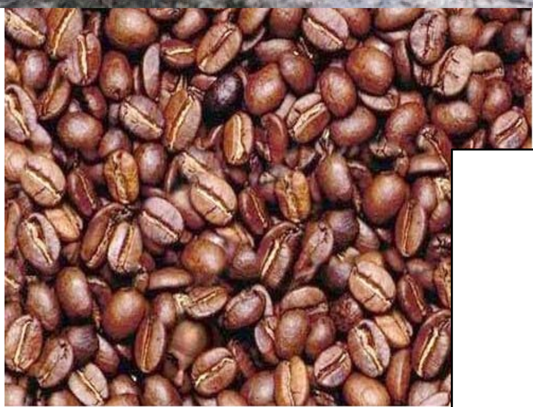
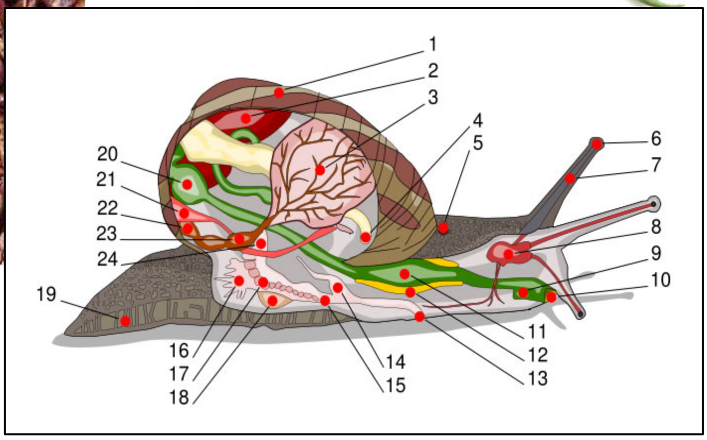
WISKUNDE B-DAG 2008

vrijdag 21 november





Het slak- en bonenvermoeden

De Wiskunde B-Dag wordt gesponsord door

Texas Instruments en getal en ruimte

Vooraf
Deze Wiskunde B-dag opgave bestaat uit twee delen.
In het eerste deel bestudeer je de beweging van een speciaal soort slakken: slakken die uit kubusvormige blokjes bestaan.
Het tweede deel is geïnspireerd op een traditioneel Afrikaans spel, dat meestal met schelpjes wordt gespeeld en onder vele namen bekend is: Kalaha, Oware, Wari of Awélé.
Omdat we toch wel wat van de traditie afwijken, spreken we in deze opgave van *bonen*.
Maar je mag gebruiken wat je wilt: munten, erwten, flessendoppen.
Bij de slak kun je ook van de kubusvormige blokjes afwijken, maar stapelbaarheid is daar wel belangrijk; rechthoekige blokjes en damschijven zijn heel geschikt.
Het geheel van de opgave gaat over hoe de slak en de verdeling van de bonen zich ontwikkelen.
Je formuleert *vermoedens* na onderzoek en bewijst die eventueel.
Vandaar de titel.

Dagindeling
Neem de ochtend voor het eerste deel en de middag voor het tweede deel; dit is alleen maar een richtlijn, je mag je tijd ook wat flexibeler verdelen.
Het slakkendeel bestaat uit heel wat opdrachten, die je waarschijnlijk niet allemaal af krijgt. Dat is niet erg: het gaat om wat je zelf gevonden hebt en hoe je daarover verslag uitbrengt.
De kennis en inspiratie die je in het eerste deel hebt opgedaan, heb je in het tweede deel, over de bonen, nodig. Maar in dat tweede deel zul je veel meer je eigen weg moeten zoeken.

Eindproduct
Je uiteindelijke verslag moet goed leesbaar zijn voor iemand die niet van te voren al weet waar de opgave over gaat. Dat betekent dat je helder moet beschrijven waar het om gaat en wat je onderzocht heb.
Het is mogelijk dat je, door proberen en redeneren, allerlei dingen ontdekt waar je zelf wel van overtuigd bent, maar waarvoor je nog geen sluitende redenering (een bewijs) hebt gevonden.
Zulke *vermoedens* kun je zeker ook in je verslag opnemen.
Het is mooi als je ook een redenering hebt die je vermoeden een stevige basis geeft. Het is natuurlijk minder mooi als je een vermoeden opneemt dat met een simpel voorbeeld al onderuit gehaald kan worden. Test daarom je vermoedens grondig!
Op enkele plaatsen staat een *redeneeropgave*. Omdat redeneren op deze Wiskunde B-Dag van belang is, moet je zeker van *deze* opdrachten de resultaten in je verslag opnemen.

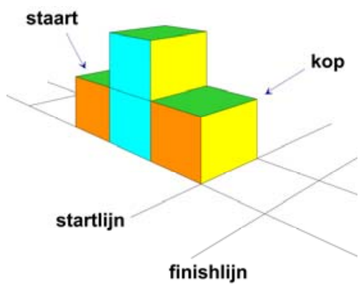
Experimenteren in Excel
Experimenteren met de slakken en bonen van deze opgave kan heel goed met de computer.
Daarvoor zijn twee Excel-bestanden beschikbaar, voor elk deel van de opgave één. In de tekst wordt aangegeven wanneer je zo'n bestand kunt gaan gebruiken.

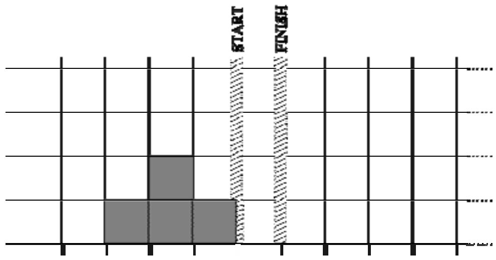
Veel succes!

Deel 1: Slakken

1A: Verkenning van beweging en vorm

Je gaat werken met rijtjes gevormd door blokkenstapeltjes, zoals dit rijtje:





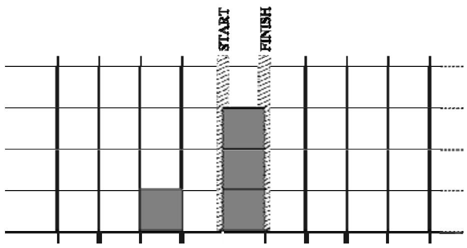
zijaanzicht slak op roosterpapier

Zo'n rij van blokjes noemen we een *slak*.
De getekende slak bestaat uit 1+2+1 = 4 blokjes.
Het meest rechtse stapeltje noemen we de *kop* van de slak; het meest linkse de *staart.*
In het plaatje zijn ook een start- en finishlijn getekend. De slak gaat namelijk bewegen.
Bij het begin staat de slak met de kop tegen de startlijn. De beweging van de slak gaat stap voor stap.
Een *stap* wordt op de volgende manier gezet:

> *Van elk stapeltje wordt één blokje weggenomen. Deze blokjes vormen een nieuw stapeltje dat direct voor de kop wordt gezet.*

De oorspronkelijke stapeltjes worden daardoor één blokje lager en er komt een stapeltje voor met een hoogte die gelijk is aan het oorspronkelijke aantal stapeltjes. De nieuwe kop is een vakje verder gekomen; de slak is dus in beweging!

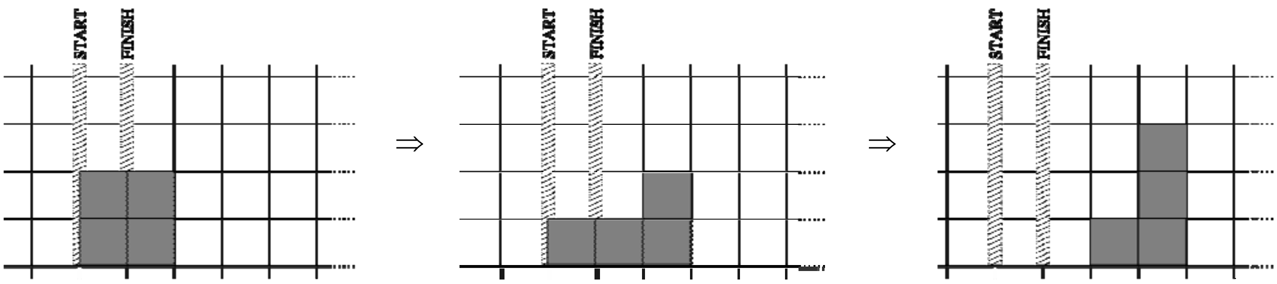
In het voorbeeld wordt de eerste stap:



stap 1

Er zit nu een gat in de slak; dat kan bij deze blokjesslakken nu eenmaal gebeuren. Je kunt zelfs beginnen met een slak met gaten.

De slak gaat op dezelfde manier stap voor stap verder: van elk stapeltje één blokje weghalen en direct rechts van de slak daarmee een nieuwe kop vormen.



stap 2 *stap 3* *stap 4*

Na de laatst getekende stap is de slak in zijn geheel over de finish. Deze slak heeft dus vier stappen nodig om de finish te passeren.

Probeer het voortbewegen uit met een paar zelfbedachte slakken. Je kunt blokjes gebruiken, maar met damstenen kan het ook heel goed.
Werken op ruitjespapier (of een dambord) is wel handig, vooral bij slakken die gaten hebben.
Probeer het ook eens met een liggende slak (alle blokjes achter elkaar op stapeltjes van hoogte 1) en een staande slak (alle blokjes op 1 stapeltje) voor de startlijn.
Hoe doen die beestjes het?
Als een slak liggend of staand aan de start begint, komt hij dan onderweg ook weer in liggende of staande vorm?

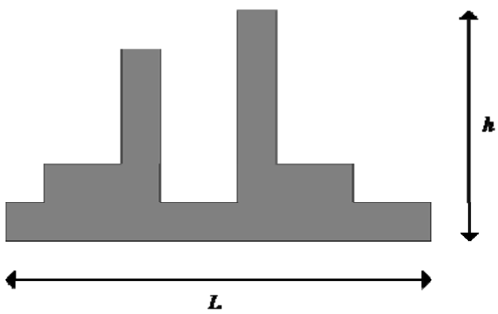
Onderzoek 1.
Er zijn nog andere slakken van vier blokjes mogelijk dan in het voorbeeld.
Die mogelijke vierbloks-slakken ga je eerst bekijken.
De start en finish blijven zoals hierboven.

- **a** Kun je er één verzinnen die in drie stappen de finish is gepasseerd?
- **b** Is het mogelijk om een nog snellere vierbloks-slak te maken?
- **c** Kun je een slak verzinnen die vijf stappen nodig heeft?
- **d** Kan het nog langzamer?

Onderzoek 2.
Bekijk nu slakken bestaande uit 5 blokjes.
Welke beginvorm heeft de slak die het snelst over de finish is?

Een slak hoeft natuurlijk niet uit slechts vier of vijf blokjes te bestaan.
Het totaal aantal blokjes van een slak geven we aan met de letter M.
De gevallen M = 4 en M = 5 zijn hierboven al aan de orde geweest.

Bekijk nu een slak in zijn beginvorm die bestaat uit M blokjes, zonder gaten.
Hier is een voorbeeld van zo'n slak met lengte L (aantal stapeltjes) en hoogte h (het aantal blokjes van de hoogste stapel):



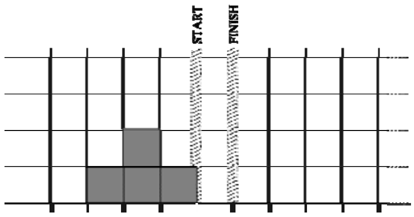
Als de hoogte van een slak 5 is, kun je precies aangeven hoeveel stappen er nodig zijn om over de *startlijn* te komen. Dat is niet zo moeilijk …
Het wordt wat ingewikkelder om vast te stellen wanneer de slak helemaal over de *finishlijn* is.

Onderzoek 3.
De finishlijn ligt nog steeds één vakje verwijderd van de startlijn en de beginvorm van de slak heeft geen gaten.

- **a** In hoeveel stappen is een slak van lengte L en hoogte h over de finish?
- **b** Bedenk een beginvorm van een slak voor M = 56 die het snelst de finish zal passeren. Doe dat ook voor M = 64.
- **c** Kun je voor willekeurige M iets zeggen over de beginvorm van de snelste slak?

Het experimenteren met slakken duurt erg lang als je elke vorm die hij onderweg aanneemt opnieuw gaat tekenen. Daarom voeren we hier een nieuwe manier van noteren in:
een rijtje getallen waarbij elk getal de hoogte van een stapeltje weergeeft.

De beweging van de slak uit het voorbeeld waarmee we begonnen:



wordt dan genoteerd als

begin	1 2 1
stap 1	0 1 0 3
stap 2	0 0 0 2 2
stap 3	0 0 0 1 1 2
stap 4	0 0 0 0 0 1 3

Een slak kun je een grillige beginvorm geven, zoals 9 0 0 0 8 1 1, of juist heel gelijkmatig zoals 5 4 3 2 1.
Als hij eenmaal in beweging is, wordt het aantal vormen dat een slak kan aannemen beperkt.
De twee vormen die hierboven zijn genoteerd kunnen niet voorkomen tijdens het voortbewegen. Waarom niet?

Soms is het nuttig om tijdens de beweging te beredeneren welke vorm de slak één of meer stappen daarvoor gehad zou kunnen hebben.

Onderzoek 4.

a Bedenk een slak die na 1 stap deze vorm heeft: 4 4 4 4 4
Zijn er meerdere mogelijkheden?

b Bedenk een slak die na 1 stap de vorm 4 4 4 4 4 4 heeft, of leg uit dat dit niet kan!

c Bedenk een slak die na 2 stappen er zo uit ziet: 3 3 3

d Kan de vorm 3 3 3 na 3 stappen zijn ontstaan? En na 4 stappen?

In het algemeen geldt ook: eenmaal geheel over de startlijn is de slak in zijn lengte beperkt. Hierover gaat de volgende opdracht.

Redeneeropdracht 1.

Beredeneer dat de lengte van een slak, nadat hij in zijn geheel over de startlijn is, niet langer kan zijn dan *M*.

1B: Op de lange duur ...

In deel 1A was sprake van een race waarbij start- en finishlijn dicht bij elkaar lagen. Dat was vooral bedoeld om de voortbeweging van slakken te bestuderen en ook de snelheid waarmee de staart zich verplaatst.

We richten het onderzoek nu op de ontwikkeling van de *vorm* van een slak op de langere duur: hoe gedraagt een slak zich bij een lange race? Dan is het handig om voor alle stappen de slak vanaf de kop te bekijken, zoals bij de Tour de France de kop van het peloton wordt gefilmd vanaf een meerijdende motor.

Dat kan hier door de slakken rechts uit te lijnen: zet ze met hun *koppen* onder elkaar en laat alle nullen die links van de staart staan weg:

begin	1	2	1
stap 1	1	0	3
stap 2		2	2
stap 3	1	1	2
stap 4		1	3

Deze notatie wordt ook gebruikt in het Excel-bestand “slak” dat bij de opgave hoort. Het bestand heeft twee sheets.
De eerste Excel-sheet (met de naam “slakkenrace”) kun je gebruiken om snel door te rekenen hoe de vorm van een slak zich op den duur ontwikkelt. Dat is vooral voor grotere waarden van M handig.
Met de tweede sheet (“film” geheten) kun je rustig stap voor stap de vormverandering van de slak volgen die in de eerste sheet razendsnel is doorgerekend.
Het is verstandig om eerst zelf wat te oefenen met deze notatie voordat je naar het Excel-bestand grijpt. Noteer de vorm van een zelfgekozen slak bij een aantal volgende stappen.

Om op papier beter te kunnen communiceren, onderscheiden we de afzonderlijke getallen in een rijtje door het plaatsen van komma's; het rijtje zelf wordt vastgelegd door er haken omheen te plaatsen. Dus 1 1 2 wordt nu in het vervolg op papier genoteerd als (1, 1, 2)

Onderzoek 5.
Je gaat experimenteren met slakken. Je kunt daarbij gebruik maken van het beschikbare Excel-bestand “slak”.

- **a** Neem M = 3. Kijk bij alle slakken hoe die er op den duur uit gaan zien.
  Wat vind je van het volgende vermoeden?
  Een slak van 3 blokjes krijgt uiteindelijk de driehoeksvorm (1, 2).
- **b** Experimenteer met M = 6. Krijg je hier ook altijd een driehoeksvorm?
- **c** Experimenteer nu met M = 4 en formuleer een vermoeden over de uiteindelijke vorm van de slak.
- **d** Doe hetzelfde voor M = 5.
- **e** Hoe zit het met M = 7 en met M = 8 ?

De slak (2, 2) ontwikkelt zich als volgt:

(2, 2) ⇒ (1, 1, 2) ⇒ (1, 3) ⇒ (2, 2) ⇒ (1, 1, 2) ⇒ (1, 3) ⇒ (2, 2) ⇒ ...

Na drie stappen is de slak weer terug bij zijn beginvorm (2, 2). Dan herhaalt zich wat er al eerder gebeurd is. En het patroon blijft zich steeds herhalen.

We noemen de slak (2, 2) *periodiek* met *periode* 3.

Ook slak (3, 1) komt na een tijdje op een patroonherhaling uit:

(3, 1) ⇒ (2, 0, 2) ⇒ (1, 0, 1, 2) ⇒ (1, 3) ⇒ (2, 2) ⇒ (1, 1, 2) ⇒ (1, 3) ⇒ (2, 2) ⇒ (1, 1, 2) ⇒ (1, 3) ⇒ (2, 2) ⇒...

De beginvorm (3, 1) van deze slak komt echter niet meer terug.
We zeggen dat zo'n slak *op den duur periodiek* is. De periode is in dit geval ook 3.

Slakken met een driehoeksvorm, zoals (1, 2, 3), zijn bijzonder: ze hebben periode 1.
Een vorm met periode 1 heet ook wel een *stabiele vorm*. Voor de driehoeksvorm is het noodzakelijk dat M een *driehoeksgetal* is, zoals 6 (= 1 + 2 + 3) of 15 (= 1 + 2 + 3 + 4 + 5).

Onderzoek 6.

- **a** Beredeneer dat iedere driehoeksvorm (1, 2, ..., n) stabiel is.
- **b** Zijn er nog andere stabiele vormen mogelijk dan de driehoeksvormen?

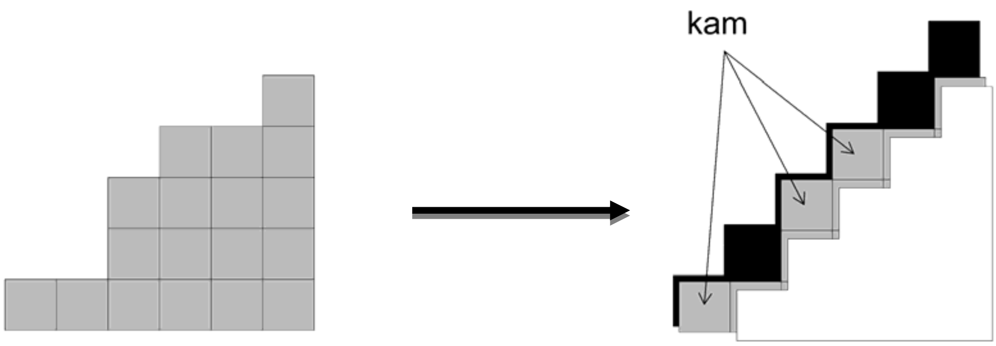
Voor M = 6 en M = 10 zijn er slakken die de driehoeksvorm hebben: (1, 2, 3) en (1, 2, 3, 4).
Slakken voor tussenliggende waarden van M (7, 8 en 9) kunnen de driehoeksvorm niet krijgen.
Wat gebeurt er dan wel?

Onderzoek 7.

Bekijk de gevallen M = 7 en M = 8 (van onderzoek 5e) en voeg M = 9 toe aan je onderzoek.

- **a** Hoe gedragen deze slakken zich op den duur in vergelijking met de twee driehoeksvormen voor M = 6 en M = 10?
- **b** Kun je uit de uiteindelijke vormen iets afleiden over de lengte van de periode?

Als M geen driehoeksgetal is, ligt het natuurlijk wel in tussen twee opeenvolgende driehoeksgetallen. Neem een zo groot mogelijk driehoeksgetal a dat nog wel kleiner is dan M. Neem ook een zo klein mogelijk driehoeksgetal b dat nog wel groter is dan M. Er geldt dan dus $a < M < b$. We bekijken vormen van M blokjes waarvoor geldt: de driehoeksvorm met a blokjes past er helemaal in, en de driehoeksvorm met b blokjes is omvattend.
Zo'n vorm heet een *kamvorm*.
Voorbeeld: M = 18. De grijs getekende slak hieronder heeft de kamvorm.
In dit geval geldt a = 1+2+3+4+5 = 15 (in het plaatje hieronder de witte driehoek) en
b = 1+2+3+4+5+6 = 21 (in het plaatje hieronder de bijna geheel verscholen zwarte driehoek).



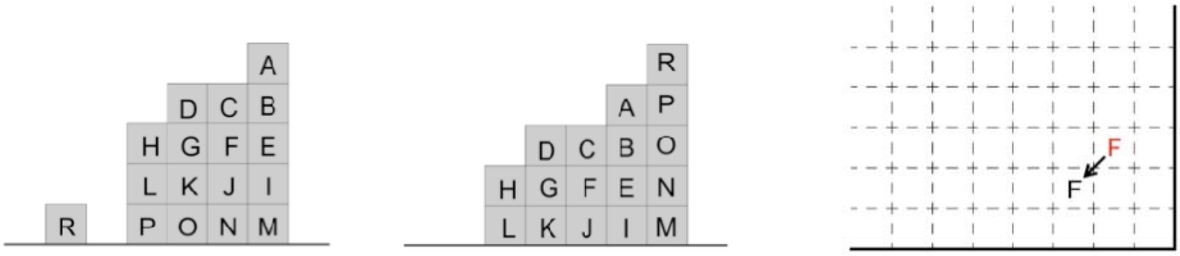
De drie blokjes die tussen de kleinere en de grotere driehoek ingeklemd zijn, heten de *kam*.

Onderzoek 8.

- **a** Bekijk de slak (1, 2, 3, 4, 9). Dit is een driehoeksvorm met op de kop nog 4 extra blokjes: (1, 2, 3, 4, 5 **+ 4**). Krijgt deze slak in het vervolg een kamvorm?
- **a** Onderzoek het volgende algemenere vermoeden:
  Als een slak eenmaal een kamvorm heeft, dan blijft hij altijd een kamvorm houden.
- **b** Formuleer een vermoeden over de vorm van de kam en de bijbehorende periode.

Tot nu toe heb je de slakken bekeken als echte stapeltjes blokken en ook als rijtjes getallen.
Waarschijnlijk heb je bij de stappen de meest gemakkelijke weg gevolgd: van elk stapeltje het bovenste blokje weghalen en die voor de slak opstapelen.
Minder gemakkelijk in het echt uit te voeren, maar op papier wel voorstelbaar: haal van elke stapel het *onderste* blokje weg en zet die in dezelfde volgorde voor de slak. Dit geeft natuurlijk precies hetzelfde resultaat!
Het voordeel van deze manier van werken is dat het mogelijk wordt om de gang van een individueel blokje te volgen bij de opeenvolgende stappen.

Als voorbeeld zie je nu een slak met blokjes waarop letters zijn geplakt. De onderste rij blokjes wordt verwijderd en aan de voorkant rechtop gezet. Alle blokjes (behalve M) hebben na deze stap een andere positie in de slak. De onderste rij (R PONM) komt vooraan rechtop te staan. Alle andere blokjes schuiven een positie naar links en naar onder. Voor F is dat nog even apart aangegeven.



Volg de positie in de slak van F nog een paar stappen meer. Hoe gedragen andere letterblokjes zich? Op welke manier gedraagt R zich anders?

Periodieke en stabiele slakken zijn bijzondere voorbeelden van op den duur periodieke slakken. Soms duurt het erg lang voor een slak periodiek is, zoals bij (3, 5, 0, 0, 3, 6, 9, 2, 4, 5).
Pas vanaf stap 47 begint de periode:

begin	3	5	0	0	3	6	9	2	4	5
			……….							
stap 47		0	1	2	3	4	5	7	7	8
stap 48		0	1	2	3	4	6	6	7	8
stap 49		0	1	2	3	5	5	6	7	8
...		0	1	2	4	4	5	6	7	8
		0	1	3	3	4	5	6	7	8
		0	2	2	3	4	5	6	7	8
		1	1	2	3	4	5	6	7	8
		0	1	2	3	4	5	6	7	9
		0	1	2	3	4	5	6	8	8
stap 56		0	1	2	3	4	5	7	7	8

De laatste taak bij deel 1 is absoluut niet gemakkelijk! Daarmee kun je je als team echter wel onderscheiden als je aan de wedstrijd deelneemt.

Redeneeropdracht 2.

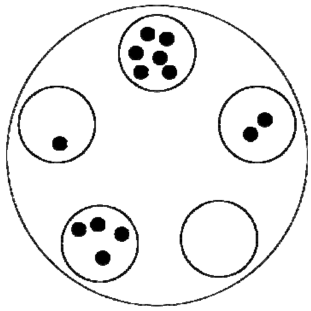
Geef een sluitende redenering bij de volgende bewering:

Elke slak is, onafhankelijk van de beginvorm, op den duur periodiek.

Deel 2: Bonen zaaien

In deel 1 heb je gekeken naar de vormverandering van stapels blokjes waar je een bepaald proces op uitvoert. Je bent een aantal vermoedens tegengekomen en een aantal vermoedens heb je wellicht kunnen bewijzen. In dit deel ga je een ander proces bestuderen: het zaaien van bonen in een beperkt aantal vakjes. De opdracht is om hier zelf (bijvoorbeeld door te experimenteren) vermoedens over te bedenken en te proberen die te bewijzen. De ervaringen die je met de slak hebt opgedaan zijn nuttig, want ook hier zul je tegen dingen aanlopen als driehoeksgetallen, periodiciteit en stabiliteit. Het zal blijken dat de slakkenrace en het zaaien een beetje op elkaar lijken!

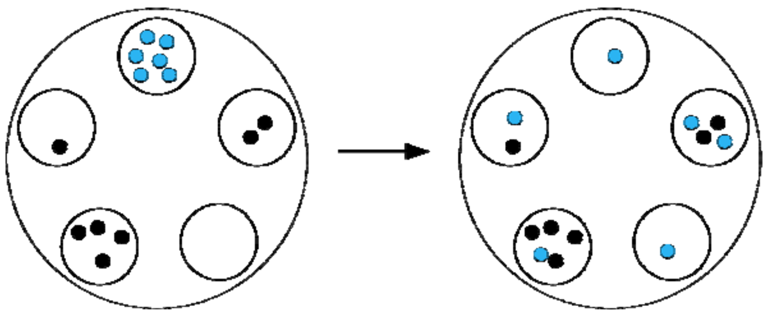
Je begint met n bakjes en M bonen. De bakjes zet je gelijkmatig in een kring en je verdeelt de bonen over de bakjes. Die verdeling hoeft niet eerlijk te zijn: bakjes mogen leeg zijn of bijna alle bonen bevatten. Hier is een voorbeeld met n = 5 en M = 13:



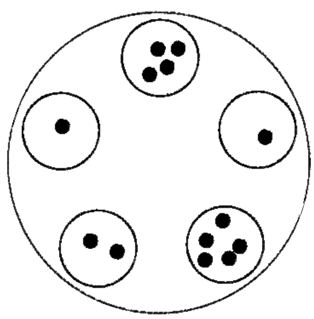
Een *zaaistap* ziet er nu als volgt uit:

1. Je begint bij het bovenste bakje. Hier haal je alle bonen uit en die houd je in je hand (actie 1).

2. Vervolgens ga je een bakje naar rechts. Hier stop je één boon in. In het volgende bakje doe je ook één boon, enzovoorts. Zo ga je één voor één alle bakjes langs, met de klok mee. Dit doe je net zo lang tot je hand leeg is. Dit is actie 2.
Het resultaat van actie 2 bij het gegeven voorbeeld is dus:

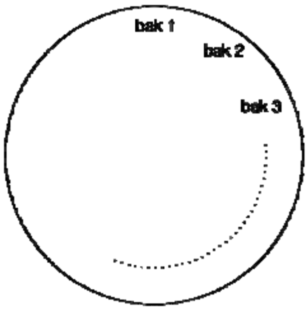


3. De laatste actie (actie 3) is dat je de bakjes één plaats tegen de klok in draait:



Met deze laatste actie zorg je ervoor dat het verder verdelen, die start met actie 1, steeds begint met de inhoud van het bovenste bakje.
Teken, om te oefenen, hoe de volgende twee zaaistappen er uitzien.

Net als bij de slak is het ook hier erg tijdrovend om steeds te moeten tekenen. Daarom wordt ook hier een getalsnotatie gebruikt. Nummer de bakjes van 1 tot n als volgt:



Je kunt nu met een rijtje getallen het aantal bonen per bakje aangeven.

Zo betekent bijvoorbeeld (6,2,0,4,1): er zijn vijf bakjes (n = 5); het eerste bakje bevat 6 bonen, het tweede 2, het derde 0, het vierde 4 en het vijfde bakje 1 boon. Dit is dus precies het voorbeeld waarmee je begonnen bent. De volgende zes stappen zijn:

beginsituatie:	(6,2,0,4,1)
na de eerste stap:	(4,1,5,2,1)
na de tweede stap:	(2,6,3,2,0)
na de derde stap:	(7,4,2,0,0)
na de vierde stap:	(6,4,1,1,1)
na de vijfde stap:	(6,2,2,2,1)
na de zesde stap:	(4,3,3,2,1)

Ook voor het zaaien is weer een Excel-bestand ("zaaien") beschikbaar waarmee je snel zaaiprocessen kunt doorrekenen.

Let erop dat bij gebruik van het Excelsheet, je met het *aantal* getallen dat je invoert achter ‘beginstituatie:’ ook de waarde van n bepaalt.
Gevolg: bij invoer van het startrijtje (4, 5, 3, 2) gebeurt er iets heel anders dan bij invoer van (4, 5, 3, 2, 0). In het eerste geval is n gelijk aan 4, in het tweede gelijk aan 5.

Om je op weg te helpen, volgt hier een verkennende opdracht voor het zaaiproces met vier bakjes (dus n = 4). Houd in je achterhoofd dat je straks zelf vermoedens moet bedenken.

Onderzoek 11.

- **a** De beginsituatie is (4,3,2,1). Hoe zien de volgende stappen eruit? (Gebruik eventueel Excel).
- **b** De beginsituatie is (8,6,4,2). Hoe zien de volgende stappen eruit?
- **c** Geef een *stabiele* beginsituatie voor het geval dat n = 4 en M een veelvoud is van het vierde driehoeksgetal (4+3+2+1).
- **d** Een voorbeeld van zo’n getal is $M = 2 \cdot (4+3+2+1) = 20$. Wat gebeurt er in de bijbehorende beginsituaties (20,0,0,0) en (2,9,9,0)?
- **e** Treedt er in de beginsituatie (21,0,0,0) stabiliteit op?
- **f** Voeg nog een of twee bonen toe. Wat gebeurt er?

Onderzoek 12.

Onderzoek op een vergelijkbare manier het zaaiproces voor 5 bakjes (dus n = 5).

Hoofdonderzoek bij deel 2.

Hoe ontwikkelen de aantallen bonen in de bakjes zich bij het zaaiproces met n bakjes en M bonen?
Formuleer vermoedens en probeer die vermoedens te bewijzen.

EINDE