangedrongen worden op argumentatie door de leerlingen om kritisch denken en rechtvaardiging van de gemaakte keuzes te bevorderen.

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Deel 2B. Grafieken vanuit een breder standpunt

Grafieken zijn zeer informatief omdat ze een visuele voorstelling geven van de hele functie in één keer (objectperspectief) en veel verschillende aspecten van een echte situatie kunnen omvatten. Omdat deze aspecten op elkaar kunnen lijken en dicht bij elkaar kunnen liggen, zijn er veel misvattingen mogelijk bij de interpretatie ervan. In dit deel gaan we in op een misvatting die optreedt bij opgaven waarbij de context meetkundig wordt beschreven (bijv. in de vorm van een baan) en het nodig is om deze te beschrijven met een grafiek van een beweging op basis van tijd. De belangrijkste misvatting die moet worden aangepakt is dat de meetkundige (vorm)eigenschappen van de context moeten worden weergegeven in de meetkundige (vorm)eigenschappen van de grafiek.
Een inleiding tot de mechanica (natuurkunde) behandelt meestal de situaties waarin de beweging kan worden beschreven door de tijdsafhankelijkheid van de positie, snelheid of versnelling. De grafieken die deze afhankelijkheden weergeven zijn heel verschillend en vragen beantwoorden over het ene aspect op basis van het andere is een hele uitdaging. Wiskundig gezien kunnen complexere situaties natuurlijk beschreven worden in termen van afgeleiden en integralen, maar de voorbeelden die we presenteren kunnen ook zonder deze termen uitgelegd worden en zijn daarom zeer geschikt voor leerlingen die nog geen analyse hebben gehad. Deze voorbeelden laten zien dat het mogelijk is om de fundamentele ideeën achter concepten uit de wiskunde (zoals veranderingssnelheid of accumulatie) op jongere leeftijd te bespreken en de intuïtie van leerlingen op te bouwen.

DDU (Denken - individueel, Delen - in tweetallen, Uitwisselen – in de hele groep)	Duur: 3 x 45 minuten

Kennis

- grafieken tekenen op basis van een meetkundige beschrijving van een werkelijke situatie
- onderscheid maken tussen een meetkundige beschrijving van een werkelijke situatie en een abstracte grafische voorstelling ervan
- de snelheid van verandering aflezen uit de grafiek

Vaardigheden

- problemen oplossen op basis van het tekenen en interpreteren van een grafiek van een functie
- een complex probleem opdelen in kleinere delen
- de oplossing van een probleem in eigen woorden beschrijven

Attitude

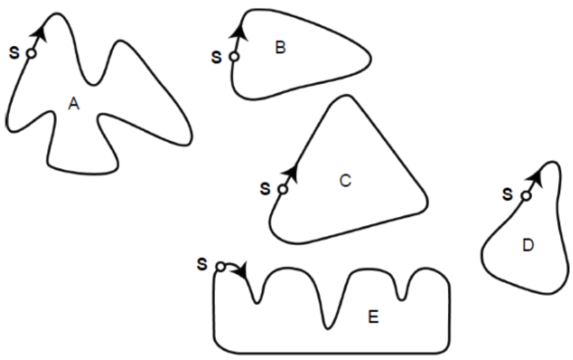
- de eigen ervaring relateren aan de oplossing van een wiskundige opgave
- beslissingen nemen op basis van informatie en wiskundige argumentatie

Activiteit. Racen

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

De activiteit is gebaseerd op een beroemde taak uit het PISA-onderzoek die heeft geleid tot verschillende onderzoekspapers en is verschenen in verschillende leermiddelen. In de taak wordt de omzetting gemaakt **van de meetkundige beschrijving van (de vorm) van een racebaan naar een grafische beschrijving van de snelheid van een raceauto** die over deze baan rijdt (voor veel verschillende banen), of omgekeerd om de baan te vinden die past bij een gegeven snelheid-afstand grafiek.

De opgave is uitdagend omdat beide beschrijvingen worden gegeven door krommen, maar hun meetkundige eigenschappen (zoals de kromming) subtiel met elkaar verbonden zijn. De oplosser van de opgave moet nadenken over het perspectief van de coureur en de basisregels van het besturen van een raceauto. Een typische fout van leerlingen is om te zeggen dat de grafiek gekromd zal zijn als de baan gekromd is en omgekeerd. Een betere redenering is om te zeggen dat de snelheid constant blijft als de kromming van de baan niet verandert (bv. rond de cirkel rijdt de auto met de maximale snelheid die de kromming toelaat) en dat de auto sneller rijdt als de kromming afneemt en dat de auto langzamer rijdt als de kromming toeneemt. Leerkrachten of leerkrachten in opleiding moeten nadenken over de moeilijkheden van de leerlingen en racebanen ontwerpen die de onjuiste redenering van de leerlingen ter discussie stellen.



S: Starting point

Bron van de illustraties: Strohmaier et al. *Different complex word problems require different combinations of cognitive skills,* Educational Studies in Mathematics 109(3), Springer, 2022. English version of the item Racing Car (M159Q04). Adapted from PISA Released Items – Mathematics (p. 33), by OECD (2006). Copyright 2006 by the OECD. Used under CC BY-NC-SA 3.0 IGO

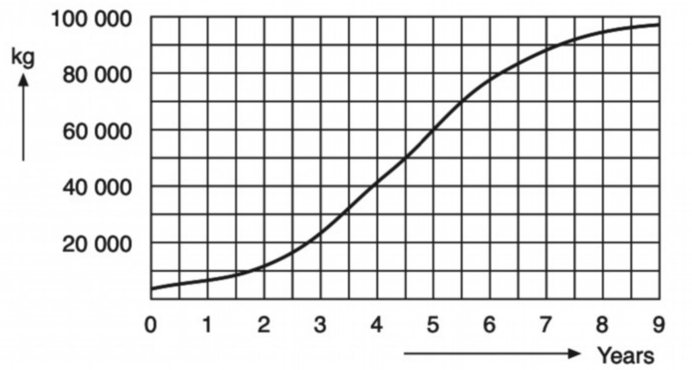
Activiteit. De groei van een populatie vissen

De volgende opdracht is een ander voorbeeld van de hoogste vaardigheidsklasse (wiskundig denken, generalisatie en inzicht) die wordt getest op de PISA-toets over wiskundige geletterdheid. Leerlingen moeten de situatie mathematiseren en conclusies trekken met behulp van een grafiek van een functie. Dit gaat verder dan de typische vaardigheid van het lezen van punten uit een grafiek. We gebruiken dit voorbeeld om te laten zien dat functies de beste manier zijn om de groei van een populatie in de tijd te beschrijven. Om de opdracht op te lossen, moet men zich realiseren dat het optimaal is om vis te vangen in de periode van 1 jaar waarin **de grafiek het steils**t is, omdat op die manier de opbrengst maximaal zal

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

zijn (of formeler, men kan zeggen dat dit het interval is waarin de functie de grootste helling heeft). Dit gebeurt tussen jaar 4 en 5.

Some fish were introduced to a waterway. The graph shows a model of the growth in the combined weight of fish in the waterway.



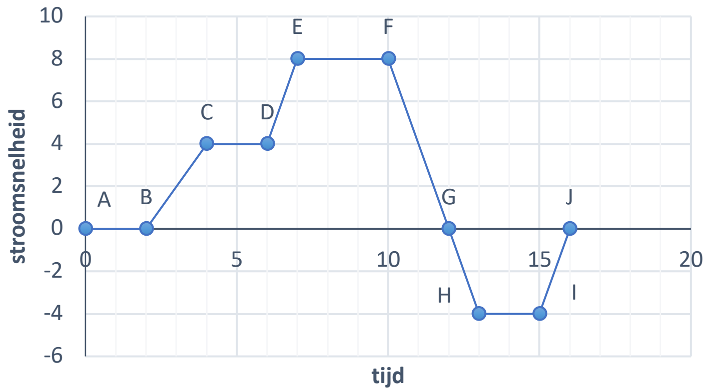
Suppose a fisherman plans to wait a number of years and then start catching fish from the waterway. How many years should the fisherman wait if he or she wishes to maximise the number of fish he or she can catch annually from that year on? Provide an argument to support your answer.

Bron van de illustratie: Measuring Student Knowledge and Skills - A New Framework for Assessment, OECD Programme for International Student Asseeessment, 1999. Link: https://www.oecd.org/education/school/programmeforinternationalstudentassessmentpisa/33693997.pdf

Activiteit. De stroomsnelheid

We bespreken een belangrijke situatie waarin de leerlingen abstract moeten redeneren. De figuur toont de snelheid waarmee het water in of uit een bak stroomt op verschillende tijdstippen.

Om te bepalen wanneer het watervolume in de bak toeneemt of afneemt (het snelst), moet je het verband leggen tussen de stroomsnelheid in de tijd en het totale volume. Dit kan eenvoudig worden uitgelegd in termen van de oppervlakte onder de grafiek (of meer in het algemeen de integraal van een functie).



Het totale volume van het water op een bepaald moment wordt gegeven door **de oppervlakte tussen de grafiek en de x-as** tot dat moment. De leerkrachten moeten aandacht besteden aan het feit dat als de grafiek zich onder de x-as bevindt, de oppervlakte wordt afgetrokken (d.w.z. als negatief moet worden beschouwd). Dit wordt verklaard door het feit dat een negatieve snelheid betekent dat het water uit de bak stroomt. De opdracht is geïnspireerd op een Zweeds wiskundeboek voor middelbare scholen.

Deze verzameling activiteiten biedt complexere begrippen en toepassingen van functies. Het vereist het activeren van kritisch denken, betekenis geven aan de situatie en het resultaat, en het begrijpen van de waarde van de functionele benadering. Alle opdrachten in deze verzameling zijn beschreven in een context van buiten de wiskunde. Ze laten de toepassing van wiskunde zien en de noodzaak om te redeneren op basis van begrip van de context bij het oplossen van zulke opgaven. We vinden het ook belangrijk dat de leerkrachten zien dat complex wiskundig redeneren mogelijk is zonder dat (d.w.z. voordat) wiskundige concepten (uit de analyse) formeel worden geïntroduceerd.

Deel 3. Kwadratische functies in het echte leven

Kwadratische functies worden vaak geïntroduceerd met formules en hun toepassingen worden pas daarna getoond, maar er zijn veel 'natuurlijke' contexten waarin deze functies voorkomen. In dit deel benadrukken we dat een kwadratische functie gekenmerkt wordt door de eigenschap dat de verschillen lineair zijn. Deze eigenschap wordt door studenten ontdekt in de analyse als het gaat over de afgeleide functie, maar met ons voorbeeld laten we zien dat dit a; eerder besproken kan worden en zelfs gebruikt kan worden voordat de leerlingen kwadratische functies kennen om de misvatting "alle functies zijn lineair" te doorbreken.

In de tweede opdracht behandelen we een zeer belangrijke, maar uitdagende vaardigheid, namelijk het wiskundig modelleren van reële situaties die in woorden worden beschreven. Het model is een algebraïsche uitdrukking, d.w.z. een functie die geoptimaliseerd moet worden. Voor leerlingen kan het opschrijven van formules of het gebruiken en interpreteren van formules erg moeilijk zijn en het wordt vaak gedaan zonder te begrijpen waarom de methode eigenlijk werkt.

Individueel werken en een klassikale bespreking	Duur: 3 x 45 minuten

Kennis

- kwadratische functies karakteriseren als functies waarvan de verschillen van de eerste orde lineair zijn en de verschillen van de tweede orde constant zijn
- optimaliseren (het minimum of maximum vinden) van de kwadratische functie
- het resultaat van optimalisatie gebruiken om echte problemen op te lossen
- formules afleiden op basis van de kleinste-kwadratenmethode.

Vaardigheden

- gegevens organiseren en vlot berekeningen maken
- technologie gebruiken om berekeningen en voorspellingen te maken
- oplossingen voor optimalisatieproblemen vinden en interpreteren op basis van een algebraïsche benadering.

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Attitudes

- wiskundige berekeningen gebruiken om beslissingen in verband met burgerschap te rechtvaardigen
- de kracht van voorspelbaarheid van de wetenschappelijke benadering erkennen

Activiteit. Remafstand

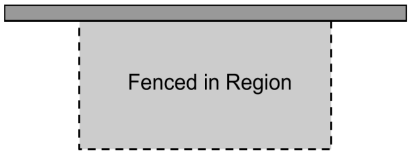
Snelheidsbeperkingen zijn een leuk onderwerp om de verantwoordelijkheid van jonge automobilisten (en toekomstige automobilisten). Daarom stellen we een opdracht voor waarbij de leerlingen de afhankelijkheid van de remweg van de snelheid moeten onderzoeken op het moment dat de auto begint te remmen. Deze afhankelijkheid is kwadratisch, wat misschien niet bij alle leerlingen bekend is. Sommige leerlingen kunnen een formule afleiden op basis van andere, meer bekende formules uit de natuurkunde, maar we hebben de opdracht zo opgezet dat dit niet nodig is en dat alle conclusies op basis wiskundig redeneren kunnen worden getrokken. De opdracht wordt gegeven in termen van ‘tweede verschillen die constant zijn’, en de leerlingen moeten ontdekken, waarschijnlijk tot hun verrassing, dat de gewenste functie kwadratisch is. Uit de kwadratische afhankelijkheid volgt dat een iets grotere snelheid een aanzienlijk langere remweg met zich meebrengt.

Bron: Braking distance scenario, Erasmus+ Project MERIA, 2019.

Activiteit. Oppervlakte van een festivalterrein

Kwadratische uitdrukkingen komen van nature voor als we het over oppervlakten hebben. Om de kwadratische functie te bestuderen, kunnen we een situatie opstellen waarin de oppervlakte van een bepaald omheind gebied varieert als we de afmetingen van het hek veranderen. Om het probleem eenvoudiger te maken kunnen we aannemen dat de vorm van het gebied rechthoekig is. Verdere variaties zijn mogelijk om het probleem interessanter te maken en om de algebraïsche benadering te benadrukken in plaats van argumentatie op basis van symmetrie. Een van die mogelijkheden is om één kant van het gebied een muur te laten zijn in plaats van een hek. De context kan ook op verschillende manieren gekozen worden, bijvoorbeeld dat het gebied een festivalterrein voorstelt of een schaapskooi. Tot slot kunnen we **verschillende strategieën van leerlingen** verwachten, van raden tot het tekenen van veel datapunten die worden geanalyseerd door middel van kwadratische regressie (met behulp van technologie) of het opstellen van een algebraïsche uitdrukking en het optimaliseren van de functie met behulp van algebra of analyse. Al deze mogelijkheden moeten besproken worden met (toekomstige) leerkrachten met als doel te herkennen hoe rijk deze opzet werkelijk is.

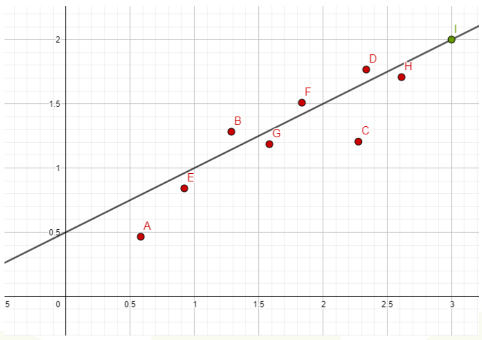
Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union



In de opdracht kiezen we een vaste totale lengte voor de omheining die gebruikt kan worden voor drie zijden van het rechthoekige festivalterrein. De activiteit benadrukt de variabiliteit van de lengte van een en de aard van de functie als een regel die uitdrukt hoe de ene waarneembare grootheid verandert afhankelijk van de andere. Het legt de basis voor **het gebruik van algebra en differentiaalrekening bij optimaliseringsproblemen**. Het formuleren van de regel $A(x)$=x(P-2x), waarbij P de omtrek van de omheining is en A(x) de oppervlakte die hoort bij de breedte x, blijkt een zeer uitdagende kwestie te zijn voor leerlingen, die vaak wordt onderschat door de docenten. De studenten worden uitgenodigd om na te denken over de problemen van de leerlingen bij het opstellen van de algebraïsche uitdrukking. Hadden we dit kunnen benaderen met een regressiestrategie? De vraag naar de interpretatie van het model omvat ook de discussie over het domein van functie A, d.w.z. over de toegestane waarden van x.

Bron: Festival site scenario, Erasmus+ Project TIME, 2022.

Activiteit: Lineaire regressie



Lineaire regressie is een bekende methode voor het vinden van een optimaal lineair model dat een gegeven discrete rij gegevens beschrijft, die een afhankelijkheid of correlatie tussen twee waarneembare grootheden weergeeft. We zien vaak dat leerlingen ingewikkelde formules krijgen, maar dat er niet genoeg aandacht wordt besteed aan een volledig begrip van de methode. Eerst en vooral moeten leerlingen beseffen hoe de dataset wordt voorgesteld en wat het betekent dat een functie een lineair model is van de dataset. Vervolgens bespreken we de betekenis van **'optimaal'**. Een lijn wordt voorgesteld door de vergelijking y=ax+b, en alle informatie wordt eigenlijk gegeven door de coëfficiënten a en b. We moeten het criterium definiëren op basis waarvan we zullen zeggen dat een paar coëfficiënten (a, b) optimaal is. Er kunnen vele criteria worden overwogen en men kan vele redenen geven waarom we het paar nemen waarvoor de uitdrukking

$$F(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2$$

minimaal is, waarbij (x_i, y_i) de punten in de gegeven data-set zijn. De redenen hiervoor zijn subtiel en hebben te maken met statistisch denken (de bovenstaande uitdrukking geeft de variantie van de gegevens rond het gemiddelde weer) en met technische voordelen (een dergelijke functie is in elk punt differentieerbaar). Het vinden van de optimale oplossing kan op een elementaire manier. Op basis van de context, of door het als vanzelfsprekend aan te nemen, nemen we aan dat het punt, waarvan de coördinaten de gemiddelde waarden zijn van de gegevens in de dataset, op de grafiek ligt, of anders gezegd: dat de som van de 'residuen' nul is. Hierdoor kunnen we het aantal variabelen met één verminderen en krijgen we een functie met één variabele. Deze functie is kwadratisch in a, en dus wordt de optimale parameter verkregen als een toepassing van de kwadratische functie.

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

In dit deel stellen we voor om twee voorbeelden te gebruiken die veel didactisch potentieel hebben, in het bijzonder voor zelfstandig onderzoek door leerlingen. Op deze manier stimuleren we een onderzoekende benadering van wiskundeonderwijs en vragen we leerlingen kritisch na te denken over situaties in de context.
De remafstand heeft natuurlijk te maken met natuurkunde, maar heeft ook een belangrijk aspect van burgerlijke verantwoordelijkheid. Het festivalterrein is een context die vertrouwd is voor leerlingen en dit ondersteunt leerlingen bij het stellen van verdere vragen en het observeren van de relevantie van wiskunde. In het derde voorbeeld keren we terug naar het probleem van voorspellen met behulp van lineaire regressie. De regressielijn wordt verkregen met behulp van de methode van de kleinste kwadraten gebaseerd op de toepassing van de kwadratische functie en heeft veel toepassingen op verschillende gebieden.

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Materialen en bronnen

Presentatie. Is het wiskunde? Modelleren met functies.
De presentatie is gebaseerd op de activiteiten Parachutesprong, Visgroei populatie en Racen. De presentatie ondersteunt de organisatie van een workshop waarin studsenten (toekomstige leerkrachten) leren over de modelleercyclus en grafische beschrijvingen van verschillende groeisituaties

Werkbladen. Functies
De werkbladen bieden ondersteuning bij verschillende activiteiten die in de module worden beschreven: Een patroon vinden, Relaties vs. functies, Parachutesprong, Welk tankstation?, Grafieken tekenen op basis van mondelinge beschrijvingen, Grafieken interpreteren, Groei vergelijken, Racen, Groei van vispopulatie, Stroomsnelheid en Lineaire regressie**.**

.
Lezen.
Voor verder lezen raden we de onderstaande lijst met referenties aan.

Evaluatie

De modelleercyclus begrijpen
Evaluatiedoel: Kennis opdoen over de modelleercyclus, de bijbehorende terminologie en de didactische competentie met betrekking tot het herkennen van geschikte taken.

Wat is wiskundig modelleren? Kun je een voorbeeld geven?
Wat zijn de stadia van de modelleercyclus? Wat gebeurt er in elke fase?
Beschouw een typische opgave uit een wiskundemethode die in een alledaagse context is gegeven. Welke delen van de modelleercyclus zijn al gegeven en welke worden overgelaten aan de oplosser van de taak?

Ervaringen vergelijken
Evaluatiedoel: Bewust worden van de verschillende onderwijs-/leerbenaderingen en de rol van opdrachten voor onderzoekend leren in de gegeven activiteiten.

In deze activiteit vergelijken de studenten (docenten of toekomstige docenten) hun eigen onderwijspraktijk (of leerpraktijk toen ze leerling waren) met de activiteiten die in de module worden beschreven. Deelnemers discussiëren in groepen van 3-4 en proberen een lijst te maken van overeenkomsten en verschillen tussen de benaderingen die beïnvloed worden door de keuze van taken en activiteiten.

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Kritische reflectie op functies

Evaluatiedoel: manieren verkennen om het kritisch denken van studenten en leerlingen te beoordelen terwijl ze een complexe taak oplossen in een reële context. Zie IO1 voor informatie over de rubric voor kritisch denken en de onderbouwing ervan.

Deze activiteit is gebaseerd op de activiteit Racen. De leelringen hebben de taak om verschillende racebanen te bestuderen en ze te verbinden met de grafiek die de afhankelijkheid van de snelheid langs de racebaan beschrijft. Hoe zou je de aanpak en redenering van de studenten (of leerlingen) bij deze taak evalueren?
Gebruik de volgende rubric.

Neutraal niveau

- De naïeve oplossing dat de grafiek gekromd is op de plaatsen waar de baan gekromd is
- Verkeerd geïnterpreteerde variabelen op de assen van de grafiek
- Geen perspectief vanuit de bestuurder van de auto
- Slordige grafieken
- Duidelijk verkeerde grafieken tekenen

Basisniveau

- Een strategie toepassen die alleen werkt voor sommige racebanen die lijken op een getoond voorbeeld
- De kromming van de grafiek expliciet koppelen aan de kromming van de racebaan
- Nette grafieken, hoewel niet altijd correct
- Beschrijving van de redenering in tekst
- Duidelijke verandering van een grafiek tijdens het oplossen
- De grafiek vergelijken en concluderen of deze wel of niet correct is

Vaardig niveau

- Minstens twee manieren om de vorm van de grafiek te verklaren
- Algemene patronen zoals constante kromming van de baan leidt tot constante snelheid
- Uitleg geven waarin praktische en psychologische aspecten van een race zijn meegenomen
- Nette en correcte grafieken
- Vertrouwen in de grafieken en de redenering erachter

Expertniveau

- Verschillende soorten racebanen en grafieken bedenken en bespreken, die niet door een bron worden gegeven
- Uitleg geven over de efficiëntie van de methode die de kromming van de baan en de grafiek direct met elkaar verbindt
- De waarde van functioneel denken onder woorden brengen
- Het verschil tussen tijdsafhankelijkheid en ruimteafhankelijkheid van de snelheid bespreken
- Bespreken van mogelijke misvattingen of valkuilen die beginners kunnen tegenkomen

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Referenties

Bloch, I. (2003). Teaching functions in a graphic milieu: What forms of knowledge enable students to conjecture and prove?. Educational Studies in Mathematics 52, 3–28. https://doi.org/10.1023/A:1023696731950

Blum, W. (1993). Mathematical modelling in mathematics education and instruction, In Breteig, T., Huntley, I., Kaiser-Messmer, G. (Eds.), *Teaching and learning mathematics in context*. Ellis Horwood Limited.

Blum, W. (1996). Anwendungsbezüge im Mathematikunterricht – Trends und Perspektiven. In Kadunz, G. et al. (Eds.), *Trends und Perspektiven. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik*. Vol. 23 (pp. 15 – 38).

Bruder, R., Prescott, A. (2013). Research evidence on the benefits of IBL. ZDM Mathematics Education 45 (pp. 811–822). https://doi.org/10.1007/s11858-013-0542-2

Dorier, JL., Maass, K. (2014). Inquiry-Based Mathematics Education. In Lerman, S. et al. (Eds.) *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer, Dordrecht, (2014). https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_176

Drijvers, P., Kodde-Buitenhuis, H. & Doorman, M. (2019). Assessing mathematical thinking as part of curriculum reform in the Netherlands. *Educ Stud Math 102*, (pp. 435–456). https://doi.org/10.1007/s10649-019-09905-7

Dubinsky, E. (1984). The cognitive effect of computer experiences on learning abstract mathematical concepts. Korkeak Atk-Uutiset 2 (pp. 41–47).

Dubinsky, E., & Harel, G. (1992). The nature of the process conception of function. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 85–106). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Kaiser-Messmer, G. (1996). Anwendungen im Mathematikunterricht. Vol. 1 – Theoretische Konzeptionen. Bad Salzdetfurth: Franzbecker

Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2020). Young students' functional thinking modes: The relation between recursive patterning, covariational thinking, and correspondence relations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 51(5), 631–674. https://doi.org/10.5951/jresematheduc-2020-0164

OECD Programme for International Student Asseessment (PISA). (1999). *Measuring Student Knowledge and Skills - A New Framework for Assessment*.

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

https://www.oecd.org/education/school/programmeforinternationalstudentassessmentpisa/33693997.pdf

Project TIME, Festival site scenario, 2022.

https://time-project.eu/en/intellectual-outputs/time-teaching-scenarios

Project MERIA, Braking distance scenario, 2019.

https://meria-project.eu/activities-results/meria-teaching-scenarios

Shell Centre for Mathematical Education Publications. (1985). *The Language of Functions and Graphs*. https://www.mathshell.com/materials.php?item=lfg&series=tss

Strohmaier, A. Reinhold, F., Hofer, S., Berkowitz, M., Vogel-Heuser, B., & Reiss, K. (2021). Different complex word problems require different combinations of cognitive skills. *Educational Studies in Mathematics 109* (3), Springer. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10079-4

Tall, D. (1999). Reflections on APOS theory in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of PME*, Haifa, Israel, 1, 111– 118.

Treffers, A., & Goffree, F. (1985). Rational analysis of realistic mathematics education – the Wiskobas program. In L. Streefland (Ed.), *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, OW&OC, Utrecht University, Utrecht, The Netherlands, Vol. II. (pp. 97–121).

Verghese, S. (2020)., Predicting the impact of social media advertising on sales with linear regression. *Medium.* https://towardsdatascience.com/predicting-the-impact-of-social-media-advertising-on-sales-with-linear-regression-b31e04f15982

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14(3), 293–305.

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(4), 356–366.

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union