Ten Geleide

In schrille tegenstelling tot het nut en de betekenis der algebra en haar interessante problemen staat in de regel het dorre mechanische aanvangsonderricht, in hoofdzaak bestaande uit de oefening van het gebruik van letters bij de vier hoofdbewerkingen, dat juist door die dorheid zo vaak in het begin de leerlingen afschrikt en van illusies berooft. En dat is toch niet nodig ...

Dit citaat ontleen ik aan het in 1936 verschenen boek van D.J. Kruijtbosch getiteld ' Avontuurlijk wiskunde-onderwijs'. Vandaag de dag lijkt dit niet van toepassing op ons algebra onderwijs. In de schoolboeken worden immers pogingen gedaan om algebra te koppelen aan betekenisvolle situaties die verbanden opleveren tussen variabelen (grootheden). Niet zelden worden algebraïsche uitdrukkingen ingeleid met zogenaamde woordformules. Dat is allemaal prima, maar daar waar het aankomt op het opereren met formele expressies vervalt men al gauw tot de bekende rituelen en rijtjes: reproductie in optima forma. Daarbij is meestal te weinig aandacht voor het ontwikkelen van inzicht, zonder welke geen echte algebravaardigheid kan ontstaan.

Om één stuitend voorbeeld te noemen: het vermaarde *abc*-kanon wordt niet zelden zonder een zweem van bewijsvoering ten tonele gevoerd en het oplossen van vierkantsvergelijkingen aldus gedegradeerd tot een platte invuloefening. Dat dit in strijd is met de geest van de wiskunde, waarbij het om begrip en inzicht gaat, en dat hierdoor bovendien een kans wordt gemist op een nuttige oefening in reken-en-algebra-technieken, namelijk het afsplitsen van of het aanvullen tot een kwadraat schijnen de auteurs niet te beseffen. Ter illustratie een voorbeeld:

$3x^2 + 4x - 2 = 0 \quad \xrightarrow{:3}$	$3x^2 + 4x - 2 = 0 \quad \xrightarrow{\times 3}$
$x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{2}{3} = 0$	$(3x)^2 + 4 \cdot (3x) - 6 = 0$
$(x + \frac{2}{3})^2 = \frac{10}{9}$	$(3x + 2)^2 = 10$
$x + \frac{2}{3} = \pm\frac{1}{3}\sqrt{10}$	$3x + 2 = \pm\sqrt{10}$

De linker aanpak heeft het nadeel dat er met breuken moet worden gewerkt, maar dit kan vanwege het oefen-aspect ook als voordeel worden uitgelegd. De rechter aanpak lijkt op het eerste gezicht een slimme truc (uitgevonden door de Babyloniërs!), maar heeft een zekere algebraïsche elegantie waarbij de overgang op een nieuwe variabele een rol speelt, een aspect dat in het huidige onderwijs niet genoeg aandacht krijgt. De *abc*-formule is hier absoluut overbodig, maar zou aan het eind van een serie lessen over kwadratische vergelijkingen door leerlingen zelf kunnen worden gevonden, bijvoorbeeld om een programmaatje te maken dat bij elk drietal getallen *a, b, c* de eventuele nulpunten van de drieterm $ax^2 + bx + c$ geeft.

In deze bundel wordt de methode van kwadraatafsplitsing aanschouwelijk gemaakt op de manier waarop Al Khwarizmi (780-850) dit deed. Toegegeven, het is lang geleden, maar ooit introduceerde ik op deze wijze in de derde klas van zowel vwo als havo de plaatjesmethode en dat was zeer succesvol. De leerlingen begrepen wat ze deden en ik herinner me dat sommigen tot op het examen plaatjes in de kantlijn tekenden. Men kan natuurlijk tegenwerpen dat de meetkundige aanpak geen negatieve getallen toelaat en inderdaad, aan de puur algebraïsche aanpak valt niet te ontkomen. W.W.Sawyer[1] bedacht dat de overgang van het oppervlaktemodel naar een meer abstracte vorm heel goed via een vermenigvuldigingstabel kan gebeuren en dat idee is in deze bundel gebruikt.

---

[1] W.W. Sawyer, *Aanschouwelijk Algebra*, Het Spectrum 1969

In 2003 stelde ik een bundel samen onder de titel 'Oefeningen in Algebra' die door sommige leraren nog wordt gebruikt als aanvullend materiaal. naast een methode. De bundel is in sommige buitenlanden ontdekt en er zijn vertalingen van het boek (of delen ervan) in het Engels, Duits en Japans. Bij de jaarlijkse internationale summerschool RME (realistisch wiskundeonderwijs), georganiseerd door het Freudenthal Instituut, wordt steeds één dag uitgetrokken voor algebra waarbij voorbeelden van productieve oefeningen uit de bundel worden gebruikt. Ieder jaar blijkt dat de deelnemers de opdrachten als inspirerend ervaren en dat heeft mij weer aangemoedigd om een aantal ideeën die na 2003 zijn ontstaan op te schrijven.
Met de titel 'Geen week zonder Algebra' wil ik aangeven dat men niet ongestraft de algebra een paar weken kan laten rusten op school en dat als er een ander onderwerp op het menu staat, opgaven van bijvoorbeeld deze bundel als tussendoortjes zouden kunnen worden opgediend. Net als bij het primair rekenonderwijs zou er continu gedurende het gehele schooljaar aandacht moeten worden besteed aan het verder ontwikkelen van algebraïsche vaardigheden gestoeld op inzicht. Dat kan soms ook op natuurlijke wijze binnen de context van andere wiskunde-onderdelen. Met name in de meetkunde zijn er mogelijkheden genoeg. Naar mijn smaak worden die in de vigerende onderwijs praktijk te weinig benut.

Net als in de vorige bundel heeft dit boek een kaleidoscopisch karakter. Er zijn opdrachten voor zowel 'onderbouw' als 'middenbouw' opgenomen. Wel is in deze bundel de aandacht wat meer verschoven naar het derde en vierde leerjaar van havo en vwo. Genoemd is al het onderwerp vierkantsvergelijking, maar er zijn bijvoorbeeld ook opgaven over krommen passend bij algebraïsche vergelijkingen in x en y ('grafieken van relaties'). Zo passeren de cirkel, de orthogonale hyperbool en de parabool met verticale of horizontale symmetrie as de revue. Een onderwerp dat meestal niet ter sprake komt in de methode, maar dat mij zeer na aan het hart ligt, is het vergelijken en toepassen van verschillende soorten gemiddelden. De tekening op de voorkaft van dit boek is gebaseerd op de klassieke constructie van het meetkundig gemiddelde van twee getallen.

Meer dan in de bundel 'Oefeningen in Algebra' zijn er in deze bundel mini-hoofdstukjes te vinden, bijvoorbeeld over kwadraten en vierkantswortels. Dat getallen als $\sqrt{5}$ niet gelijk zijn aan een 'gewone' breuk, is een waarheid die je leerling toch niet wilt onthouden en die in de bundel expliciet ter sprake komt, ook in relatie met een repeterende kettingbreuk. Dat gaat dus wat verder dan louter oefening, maar is vooral bedoeld om een impuls te geven om de algebra meer te laten zijn dan - zoals Freudenthal het ooit formuleerde - het invullen van voorgedrukte formulieren.

Martin Kindt

De rijen van Fibonacci en Lucas

F	1	1	2	3	5	8	13		

L	1	3	4	7	11	18	29		

- Als je goed kijkt (en rekent) zie je misschien dat de getallenrijen F en L een zelfde soort patroon vertonen. Welk patroon?
  Vul bij elk de volgende drie getallen in de vakjes in.

- Tel de rijen F en L bij elkaar op:

F + L	2	4	6						

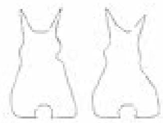
- Heeft deze rij eenzelfde patroon als de rijen F en L?

- Wat valt op als je de rij F + L vergelijkt met de rij F?

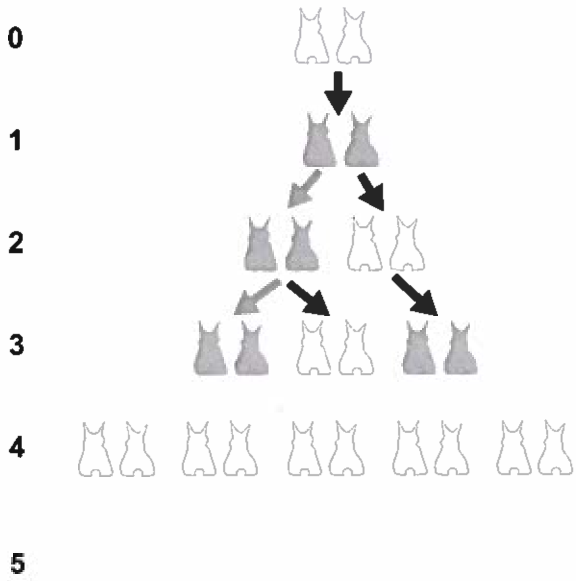
De rij F staat bekend onder de naam **rij van Fibonacci** .
Fibonacci ofwel Leonardo da Pisa (1170-1240) was een Italiaans wiskundige die het eerste rekenboek schreef waarin onze moderne cijfers (van Indo-Arabische oorsprong) werden gebruikt. Het boek heette Liber Abacci en verscheen in 1202.

De rij L is de **rij van Lucas**, *genoemd naar de Franse wiskundige Edouard Lucas (1842-1891). Hij gebruikte zijn rij bij het testen van grote priemgetallen.*

De konijntjes van Fibonacci



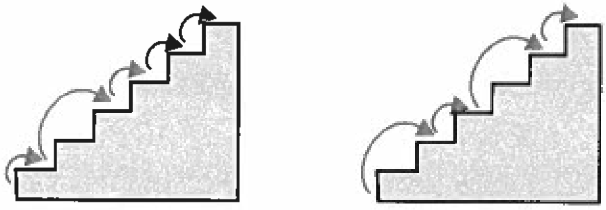
Een man heeft één paar pasgeboren konijnen in een tuin omringd door een hoge muur.
Elke maand krijgt een konijnenpaar één paar jongen en elk paar gaat zich voortplanten in de tweede maand na de geboorte.
In het schema hieronder is dat uitgebeeld.



- De getallen 0, 1, 2, ... geven het aantal maanden aan na de geboorte van het eerste paartje. Gebruik de twee soorten pijlen om de overgang van rij 3 naar rij 4 te maken.
  Kleur in rij 4 de paartjes die zich kunnen voortplanten.
- Teken nu zelf de rij bij 5 en de pijlen van rij 4 naar rij 5.
- Reken nu uit hoeveel paren er na 12 maanden zijn als er geen konijntjes voor die tijd dood gaan.

Traplopen

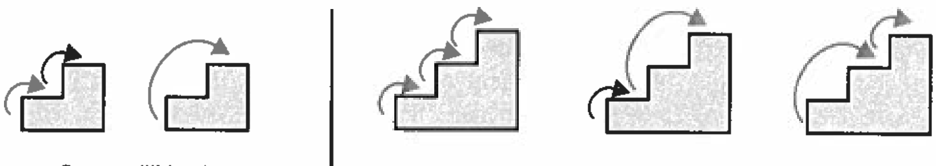
Bij het lopen op een trap kun je stappen van 1 trede of van 2 treden nemen.
Je kunt het ook afwisselen, regelmatig of onregelmatig.
Neem als voorbeeld het beklimmen van een trap met 6 treden.
Hieronder zie je twee mogelijkheden om dit te doen.



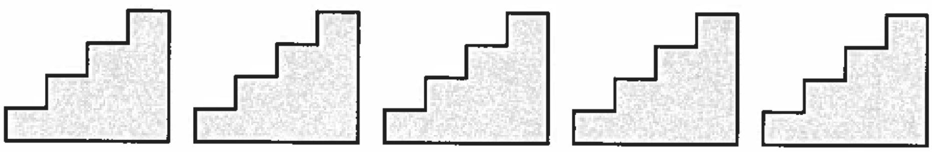
12111 **2121**

- Er zijn nog *elf* andere mogelijkheden! Schrijf die op met rijtjes van 1-en en 2-en.

- Om het aantal mogelijkheden bij een wat hogere trap, zeg met 12 treden te vinden, is het een heel werk omdat met behulp van rijtjes van 1-en en 2-en te doen!
Een slimme manier is om beneden te beginnen en steeds één treetje toe te voegen.
Misschien heb je dit bij de vorige opdracht al bedacht? Er zijn twee mogelijkheden:
óf je begint met een stap van 1 trede, óf met een stap van 2 treden.
Bij een 2-treden-trap zijn er **2** mogelijkheden, bij een 3-treden-trap zijn dat er **3**.
Hier volgt direct uit dat er bij een 4-treden-trap **2 + 3 = 5** mogelijkheden zijn.
Beredeneer dit en maak het plaatje van de 4-treden-trap af.



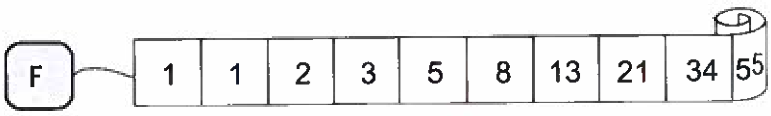
2 mogelijkheden 3 mogelijkheden



- Hoe kun je nu handig het aantal mogelijkheden bij een 12-treden-trap berekenen?

Rijtjes-van-vijf

Opnieuw de rij van Fibonacci.



Neem een deelrijtje van vijf op elkaar volgende getallen:

3, 5, 8, 13, 21.

Tel nu het eerste en het laatste getal van dit rijtje bij elkaar op en vergelijk de uitkomst met het middelste getal van het rijtje.
Kies zelf nog enige series van op elkaar volgende vijf Fibonacci-getallen. Ga daarbij ook wat verder in de rij.

- Welk verband lijkt er te zijn tussen de som van de buitenste twee getallen en het middelste getal?

- Dat dit verband voor **elke** vijf opvolgende Fibonacci-getallen opgaat, kun je zien aan het plaatje hieronder. Leg uit hoe je dat kunt zien.

- De Grieken in de Oudheid gebruikten lijntjes om willekeurige getallen voor te stellen. Ze konden geen letters gebruiken, zoals wij, omdat ze die gebruikten voor hun cijfersysteem. Met onze algebra kun je mooi aantonen dat voor elke 5 opvolgende getallen uit de Fibonacci-rij de som van de buitenste twee getallen gelijk is aan 3 keer het middelste.
  Hint: noem het eerste getal van zo'n Fibonacci-rijtje-van-vijf *x* en het tweede *y*.

- Geldt de eigenschap ook voor elke rijtje van vijf op elkaar volgende getallen uit de rij van Lucas (zie bladijde 1) ? Waarom denk je dat?

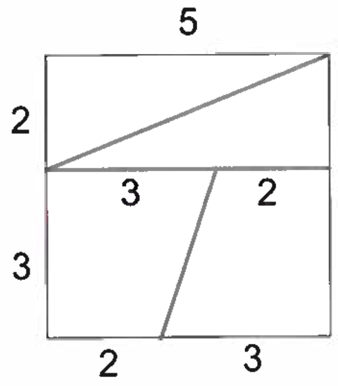
Fibonacci-sommen

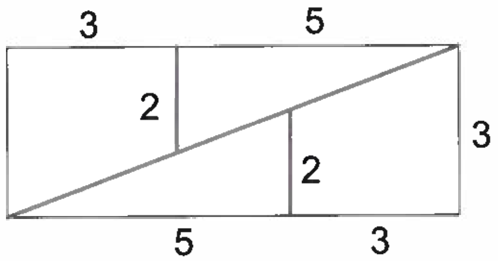
- Neem een deelrijtje van negen opvolgende Fibonacci-getallen.
  Vergelijk de som van de buitenste getallen met het middelste getal.
  Herhaal dit voor een paar andere rijtjes.
  Welke bijzonderheid merk je op?
  Bewijs die eigenschap.

- Neem nu een deelrijtje van zes opvolgende Fibonacci-getallen.
  Tel de zes bij elkaar op en vergelijk je uitkomst met het vijfde getal.
  Herhaal dit voor nog een paar rijtjes van zes.
  Welk verband ontdek je?
  Hoe kun je dat bewijzen?

- Probeer nu zelf ook een opgave over de Fibonacci-rij te bedenken.

25 = 24?



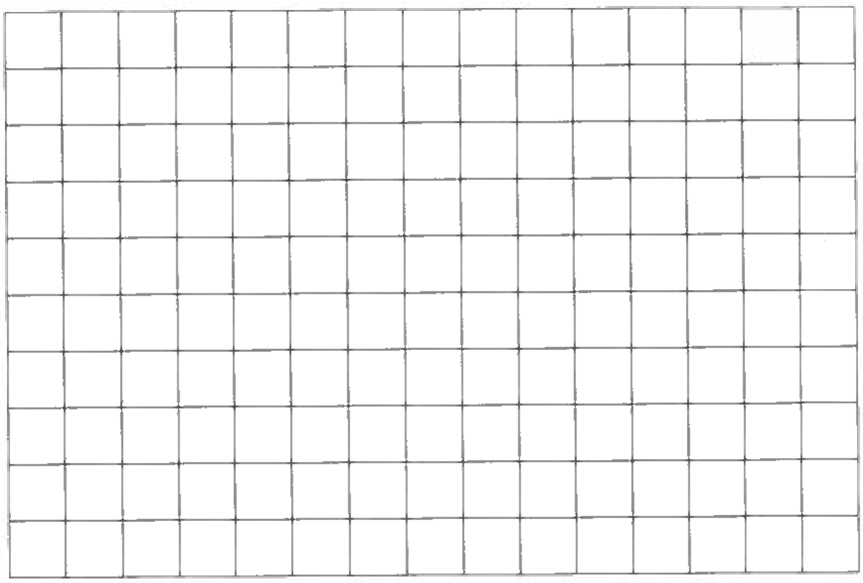


- Bekijk de twee legpuzzels goed.
  In beide puzzels zie je twee driehoekige en twee vierhoekige stukjes.
  De stukjes links lijken gelijk aan de stukjes rechts.

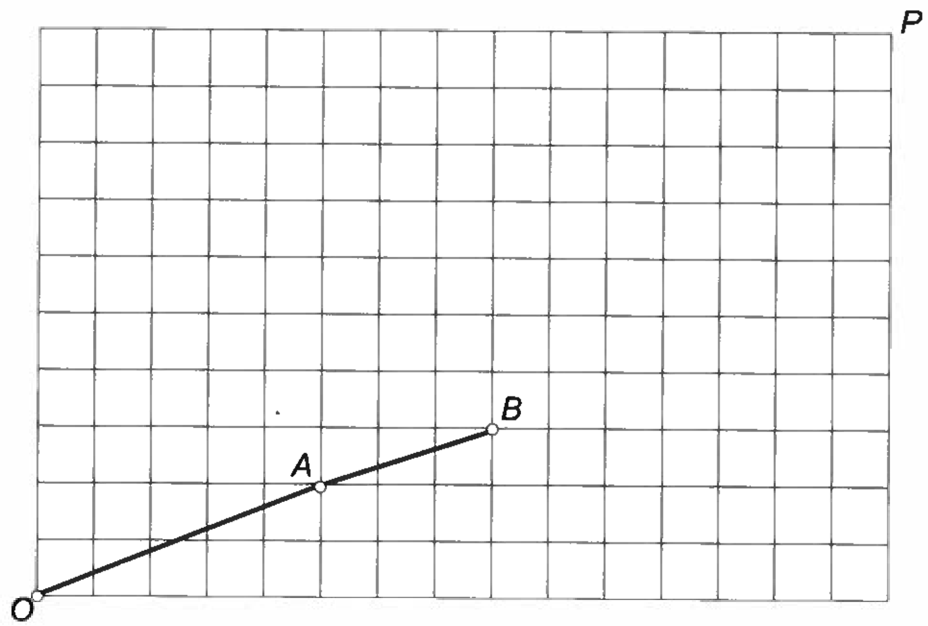
  Maar reken de oppervlakte eens uit van de vier stukjes samen .....

  Hoe kan dat nou???

- Teken de twee figuren hieronder heel nauwkeurig over op roosterpapier.
  Waaraan zie je nu wat er mis is?



Breuken op de helling(1)



De twee lijntjes *OA* en *AB* liggen niet precies in elkaars verlengde!. Dat kun je goed zien als je het lijntje *AB* verplaatst zo dat het vanuit het punt *O* vertrekt. .....

- Welk lijntje gaat steiler omhoog, *OA* of *AB*?

De steilheid van een lijntje in het rooster geven we voortaan met het zogenaamde *hellinggetal*.

De *verticale* stijging van het zwarte lijntje is 2 hokjes over een *horizontale* afstand van 5 hokjes.

We spreken af: *het hellinggetal van het zwarte lijntje is* $\frac{2}{5}$

Net zo: *het hellinggetal van het gestippelde lijntje is* $\frac{1}{3}$

- Teken lijntjes vanuit *O* met hellinggetal achtereenvolgens:

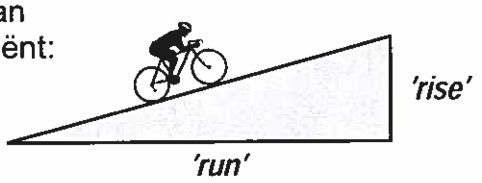
$\frac{3}{4}$ $\frac{4}{3}$ $\frac{5}{2}$ $\frac{3}{6}$ $\frac{4}{10}$

- Wat is het hellingetal van de lijn die *O* verbindt met het punt *P* rechtsboven?

Breuken op de helling(2)

In de wiskunde wordt de steilheid van een helling uitgedrukt met een quotiënt:

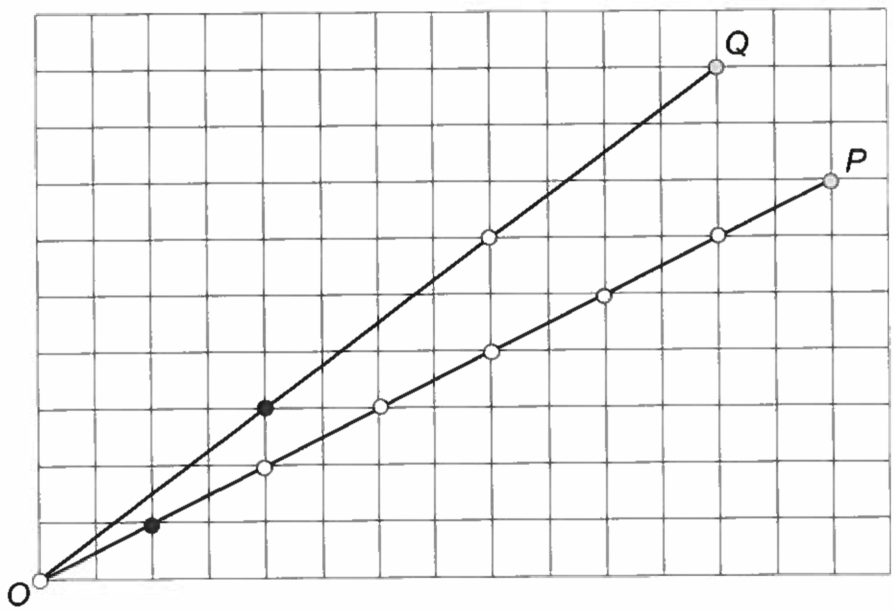
$$\frac{\textit{stijging}}{\textit{horizontale afstand}}$$



In het Engels kan het lekker kort:

$$\frac{\textit{rise}}{\textit{run}}$$

Dit quotiënt heet *hellinggetal;* de Engelsen zeggen: *slope.* Vertaald is dit *helling.* In het vervolg gebruiken we hier ook vaak vaak het kortere helling in plaats van hellinggetal.



Kijk naar het eerste roosterpunt na *O* op de lijn *OP* en je ziet dat de helling van de lijn *OP* gelijk is aan $\frac{1}{2}$. De andere.roosterpunten tonen dat je even goed kan zeggen: *de helling is* $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, ...

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \ldots$$

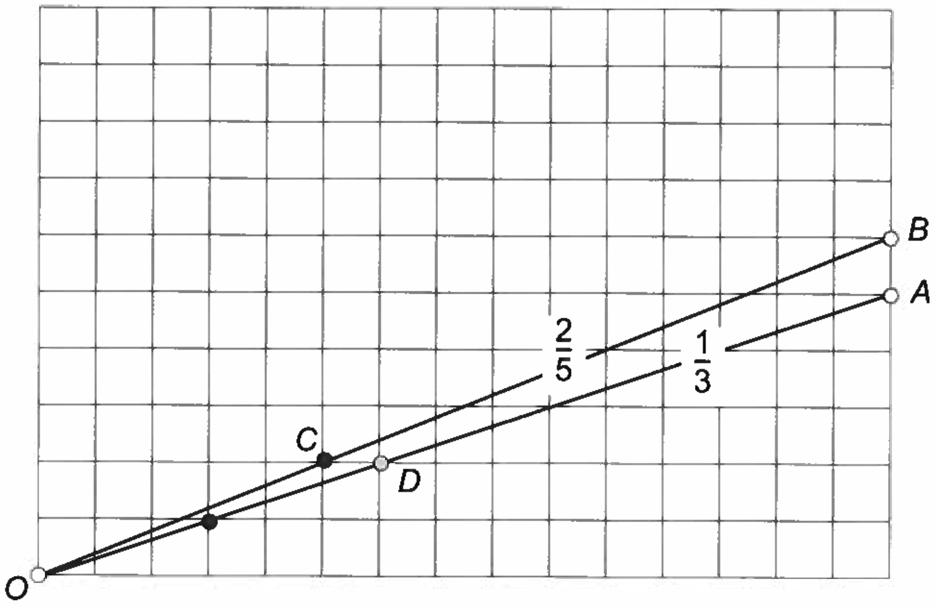
We noemen dit gelijkwaardige breuken.

- Schrijf vijf verschillende breuken op die gelijkwaardig zijn met $\frac{3}{4}$.

- Teken in het rooster hierboven een stuk van de lijn uit *O* met helling:

  a. $\frac{15}{45}$ b. $\frac{34}{17}$ c. $\frac{33}{55}$ d. $\frac{50}{30}$ e. $\frac{8}{72}$ f. $\frac{16}{144}$

Hoe groter de breuk hoe steiler



In de figuur zijn de lijnen *OA* en *OB* met helling $\frac{1}{3}$ en $\frac{2}{5}$ getekend.
Je ziet wel dat *OB steiler* oploopt dan *OA*.
Dat betekent ook dat de breuk $\frac{2}{5}$ *groter* is dan de breuk $\frac{1}{3}$
Je kunt dit ook zonder figuur inzien (op twee manieren) :

(1) Maak de ***noemers*** van de breuken gelijk: $\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$ en $\frac{1}{3} = \frac{5}{15}$
De breuk met ***grootste teller*** is dan het grootst.

(2) Maak de ***tellers*** van de breuken gelijk: $\frac{2}{5}$ en $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$
De breuk met ***kleinste noemer*** is dan het grootst.

Merk op: bij (1) kun je naar *B* en *A* kijken, bij (2) naar *C* en *D*.

- Welke breuk is het grootst? Pas steeds de twee manieren toe (noemers gelijk / tellers gelijk).

  a. $\frac{4}{7}$ of $\frac{3}{5}$ b. $\frac{7}{15}$ of $\frac{2}{5}$ c. $\frac{27}{36}$ of $\frac{24}{32}$ d. $\frac{4}{17}$ of $\frac{5}{21}$

- ***n*** is een of ander getal, je weet niet hoe groot. Toch kun je er zeker van zijn dat de breuk $\frac{2n}{3n+1}$ kleiner is dan $\frac{2}{3}$. Verklaar dit.

Hoe verandert een breuk?

Als je alleen de teller van een (positieve0 breuk met 2 vermenigvuldigt, wordt de breuk 2 keer zo groot.

- Hoe zit dat als je alleen de noemer met 2 vermenigvuldigt?

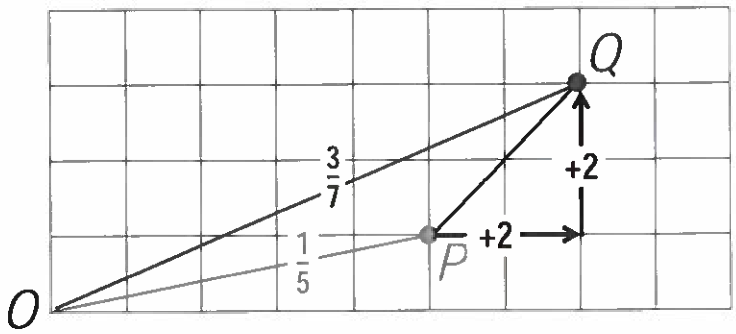
  En als je zowel de teller als de noemer met 2 vermenigvuldigt?

  En als je alleen bij de teller 2 optelt?

  En als je alleen bij de noemer 2 optelt?

  En als je bij zowel de noemer als de teller 2 optelt?

De laatste vraag is niet goed te beantwoorden als je niet iets meer van de breuk weet. Maar als de breuk kleiner is dan 1, kun je wel iets zeggen! Kijk maar naar de figuur.



OP is duidelijk minder steil dan *OQ* ⟶ $\frac{1}{5} < \frac{1+\mathbf{2}}{5+\mathbf{2}} = \frac{3}{7}$

- Begin met de breuk $\frac{1}{4}$. Tel 1 op bij teller én noemer. Doe hetzelfde bij de breuk die je dan krijgt. en herhaal dit nog tien keer.

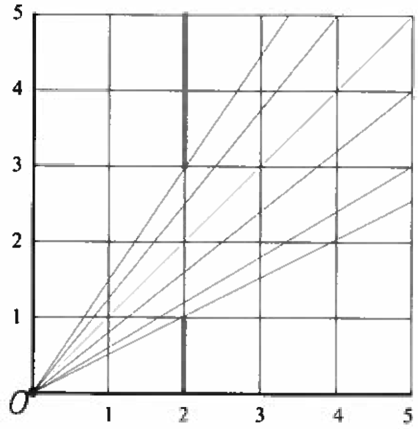
  $\frac{1}{4} < \ldots < \ldots < \ldots < \ldots < \ldots < \ldots < \ldots < \ldots < \ldots < \ldots < \ldots < \ldots$

  Je krijgt zo een rij steeds groter wordende breuken.
  Welke breuken uit die rij kun je eenvoudiger (met kleinere teller en noemer) schrijven?

- Stel je hebt een breuk die groter is dan 1 en je telt bij teller en noemer hetzelfde getal op. Krijg je nu een grotere of kleinere breuk?
  Licht je antwoord toe met een plaatje.

Poortjes

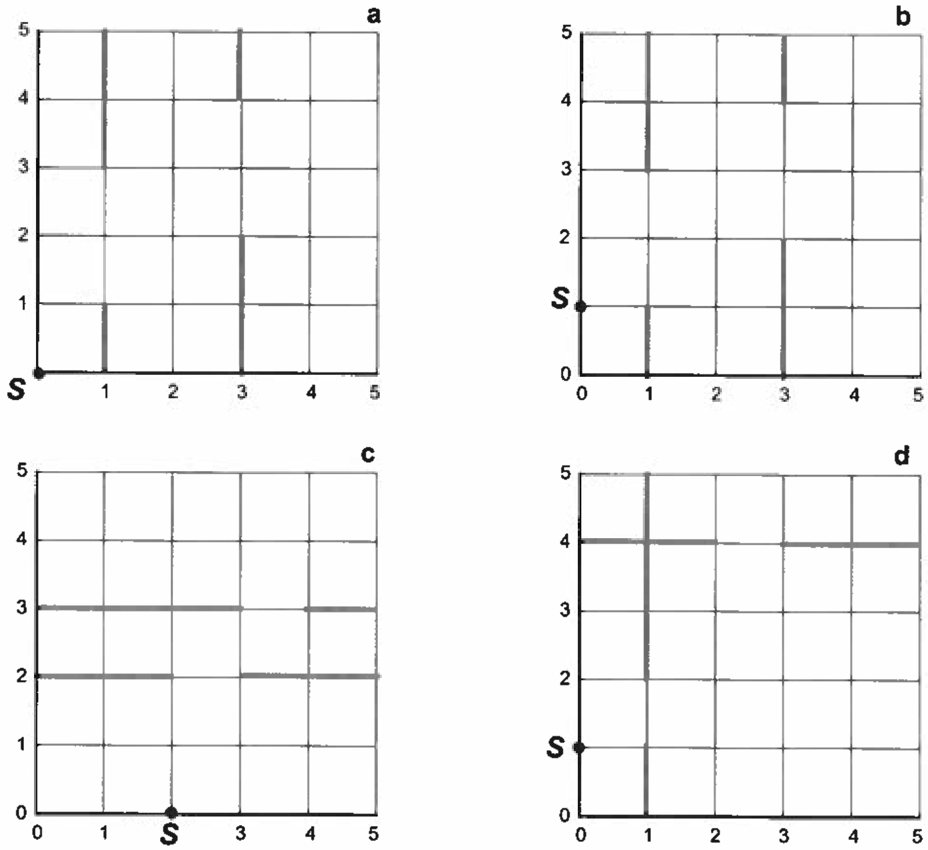
De verticale lijn is onderbroken, waardoor een poortje ontstaat. Vanuit het punt *O* kun je lijnen door het poortje schieten.



- Vul passende breuken in:
  de hellingen van de lijnen door het poortje liggen tussen .... en .....

- Vanuit het punt *S* worden steeds zoveel mogelijk lijnen door twee poortjes geschoten. Wat weet je van de hellingen van die lijnen?

  a. .... b. .... c. .... d. ....

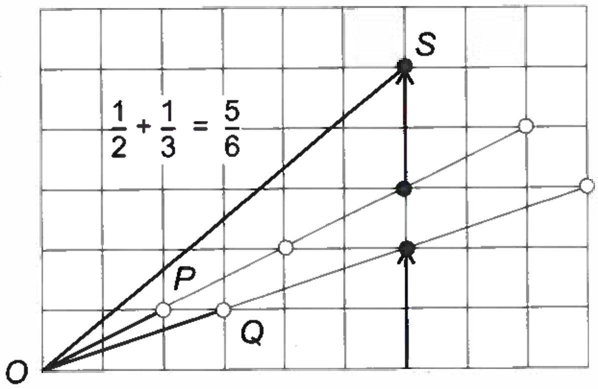


- Ontwerp zelf ook een opgave over *door-poortjes-schieten.*

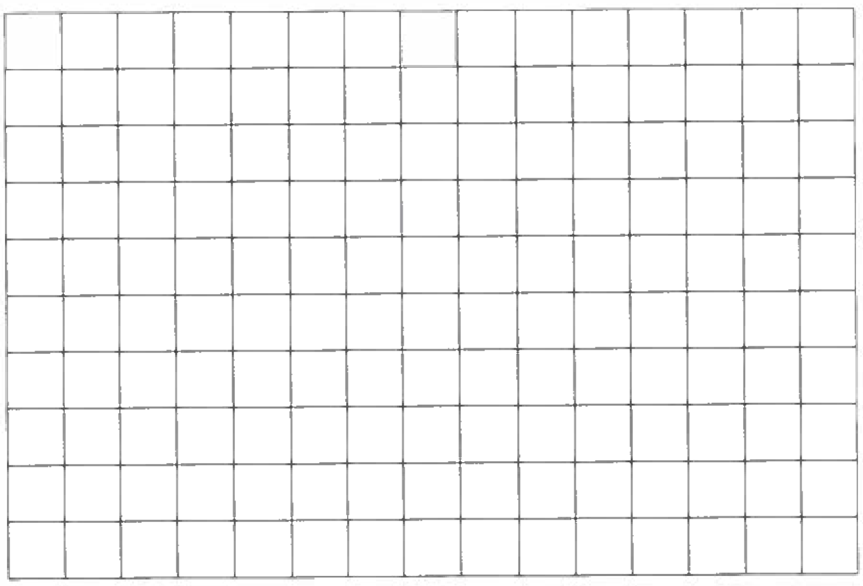
Hellingen optellen

De lijn *OP* heeft de helling $\frac{1}{2}$ en de helling van *OQ* is $\frac{1}{3}$
Op de lijnen OP en OQ zijn twee roosterpunten gezocht die recht boven elkaar liggen. Die punten liggen op hoogte 3 en 2. Door deze hoogten op te tellen krijg je de hoogte 5 van het punt S.
Er geldt nu:

helling OS = helling OP + heling OQ ofwel $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$



- Maak net zo'n tekening bij de optelling van de hellingen: $\frac{2}{3}$ en $\frac{1}{4}$



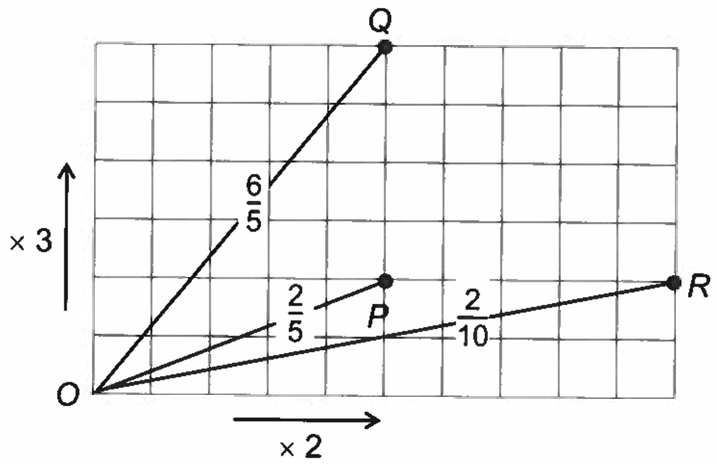
- Schrijf de uitkomsten als een zo eenvoudig mogelijke breuk.

$\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\dots$ $\quad\frac{2}{7}+\frac{1}{9}=\dots$ $\quad\frac{2}{9}+\frac{1}{7}=\dots$ $\quad\frac{5}{21}+\frac{1}{7}=\dots$ $\quad\frac{2}{7}+\frac{1}{21}+\frac{1}{63}=\dots$

Rangschik de uitkomsten van klein naar groot.

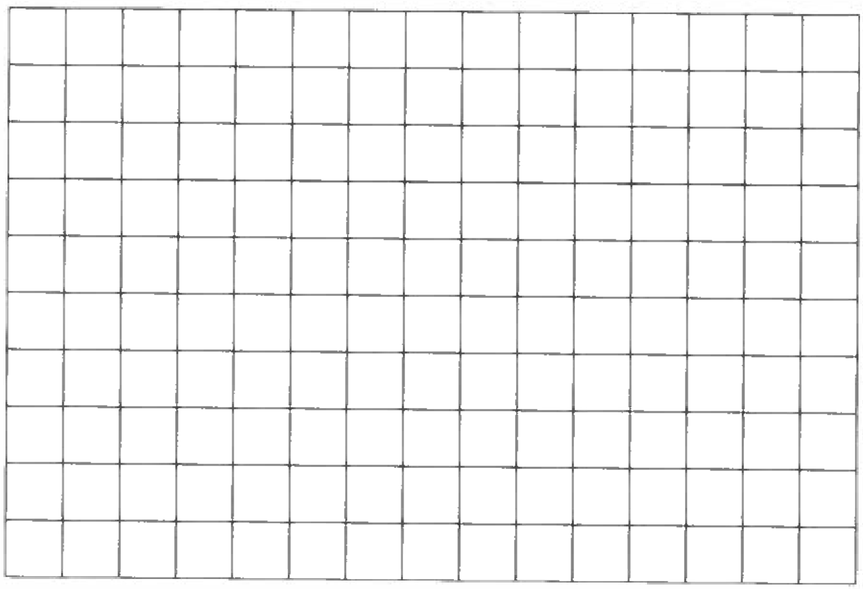
Breuken vermenigvuldigen(1)

De lijn *OQ* in de figuur is 3 keer zo steil als de lijn *OP*.
De lijn *OR* in de figuur is $\frac{1}{2}$ keer zo steil als de lijn *OP*.



Dit komt overeen met: $3 \times \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$ en $\frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{10} \left(= \frac{1}{5}\right)$

- Maak net zo'n tekening bij de vermenigvuldigingen $2 \times \frac{5}{4}$ en $\frac{1}{3} \times \frac{5}{4}$

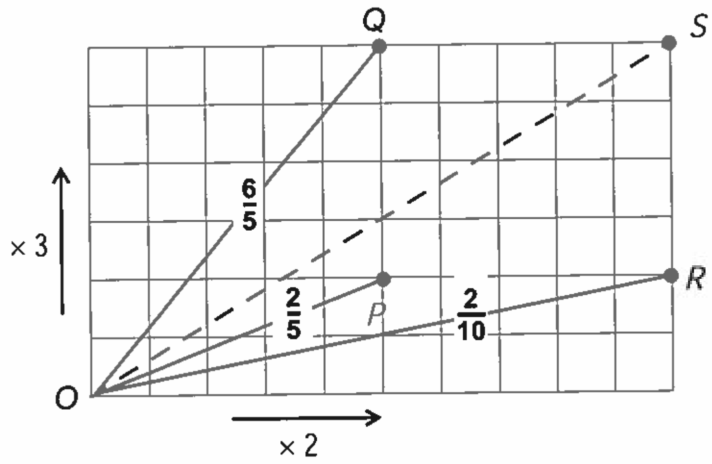


- Schrijf de uitkomsten zo eenvoudig mogelijk:

$5 \times \frac{4}{5} = \dots$ $\frac{1}{5} \times \frac{4}{5} = \dots$ $7 \times \frac{4}{21} = \dots$ $\frac{1}{7} \times \frac{14}{5} = \dots$ $\frac{1}{14} \times \frac{7}{5} = \dots$

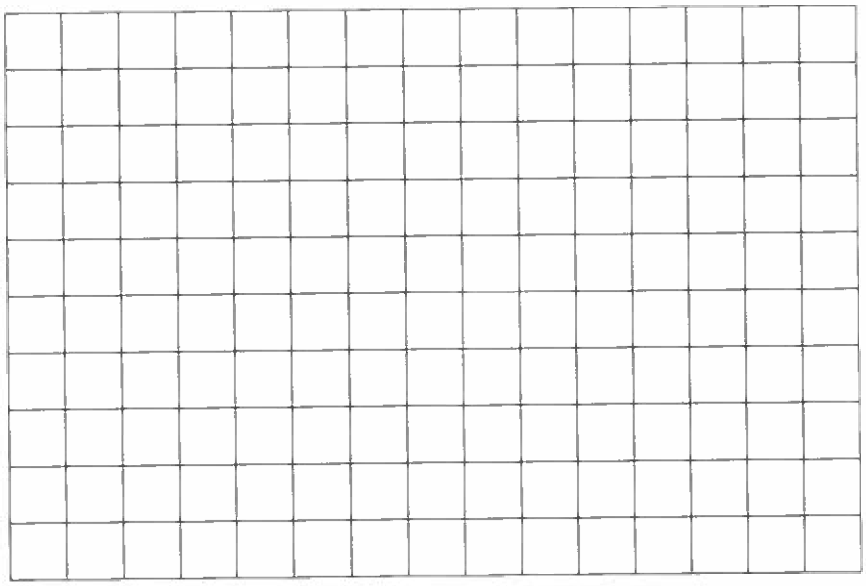
Breuken vermenigvuldigen(2)

De lijn *OS* in de figuur is $\frac{3}{2}$ keer zo steil als de lijn *OP*.



Dit komt overeen met: $\frac{3}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{3 \times 2}{2 \times 5} = \frac{6}{10} \left(= \frac{3}{5}\right)$

- Maak net zo'n tekening bij de vermenigvuldigingen $\frac{2}{3} \times \frac{2}{5}$ en $\frac{5}{3} \times \frac{3}{5}$



- Schrijf de uitkomsten zo eenvoudig mogelijk:

$\frac{3}{7} \times \frac{14}{15} = \dots$ $\quad \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \dots$ $\quad \frac{9}{14} \times \frac{4}{21} = \dots$ $\quad \frac{14}{9} \times \frac{21}{4} = \dots$ $\quad \frac{3}{11} \times \frac{44}{9} = \dots$

Rekenen met breuken

- Vul zo eenvoudig mogelijke breuken in:

$+$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{2}$				
$\frac{2}{3}$				
$\frac{3}{4}$				
$\frac{5}{6}$				

$\times$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{2}$				
$\frac{2}{3}$				
$\frac{3}{4}$				
$\frac{5}{6}$				

- Vul zo eenvoudig mogelijke breuken in:

$\frac{4}{5} + \ldots = 1$

$\frac{4}{5} + \ldots = 2$

$\frac{8}{7} + \ldots = \frac{22}{7}$

$\frac{7}{8} + \ldots = \frac{15}{16}$

$\frac{4}{5} \times \ldots = 1$

$\frac{4}{5} \times \ldots = 2$

$\frac{8}{7} \times \ldots = \frac{22}{7}$

$\frac{7}{8} \times \ldots = \frac{15}{16}$

De Egyptenaren rekenden zo'n 4000 jaar geleden al met breuken. Maar zij gebruikten alleen breuken met teller 1. Wij noemen dit *stambreuken* (in het Engels zegt men 'unit fractions')
Stambreuken zijn dus $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, enzovoort.

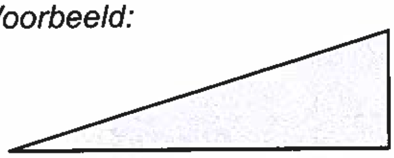
- Schrijf het getal 1 als de som van drie verschillende stambreuken.
  (Dit kan maar op één manier als je niet op de volgorde let!)

- Probeer nu vier verschillende stambreuken te vinden die samen 1 zijn.
  (Dit kan op meer manieren, in totaal zes!)

- Als je twee stambreuken met elkaar vermenigvuldigt, krijg je als uitkomst weer een stambreuk. Waarom?

Breuken van breuken

Voorbeeld:



***'rise'* = $\frac{3}{4}$** meter

***'run'* = $2\frac{1}{2}$** meter

$$\text{Helling} = \frac{\frac{3}{4}}{2\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{4} \times 4}{2\frac{1}{2} \times 4} = \frac{3}{10}$$

De helling verandert niet als je 'rise' en 'run' met hetzelfde getal vermenigvuldigt !

- Hoe groot is de helling als je $1\frac{1}{6}$ m stijgt over een afstand van $3\frac{1}{3}$ m?
Geef een 'gewone' breuk (met gehele teller en noemer) als antwoord.

- Vereenvoudig tot een gewone breuk (of geheel getal):

$$\frac{\frac{3}{5}}{\frac{5}{3}} = \qquad \frac{\frac{5}{3}}{\frac{3}{5}} = \qquad \frac{\frac{2}{7}}{\frac{3}{14}} =$$

$$\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = \qquad \frac{1-\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{6}} = \qquad \frac{\frac{2}{7}+\frac{3}{14}}{\frac{2}{7}-\frac{3}{14}} =$$

Voorbeeld: $$\frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{1 \times 3}{\frac{5}{3} \times 3} = \frac{3}{5}$$

In het algemeen: $\frac{1}{\textit{breuk}}$ = *het omgekeerde van die breuk*

- Geef zelf een paar voorbeelden van deze regel

Omgekeerden

- Welke breuk is het omgekeerde van $3\frac{1}{2}$? En van $3\frac{1}{3}$? En van $3\frac{1}{4}$?

- Bereken: $\dfrac{1}{2\frac{1}{3}} + \dfrac{1}{3\frac{1}{2}}$

Ook: $\dfrac{1}{4\frac{1}{5}} + \dfrac{1}{5\frac{1}{4}}$

Ook: $\dfrac{1}{2-\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{3-\frac{1}{3}}$

Schrik niet van deze 'stapelbreuk', de berekening valt heus mee!

$$\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\frac{1}{2}}}}}}}}}$$

- Waar moet je beginnen om deze 'stapelbreuk' uit te rekenen?

- Als je al rekenend het patroon ontdekt, kun je snel de uitkomst vinden ....

Vergelijkingen(1)

Voorbeeld.

Los a op uit $8 \times a = 3$, of kortweg uit $8a = 3$.

Oplossing:
vermenigvuldig beide kanten met het omgekeerde van 8, dus

$$\tfrac{1}{8} \times 8a = \tfrac{1}{8} \times 3 \longrightarrow a = \tfrac{3}{8}$$

- Los a op uit: $8a = \frac{1}{3}$ | Ook uit: $8a = 2\frac{2}{3}$ | Ook uit: $\frac{1}{8}a = 3$

- Los x op uit: $\frac{1}{8}x = \frac{1}{3}$ | Ook uit: $\frac{1}{3}x = \frac{1}{8}$ | Ook uit: $3\frac{1}{3}x = 2\frac{2}{3}$

- Vul in: $\frac{1}{t} = \frac{3}{5} \longrightarrow t =$ ....

  $\frac{1}{s+1} = \frac{3}{5} \longrightarrow s =$ ....

  $\frac{1}{u-2} = \frac{3}{5} \longrightarrow u =$ ....

- Vul in: $\frac{1}{p+\frac{1}{2}} = \frac{4}{7} \longrightarrow p =$ ....

  $\frac{2}{2q+1} = \frac{4}{7} \longrightarrow q =$ ....

Vergelijkingen(2)

- Los x op uit: $\frac{1}{2}x + 3 = \frac{1}{3}x + 4$

- Los x op uit: $\dfrac{1}{\frac{1}{2}x + 3} = \dfrac{1}{\frac{1}{3}x + 4}$

- Los y op uit: $\dfrac{1}{\frac{1}{3}y + 2} = \dfrac{1}{\frac{1}{4}y + 3}$

- Los y op uit: $\dfrac{3}{y + 6} = \dfrac{4}{y + 12}$

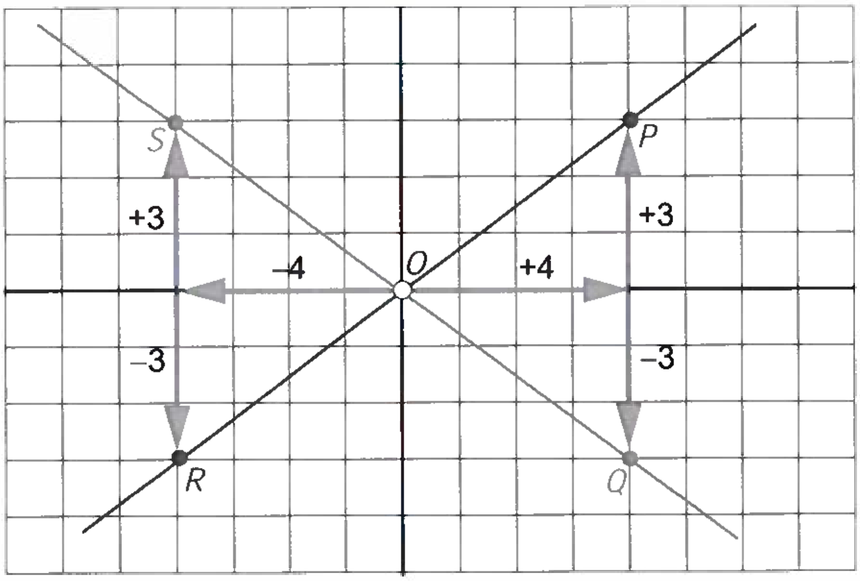
- Los z op uit: $\dfrac{2}{\frac{1}{5}z - 2} = 10$

- Los z op uit: $\dfrac{4}{\frac{1}{5}z - 4} = 20$

- Los t op uit: $\dfrac{1}{2 + \dfrac{3}{t - 4}} = \dfrac{1}{5}$

- Los t op uit: $\dfrac{1}{\frac{1}{2} - \dfrac{3}{t - 4}} = 5$

Positieve & negatieve hellingen(1)



De lijn *OP* *stijgt* met helling $\frac{3}{4}$ (bij *run* 4 hoort *rise* 3)

De lijn *OQ* *daalt* ; bij *run* 4 hoort een 'negatieve' *rise*, en wel −3

We spreken af: de helling van *OQ* is *negatief* : $-\frac{3}{4}$ of wel $\frac{-3}{4}$

Kijk nu naar *OR*: bij *run* −4 hoort een *rise* −3, de helling is: $\frac{-3}{-4}$

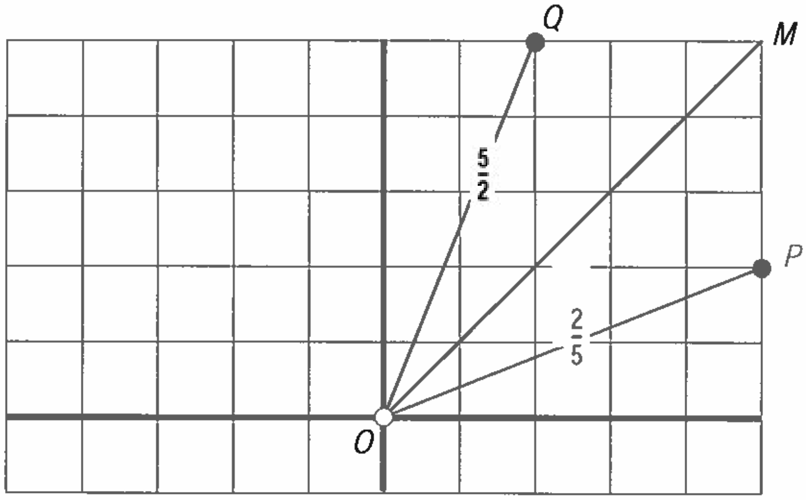
OR en *OP* liggen op dezelfde lijn, daarom spreken we af: $\frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$

OS en *OQ* liggen op dezelfde lijn, daarom : $\frac{3}{-4} = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}$

- Teken een lijn met helling $\frac{-2}{5}$ en ook een met helling $\frac{5}{-2}$

- Teken in de figuur hierboven een lijn *OT* die een rechte hoek maakt met de lijn *OP*.
  Welke breuk past bij de helling van *OT*, denk je?

Positieve & negatieve hellingen(2)

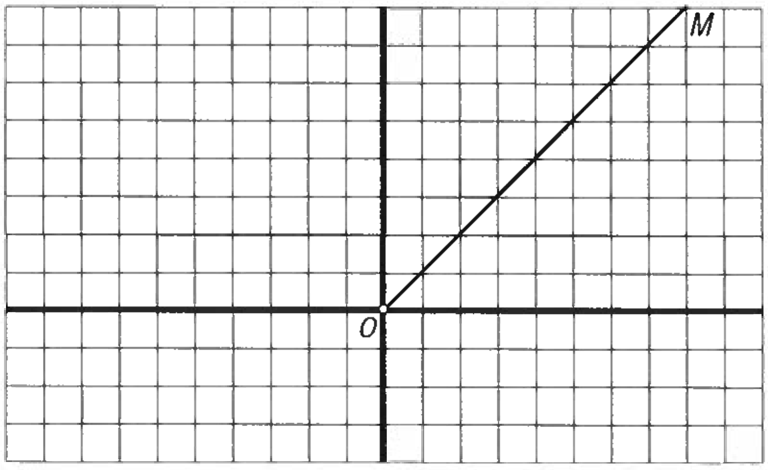


Bekijk de figuur.

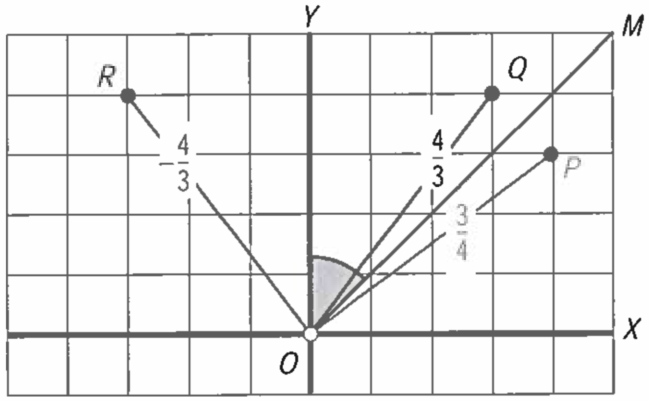
- Hoe groot is de helling van de lijn *OM*?
  Die lijn wordt wel *de hoofddiagonaal* van het rooster genoemd.

Als je een doorzichtig spiegeltje langs de lijn *OM* recht op het vlak zet, dan zie je dat het spiegelbeeld van de lijn *OP* precies op *OQ* komt.
We zeggen nu: *OQ is het spiegelbeeld van de OP* (bij spiegeling in *OM*)
Je ziet dat de hellingen van *OP* en *OQ* elkaars omgekeerde zijn!

- Teken de lijnen *OA* en *OB* met hellingen $\frac{3}{4}$ en $2\frac{1}{3}$.
  Teken nu de spiegelbeelden *OA** en *OB** van *OA* en *OB* bij spiegeling in de lijn *OM*. Welke helling heeft *OA**? En *OB**?



Positieve & negatieve hellingen(3)



OP en *OQ* zijn elkaars spiegelbeeld bij spiegeling in *OM*
OQ en *OR* zijn elkaars spiegelbeeld bij spiegeling in *OY* .

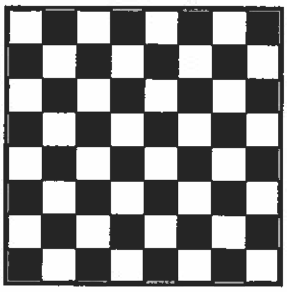
- Vul in:
  de hellinggetallen van *OP* en *OQ* zijn elkaars ....
  de hellinggetallen van *OQ* en *OR* zijn elkaars ....

De hoek tussen de spiegelassen *OM* en *OY* is 45°.
Hoe volgt hieruit dat de hoek tussen *OP* en *OR* gelijk is aan 90°?
Hint: *let eerst op de hoeken OP en OQ maken met OM.*

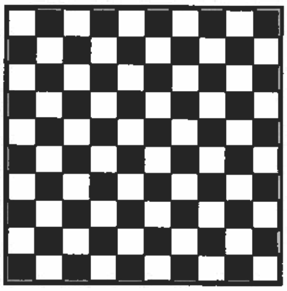
De hellinggetallen van *OP* en *OR* zijn *tegengesteld-omgekeerd*
In het algemeen geldt:
als de hellinggetallen van twee lijnen tegengesteld-omgekeerd zijn, dan staan die lijnen loodrecht op elkaar.

- Teken in een rooster de lijn door *O* met helling $1\frac{2}{3}$.
  Welke breuk is het tegengesteld-omgekeerde van dit hellinggetal? ......
  Teken de lijn door *O* met dit laatste hellinggetal en stel vast of de twee lijnen die je getekend hebt loodrecht op elkaar staan.

Kwadraten(1)



Op een schaakbord zijn 8 rijen met elk 8 velden.
Het totale aantal velden is $8 \times 8 = 64$
In plaats van 8×8 schrijven we vaak 8^2
Spreek uit: *8 (in het) kwadraat.*



Aan de andere kant van een schaakbord vind je soms een dambord.

- Het aantal velden van een dambord = ...^{2} = ...

Uit het dambord wordt een schaakbord gezaagd. De overblijvende velden worden stuk voor stuk ook uitgezaagd. Kan daar een vierkant mee worden gelegd? Ja/nee, want ....

Het woord *kwadraat* betekent oorspronkelijk *vierkant.*
Wij bedoelen met *vierkant* meestal een figuur en met *kwadraat* een getal.
In veel andere talen wordt dat onderscheid niet gemaakt: 'square' (Engels) en 'carré' (Frans) betekenen zowel vierkant als kwadraat.

- Isabel heeft 200 even grote vierkante tegels.
  Daarmee wil zij een zo groot mogelijke vierkante tegelvloer leggen.
  Hoeveel tegels houdt zij over?

- Bereken het kwadraat van 15 en ook van 30.

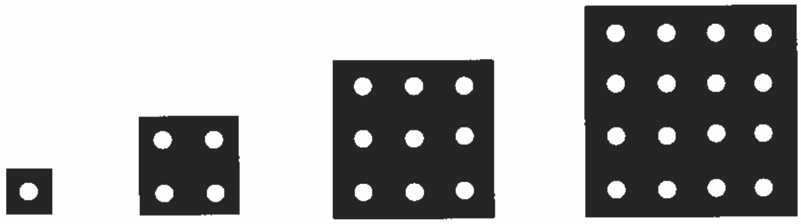
- Vul in: 30 is 2 maal 15, maar 30^2 = ... maal 15^2.

- Vul in: Als je de zijden van een vierkant 3 keer zo groot maakt,
  wordt de oppervlakte ..... keer zo groot.

Kwadraten(2)

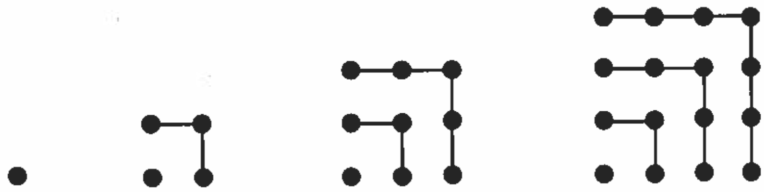
Op een dobbelsteen worden getallen uitgebeeld door stippenpatronen. Zo'n 500 jaar voor het begin van onze jaartelling gebruikten Griekse wiskundigen ook al stippenpatronen om getallen uit te beelden.

Voor *kwadraatgetallen* gebruikten zij (natuurlijk!) vierkante patronen.



1 4 9 16

Uit die patronen leidden zij dan eigenschappen van getallen af.



Zo begrepen zij bijvoorbeeld dat:

$$1 + 3 = 2^2$$
$$1 + 3 + 5 = 3^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$$

- Hoe gaat dit rijtje verder? Schrijf de drie volgende regels op en reken na of het klopt.

- Welk kwadraat krijg je als je de oneven getallen van 1 tot en met 19 optelt?

Sprongen tussen kwadraten

Hieronder zie je de lijst kwadraten tot 400 (= 20^2).
Het is handig om die uit het hoofd te leren!

$1^2 = 1$	$11^2 = 121$
$2^2 = 4$	$12^2 = 144$
$3^2 = 9$	$13^2 = 169$
$4^2 = 16$	$14^2 = 196$
$5^2 = 25$	$15^2 = 225$
$6^2 = 36$	$16^2 = 256$
$7^2 = 49$	$17^2 = 289$
$8^2 = 64$	$18^2 = 324$
$9^2 = 81$	$19^2 = 361$
$10^2 = 100$	$20^2 = 400$

- Kijk naar de grootte van de sprongen in de rechter kolom.
  Dus van 121 naar 144, van 144 naar 169, enzovoort.
  Wat voor bijzonders is daar mee?

- Door op de sprongen te letten, kun je meteen weten wat de uitkomst is van 21^2 , dat is ....
  En verder: 22^2 = ... , 23^2 = ... , 24^2 = ... , 25^2 = ...

- Hoe ziet een tabel van kwadraten van tientallen er uit?
  10^2 = ... 20^2 = ... 30^2 = ... enzovoort

- $41^2 = 1600 + 81 = 1681$
  Vul in: 42^2 = 1681 + ... = ...
  39^2 = ... = ...

- $49^2 = 2401$
  Vul in: 51^2 = 2401 + ... + ... = ...

Het laatste cijfer

Kijk nog eens naar de kwadratentabel op de vorige bladzijde en let bij alle uitkomsten op het laatste cijfer.

- Op welk cijfer kan een kwadraatgetal blijkbaar eindigen?

- Vul in (n is steeds een natuurlijk getal):

  n^2 eindigt op 1 als n eindigt op ... of ...

  n^2 eindigt op 4 als n eindigt op ... of ...

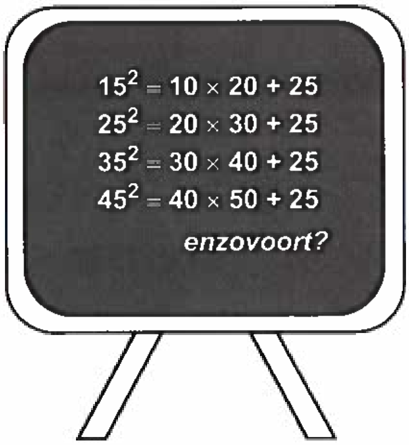
  n^2 eindigt op 5 als n eindigt op ...

  n^2 eindigt op 6 als n eindigt op ... of ...

  n^2 eindigt op 9 als n eindigt op ... of ...

  n^2 eindigt op 0 als n eindigt op ...

- Controleer de uitkomsten op het schoolbord.
  Wat zal de volgende regel zijn?



- De regels op het schoolbord zijn een gevolg van
  $(n + 5)^2 = n(n + 10) + 25$
  Leg uit hoe dat zit.

- Bereken uit het hoofd het kwadraat van 85: ....

- Waar of niet waar: als het laatste cijfer van een kwadraat 5 is, dan is het voorlaatste cijfer 2 ?

Kwadraten vermenigvuldigen

Als je twee kwadraten met elkaar vermenigvuldigt, komt er een kwadraat uit.
Voorbeeld:

$$5^2 \times 6^2 = 30^2$$

$$(5 \times 5) \times (6 \times 6)$$

$$(5 \times 6) \times (5 \times 6) = 30 \times 30$$

- Vul in (maak eerst kwadraten):

  $25 \times 64 = ...^2 \times .....^2 = ...^2 = ...$

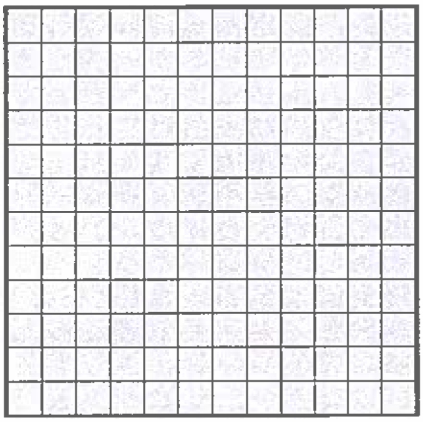
Hier is een vervolg op de kwadratentabel van de vorige bladzij.

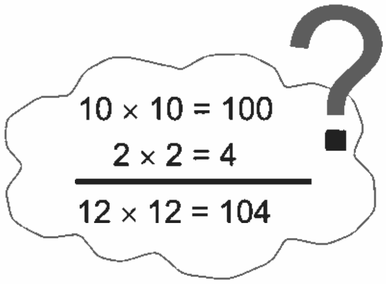
$21^2 = 441$	$31^2 = 961$	$41^2 = 1681$	$51^2 = 2601$
$22^2 = 484$	$32^2 = 1024$	$42^2 = 1764$	$52^2 = 2704$
$23^2 = 529$	$33^2 = 1089$	$43^2 = 1849$	$53^2 = 2809$
$24^2 = 576$	$34^2 = 1156$	$44^2 = 1936$	$54^2 = 2916$
$25^2 = 625$	$35^2 = 1225$	$45^2 = 2025$	$55^2 = 3025$
$26^2 = 676$	$36^2 = 1296$	$46^2 = 2116$	$56^2 = 3136$
$27^2 = 729$	$37^2 = 1369$	$47^2 = 2209$	$57^2 = 3249$
$28^2 = 784$	$38^2 = 1444$	$48^2 = 2304$	$58^2 = 3364$
$29^2 = 841$	$39^2 = 1521$	$49^2 = 2401$	$59^2 = 3481$
$30^2 = 900$	$40^2 = 1600$	$50^2 = 2500$	$60^2 = 3600$

- Bedenk: $\boldsymbol{a^2 \times b^2 = (a \times b)^2}$ of korter geschreven: $\boldsymbol{a^2b^2 = (ab)^2}$.
  Met een kwadratentabel en deze regel kun je rekenen, bijvoorbeeld:
  $49 \times 64 = 3136$ (want $49 = 7^2$, $64 = 8^2$, $7 \times 8 = 56$ en $56^2 = 3136$)

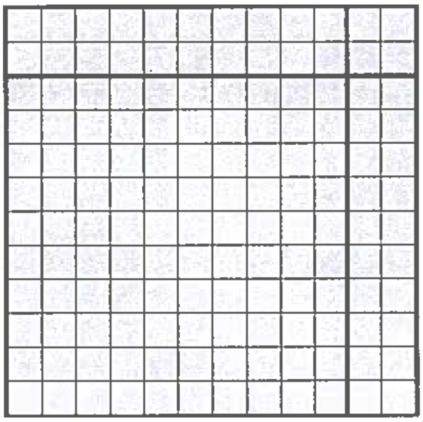
  Reken op een soortgelijke manier, via de tabel, uit:
  $36 \times 81 =$ ...., want ....
  $16 \times 121 =$ ...., want ....
  $16 \times 169 =$ ...., want ....

Kwadrateren met een plaatje





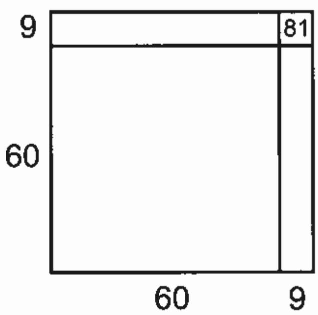
Voor de computertijd gebruikten drukkers een letterbak van 12 bij 12 vakjes. Op de vraag: hoeveel vakjes zitten er in zo'n letterbak gaf een jongen het antwoord 104. Het is echt gebeurd. In het wolkje zie je zijn redenering. In het plaatje hieronder kun je zien dat zijn oplossing hardstikke fout is.



- Leg uit hoe je dat kunt zien.

- Hoe zie je in het plaatje wat de goede uitkomst is?

- Gebruik onderstaande plaatje om het kwadraat van 69 uit te rekenen.



....
....
....
81
——— +
....

- Maak zelf een plaatje bij 73^2 en reken dit kwadraat daarmee uit.

Babylonisch vermenigvuldigen

Nog veel ouder dan de Griekse wiskunde is de wiskunde van de Babyloniërs. Op kleitabletten met een ouderdom van zo'n 3500 jaar zijn allerlei rekentabellen gevonden, zoals tafels van vermenigvuldiging, tabellen met omgekeerden van. getallen en van kwadraten. De Babyloniërs rekenden zestigtallig, zoals wij nu nog doen als we met uren, minuten en seconden rekenen.
Zo zijn er kleitabletten gevonden met alle kwadraten van 1 tot en met 60.
Die konden ook worden gebruikt bij het vermenigvuldigen van twee getallen die geen kwadraat zijn. Een voorbeeld, vertaald in ons stelsel:

Bereken: 18 × 23

Oplossing: 18 + 23 = 41

$41^2 = 1681$

$18^2 = 324$ *TABEL*

$23^2 = 529$

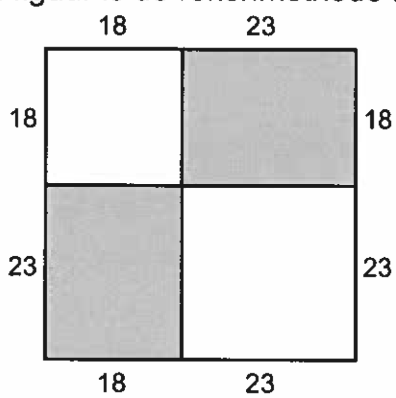
324 + 529 = 853

1681 – 853 = 828

de helft van 828 = 414

dit is de uitkomst van 18 × 23

- Controleer alle tussenstappen in de berekening met de kwadraten-tabel en ga na dat 414 inderdaad de goede uitkomst is van 18 × 23.
- Met behulp van een figuur is de rekenmethode te snappen:



- Leg met het plaatje uit waarom de Babylonische methode werkt.

- Bereken op de Babylonische manier: 27 × 32 en maak daar ook een plaatje bij.

Kwadraten met letters

a, *b* en *c* stellen onbekende positieve getallen voor.

- Vul in:

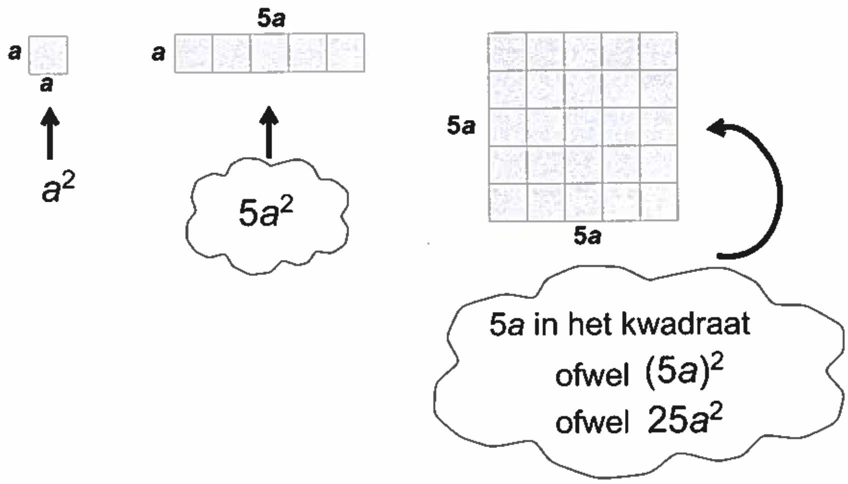
$$5a \xrightarrow{\textit{in het kwadraat}} 5a \times 5a = 5 \times 5 \times a \times a = 25a^2$$

$$11b \xrightarrow{\textit{in het kwadraat}} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$20c \xrightarrow{\textit{in het kwadraat}} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Er is verschil tussen '5a in het kwadraat' en '5a^2'

$5a^2$ betekent $a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + a^2$ ofwel $5 \times a^2$



- Schrijf zo kort mogelijk:

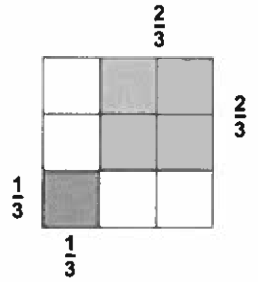
$6a^2 + (6a)^2 =$	$a^2 + (2b)^2 + (3a)^2 + 4b^2 =$ ....
$(11b)^2 - (9b)^2 =$	$(18b)^2 - (8c)^2 + 76b^2 =$ ....
$(15c)^2 - 5c^2 =$	$4a^2 - 3b^2 + 2c^2 + (3b)^2 + c^2 =$ ....

- Vul in: $49a^2$ is het kwadraat van ....
  $361b^2$ is het kwadraat van ....
  $441c^2$ is het kwadraat van ....

- Waar of niet waar?

$8a^2 + 6a^2 = 14a^2$	*waar/onwaar*
$(8a)^2 + (6a)^2 = (14a)^2$	*waar/onwaar*
$(8a)^2 + (6a)^2 = (10a)^2$	*waar/onwaar*

Kwadraten en breuken(1)

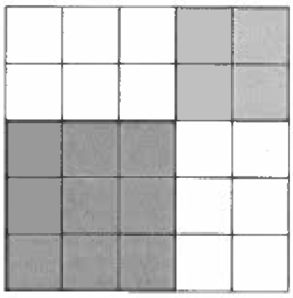


In het plaatje is te zien:

het kwadraat van $\frac{1}{3}$ is $\frac{1}{9}$ en het kwadraat van $\frac{2}{3}$ is $\frac{4}{9}$

- Leg uit hoe je dat kunt zien.

Bij het kwadraat van een breuk doe je er goed aan om haakjes te gebruiken!
Bijvoorbeeld: $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$
Als je de haakjes weglaat krijg je $\frac{2^2}{3}$ en dat kun je zien als $\frac{4}{3}$



- Welke kwadraten van breuken zie je in dit plaatje?

  En wat zijn de uitkomsten daarvan?

- Bereken: $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2$

  Ook: $\frac{3^2}{5} + \frac{4^2}{5}$

- Waar of onwaar ? *Als je een breuk wilt kwadrateren, kun je de teller én de noemer kwadrateren.*

- Vul in: $\frac{16}{81}$ is het kwadraat van ....

  $\frac{81}{16}$ is het kwadraat van ....

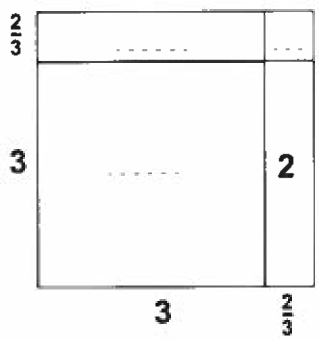
  $5\frac{1}{16}$ is het kwadraat van ....

- Bereken: $\left(\frac{3}{7}\right)^2$ Ook: $\left(2\frac{1}{3}\right)^2$

Kwadraten en breuken(2)

Twee manieren om het kwadraat van $3\frac{2}{3}$ uit te rekenen:

(I)



- Vul in:

$(3\frac{2}{3})^2 = \dots + \dots + \dots + \dots = \dots$

(II)

$3\frac{2}{3} = \frac{11}{3}$

- Vul in:

$(3\frac{2}{3})^2 = (\frac{11}{3})^2 = \frac{\dots}{\dots} = \dots$

- Bereken op twee manieren:

$(6\frac{1}{2})^2 \;;\; (3\frac{1}{3})^2 \;;\; (2\frac{1}{6})^2 \;;\; (1\frac{3}{4})^2 \;;\; (1\frac{5}{12})^2$

p en q stellen onbekende positieve getallen voor

- Schrijf zo kort mogelijk:

$(\frac{2}{3}p)^2 + \frac{5}{9}p^2 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$\frac{3}{8}q^2 + (\frac{1}{2}q)^2 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$(1\frac{1}{2}p)^2 + (2\frac{1}{2}q)^2 - (\frac{1}{2}p)^2 + \frac{3}{4}q^2 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$(\frac{5}{13}p)^2 + (\frac{15}{17}q)^2 + (\frac{12}{13}p)^2 + (\frac{8}{17}q)^2 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Kwadraten van halven

- Vul in:

$$\begin{array}{ll} (1\tfrac{1}{2})^2 = 2\tfrac{1}{4} & \\ & + \ldots \\ (2\tfrac{1}{2})^2 = \ldots & \\ & + \ldots \\ (3\tfrac{1}{2})^2 = \ldots & \\ & + \ldots \\ (4\tfrac{1}{2})^2 = \ldots & \\ & + \ldots \\ (5\tfrac{1}{2})^2 = \ldots & \end{array}$$

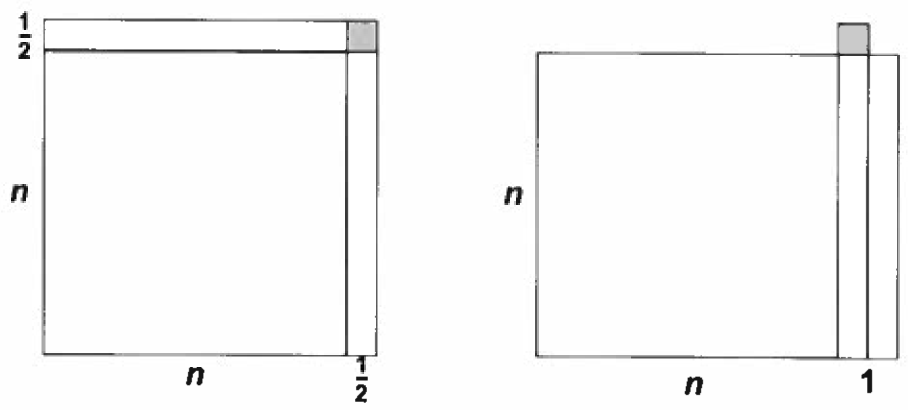
- Wander wil het kwadraat van $6\frac{1}{2}$ uitrekenen.
  Hij denkt: $6\frac{1}{2} \times 6\frac{1}{2}$ dat zal ongeveer gelijk zijn aan 6×7, dus 42.
  Hoeveel verschilt dat van $(6\frac{1}{2})^2$?

- Weet jij nu een snelle manier om $(7\frac{1}{2})^2$ uit te rekenen? Hoe?

- Laat n een positief geheel getal zijn.
  Bekijk de volgende formule:

$$(n + \tfrac{1}{2})^2 = n \cdot (n + 1) + \tfrac{1}{4}$$

  Die formule kun je uitleggen met een plaatje:
  Kijk maar!



- Vul in de formule 10 voor n in. Welk kwadraat met uitkomst krijg je?

- Bereken uit je hoofd $(99\frac{1}{2})^2$

Kwadraten en kommagetallen

- Vul passende getallen in:

$0{,}15^2 =$	$1{,}5^2 =$	$15^2 =$ 225	$150^2 =$	$1500^2 =$

.... × ... .

- Vul in (gebruik de kwadratentabellen van bladzijden 24 en/of 26)

$2{,}4^2 =$ .... $4{,}2^2 =$ .... $0{,}012^2 =$ ....

$0{,}17^2 =$ .... $0{,}33^2 =$ .... $5{,}8^2 =$ ....

- Waar of niet waar?

$0{,}1^2 = 0{,}001$	*waar/onwaar*	$2{,}6^2 + 2{,}4^2 = 5^2$	*waar/onwaar*
$0{,}11^2 = 0{,}0121$	*waar/onwaar*	$2{,}6^2 - 2{,}4^2 = 0{,}04$	*waar/onwaar*
$0{,}111^2 = 0{,}1331$	*waar/onwaar*	$2{,}6^2 - 2{,}4^2 = 1$	*waar/onwaar*

- Hoe kun je $8{,}5^2$ snel uitrekenen met de regel op de vorige bladzij?

  Geef nu ook - zonder te rekenen! - de uitkomst van $0{,}85^2$.

a, *b* en *c* stellen onbekende positieve getallen voor

- Schrijf zo kort mogelijk:

$(0{,}3a)^2 + (0{,}1a)^2 =$

$(0{,}3a + 0{,}1a)^2 =$

$(0{,}2b)^2 + (1{,}4b)^2 =$

$0{,}2b^2 + 1{,}4b^2 =$

$(0{,}24c)^2 + (0{,}7c)^2 - (0{,}25c)^2 =$

$0{,}24c^2 + 0{,}7c^2 - 0{,}25c^2 =$

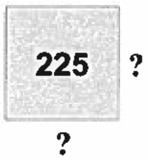
- Vul passende kommagetallen in op de plaats van de stippen:

$(.......a)^2 = 6{,}25a^2$

$(.......b)^2 + (0{,}8b)^2 = b^2$

$(2{,}9c)^2 - (.......c)^2 = (2c)^2$

Kwadraten en wortels



De oppervlakte van een vierkant grasveld is 225 m^2

- Hoe lang en hoe breed is dat veld?

Het bepalen van een getal, waarvan het kwadraat bekend is, wordt *worteltrekken* genoemd.

In plaats van *144 is het kwadraat van 12* kun je zeggen:

de wortel uit 144 is 12

Je schrijft dit kort als:

$$\sqrt{144} = 12$$

- Vul in:

$\sqrt{100} = \ldots$ $\quad\sqrt{81} = \ldots$ $\quad\sqrt{1} = \ldots$

$\sqrt{121} = \ldots$ $\quad\sqrt{400} = \ldots$ $\quad\sqrt{625} = \ldots$

- Vul in (gebruik zo nodig de tabel op bladzijde 24 of 26)

$\sqrt{169} = \ldots$ $\quad\sqrt{1024} = \ldots$ $\quad\sqrt{3025} = \ldots$

$\sqrt{961} = \ldots$ $\quad\sqrt{1681} = \ldots$ $\quad\sqrt{3136} = \ldots$

- Hoe groot is de wortel uit 1 miljoen?
  En uit 1 biljoen?

- Vul in:

$\sqrt{\frac{1}{4}} = \ldots$ $\quad\sqrt{\frac{4}{9}} = \ldots$ $\quad\sqrt{0,25} = \ldots$

$\sqrt{6\frac{1}{4}} = \ldots$ $\quad\sqrt{\frac{49}{64}} = \ldots$ $\quad\sqrt{12,25} = \ldots$

- Vul in (*a*, *b* en *c* stellen positieve getallen voor):

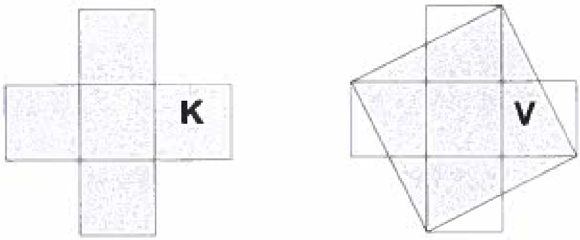
$\sqrt{37^2} = \ldots$ $\quad\sqrt{4b^2} = \ldots$ $\quad\sqrt{100a^2} = \ldots$

$\sqrt{a^2} = \ldots$ $\quad\sqrt{9c^2} = \ldots$ $\quad\sqrt{0,01b^2} = \ldots$

- Bedenk zelf zes 'wortelsommen' en geef de uitkomsten erbij

Wortel 5 komt niet mooi uit(1)

In de figuur hieronder zie je een kruis K en een vierkant V. Met een beetje puzzelen kun je zien dat K en V een even grote oppervlakte hebben. De oppervlakte van K is 5 cm^2. Dat is dus ook de oppervlakte van V.



De vraag is nu: hoeveel cm is een zijde van het vierkant V?

- Meet eerst een zijde van V.
  Zie je dat die tussen 2,2 en 2,3 cm is?

  Je zou kunnen denken dat de lengte precies midden tussen 2,2 en 2,3 cm is, dus 2,25 of $2\frac{1}{4}$ cm.
- Bereken het kwadraat van $2\frac{1}{4}$
  Wat denk je nu: is de zijde van V groter dan, gelijk aan of kleiner dan $2\frac{1}{4}$? Waarom?

- Hoe kun je door *berekening* laten zien dat de zijde van V groter is dan $2\frac{1}{5}$?

Uit de laatste twee berekeningen volgt: $2\frac{1}{5} < \sqrt{5} < 2\frac{1}{4}$

We zeggen dat $2\frac{1}{5}$ een *onderschatting* en $2\frac{1}{4}$ een *bovenschatting* is van het getal $\sqrt{5}$

Een betere onderschatting van $\sqrt{5}$ is het getal $2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4}}$

Zo'n samengestelde breuk wordt een *kettingbreuk* genoemd.

- Ga na dat die kettingbreuk gelijk is aan de *enkelvoudige* breuk $\frac{38}{17}$
  Het kwadraat van deze breuk lig erg dicht bij 5.
  Controleer dit door berekening.

- Reken de kettingbreuk $2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4}}}$ om naar een enkelvoudige breuk en ga na dat dit een betere bovenschatting van $\sqrt{5}$ is dan $2\frac{1}{4}$

  Hint: bij het berekenen van een kettingbreuk begin je onderaan!

Wortel 5 komt niet mooi uit(2)

Je kunt het geloven of niet, maar de kettingbreuken

$2+\frac{1}{4}$ $\quad 2+\cfrac{1}{4+\frac{1}{4}}$ $\quad 2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\frac{1}{4}}}$ $\quad 2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\frac{1}{4}}}}$ enzovoort

geven steeds betere schattingen van het getal $\sqrt{5}$

Die schattingen zijn afwisselend iets te groot en iets te klein.
Dit proces houdt nooit op.
Men schrijft daarom wel

$$\sqrt{5} = 2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\dots}}}}$$

de stippeltjes betekenen dat dit oneindig doorgaat.
Op bladzijde 49 wordt uitgelegd waarom die kettingbreuk nooit eindigt en *en hoe we aan die kettingbreuk* gekomen zijn.

- Toets in op je rekenmachientje: $\sqrt{5}$
  Je krijgt als antwoord een aantal cijfers achter de komma.
  Schrijf de uitkomst hier op: ....

Dat deze uitkomst niet 100 % nauwkeurig is kun je begrijpen als je van dit kommagetal een kettingbreuk maakt.
Dit is nog een flinke klus, maar het gaat om het principe en daarom doen we even net of je rekenmachientje niet meer dan 3 decimalen achter de komma geeft. Er zou dan komen:

$$\sqrt{5} = 2,236$$

Van 2,236 kan een kettingbreukworden gemaakt.
Het begin gaat zo:

$$2,236 = 2+\frac{236}{1000} = 2+\cfrac{1}{\frac{1000}{236}} = 2+\cfrac{1}{4+\frac{56}{236}} = 2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\dots}}$$

- Reken na dat er ten slotte komt: $2,236 = 2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\frac{1}{7}}}}$

*Een kettingbreuk met **vier** verdiepingen. Als je een uitkomst met meer cijfers achter de komma neemt en die omwerkt tot een kettingbreuk, krijg je meer verdiepingen, maar het stopt wel.*

Waarom is wortel 5 geen breuk?

Hier volgt een **BEWIJS** dat $\sqrt{5}$ *niet* gelijk kan zijn aan een *gewone* breuk.

NB. *Een gewone breuk is een breuk met in teller en noemer een geheel getal.*

$$\boxed{\text{Stel } \sqrt{5} = \frac{m}{n} \quad \text{(A)}}$$

Hierbij zijn m en n gehele getallen.
Stel ook dat de breuk niet verder vereenvoudigd kan worden,
dat wil zeggen dat m en n niet door eenzelfde getal deelbaar zijn (B).

- Verklaar waarom uit (A) volgt:

$$\boxed{5 \cdot n^2 = m^2 \quad \text{(C)}}$$

- Uit (C) volgt: m^2 is een getal dat eindigt op het cijfer ... of ...
- Zie ook bladzijde 26 en verklaar waarom m deelbaar door 5 moet zijn.

We kunnen dus schrijven: $m = 5 \cdot k$, waarbij k een geheel getal is.

- Verklaar nu uit (C): $5 \cdot k^2 = n^2$ en ook: n is deelbaar door 5

Je hebt nu gevonden dat m en n zijn allebei deelbaar door 5 zijn,
maar dat is in strijd met (B) !

Omdat iedere gewone breuk gelijkwaardig is met een breuk die niet verder is te vereenvoudigen, kan $\sqrt{5}$ onmogelijk gelijk zijn aan een gewone breuk!

Wortels die niet mooi uitkomen

Het is nu zeker dat $\sqrt{5}$ geen gewone breuk en ook geen eindige kettingbreuk en ook geen eindig kommagetal kan zijn !
Dat geldt voor alle wortels waarbij het getal onder het wortelteken niet het kwadraat is van een heel getal of van een gewone breuk.

- Welke van de wortels komen niet mooi uit?
  Geef van die wortels een benadering in twee decimalen achter de komma.

  $$\sqrt{1},\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{4},\ \sqrt{5},\ \sqrt{6},\ \sqrt{7},\ \sqrt{8},\ \sqrt{9},\ \sqrt{10}$$

- Tussen welke twee opvolgende hele getallen ligt $\sqrt{1000}$?
  Raadpleeg eventueel bladzijde 27.

- Welke van de wortels

  $$\sqrt{10},\ \sqrt{100},\ \sqrt{1000},\ \sqrt{10000},\ \sqrt{100000},\ \sqrt{1000000}$$

  komen mooi uit (ofwel: zijn gelijk aan een heel getal)?

- Bedenk een regel voor het al of niet mooi uitkomen van de wortel uit een getal van de vorm 10 ... 0 (een 1 met een aantal nullen)

- Bekijk op je rekenmachientje de 'uitkomsten' van

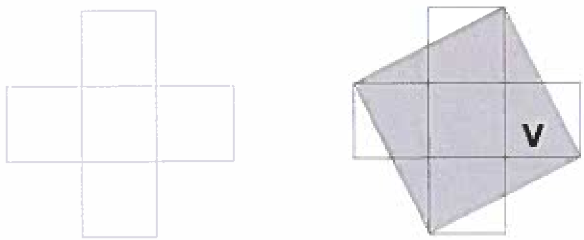
  $$\sqrt{5},\ \sqrt{50},\ \sqrt{500},\ \sqrt{5000},\ \sqrt{50000},\ \sqrt{500000}$$

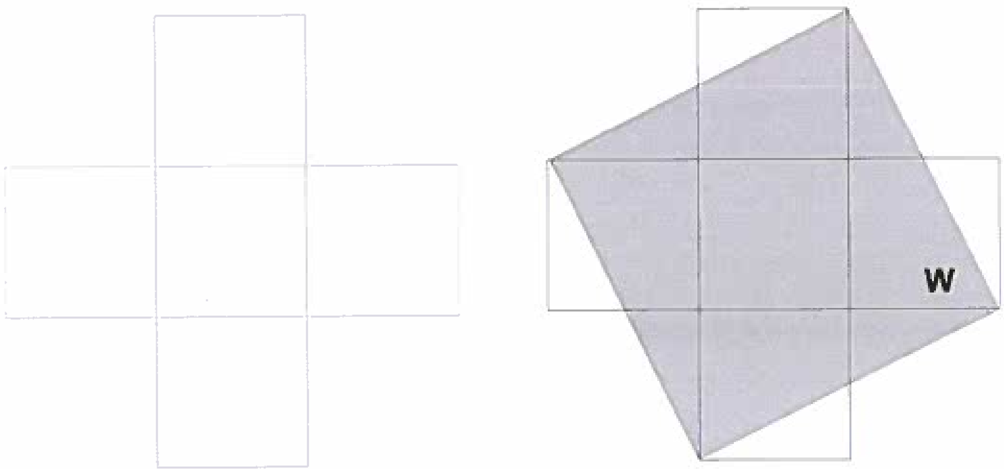
  Welk patroon ontdek je?

- Gebruik geen rekenmachientje bij de volgende vraag:
  hoe groot is $\sqrt{5000000}$ afgerond op een heel getal?

- Voor n = 17, 18, ..., 24 ligt $\sqrt{n}$ tussen 4 en 5.
  Geef de plaats van die acht wortels nauwkeurig aan op de getallenlijn.

Wortels die niet mooi uitkomen





De lijnstukken in het onderste kruis zijn 2 keer zo lang als in het bovenste.

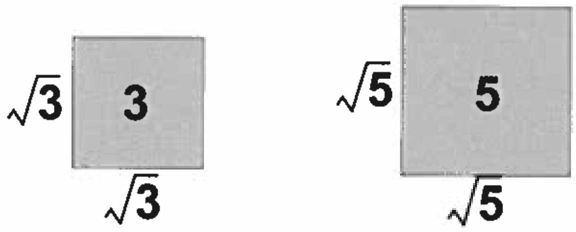
- Vul passende getallen in:
  de zijde van W is ..... keer zo groot als de zijde van V
  de oppervlakte van W is ...... keer zo groot als die van V

- Bewering: $\sqrt{20}$ is gelijk aan $2 \times \sqrt{5}$ (of korter: $2\sqrt{5}$)
  Hoe kun je dat snappen met hulp van de bovenstaande figuren?

- Stel je voor dat je de zijden van het bovenste kruis met het vierkant V 3 keer zo groot maakt. Hoe groot wordt dan de oppervlakte van het nieuwe vierkant? .... Vul nu in: $\sqrt{\ldots} = 3 \times \sqrt{\ldots}$

- Waar of onwaar?
  $\sqrt{5} + \sqrt{20} = \sqrt{25}$ ....
  $\sqrt{5} + \sqrt{20} = \sqrt{45}$ ....

Wortels vermenigvuldigen



Van een vierkant met oppervlakte 3 zijn de zijden $\sqrt{3}$

Kortweg: $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$ Nog iets korter: $(\sqrt{3})^2 = 3$

- Vul in: $(\sqrt{5})^2 = \ldots$ $(\sqrt{15})^2 = \ldots$

ALGEMENE REGEL:

$$\boxed{\sqrt{a} \times \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a}$$

Hierin stelt *a* een *positief* getal voor.

In woorden:

$\sqrt{a}$ in het kwadraat genomen geeft de uitkomst ***a*** .

- Klopt de regel ook voor $a = 0$?
- Vul in: $(\sqrt{3} \times \sqrt{5})^2 = (\ldots)^2 \times (\ldots)^2 = \ldots \times \ldots = \ldots$

  Verklaar hieruit: $\sqrt{3} \times \sqrt{5} = \sqrt{15}$

- Leg uit waarom geldt: $\sqrt{2} \times \sqrt{11} = \sqrt{22}$

ALGEMENE REGEL VOOR HET VERMENIGVULDIGEN VAN WORTELS:

$$\boxed{\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}}$$

- Waar of onwaar?

$\sqrt{2} \times \sqrt{18} = 6$ waar/onwaar $\sqrt{5} \times \sqrt{7} = \sqrt{12}$ waar/onwaar

$\sqrt{5} \times \sqrt{7,2} = 6$ waar/onwaar $\sqrt{10} \times \sqrt{1000} = 100$ waar/onwaar

Wortels vermenigvuldigen

- Vul in:

$\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \ldots$	$3\sqrt{2} \times 2\sqrt{3} = \ldots$
$\sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{5} = \ldots$	$2\sqrt{2} \times 3\sqrt{3} = \ldots$
$\sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{6} = \ldots$	$2\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} = \ldots$

- Vul de vermenigvuldigingstabel in: wortelvormen of (waar mogelijk) hele getallen.

$\times$	$5\sqrt{2}$	$2\sqrt{5}$	$\sqrt{7}$	7
$\sqrt{2}$				
$\sqrt{5}$				
3				
$3\sqrt{5}$				

- Dezelfde opdracht voor:

$\times$	$\sqrt{3}$			$7\sqrt{3}$
$\sqrt{10}$		$\sqrt{70}$	$\sqrt{90}$	
	$2\sqrt{3}$			
	$\sqrt{6}$			
				21

Soms kun je bij wortels een heel getal voor het wortelteken brengen.

Voorbeeld: $\sqrt{90} = \sqrt{9 \times 10} = \sqrt{9} \times \sqrt{10} = 3 \times \sqrt{10} = 3\sqrt{10}$

- Breng een zo groot mogelijk heel getal voor het wortelteken bij:

$\sqrt{72} =$ $\sqrt{75} =$

$\sqrt{300} =$ $\sqrt{1200} =$

Wortels optellen en aftrekken

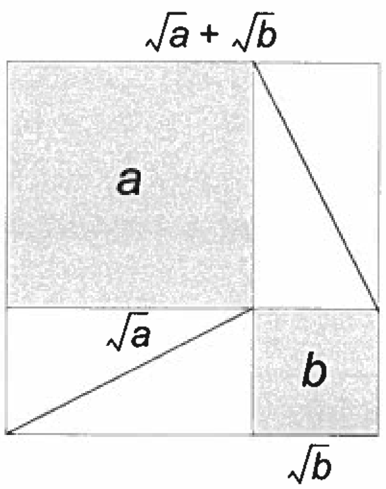
- $2 + 2 = 4$, maar wat denk je van $\sqrt{2} + \sqrt{2} = \sqrt{4}$?

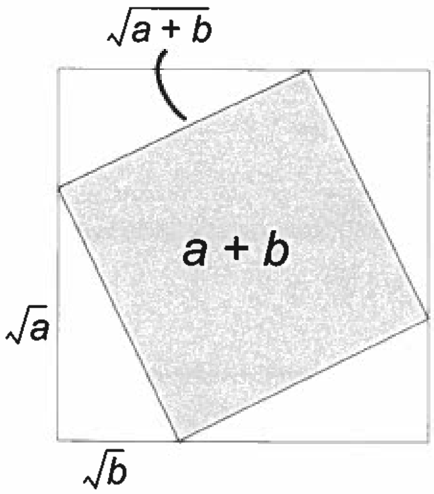
- Wat is groter: $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ of $\sqrt{5}$? (Gebruik je rekenmachientje)

- Verklaar: $\sqrt{4} + \sqrt{9} > \sqrt{13}$? (Zonder rekenmachientje)

Algemene regel: $\boldsymbol{\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}}$

a en *b* stellen willekeurige *positieve* getallen voor.





Verklaring: het vierkant met zijde $\sqrt{a} + \sqrt{b}$

heeft een oppervlakte *groter* dan $a + b$

en

het vierkant met oppervlakte *gelijk aan* $a + b$

heeft de zijde $\sqrt{a+b}$

- Wat is groter: $\sqrt{16+9}$ of $\sqrt{16} + \sqrt{9}$?
  Verklaar je antwoord.

- Zelfde vraag voor: $\sqrt{16-9}$ en $\sqrt{16} - \sqrt{9}$

Wortels optellen en aftrekken

Sommen en verschillen van wortels kunnen meestal niet worden vereenvoudigd. Als het niet gaat om een benadering van de getalswaarde, laten we de wortelvormen vaak gewoon staan.

Een paar voorbeelden:

$\sqrt{4} + \sqrt{5} = 2 + \sqrt{5}$, dit kan niet verder worden vereenvoudigd

En met $\sqrt{3} + \sqrt{6}$ kun je helemaal niets meer beginnen.

Nu een voorbeeld waarbij je wèl kunt vereenvoudigen: $\sqrt{8} + \sqrt{18}$

- Ga na dat $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ en $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

  Conclusie: $\sqrt{8} + \sqrt{18} = 5\sqrt{2}$

- Vereenvoudig zoveel mogelijk:

  $\sqrt{8} + \sqrt{32} =$

  $\sqrt{32} + \sqrt{50} =$

  $\sqrt{12} + \sqrt{27} =$

  $\sqrt{48} - \sqrt{27} =$

  $\sqrt{27} + \sqrt{81} =$

  $\sqrt{50} - \sqrt{49} =$

- Schrijf zo kort mogelijk:

  $\sqrt{5} + \sqrt{50} + \sqrt{500} + \sqrt{5000} + \sqrt{50000} + \sqrt{500000}$

- Waar of onwaar?

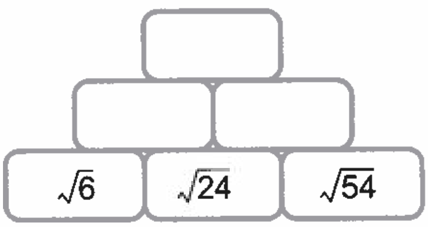
  $\sqrt{24} + \sqrt{54} = \sqrt{78}$

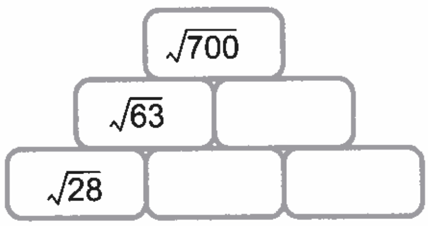
  $\sqrt{54} - \sqrt{24} = \sqrt{6}$

  $\sqrt{63} - \sqrt{28} = \sqrt{35}$

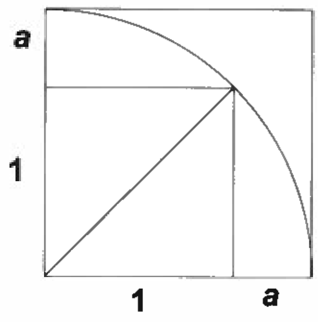
  $\sqrt{700} - \sqrt{63} = \sqrt{343}$

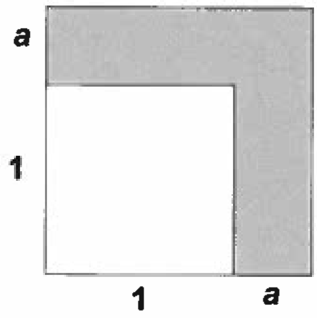
- Twee 'wortelmuurtjes'. De wortel op een steen moet gelijk zijn aan de som van de wortels op de twee dragende stenen eronder.





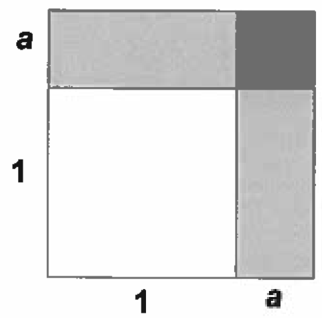
Lengte en oppervlakte



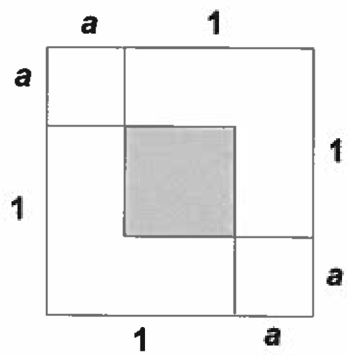


Het vierkant met zijde 1 is vergroot. In het linkerplaatje zie je hoe dat met de passer is uitgevoerd.

- $a = \sqrt{2} - 1$. Verklaar dit.
- Hoe groot is de oppervlakte van de grijze winkelhaak?
- Laat zien dat de oppervlakte van het kleine vierkant rechts boven gelijk is aan $3 - 2\sqrt{2}$

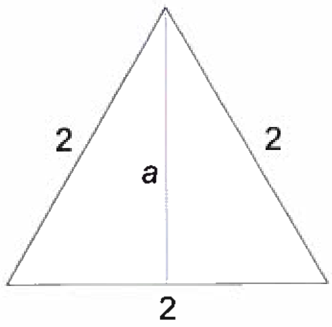


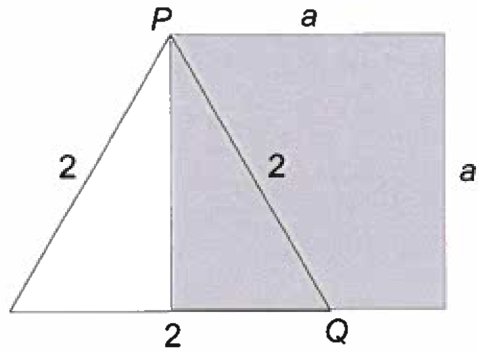
- Bereken de oppervlakte van het grijze vierkant.



- Hoe lang zijn de zijden van dit grijze vierkant?

Lengte en oppervlakte

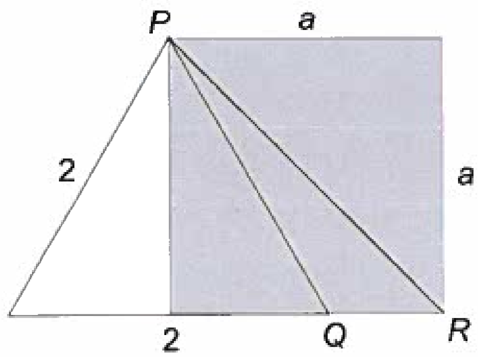




- Bereken *a* en de oppervlakte van de gelijkzijdige driehoek.

- Bereken de oppervlakten van de twee delen waarin het vierkant met zijde *a* door de lijn *PQ* wordt verdeeld.

- Bereken de lengte van *PR* en ook de oppervlakte van driehoek *PQR*.



Wortelvormen vermenigvuldigen

$$3 \cdot (\sqrt{2} - 1) = 3\sqrt{2} - 3$$
$$\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} - 1) = 2 - \sqrt{2}$$
$$\underline{\hspace{8cm}} +$$
$$(3 + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2} - 1) = 2\sqrt{2} - 1$$

- Werk uit:

$(3 + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2} + 1) =$

$(2 + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{3} + 1) =$

$(2 + \sqrt{3}) \cdot (3 + \sqrt{2}) =$

$(2 + \sqrt{5}) \cdot (3\sqrt{5} - 1) =$

$(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot (1 + \sqrt{6}) =$

- Bereken:

$(2 + \sqrt{3}) \cdot (2 - \sqrt{3}) =$

$(\sqrt{5} - 2) \cdot (\sqrt{5} + 2) =$

$(\sqrt{2} + 1) \cdot (\sqrt{2} - 1) =$

$(\sqrt{6} + \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{5}) =$

$(10 + 3\sqrt{11}) \cdot (10 - 3\sqrt{11}) =$

- Bereken het kwadraat van:

$\sqrt{2} + 1$

$\sqrt{3} - 2$

$\sqrt{5} + \sqrt{2}$

$1 - \sqrt{6}$

Rekenen met wortelvormen

- Vul passende wortelvormen in, zo eenvoudig mogelijk

$\sqrt{3} + \sqrt{15}$ | $3 - \sqrt{5}$ | $\sqrt{3}$ | $2 + \sqrt{5}$

$\times$ | $\times$

$+$

$\sqrt{200} - \sqrt{45}$ | $\sqrt{80} - \sqrt{162}$ | $\sqrt{180} - \sqrt{2}$ | $\sqrt{80} - \sqrt{162}$

$+$ | $+$

$\times$

- Vereenvoudig:

$\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{32} + \sqrt{128} + \sqrt{512} + \sqrt{2048}$

$\sqrt{5} \times \sqrt{10} \times \sqrt{20} \times \sqrt{40} \times \sqrt{80} \times \sqrt{160}$

$\sqrt{2} \times \sqrt{3} + \sqrt{8} \times \sqrt{12} + \sqrt{32} \times \sqrt{48}$

Wortels en kettingbreuken(1)

- Leg uit waarom geldt: $(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2) = 1$

Als het product van twee getallen gelijk is aan 1, dan noemen we die getallen *elkaars omgekeerde.*

In dit geval kun je schrijven: $\sqrt{5}-2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}+2}$

Of ook: $\boxed{\sqrt{5} = 2 + \dfrac{1}{2+\sqrt{5}}}$

Nu komt het: *je kunt als je in een vorm* $\sqrt{5}$ *tegenkomt, dit*

dit vervangen door $2+\frac{1}{2+\sqrt{5}}$

Dat kan dus ook in het rechterlid van de gelijkheid in het kader!

Er komt dan:

$$\sqrt{5} = 2 + \cfrac{1}{2+2+\cfrac{1}{2+\sqrt{5}}} = 2 + \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\sqrt{5}}}$$

Maar dit kun je herhalen

$$\sqrt{5} = 2 + \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+2+\cfrac{1}{2+\sqrt{5}}}} = 2 + \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\sqrt{5}}}}$$

En herhalen

$$\sqrt{5} = 2 + \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\sqrt{5}}}}}$$

Er komt geen eind aan ....

We schrijven dan:

$$\boxed{\sqrt{5} = 2 + \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\dots}}}}}}$$

*Dit is een **oneindige en repeterende kettingbreuk**.*

Wortels en kettingbreuken(2)

- Laat zien hoe uit $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 1$ volgt dat

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}}$$

- Hoe kun je verklaren dat:

$$\sqrt{10} = 3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6 + \dots}}}}$$

- Een wonderlijke formule. Klopt die wel? Waarom?

$$\left(1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}}\right) \times \left(2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \dots}}}}\right) = 3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6 + \dots}}}}$$

Vierkantswortels zijn positief

$\begin{array}{r} 12 \\ 12 \\ \hline 144 \end{array} \times$	$\begin{array}{r} -12 \\ -12 \\ \hline 144 \end{array} \times$

Er zijn precies *twee* getallen waarvan het kwadraat gelijk is aan 144.

Toch is de afspraak: $\sqrt{144} = 12$

DUS NIET $\sqrt{144} = 12$ of $\sqrt{144} = -12$

- Stel je voor dat de wortel uit 144 twee uitkomsten had, 12 en −12. Dan zou bijvoorbeeld de wortel uit 81 ook twee uitkomsten hebben. Welke? ....
- Hoeveel mogelijke uitkomsten zou dan $\sqrt{144} + \sqrt{81}$ hebben?

  Welke ? ....
- En hoeveel mogelijke uitkomsten zou dan $\sqrt{144} + \sqrt{81} + \sqrt{36}$ hebben?

Je begrijpt nu wel waarom het geen goed idee is om aan een wortel twee uitkomsten te geven.

Maar ... de vergelijking $x^2 = 144$ heeft wel **twee** oplossingen: 12 en −12.
Dat geldt bijvoorbeeld ook voor de vergelijking $x^2 = 145$.
Omdat de wortel uit 145 niet mooi uitkomt, noteren we die oplossingen als $\sqrt{145}$ en $-\sqrt{145}$

$$\boxed{\begin{array}{c} x^2 = 145 \\ \downarrow \\ x = \sqrt{145} \text{ of } x = -\sqrt{145} \end{array}}$$

- Wat zijn de oplossingen van $x^2 = 169$?

- Vul in: $x^2 = 200 \longrightarrow x =$ .... of $x =$ ....

Vergelijkingen(1)

- Vul in:

$x^2 = 100 \longrightarrow x = \ldots\ldots\ldots\ldots$ of $x = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$(x+1)^2 = 100 \longrightarrow x = \ldots\ldots\ldots\ldots$ of $x = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$(x-2)^2 = 100 \longrightarrow x = \ldots\ldots\ldots\ldots$ of $x = \ldots\ldots\ldots\ldots$

- De vergelijkingen $(x-2)^2 = 100$ en $x^2 = 144$ hebben één gemeenschappelijke oplossing. Welke?

- Dezelfde vraag voor: $(x+3)^2 = 169$ en $x^2 = 256$

- En ook voor: $(x-7)^2 = 169$ en $(x+7)^2 = 1$

- Los x op uit:

$(x-11)^2 = 121$

$(x-10)^2 - 1 = 120$

$(x-22)^2 = 1444$

$(x+28)^2 + 56 = 1500$

$(x-100)^2 = 10201$

$3(x+100)^2 = 30603$

$5(x-999)^2 = 5000000$

$4(x-95)^2 - 100 = 2400$

Vergelijkingen(2)

Voorbeeld:

$$(x-1)^2 = 5$$

$$\downarrow$$

$$x-1=\sqrt{5} \quad \text{of} \quad x-1=-\sqrt{5}$$

$$\downarrow$$

$$x = 1+\sqrt{5} \quad \text{of} \quad x = 1-\sqrt{5}$$

- Los x op uit:

$(x-2)^2 = 6$

$(x+3)^2 = 10$

$(2x+1)^2 = 16$

- Los y op uit:

$(y-\sqrt{2})^2 = 2$

$(y+\sqrt{2})^2 = 8$

$(y+\sqrt{3})^2 = 27$

$(y-\sqrt{3})^2 = 25$

- Los z op uit:

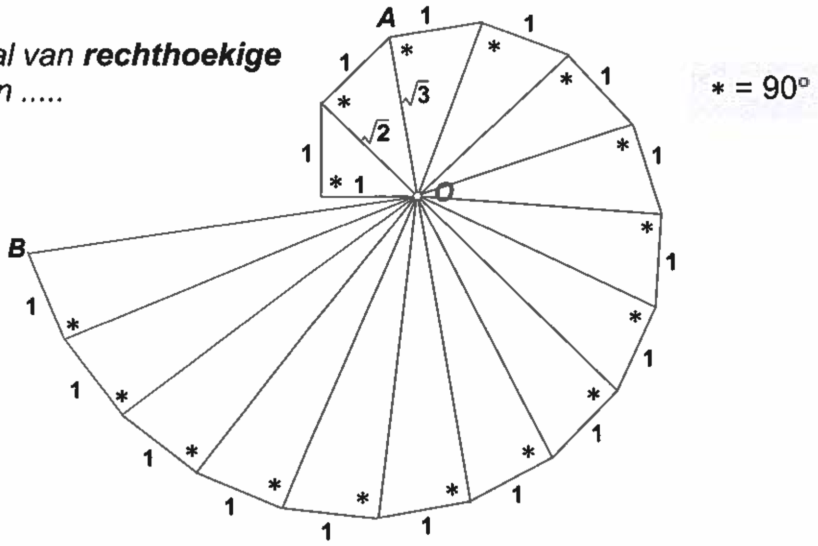
$(2z-5)^2 = 16$

$(z^2-5)^2 = 16$

$(z^2-1)^2 = 64$

Een spiraal en een nomogram

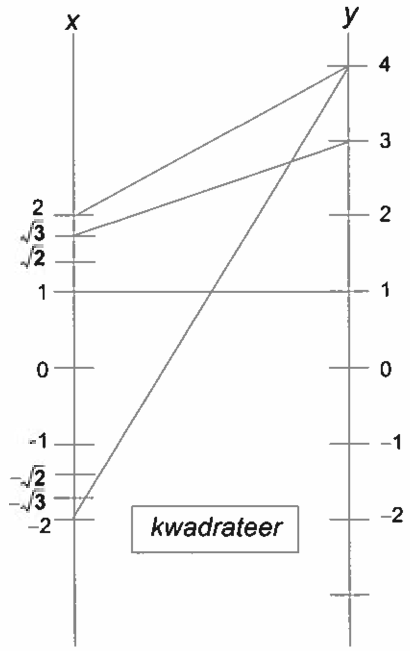
Een spiraal van ***rechthoekige*** *driehoeken .....*



- Leg uit waarom OA de lengte $\sqrt{3}$ heeft.

- Hoe lang is OB?

Wortels die niet mooi uitkomen, kun je precies plaatsen op een getallenlijn, zoals in de figuur hieronder is gebeurd.
Die figuur is een *nomogram* bij de bewerking *kwadrateren*.



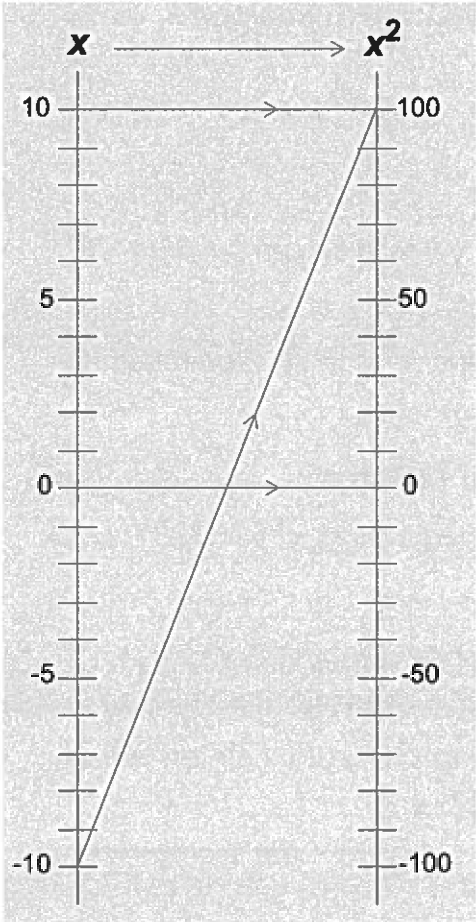
- Teken de verbindingen vanuit de streepjes op de x-lijn.

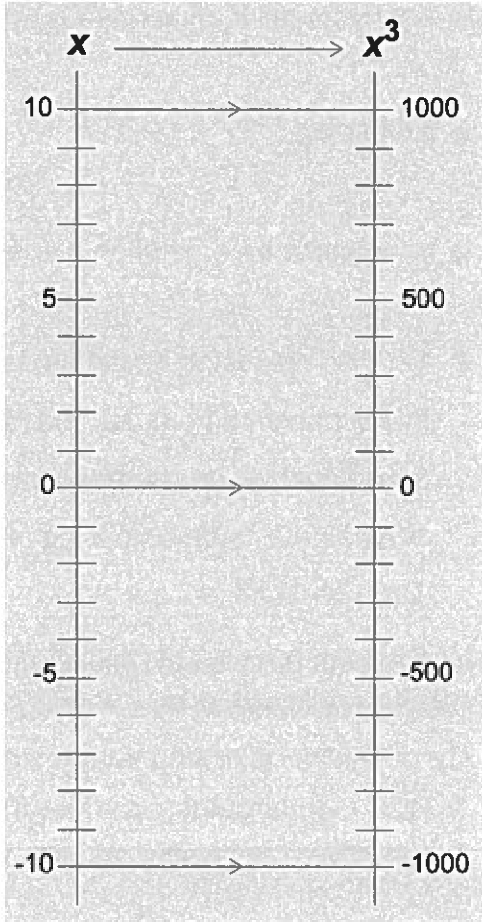
- Zijn er ook verbindingslijntjes die eindigen onder 0 op de y-lijn? Waarom?

De getallen op een getallenlijn worden *reële getallen* genoemd.
En er geldt:
Er is geen enkel reëel getal waarvan het kwadraat negatief is!

- Leg uit waarom de vergelijking $(x - 1)^2 + 5 = 0$ geen (reële) oplossingen heeft.

Twee nomogrammen





Naast elkaar staan de nomogrammen die horen bij de bewerkingen ''*kwadrateer*' en '*neem de derde macht*'.

- Teken in het nomogram van $x \to x^2$ de pijlen vanuit 5 en -5.
  Ook (zo nauwkeurig als je kunt) de pijlen die aankomen in 50 en -50.

- Teken in het nomogram van $x \to x^3$ de pijlen vanuit 5 en -5.
  Ook (zo nauwkeurig als je kunt) de pijlen die aankomen in 500 en -500.

- De twee nomogrammen zijn van een verschillend type.
  Hoe zou je dit verschil omschrijven?

- Stel je een nomogram van $x \to x^4$ voor. Van welk type is dat, het linker of het rechter?

Hogere-machtswortels

- Is er verschil in uitkomst tussen $(-5)^2$ en -5^2 ? Waarom?

- En tussen $(-5)^3$ en -5^3 ?

- Voor welke hele getallen n is er *geen* verschil tussen $(-5)^n$ en -5^n ?

- 12 is de oplossing is van de vergelijking $x^3 = 1728$. Controleer dit.

  We schrijven dit ook zo: $\sqrt[3]{1728} = 12$

  Spreek uit: *de derde-machtswortel uit 1728 is 12.*

  Welke getal is de oplossing van de vergelijking $x^3 = -1728$?

  Dus $\sqrt[3]{-1728} = \ldots$

- Hoeveel (en welke) oplossingen heeft de vergelijking $x^4 = 81$?

De positieve oplossing van de vergelijking $x^4 = 3125$, noteren we als $\sqrt[4]{3125}$, en er geldt (controleer!) $\sqrt[4]{3125} = 5$
De negatieve oplossing noteren we als $-\sqrt[4]{3125}$, dat is gelijk aan -5.

- Net als *tweede-machtswortels* (ofwel *vierkantswortels*) komen hogere-machtswortels meestal niet mooi uit.
  Welke van de volgende derde-machtswortels komen mooi uit?

  $\sqrt[3]{10} \quad \sqrt[3]{100} \quad \sqrt[3]{1000} \quad \sqrt[3]{10000} \quad \sqrt[3]{100000} \quad \sqrt[3]{1000000}$

- De volgende hogere-machtswortels komen mooi uit.
  Vul die 'mooie' uitkomsten in:

  $\sqrt[3]{125} = \ldots \quad \sqrt[3]{-27} = \ldots \quad \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \ldots \quad \sqrt[4]{1} = \ldots \quad \sqrt[4]{16} = \ldots$

- Bedenk zelf een zesde-machtswortel die mooi uitkomt.

Vergelijkingen met hogere machten

- Los x op uit:

$$(x^3 - 1)^2 = 49$$

$$(x^2 - 1)^3 = 343$$

$$(2x^2 + 1)^3 = -343$$

- Los y op uit:

$$[(y-2)^2 - 16]^2 = 81$$

$$[(y+2)^3 - 17]^3 = 1000$$

$$[(y+2)^2 - 5]^3 = -1$$

- Vier vergelijkingen. Er is één getal dat aan alle vier voldoet.
  Welk getal is dat?

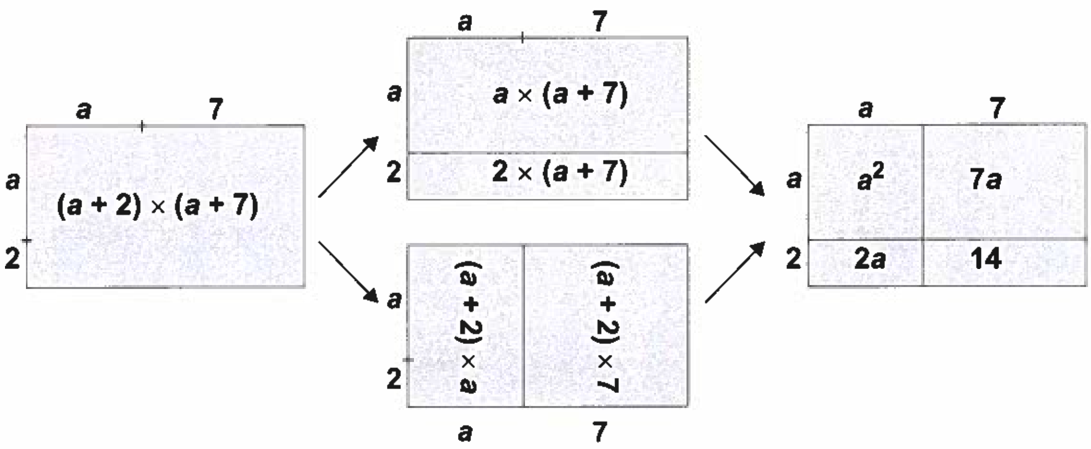
$$\boxed{w^2(w^2 - 10) = 96}$$

$$\boxed{w^3 = \frac{1024}{w^2}}$$

$$\boxed{(w-3)^{10} = 1}$$

$$\boxed{4w^3 + 80 = 400 - w^3}$$

Vormen vermenigvuldigen



De figuur laat zien hoe je op twee manieren en in twee stappen de *tweetermen* $a + 2$ en $a + 7$ met elkaar kunt vermenigvuldigen.

Zonder plaatjes gaat dit zo (de *maaltekens* zijn weggelaten):

(I) $(a + 2)(\mathbf{a + 7}) = a(\mathbf{a + 7}) + 2(\mathbf{a + 7}) = a^2 + 7a + 2a + 14$

(II) $(\mathbf{a + 2})(a + 7) = (\mathbf{a + 2})a + (\mathbf{a + 2})7 = a^2 + 2a + 7a + 14$

$= a^2 + 9a + 14$

- Vermenigvuldig op deze twee manieren: $x + 4$ en $x - 5$

- Ook: $y - 4$ en $y - 6$

- Ook: $x - 10$ en $x + 10$

- Ook: $x - 10$ en $y + 10$

Vormen vermenigvuldigen

Het vermenigvuldigen van twee tweetermen kan ook op deze manier, onder elkaar dus.

$$\begin{array}{rl} a + 7 & \\ a + 2 & \\ \hline 2a + 14 & \times \\ a^2 + 7a & \\ \hline a^2 + 9a + 14 & + \end{array}$$

- Bereken op deze wijze

$$\begin{array}{rl} a + 25 & \\ a + 8 & \\ \hline & \times \end{array} \qquad \begin{array}{rl} b - 25 & \\ 2b + 4 & \\ \hline & \times \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 5c + 12 & \\ 5c + 12 & \\ \hline & \times \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 5d + 12 & \\ 5d - 12 & \\ \hline & \times \end{array}$$

Je wilt de drieterm $x^2 - 2x + 3$ vermenigvuldigen met de tweeterm $x + 4$ en daarbij de onder-elkaar-methode gebruiken.

- Maakt het wat uit of je de eerste of de tweede vorm bovenaan zet?
  Voer de vermenigvuldiging uit.

- Vermenigvuldig $a - b$ met $a^2 + ab + b^2$

Spelen met vormen

- Kan het kloppen? Ja, mits je haakjes op de juiste manier plaatst! Probeer maar...

$$a + 5 \cdot a + 6 = 6a + 6$$

$$a + 5 \cdot a + 6 = 6a + 30$$

$$a + 5 \cdot a + 6 = a^2 + 5a + 6$$

$$a + 5 \cdot a + 6 = a^2 + 11a + 30$$

- Maak door haakjes te plaatsen zoveel mogelijk *ongelijkwaardige* vormen van

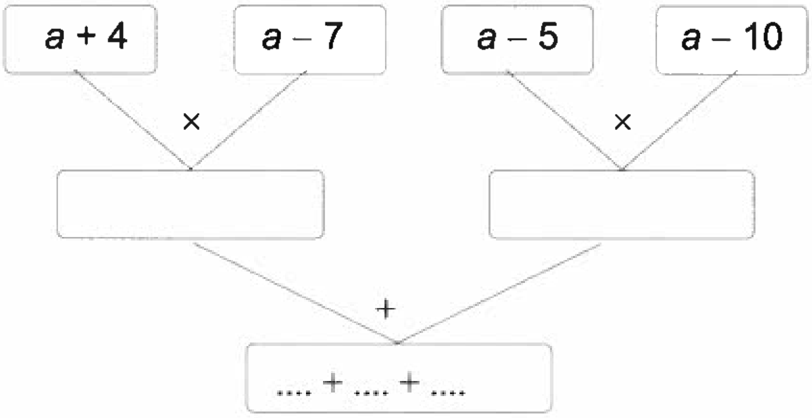
$$x \cdot x + 3 \cdot x + 5$$

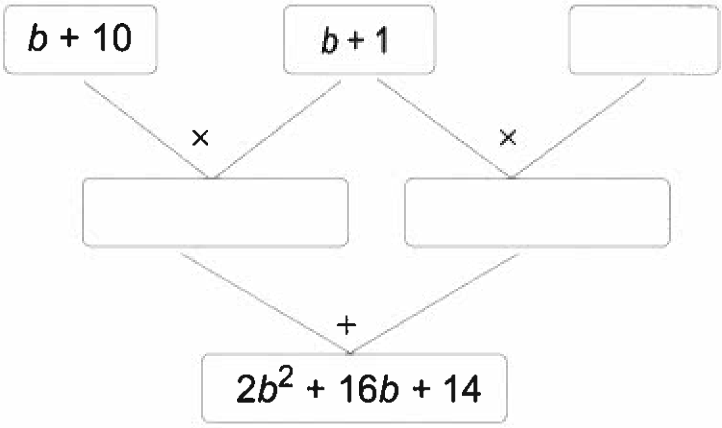
- Kies een vakje in onderstaande tabel en noteer wat daarin staat. Streep nu de rij en de kolom waartoe dit vakje behoort door. Kies een nog niet doorgestreept vakje, noteer wat daar staat en streep weer de rij en de kolom van dit vakje door. Doe dit nog tweemaal en tel de dan vier genoteerde vormen op. Vergelijk jouw antwoord met dat van je klasgenoten. En???

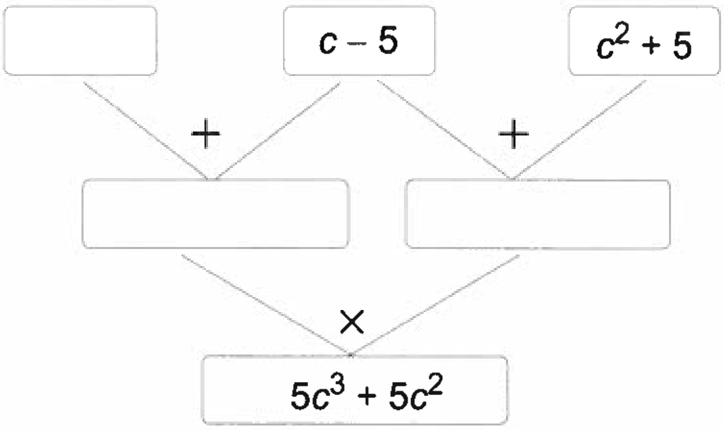
$2a$	$3a$	$a + 4$	$2a + 3$
$6a$	$7a$	$5a + 4$	$6a + 3$
$2a + 2$	$3a + 2$	$a + 6$	$2a + 5$
$2a - 3$	$3a - 3$	$a + 1$	$2a$

Rekenen met veeltermen(1)

- Vul zo eenvoudig mogelijke veeltermen in:







Rekenen met veeltermen(2)

- Vul de vermenigvuldigingstabel in:

$\times$	t^2	$5t$	7
$3t^2$			
$-t$			
-5			

- Uit de ingevulde tabel kun je nu snel het product vinden van de veeltermen $t^2 + 5t + 7$ en $3t^2 - t - 5$.
  Dat product is een veelterm van de vierde graad.
  Geef die veelterm.

- Gebruik een tabel bij het uitwerken van het product van de veeltermen $x^2 + 3x + 2$ en $x^2 - 4x - 5$

- Hoe kun je hieruit het product $(x + 1)^2(x + 2)(x - 5)$ als één veelterm schrijven?

Rekenen met veeltermen(3)

- Vul de opteltabel en de vermenigvuldigingstatabel in:

(I)

+	5	8
5		
12		

(II)

×	5	8
5		
12		

- Gebruik de tabellen (I) en (II) om tabel (III) in te vullen:

(III)

×	$a + 5$	$a + 8$
$a + 5$		
$a + 12$		

- Tel de ingevulde vormen uit de tabel (III) bij elkaar op.

- De zo verkregen veelterm is het product van twee vormen.
  Welke vormen kunnen dat zijn? Controleer je antwoord.

Som & product

- Van twee gehele getallen is de som 13 en het product 30.
  Probeer (uit je hoofd) die getallen te vinden.

  En van welke twee gehele getallen is de som 13 en het product 40?

  Van welke twee gehele getallen die samen 13 zijn is het product het grootst?

  Als ook gebroken getallen toegestaan zijn, kun je 13 splitsen in twee getallen met een nog groter product.
  Welke getallen en hoe groot is hun product?

- Van een rechthoek is de omtrek 40 m en de oppervlakte 96 m^2.
  Welke afmetingen heeft die rechthoek?

- Van een rechthoek is de omtrek 18 m en de oppervlakte 18 m^2.
  Welke afmetingen heeft die rechthoek?

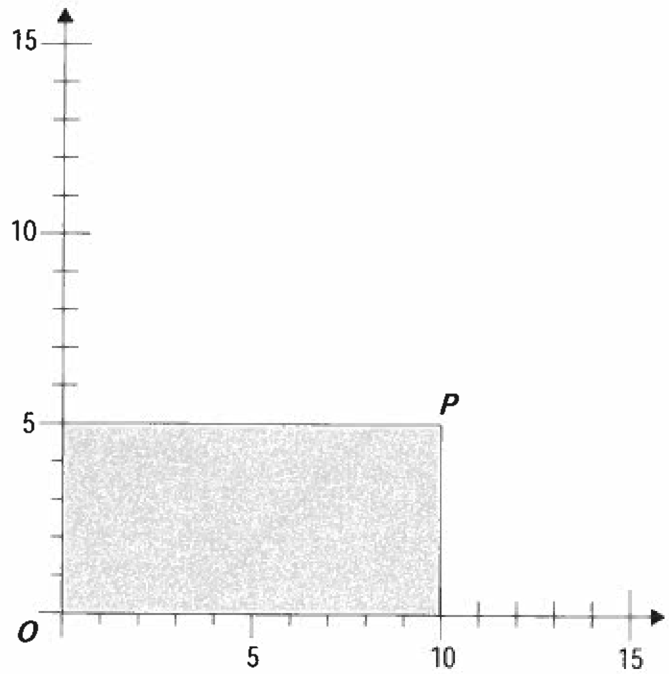
- Als van een rechthoek met zijden x en y de omtrek en de oppervlakte oppervlakte dezelfde getalswaarde hebben, geldt: $(x-2)(y-2)=4$.
  Laat zien waarom dit waar is en ook dat er juist twee verschillende rechthoeken [1]) zijn met *gehele* afmetingen, waarvoor dit geldt.

[1]) Een vierkant is een bijzondere rechthoek

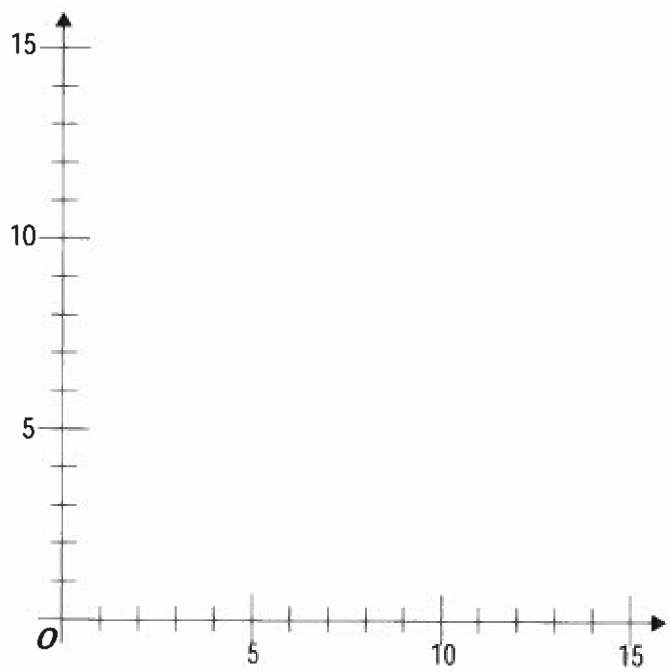
Omtrek & oppervlakte

In een assenstelsel is een rechthoek getekend met *omtrek* 30.

- Teken een aantal rechthoeken met *dezelfde omtrek* en waarvan ook twee zijden langs de assen vallen.
- Als je het goed gedaan hebt, liggen de hoekpunten tegenover het punt *O* (zoals *P* in de figuur) op één *rechte lijn*. Bij die lijn past de vergelijking: $x + y = 15$. Hoe verklaar je dat?



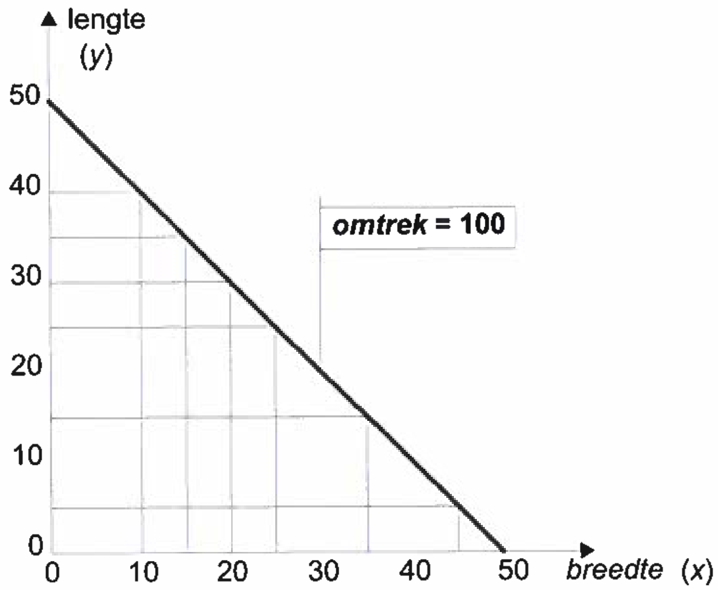
- Teken in deze figuur zes rechthoeken met twee zijden langs de assen en met *oppervlakte* 24.
- De hoekpunten die tegenover *O* liggen, liggen nu niet op een rechte, maar op een *kromme lijn*. Schets zo goed mogelijk die kromme lijn. (De naam van die kromme lijn is *hyperbool*).
- Welke vergelijking in *x* en *y* past er bij die hyperbool?



Met vaste omtrek

In de figuur zie je een aantal rechthoeken met omtrek 100.

- Welke van die rechthoeken heeft de grootste *oppervlakte*? Hoe kun je dat beredeneren vanuit de figuur?



De rechthoeken zijn getekend in een assenstelsel.
De hoekpunten tegenover de oorsprong (0, 0) liggen op een rechte lijn .

- Welke vergelijking past er bij die lijn?

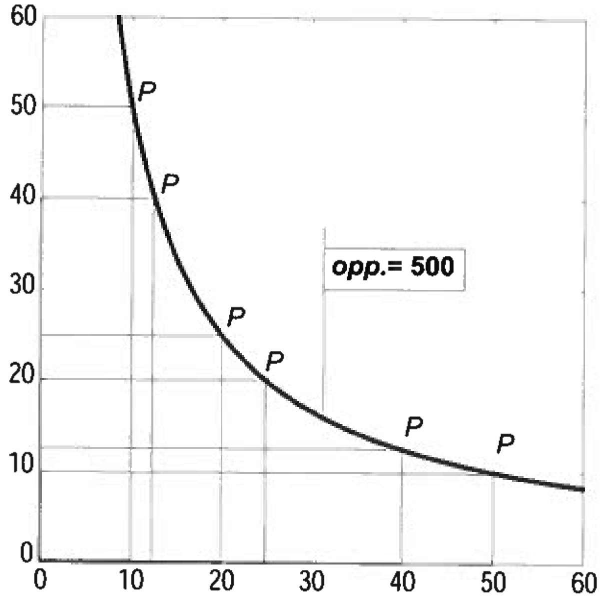
- Teken in de figuur de lijn met vergelijking $x + y = 30$

- Onder die lijn passen een heleboel rechthoeken met omtrek 60 en waarvan twee zijden langs de assen vallen.
  Welke van die rechthoeken heeft de grootste oppervlakte en hoe groot is die oppervlakte?

- Dezelfde vragen voor de lijn met vergelijking $x + y = 15$.

Met vaste oppervlakte

In de figuur zie je een aantal rechthoeken met oppervlakte 500.



- De hoekpunten P liggen op een *hyperbool*.
  Welke vergelijking past hierbij?

- Welke van de getekende rechthoeken heeft de kleinste *omtrek*?

- Er is ook een vierkant waarvan twee zijden langs de assen liggen en waarvan de oppervlakte 500 is. Teken dat vierkant.

- Hoe lang zijn de zijden van dat vierkant?
  (Geef het exacte antwoord en ook een afronding in twee decimalen achter de komma)

- Laat zien dat de omtrek van dit vierkant kleiner is, dan de omtrek van de zes rechthoeken die in de figuur zijn gegeven.

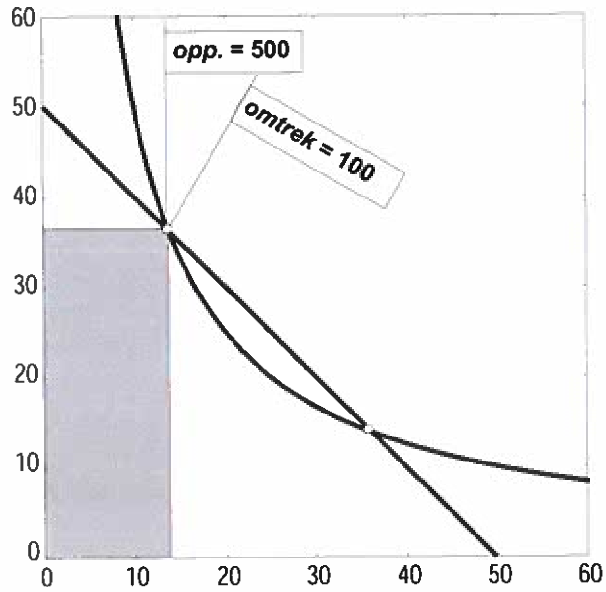
- Teken de hyperbool bij de rechthoeken met een oppervlakte 250.

- Ook bij de rechthoeken met een oppervlakte 125.

Oppervlakte & omtrek

Is er een rechthoek met oppervlakte 500 en omtrek 100?
In de figuur kun je zien dat het antwoord 'ja' is.

- Probeer door schatten en rekenen de lengte en breedte van die rechthoek te vinden (in één decimaal achter de komma)



Hoe vinden we de exacte afmetingen x en y van de rechthoek?
Omdat de omtrek 100 is, moeten x en y samen 50 zijn.
Als $x = y = 25$ geldt $x \cdot y = 625$, dat is te veel.
Dus zal breedte wat minder en de lengte wat meer dan 25.

Stel nu breedte = $25 - a$ en lengte = $25 + a$.

- Laat zien dat de oppervlakte dan gelijk is aan $625 - a^2$.

- Maar die oppervlakte moet gelijk zijn aan 500.
  Dus a^2 moet gelijk zijn aan ..... en dus a = ...

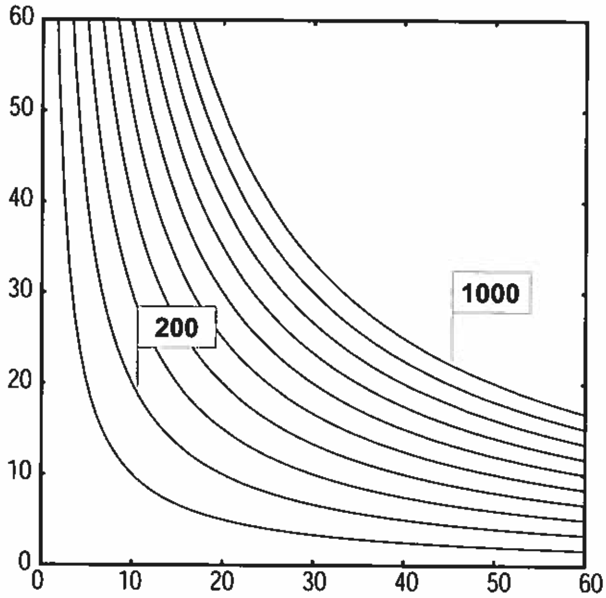
- Hoe lang en hoe breed zal de rechthoek dus zijn?
  Vergelijk je uitkomst met de schatting die je hiervoor gemaakt hebt.

Hyperbolen-nomogram

De figuur hieronder is een zogeheten hyperbolen-nomogram.
Bij de getekende hyperbolen passen de vergelijkingen

$$xy = 100, 200, \ldots, 1000$$

- Teken de rechte lijn die de punten (0, 0) en (60, 60) met elkaar verbindt. Die snijdt elke hyperbool in één punt.
Hoeveel van die tien snijpunten hebben gehele coördinaten?



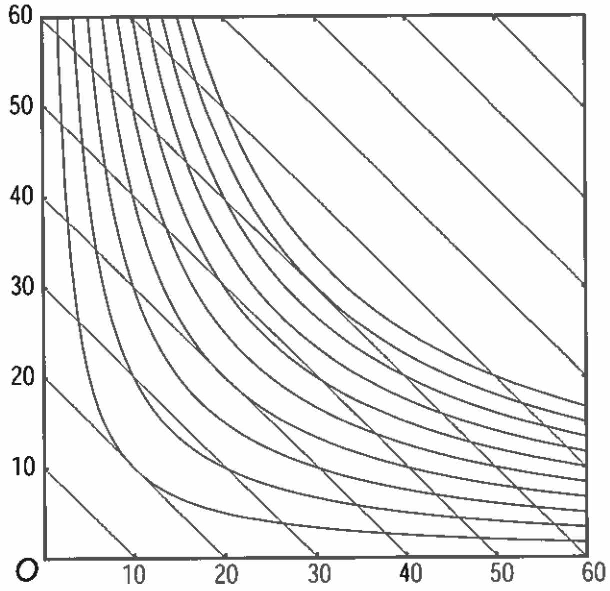
- Teken de rechte lijn (*A*) die de punten (60, 0) en (0, 60) met elkaar verbindt. Welke vergelijking past er bij die lijn?

- De lijn *A* snijdt de hyperbool $x \cdot y = 500$ in twee punten met hele coördinaten. Stip die punten aan. Welke coördinaten horen daarbij?

- De *A* lijn heeft met de hyperbool $x \cdot y = 900$ precies één punt gemeenschappelijk: *A* is een *raaklijn* aan die hyperbool.
Wat zijn de coördinaten van het raakpunt.

- Elk punt van de lijn *A* heeft de coördinaten $30 - a$ en $30 + a$, waarbij a een getal tussen 0 en 30 is. Overtuig je hiervan.
Laat door een *berekening* zien dat de lijn *A* geen punten op de hyperbool $xy = 1000$ heeft.

Oppervlakte & omtrek



In de figuur zijn de lijnen bij de vergelijkingen $x + y = 10, 20, \ldots, 100$ en de hyperbolen $x \cdot y = 100, 200, \ldots, 1000$ getekend.
Als je een willekeurig punt P binnen de figuur kiest, dan kun je een rechthoek maken, waarvan OP een diagonaal is en waarvan twee zijden langs de randen vallen.
Net als de Griekse wiskundigen in de Oudheid, spreken we dan van *de rechthoek OP.*

- Stel je kiest P ergens op de lijn $x + y = 40$.
  Wat is de grootste oppervlakte die de rechthoek OP kan hebben?
  Hoe zie je dat in de figuur?

- Stel je kiest P ergens op de hyperbool $x \cdot y = 100$.
  Wat is de kleinste omtrek die de rechthoek OP kan hebben?
  Hoe zie je dat in de figuur?

Er geldt:

*Van alle rechthoeken met **eenzelfde omtrek** heeft het vierkant de **grootste oppervlakte.***

*Van alle rechthoeken met **eenzelfde oppervlakte** heeft het vierkant de **kleinste omtrek.***

Som & product(1)

Van twee getallen a en b is de som 120 en het product 3431.
Welke getallen kunnen dat zijn?

- *Probeer-en-verbeter-aanpak*

(1) Splits 120 in twee 10-vouden

a	b	ab
60	60	3600
70	50	
80	40	
90	30	

(2) Stel a is het grootste getal van de twee, tussen welke 10-vouden ligt a? En b?

(3) Hoe kun je nu verder gaan met proberen?

- *Aanpak met algebra*

(1) Verdeel eerst 120 in twee gelijke delen, dus 60 en 60.
Het product van deze getallen is 3600 (groter dus dan 3431).
Stel $a = 60 + c$, dan is b automatisch gelijk aan $60 - c$.
Bij de aanname $a > b$ geldt $c > 0$.

(2) Bereken het product van $60 + c$ en $60 - c$ en stel dat gelijk aan 3431.
Je kunt dan c berekenen en vervolgens a en b.

Som & product(2)

- Bereken a en b (met $a \geq b$) als:

  $a + b = 100$ en $a \cdot b = 1204$

  $a + b = 100$ en $a \cdot b = 1275$

  $a + b = 260$ en $a \cdot b = 1275$

  $a + b = 1000$ en $a \cdot b = 222111$

  $a + b = 100$ en $a \cdot b = 2495$
  (N.B. de uitkomsten zijn nu geen hele getallen!)

Symmetrische vormen(1)

Een algebraïsche vorm met twee variabelen (zeg a en b) is *symmetrisch* als *verwisseling* van a en b, overal in de vorm, een daarmee gelijke vorm oplevert.

De meest eenvoudige symmetrische vormen zijn $a + b$ en $a \cdot b$

- Welke van de volgende vormen zijn symmetrisch?

(1) $a^2 + b^2$ (2) $a^2 + b^3$ (3) $a^3 - b^3$ (4) $a^2b + ab^2$

(5) $(a - b)^2$ (2) $(a - b)^3$ (3) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ (4) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{5}{ab}$

De vormen $S = a + b$ en $P = a \cdot b$ zijn de symmetrische *basisvormen*, dat wil zeggen dat iedere symmetrische algebraïsche vorm uigedrukt kan worden in S en P. Twee voorbeelden:

(I) $(a + 2)(b + 2)$ is een symmetrische vorm en is gelijkwaardig met $ab + 2a + 2b + 4$ ofwel $P + 2S + 4$.

(II) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{b}{ab} + \frac{a}{ab} = \frac{a+b}{ab} = \frac{S}{P}$

- Laat zien dat de volgende beweringen juist zijn.

$a^2b + ab^2 = PS$

$a^2 + b^2 = S^2 - 2P$

$(a - b)^2 = S^2 - 4P$

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{5}{ab} = \frac{S-5}{P}$

Symmetrische vormen(2)

Voorbeeld:
Bereken $a^2b + ab^2$ als je weet: $a + b = 25$ en $ab = 100$.

Methode (1):
* je berekent eerst a en b, uitkomst: $a = 20$, $b = 5$ (of $a = 5$ en $b = 20$)
* invullen in $a^2b + ab^2$ geeft $400 \cdot 5 + 20 \cdot 25 = 2500$

Methode (2):
$a^2b + ab^2 = ab(a + b) = 100 \cdot 25 = 2500$

- Bereken volgens beide methoden: $\frac{2}{a} + \frac{2}{b}$ als $a + b = 24$ en $ab = 80$

- Bereken ook op twee manieren $a^2 + b^2$ als $a + b = 15$ en $ab = 44$

- Bereken $(a - b)^3$ als $a + b = 14$ en $ab = 40$
  Waarom werkt de tweede methode hier niet?
  Waarom zijn er twee verschillende uitkomsten?

Gelijkwaardige vormen(1)

Twee vormen in x zijn ***gelijkwaardig (of equivalent) betekent:*** als je voor x in beide vormen hetzelfde getal invult, krijg je bij beide vormen dezelfde uitkomst.

- Een groepje gelijkwaardige vormen noemen we hier een familie. Verbind de leden van eenzelfde familie met lijntjes.

$(x-6)^2+9$

$x^2+12x+27$

$x^2+6x-27$

$x(x+12)+27$

$(x+3)(x+9)$

$(x-6)^2+9$

$(x+6)^2-9$

$x(x-12)+45$

$(x-3)(x+9)$

$(x-3)(x+3)+6x$

$(x-3)(x-15)$

Gelijkwaardige vormen(2)

- Laat zien dat de volgende vier vormen gelijkwaardig zijn:

$x^2 - 18x + 80$ .... [A]

$(x - 10)(x - 8)$ .... [B]

$x(x - 18) + 80$ .... [C]

$(x - 9)^2 - 1$ .... [D]

Als je voor x een getal invult, dan kan het alleen voor het rekenwerk uitmaken welke van de vier vormen je kiest.

- Vul achtereenvolgens in, maar bedenk steeds eerst bij welke van de vier vormen je het gemakkelijkst rekent.

x = 18 ______________________________

x = 9 ______________________________

x = 10 ______________________________

x = 0 ______________________________

x = 28 ______________________________

x = 29 ______________________________

Gelijkwaardige vormen(3)

- Laat zien dat de volgende drie vormen gelijkwaardig zijn:

$x^3 - 9x^2 + 20x - 12$ .... [I]

$(x - 1)(x - 2)(x - 6)$ .... [II]

$x(x(x - 9) + 20) - 12$ .... [III]

$x(x - 4)(x - 5) - 12$ .... [IV]

- Vul achtereenvolgens in, maar bedenk steeds eerst bij welke van de drie vormen je het makkelijkst rekent.

x = 0 ____________________________

x = 1 ____________________________

x = 4 ____________________________

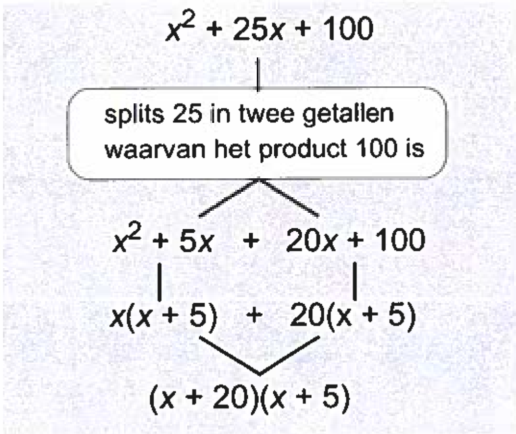
x = 5 ____________________________

x = 6 ____________________________

x = 9 ____________________________

Ontbinden in factoren(1)

De veelterm $x^2 + 25x + 100$ is gelijkwaardig met $x(x + 25) + 100$ en ook met $(x + 20)(x + 5)$.
Bij die derde vorm zeggen we dat de veelterm is *ontbonden* in twee *factoren*. Het schema laat zien hoe je de ontbinding kunt vinden:



- Ontbind in twee factoren:

$x^2 + 29x + 100 =$

$x^2 + 29x + 180 =$

$x^2 - 29x + 180 =$

$x^2 - 29x + 190 =$

- Ontbind ook:

$y^2 + 8y + 7 =$

$y^2 + 8y - 9 =$

$y^2 + 8y + 16 =$

$y^2 - 8y + 16 =$

Ontbinden in factoren(2)

- Vul passende tweetermen in:

	×	
	$z^2 + 13z + 12$	

	×	
	$y^2 + 12y - 13$	

- Vul passende vormen (met x) in:

	×	
	$x^2 + 6x$	

	×	
	$x^2 - 9$	

	×	
	$x^2 - 6x + 9$	

- Vul passende vormen in:

×		$a + 8$
$a + 5$	$a^2 - 2a - 35$	
		$a^2 - 64$

×		
	$b^2 + b - 132$	$b^2 + 7b - 60$
	$b^2 - 121$	$b^2 + 6b - 55$

Ontbinden in factoren(3)

Stel je wilt de drieterm $x^2 + 8x + 14$ ontbinden in twee factoren
Je probeert 8 te splitsen in twee getallen met 14 als product.
Echter:

$1 \times 7 = 7$, $2 \times 6 = 12$, $3 \times 5 = 15$, $4 \times 4 = 16$, jammer dus.

Er zit niets anders op dan de methode van bladzijde 71 toe te passen.

Dus: stel het ene getal $4 + d$ en het andere $4 - d$.

- Ga na dat 8 moet worden gesplitst in $4 + \sqrt{2}$ en $4 - \sqrt{2}$

  Dit geeft dan de ontbinding

$$x^2 + 8x + 14 = [x + 4 + \sqrt{2}][x + 4 - \sqrt{2}]$$

- Controleer dit door uitwerking van het rechterlid.

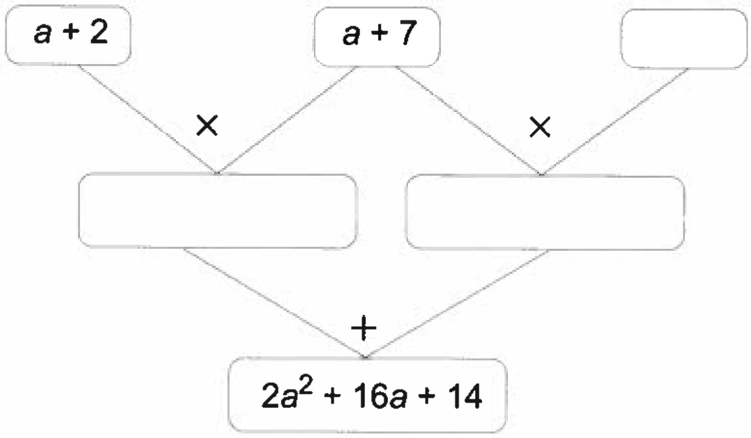
- Vind op deze wijze de ontbinding van $x^2 + 10x + 22$

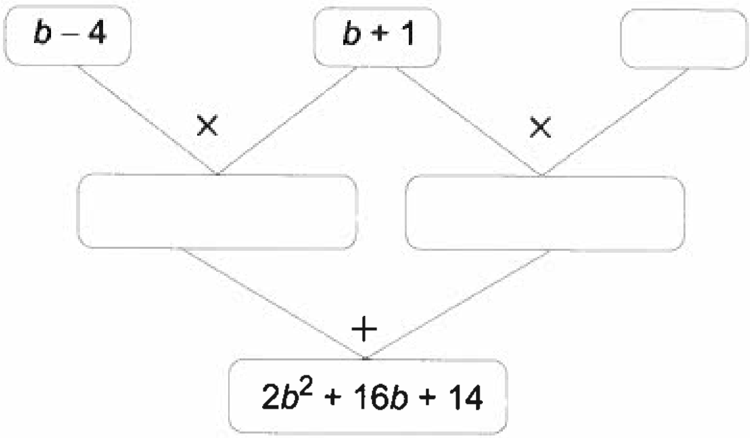
- Waarom lukt het niet om $x^2 + 10x + 26$ te ontbinden?

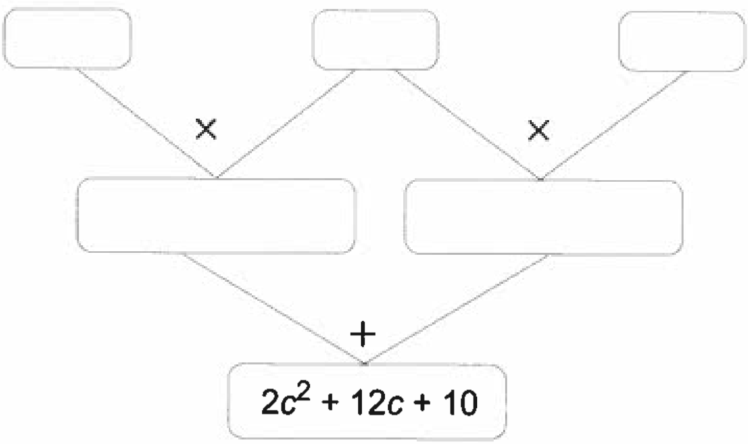
- Wat is de grootste waarde van c, waarbij je $x^2 + 10x + c$ kunt ontbinden? Geef die ontbinding.

Ontbinden in factoren(4)

- Vul passende vormen in:

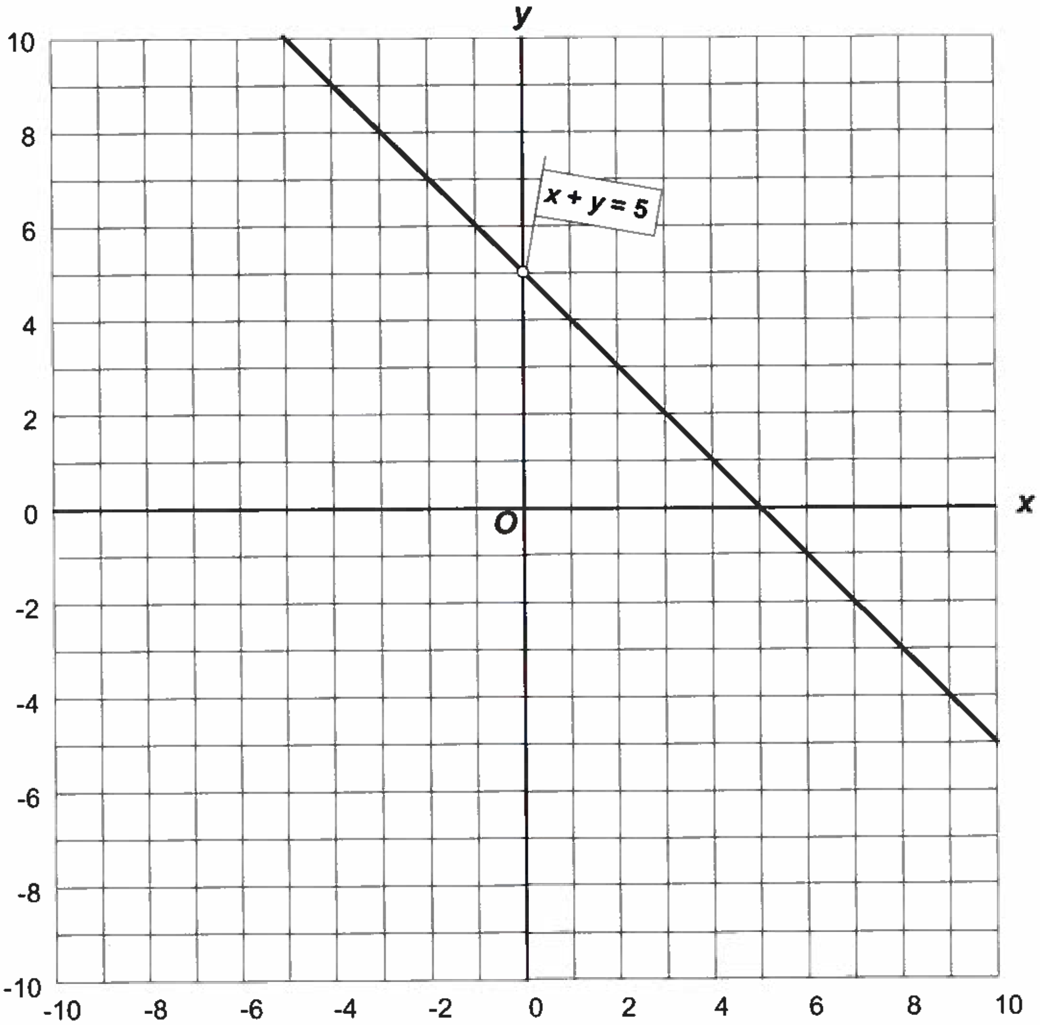






Lijnen vergelijken(1)

Twee getallenlijnen loodrecht op elkaar, waarbij de twee punten 'nul' samenvallen, en je hebt een '*getallenparenvlak*' ofwel een '*coördinatenstelsel*'.
Vergelijkingen in x en y corresponderen met rechte of kromme lijnen.
In de figuur is de lijn met vergelijking $x + y = 5$ getekend.
Het vlaggetje is geplant in het punt (0, 5). Als je vanuit dat punt evenveel stapjes naar rechts (links) als naar beneden (als naar boven) maakt, verandert de som $x + y$ niet! Dat verklaart waarom alle punten (x, y) met $x + y = 5$ op één lijn liggen.

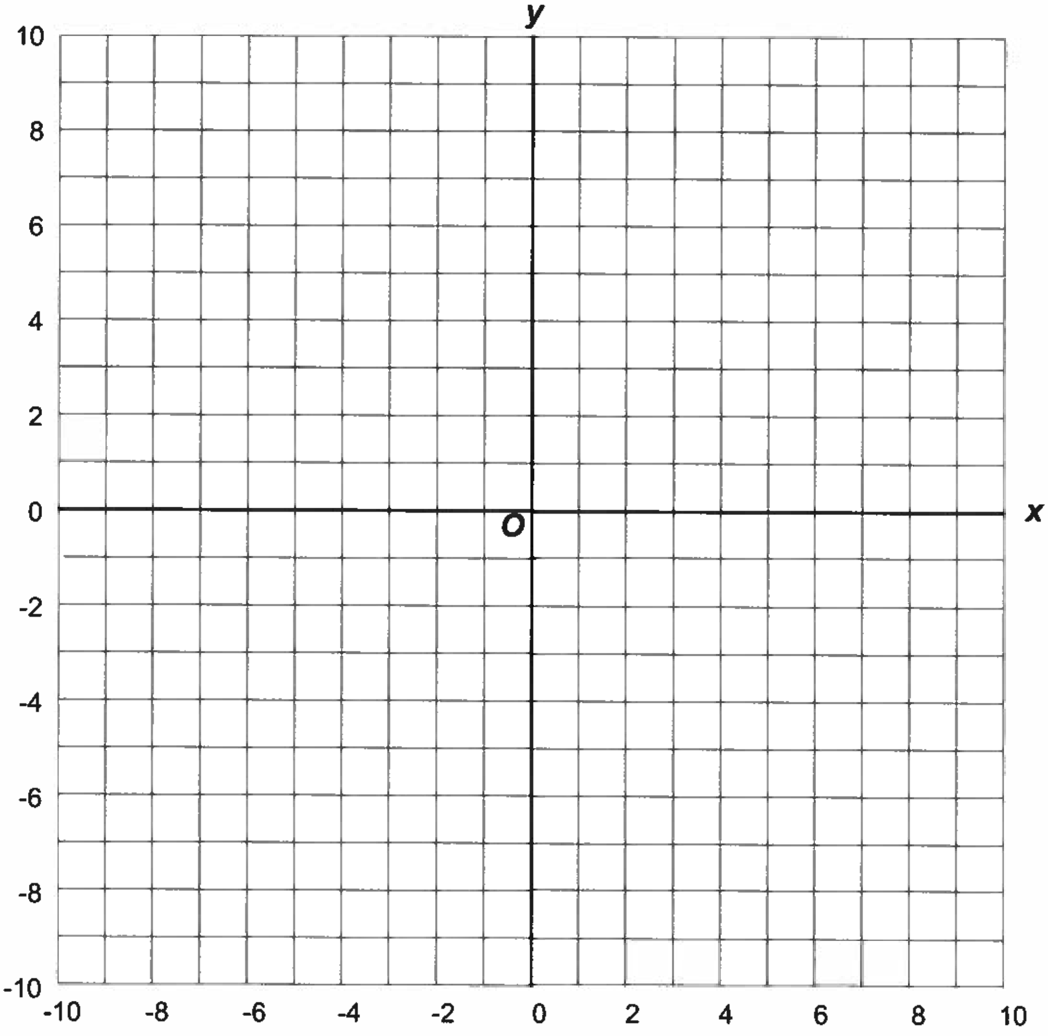


- Teken de lijnen die corresponderen met $x + y = 2$, $x + y = 8$ en $x + y = -5$.
  Hoe zie je aan de vergelijkingen dat de eerste twee even ver van de lijn $x + y = 5$ liggen ?

- Welke vergelijking past er bij de lijn die de punten (-8, 1) en (-3, -4) verbindt?

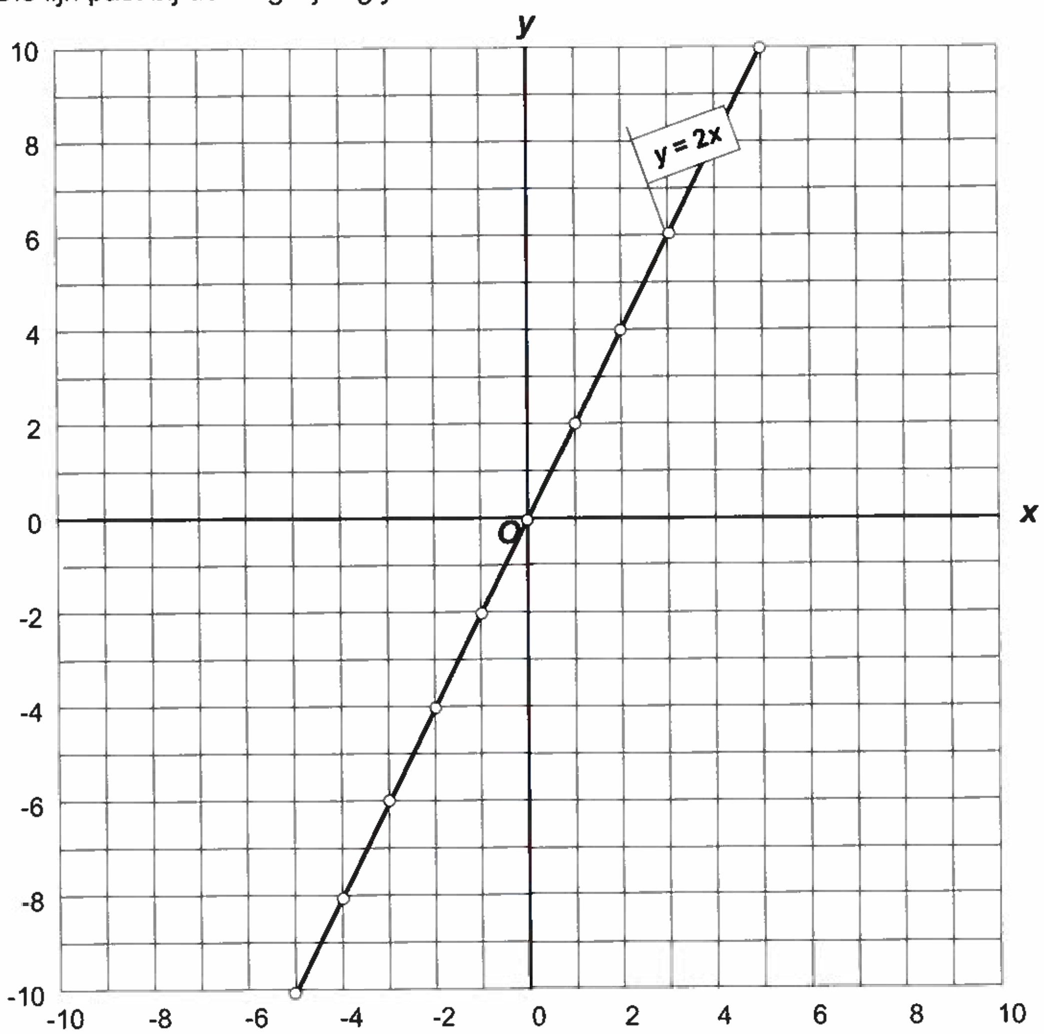
Lijnen vergelijken(2)

- Geef vijf getallenparen (x, y) die voldoen aan de vergelijking $3x + 2y = 12$, waarbij x en y gehele getallen zijn tussen -10 en 10. Teken de bijbehorende '*roosterpunten*' en ga na dat die punten op een rechte lijn liggen.
- Stel dat het getallenpaar (a, b) voldoet aan $3x + 2y = 12$.
  Dan voldoet het getallenpaar ($a + 2$, $b - 3$) ook aan de vergelijking.
  Verklaar dit.
- Teken de lijn $3x + 2y = 12$ en ook de lijn $2x + 3y = 12$.
  Het snijpunt A van die twee lijnen is geen roosterpunt, maar heeft breuken als coördinaten. Welke breuken?
- Teken ook het lijnenpaar $3x + 2y = 18$ en $2x + 3y = 18$ (snijpunt **B**).
  Ook het paar $3x + 2y = -12$ en $2x + 2y = -12$ (snijpunt **C**).
- Als je netjes hebt getekend, zie je dat de punten A, B en C op één lijn liggen.
  Welke vergelijking past er bij die lijn?



Lijnen vergelijken(3)

De punten .... , (-3, -6), (-2, -4) , (-1, -2), (0, 0), (1, 2), (2, 4), (3, 6), ... liggen op één rechte lijn, namelijk de lijn door ***O*** met *helling* 2.
Die lijn past bij de vergelijking $y = 2x$.

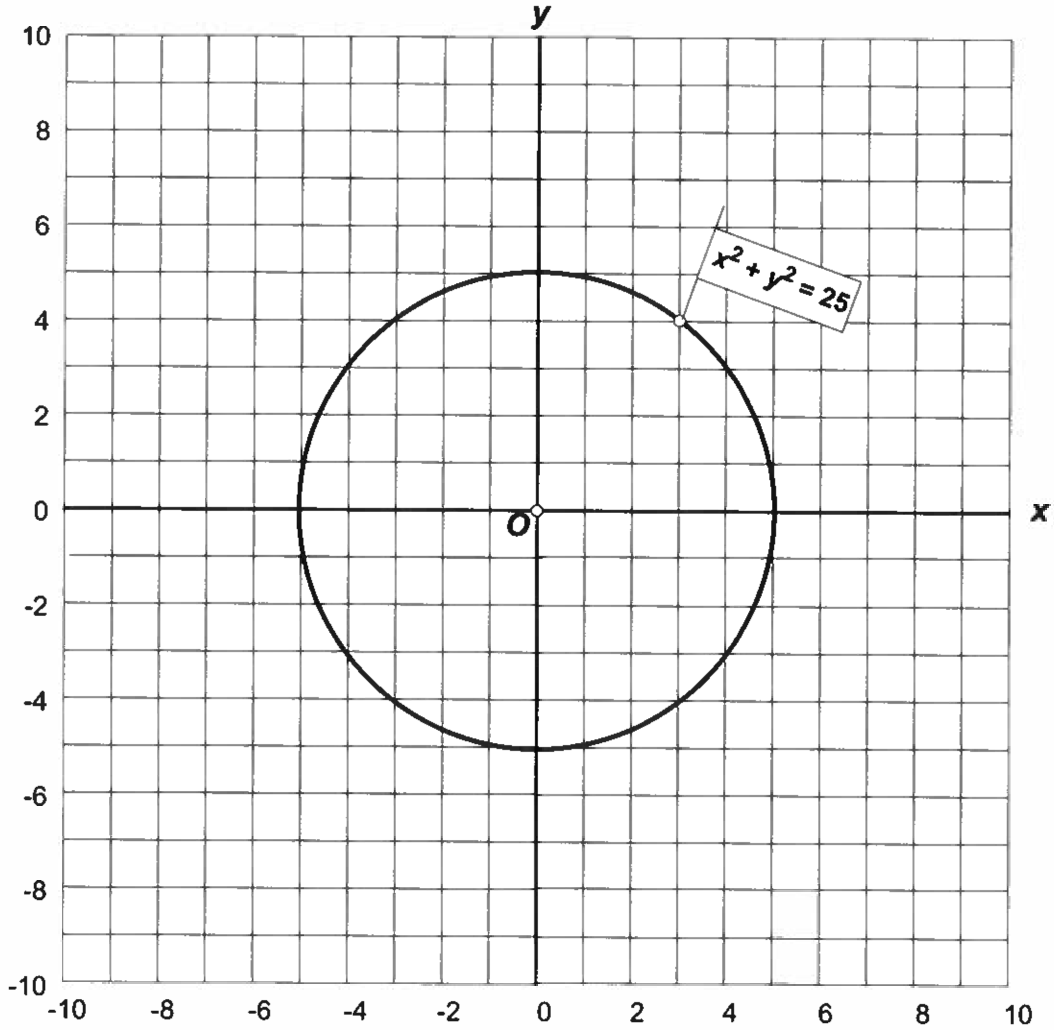


- Teken de lijnen bij de vergelijkingen $y = 4x$, $x = 4y$, $x = 2y$, $x = y$ en $y = -3x$
- Je hebt nu zes schuine lijnen die door ***O*** gaan. Teken ook de lijn $x + y = 6$. Deze lijn snijdt de zes lijnen door ***O***. Bereken de getallenparen bij die zes snijpunten.

Cirkels vergelijken(1)

In het getallenparenvlak is een cirkel getekend met middelpunt O en straal 5.
Uit de stelling volgt bijvoorbeeld dat het roosterpunt (3, 4) op die cirkel ligt.

- Ga na dat er nog elf andere roosterpunten op de cirkel liggen.



De vergelijking die bij de cirkel past is $x^2 + y^2 = 25$ (Pythagoras!).

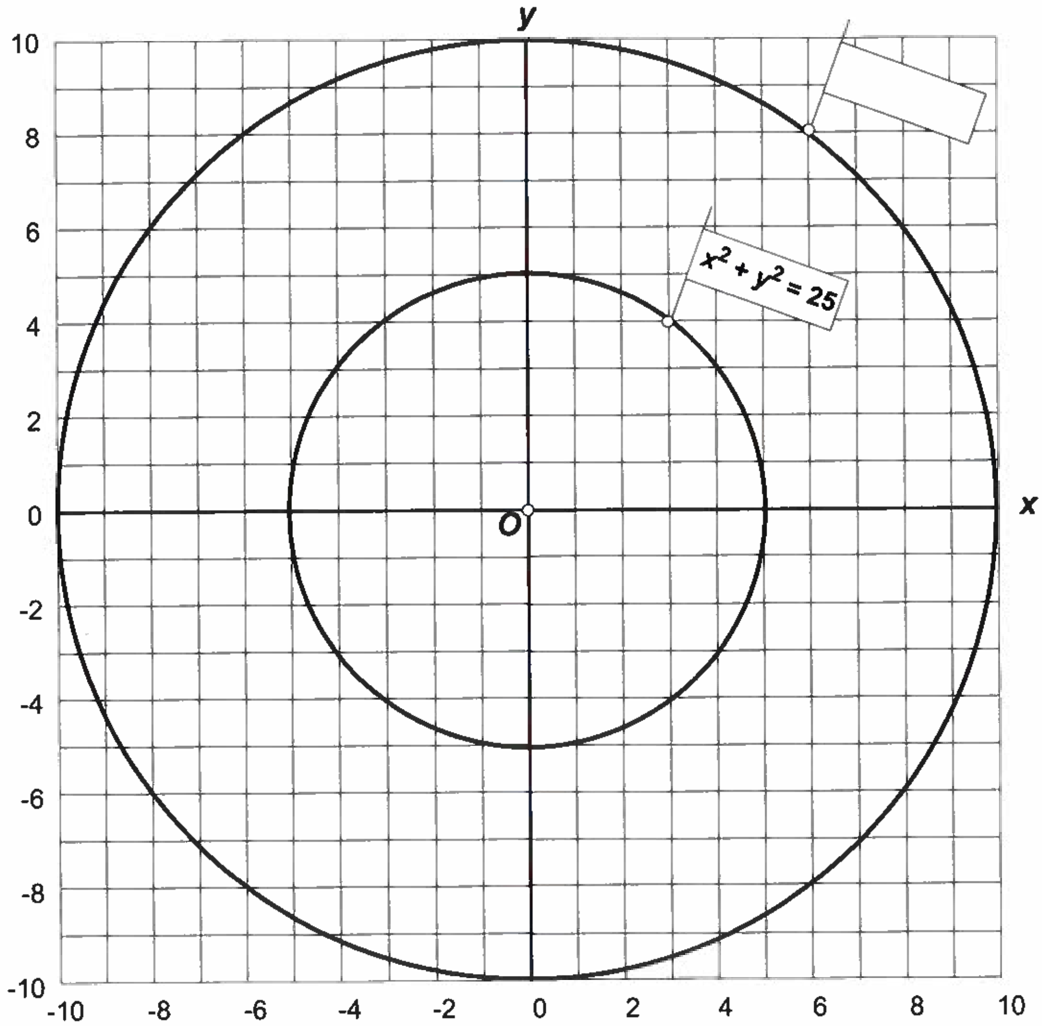
- Teken de cirkel met middelpunt O en straal 3.
  Welke vergelijking past hierbij?

- Welke roosterpunten liggen op deze cirkel?

- Verklaar waarom de punten$(2, \sqrt{5})$ en $(1, 2\sqrt{2})$ op deze cirkel liggen.

- Welke andere punten met één gehele coördinaat, liggen er nog op de cirkel?

Cirkels vergelijken(2)



- Welke vergelijking past er bij de grootste cirkel?
- Teken in de figuur ook de lijn $y = 2x$.

Deze lijn heeft twee snijpunten met elk van de twee cirkels.
Maar dat zijn geen roosterpunten.

Je kunt de snijpunten van $y = 2x$ met de cirkel $x^2 + y^2 = 25$ vinden door twee vergelijkingen te combinerenDat levert op: $x^2 + (2x)^2 = 25$.

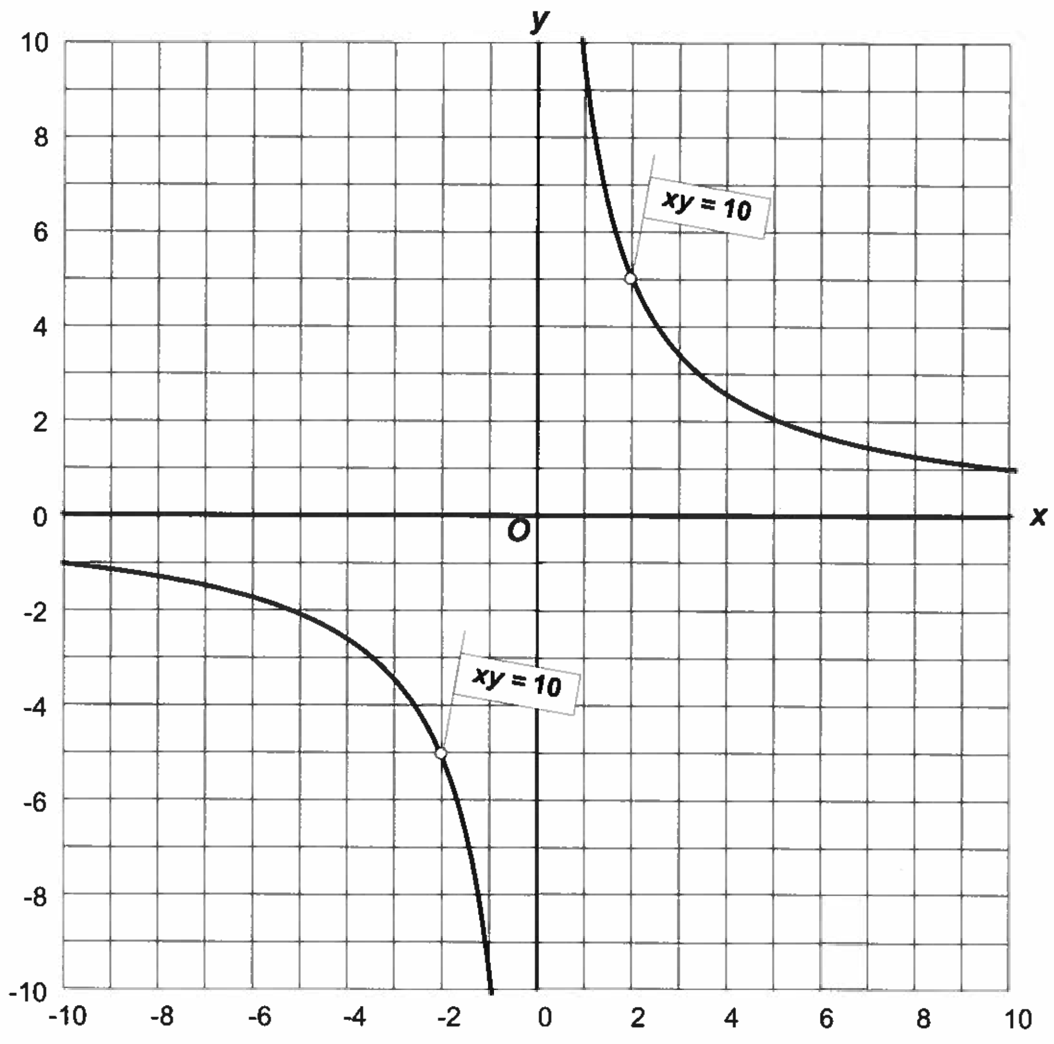
- Bereken de coördinaten van de twee snijpunten.

- Bereken ook de snijpunten van de lijn $y = 2x$ met de grootste cirkel

Hyperbolen vergelijken(1)

Op bladzijde 67 is de *hyperbool* opgevoerd als de kromme lijn door hoekpunten van rechthoeken met dezelfde oppervlakte.
Je ziet hier de hyperbool die correspondeert met de vergelijking $xy = 10$.

- Verklaar waarom de (complete!) hyperbool uit twee takken bestaat.

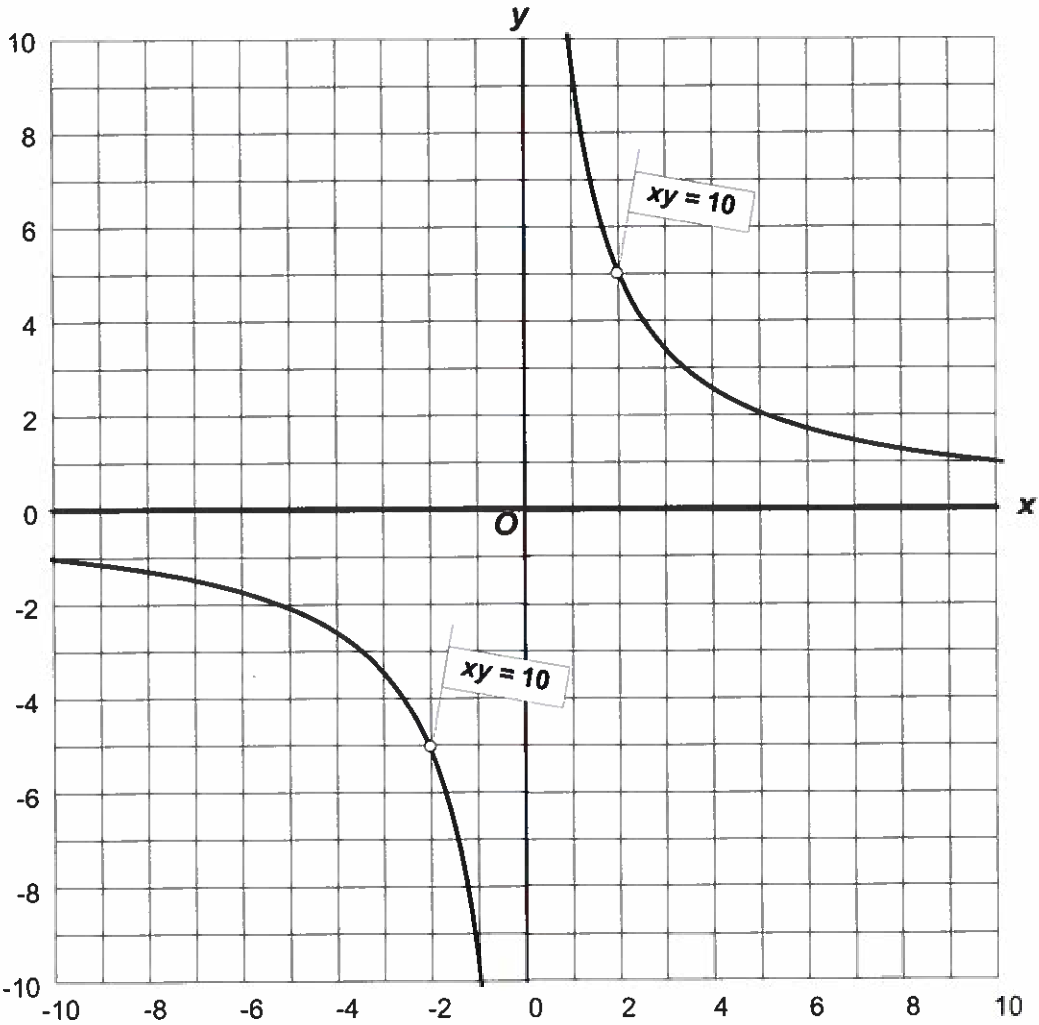


- Stel je voor dat het getallenparenvlak met de hyperbool zo wordt uitgebreid dat op de assen de getallen lopen van -1000 tot 1000.
  De hyperbool komt dan heel dicht bij de assen. Hoe dicht?

- Verklaar waarom de hyperbool, weliswaar super dichtbij de assen komt, maar deze nooit echt zal raken. De assen heten de *asymptoten* van de hyperbool.

Hyperbolen vergelijken(2)

- Teken in de figuur zo nauwkeurig als je kunt de complete hyperbool $xy = -10$



- Teken de lijn met vergelijking $y = x$ en bereken de coördinaten van de snijpunten met de hyperbool $xy = 10$.

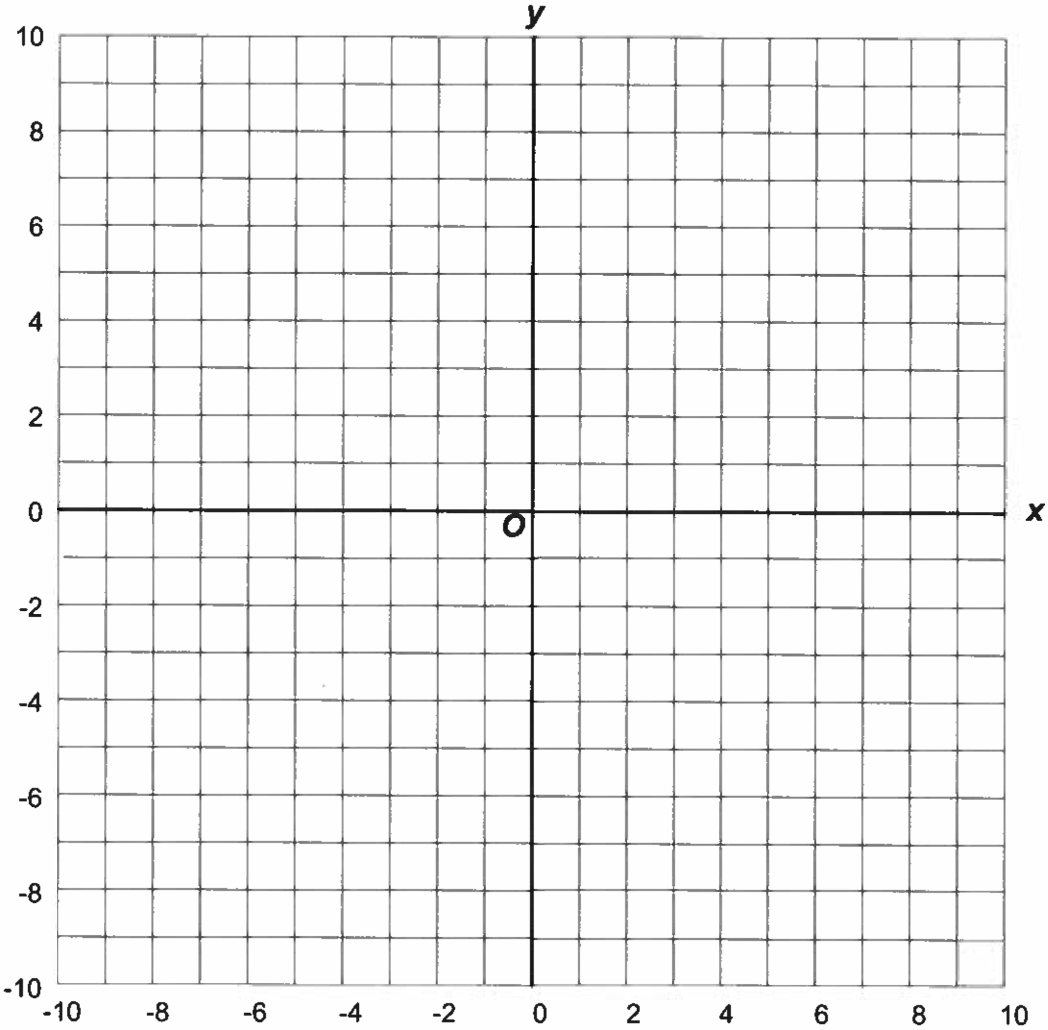
- Teken de lijn met vergelijking $x + y = 8$ en bereken de coördinaten van de snijpunten met de hyperbool $xy = 10$. (hint: zie bladzijden 71/72)

Hyperbolen vergelijken(3)

- Gegeven de vergelijking $x^2y^2 = 36$.
  Verklaar dat die vergelijking in het getallenparenvlak wordt voorgesteld door twee complete hyperbolen.

- Welke roosterpunten liggen op die 'dubbelhyperbool'?

- Teken zo nauwkeurig als je kunt de vier takken van de dubbelhyperbool.



- De cirkel $x^2 + y^2 = 13$ snijdt de dubbelhyperbool in 8 roosterpunten.
  Welke zijn dat? Teken ook de cirkel in de figuur hierboven.

Som is bekend en dan?

Twee natuurlijke getallen zijn samen 50.
Neem bijvoorbeeld 37 en 13.
Je neemt de kwadraten van beide getallen; $37^2 = 1369$ en $13^2 = 169$.
En zie: de laatste twee cijfers zijn hetzelfde.

- Kies nog drie andere tweetallen die samen 50 zijn.
  Bereken steeds de kwadraten en kijk naar de laatste twee cijfers van de uitkomsten.

Zou het altijd zo zijn?
Als elk van de getallen 25 is, is het heel flauw.

- Weet je nog meer flauwe gevallen?

- Als twee getallen samen 50 zijn, dan kun je stellen dat het ene gelijk is aan $25 + c$ en het andere aan $25 - c$.
  Werk uit:
  $(25 + c)^2 =$
  $(25 - c)^2 =$

- Hoe kun je hieruit verklaren dat voor elke waarde van c tussen 0 en 25 de beide kwadraten dezelfde twee laatste cijfers hebben?

- Hoe zit het met de kwadraten van twee getallen die samen 500 zijn ?

Som is bekend en dan?

- Bereken de paren (x, y) die voldoen aan:

$$x + y = 20 \quad \text{en} \quad x^2 + y^2 = 218$$

- Bereken de paren (x, y) die voldoen aan:

$$x + y = 20 \quad \text{en} \quad x^3 + y^3 = 2240$$

- Bereken de paren (x, y) die voldoen aan:

$$x + y = 100 \quad \text{en} \quad x - y = 26$$

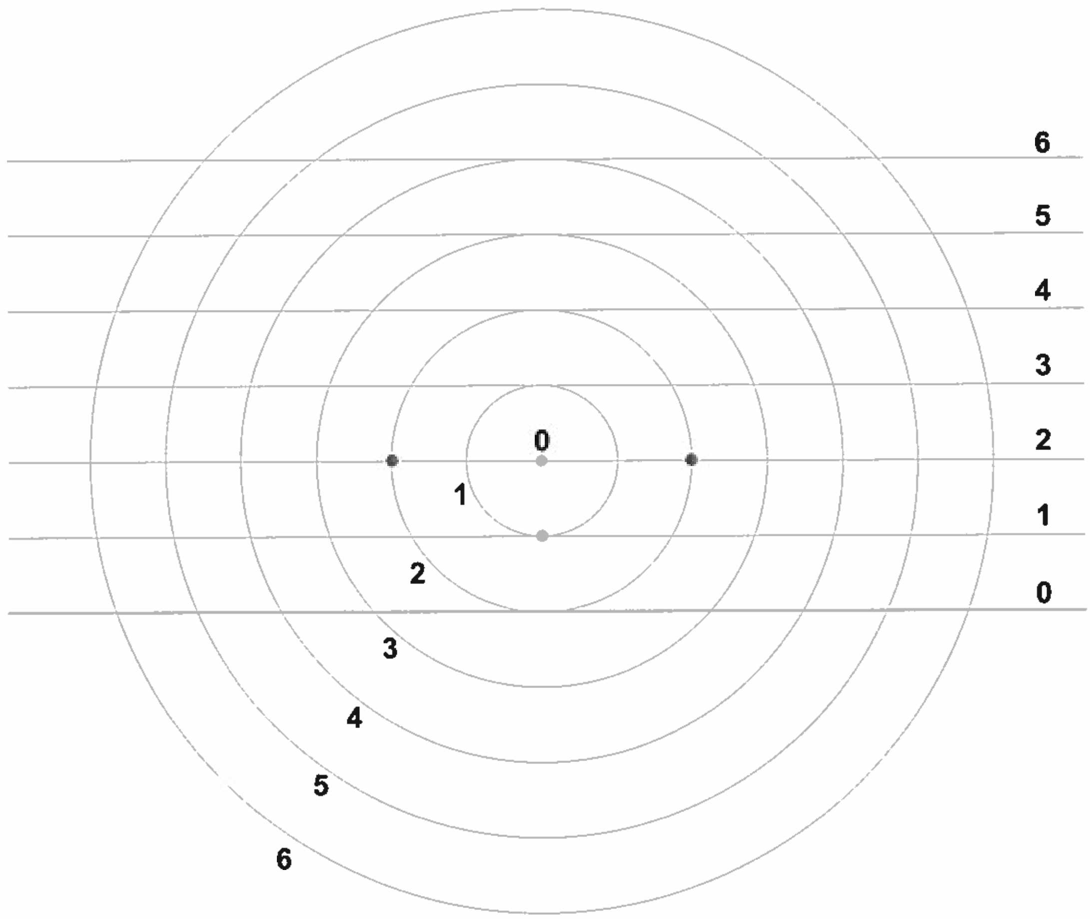
Parabool(1)

De lijnen **1**, **2**, **3**, ... liggen op afstand 1, 2, 3, ... van de lijn **0**.

De cirkels **1**, **2**, **3**, ... liggen op afstand 1, 2, 3, ... van het punt **0**.

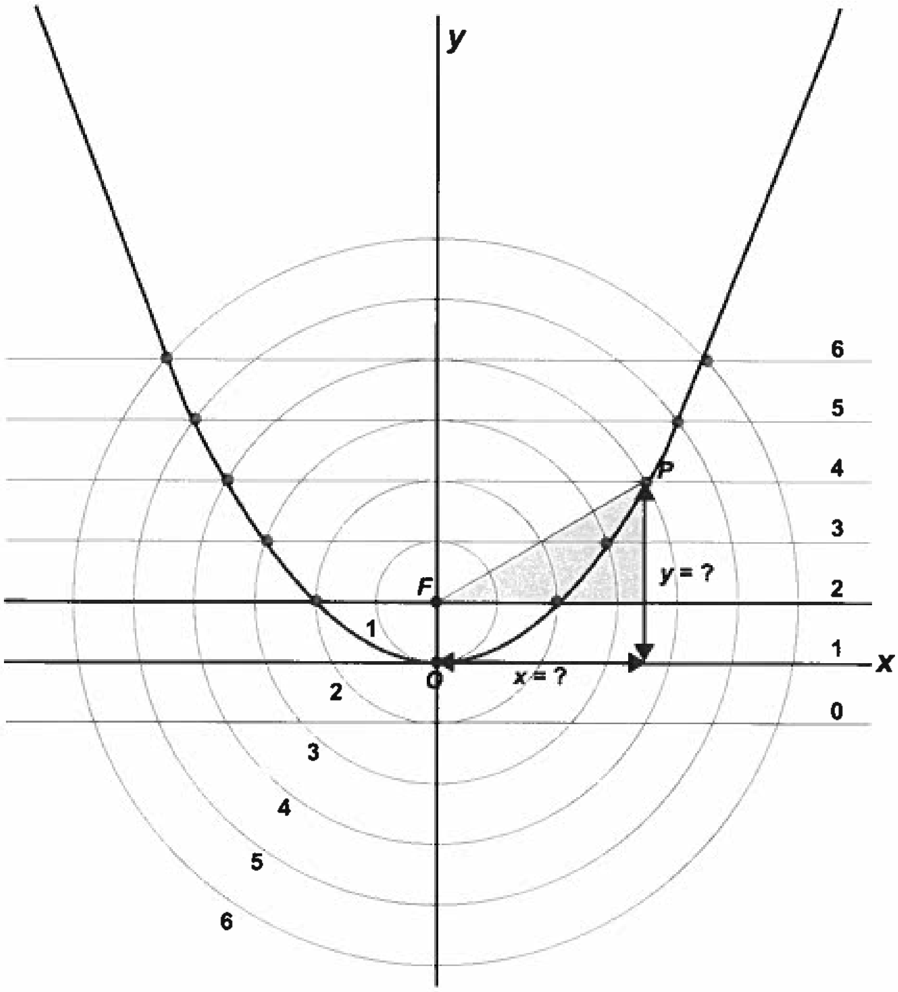
De lijn **1** raakt de cirkel **1** in één punt en de lijn **2** snijdt de cirkel **2** in twee punten (zie figuur).

- Teken zelf de snijpunten van de lijn **3** met de cirkel **3**, van de lijn **4** met de cirkel **4**, enz.
- Al deze snijpunten liggen met de drie voorgetekende punten op een kromme lijn. Die kromme lijn heet *parabool*.
  Teken die parabool zo goed als je kunt.



Parabool(2)

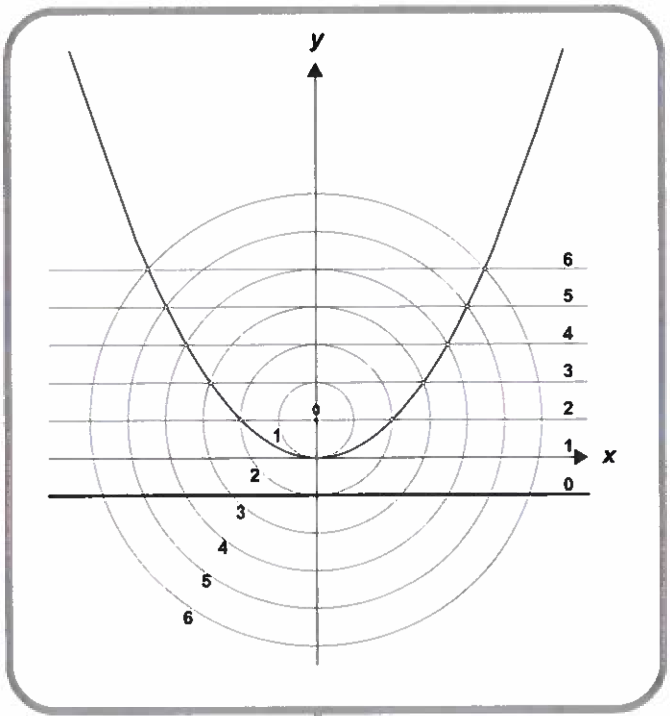
Aan de vorige tekening is een assenstelsel toegevoegd.
De *x*-as is de horizontale lijn met nummer **1**; de *y*-as gaat door het middelpunt van alle cirkels.



Het punt *P* ligt op de cirkel **4** en de lijn **4**.

- Hoe groot is de *y*-coördinaat van *P*?
- Voor de *x*-coördinaat van *P* geldt: $x^2 = 12$.
  Verklaar dat.

Parabool(3)



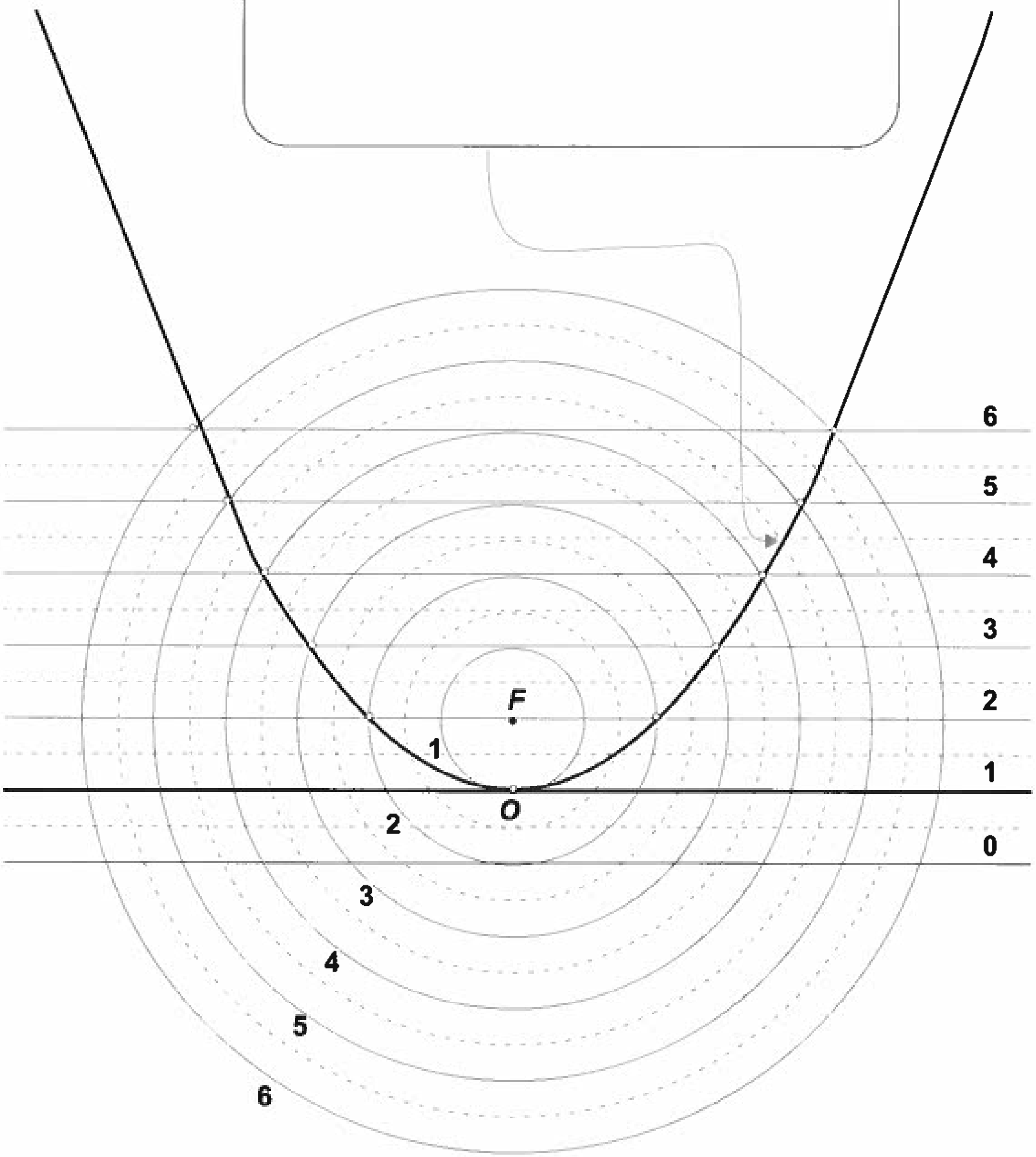
x^2	y
...	1
...	2
12	3
...	4
...	5

- Vul de tabel verder in.

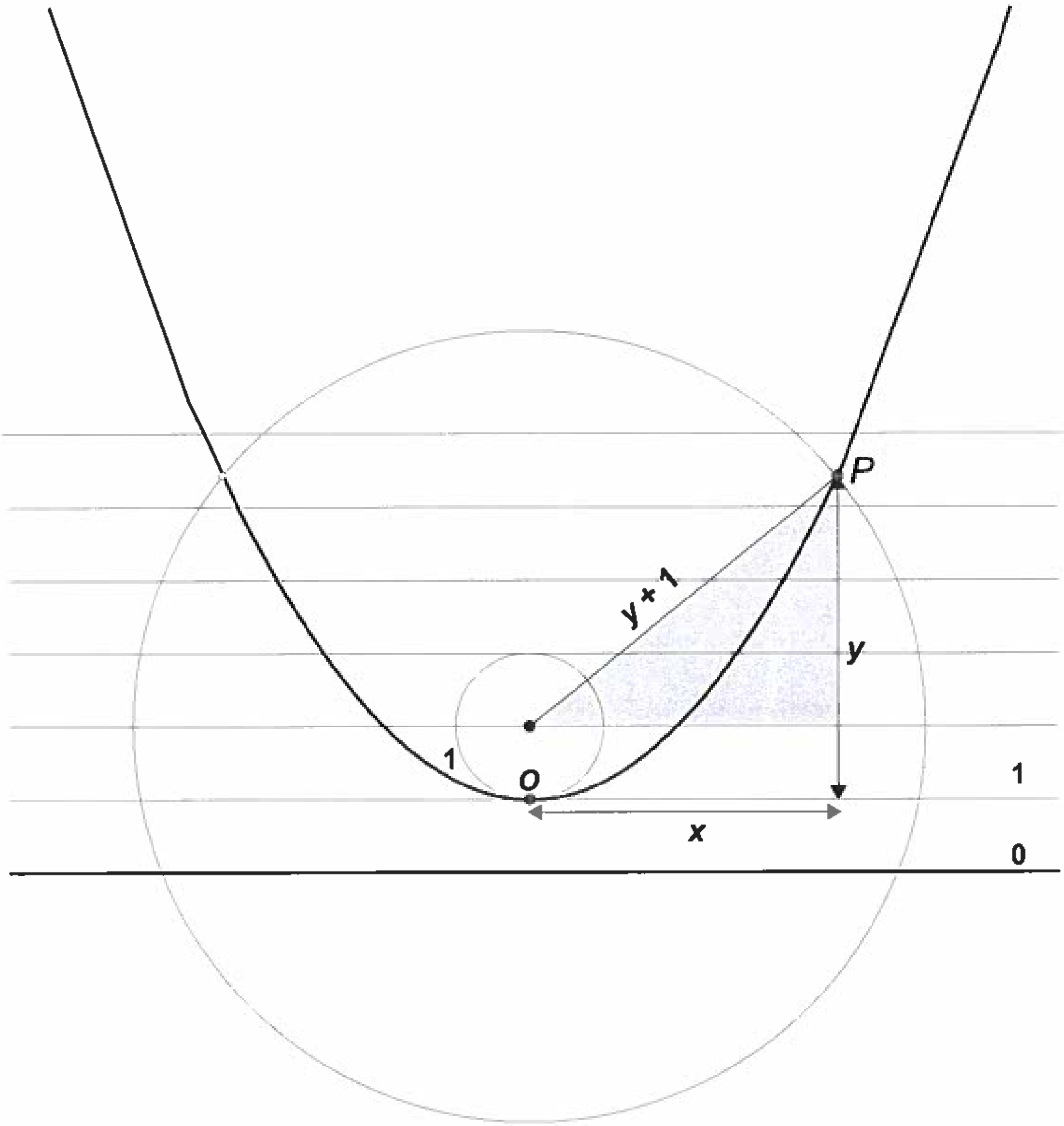
Parabool(4)

$y = 3\frac{1}{2}$

- Toon aan: $x^2 = 14 = 4 \times 3\frac{1}{2}$



Parabool(5)

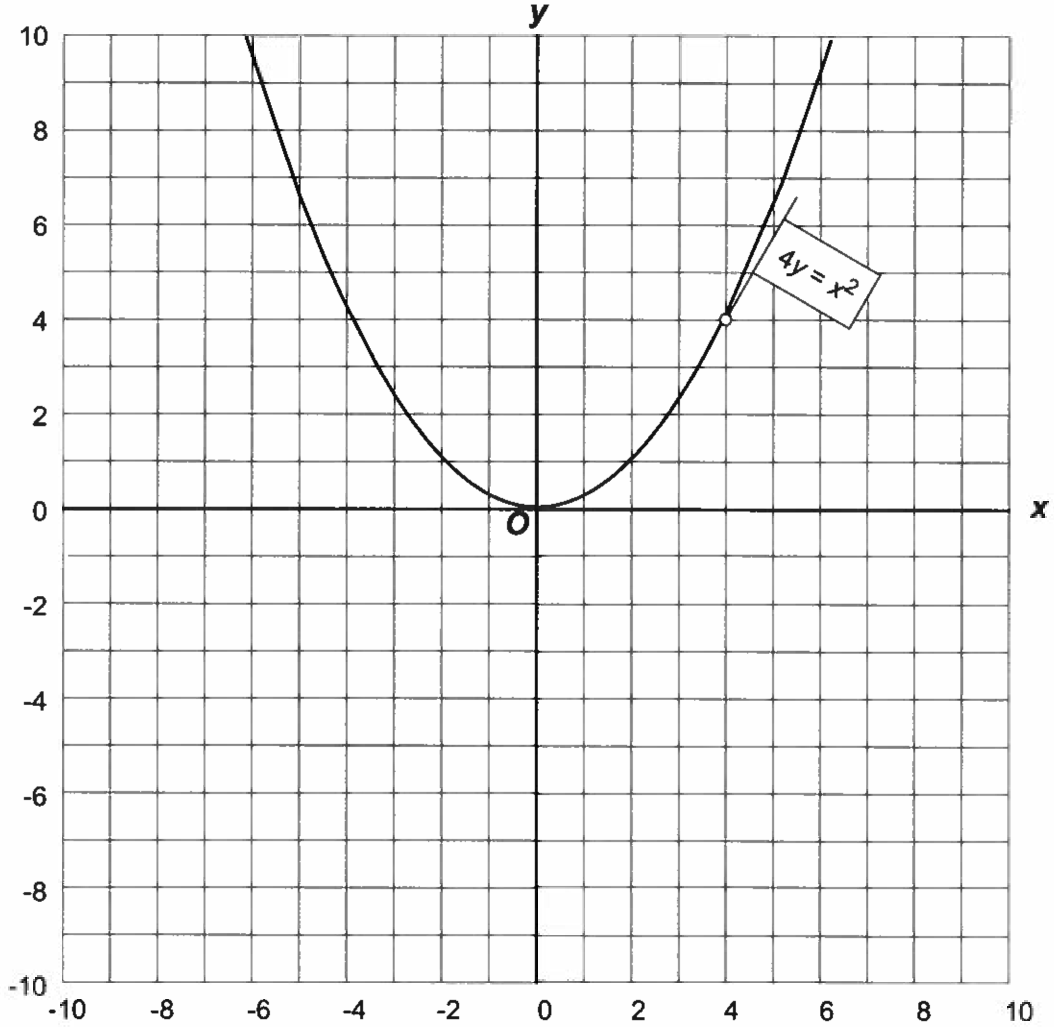


- Verklaar uit de figuur: $(y+1)^2 = (y-1)^2 + x^2$

- Bewijs nu dat geldt: $x^2 = 4y$.

Hiermee is een vergelijking van de parabool gevonden!
Die vergelijking kan ook zo worden geschreven: $y = \frac{1}{4}x^2$

Symmetrische krommen



- Teken in deze figuur ook de krommen met vergelijking $4x = y^2$, $-4y = x^2$ en $-4x = y^2$.

- Teken in de figuur ook de kromme met vergelijking $x^2 + y^2 = 16$.

- En dan ook nog de kromme met vergelijking $x^2 \cdot y^2 = 256$

- Welke figuur past bij de vergelijking $16y^2 = x^4$?

Gemiddelden in soorten(1)

Drie getallen *a, b* en *r* op de getallenlijn
r ligt precies midden tussen *a* en *b*. Dus $r - a = b - r$ (*)
We noemen *r* nu het *rekenkundig gemiddelde* van *a* en *b*.

- Laat zien dat uit (*) volgt: $r = \frac{1}{2}(a + b)$

- x is een willekeurig getal.
  Druk het gemiddelde van $2x + 5$ en $6x + 7$ uit in x.

- Dezelfde vraag voor $x^2 + 3x - 10$ en $x^2 + 6x - 7$

a en *b* zijn positieve getallen.

Het getal *m* ligt tussen *a* en *b* zó dat $\frac{m}{a} = \frac{b}{m}$ (**)

- Laat zien dat uit (**) volgt: $m = \sqrt{ab}$
  Hint: Vermenigvuldig in (**) beide leden eerst met *a* en vervolgens met *m*.

We noemen *m* het *meetkundig gemiddelde* van *a* en *b*.

- Bereken het rekenkundig en het meetkundig gemiddelde van:

  8 en 18 ; 9 en 16 ; 10 en $14\frac{2}{5}$; 12 en 48 ; 20 en 40 .

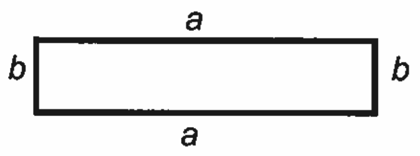
- Van twee getallen is het rekenkundig gemiddelde gelijk aan 29
  en het meetkundig gemiddelde gelijk aan 20.
  Welke getallen zijn dat?

Gemiddelden in soorten(2)

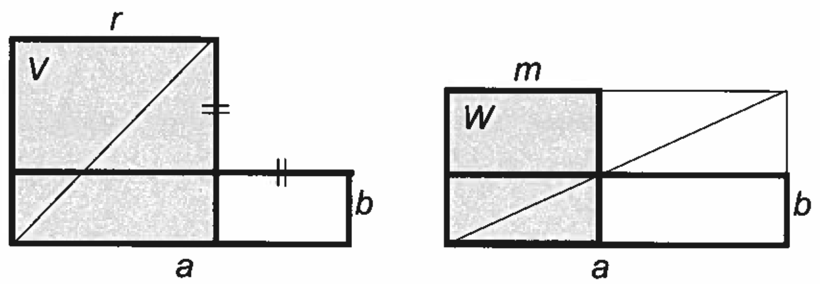
Bij het berekenen van het rekenkundig gemiddelde (r) en het meetkundig gemiddelde (m) van twee ongelijke getallen is het je misschien opgevallen dat m steeds kleiner was dan r.

Je kunt op verschillende manieren zien dat dit algemeen geldig is.

(I) Stel de positieve getallen a en b ($a > b$) voor als lijnstukken en maak een rechthoek met a en b als zijden.



Bekijk nu twee vierkanten V en W:
V heeft dezelfde *omtrek* als de rechthoek met zijden a en b.
W heeft dezelfde *oppervlakte* als deze rechthoek.



- Hoe zie je dat V dezelfde *omtrek* heeft als de rechthoek van a bij b? (de gemerkte lijnstukken zijn even lang)

- Hoe zie je dat W dezelfde *oppervlakte* heeft als die rechthoek ?

Zo te zien is r groter dan m. Dat blijft zo als a en b minder van elkaar verschillen. Alleen als $a = b$ geldt $r = m$.
Je kunt dit met *algebra* bewijzen!

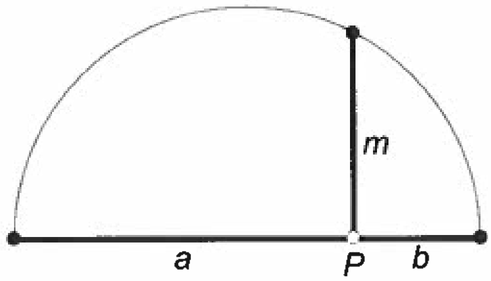
- Laat zien dat geldt:

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = 2r - 2m$$

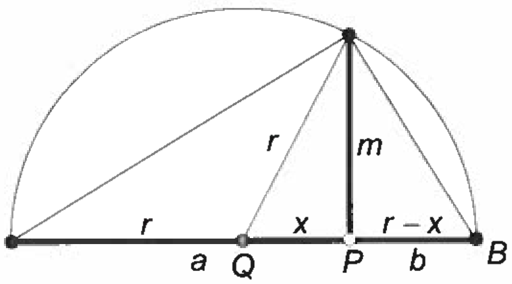
- Hoe volgt hieruit dat $r \geq m$?

Gemiddelden in soorten(3)

*Uit de oude Griekse wiskunde is een mooie constructie bekend om bij twee getallen **a** en **b**, voorgesteld door lijnstukken, het meetkundig gemiddelde te vinden.*



De lijnstukken a en b zijn bij P aan elkaar geplakt en er is een halve cirkel met diameter $a + b$ getekend.
In P is een lijnstuk loodrecht op de middellijn getekend.
De lengte m is nu juist het meetkundig gemiddelde van a en b.
Hieronder volgt het bewijs.



Q is het middelpunt van de halve cirkel met straal r en $QP = x$.

- Verklaar: $a \cdot b = (r + x)(r - x) = r^2 - x^2$

- Hoe volgt hier (meetkunde!) uit dat $m = \sqrt{ab}$?

- En hoe zie je nu dat het meetkundig gemiddelde van a en b kleiner is dan het rekenkundig gemiddelde van die getallen?

Gemiddelden in soorten(4)

Een wielrenner die in training is rijdt een berg op met een snelheid van 20 km/uur. Als hij boven is draait hij om en daalt af met een snelheid van 80 km/uur.

Wat was zijn gemiddelde snelheid in die trainingsrit?

Er zijn drie meningen:

Een journalist denkt dat dit 50 km/uur is.
De verzorger van de renner meent dat dit 40 km/uur is.
Ten slotte is er de trainer die 32 km/uur oppert.

- Welk typen gemiddelde hadden de journalist en de verzorger in gedachten?

- De trainer redeneert als volgt:
  de renner doet 4 keer zo lang over de beklimming dan over de afdaling, dus ik neem een *gewogen gemiddelde* van de snelheden, dat wil hier zeggen:
  $$\frac{4}{5} \cdot 20 + \frac{1}{5} \cdot 80 = 32$$
  Wat vind je van deze redenering?

- De definitie van gemiddelde snelheid is: $\dfrac{\textit{weglengte}}{\textit{tijd}}$

  Stel de lengte van de beklimming voor door *a*.
  De totale afstand die de renner heeft afgelegd is dus ....

  Stel t_{op} = de tijd die de renner nodig had voor de beklimming en
  t_{af} = de tijd gebruikt voor de afdaling.

- Laat zien dat $t_{op} + t_{af} = \dfrac{a}{16}$

- Hoe volgt hieruit dat de trainer gelijk heeft?

Harmonisch gemiddelde

De Griekse wiskundigen in de Oudheid kenden naast het rekenkundig en meetkundig gemiddelde ook het *harmonisch gemiddelde.*

a en *b* zijn positieve getallen.

Het getal *h* ligt zo tussen *a* en *b* dat :

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{h} = \frac{1}{h} - \frac{1}{b}$$

- Laat zien dat hieruit volgt: $h = \dfrac{2ab}{a+b}$ (*)

h wordt het *harmonisch gemiddelde* van *a* en *b* genoemd.

- Ga na dat $h = 32$ als $a = 20$ en $b = 80$

Hier zijn nog twee andere formules voor *h.*

$$h = \frac{a}{a+b} \cdot b + \frac{b}{a+b} \cdot a \quad (^{**})$$

$$h = \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)} \quad (^{***})$$

- Controleer dat (**) en (***) gelijkwaardig zijn met (*)

Formule (**) zegt:
het harmonisch gemiddelde van a en b is een gwogen gemiddelde van a en b met gewichten die zich verhouden als a staat tot b.

Formule (***) zegt:
het harmonisch gemiddelde van a en b is het omgekeerde van het rekenkundig gemiddelde van de omgekeerden van a en b.

Gemiddelden in soorten(5)

Laat *r*, *m* en *h* respectievelijk het rekenkundig, meetkundig en harmonisch gemiddelde zijn van de positieve getallen *a* en *b*.

Dus: $r = \frac{1}{2}(a+b)$, $m = \sqrt{ab}$, $h = \frac{2ab}{a+b}$

- Controleer dat elk van de formules symmetrisch is in *a* en *b*.
- Controleer dat geldt: $a = b \longrightarrow r = m = h$
- Vul onderstaande tabel in:

a	*b*	*r*	*m*	*h*
5	20			
1	4			
9	16			
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$			
$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$			

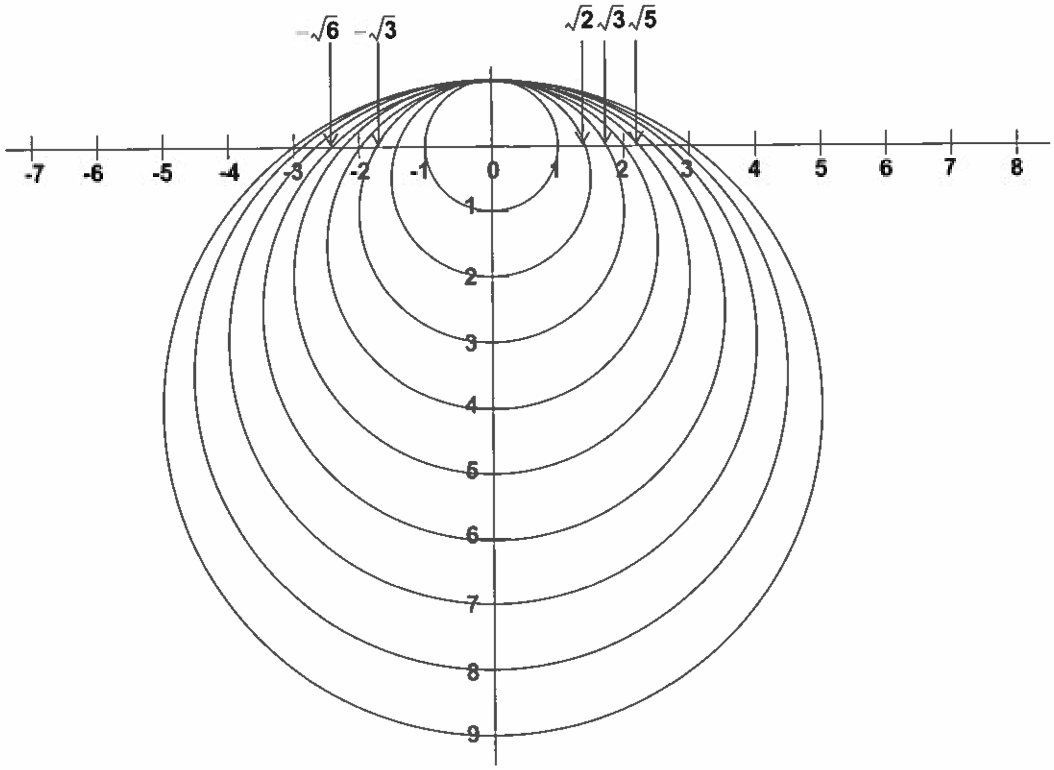
- Controleer in elk van de vijf regels dat *m* ook het meetkundig gemiddelde is van *r* en *h*.

- Laat via de formules zien dat dit algemeen geldig is.

Je ziet in de tabel dat van de drie gemiddelden *h* steeds het kleinste is.

- Zou dit altijd zo zijn? Waarom?

Constructie van wortels



De cirkels met diameter 2, 3, 4, 5, ... snijden de horizontale getallenlijn. Dat levert op die getallenlijn een constructie op van vierkantswortels!

Dit is gebaseerd op de constructie van het meetkundig gemiddelde zoals die op bladzijde 100 is uitgelegd. Kijk die nog even na!

- Controleer de plaats van de vijf wortels die in de figuur zijn aangegeven.

- Vul in: om het getal $\sqrt{10}$ te construeren, heb je de cirkel met diameter .... nodig.

- Bij welke diameter van de cirkel uit de bundel krijg je de plaats van $\sqrt{n}$ op de getallenlijn?

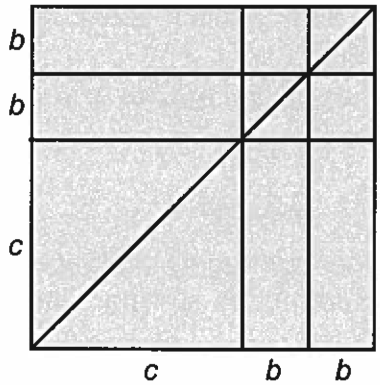
Je ziet wel dat de afstand op de getallenlijn tussen twee opvolgende wortels, dus $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, kleiner wordt, naarmate n aangroeit.

- Verklaar: $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot (\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = 1$

- Hoe volgt hieruit dat $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ kleiner wordt bij toenemende n?

Formules en figuren

De figuur hieronder staat in het beroemdste boek uit de geschiedenis van de wiskunde, de Elementen van Euclides , dat zo'n 2300 jaar geleden is geschreven.

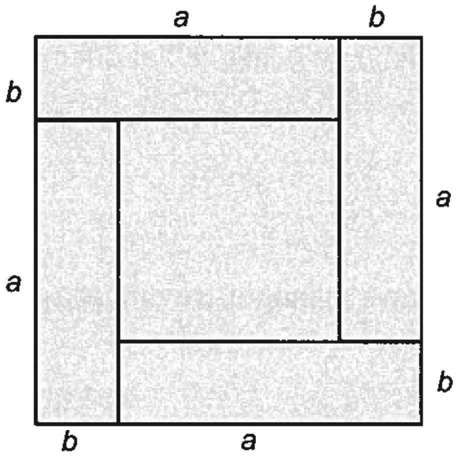


De Griekse wiskundigen in die tijd gebruikten geen letters voor variabelen zoals wij nu doen, maar lijnstukken.
De figuur hoorde bij een algebrastelling die Euclides in meetkundige termen formuleerde, maar die wij nu zo kunnen opschrijven:

$$(c + 2b)^2 = 4b(c + b) + c^2$$

- Controleer dat deze formule uit de figuur is af te lezen.
- Controleer deze formule door uitwerken volgens de regels van de algebra.

- Als we in de formule $c + b$ vervangen door a, komt er een symmetrische formule in a en b. Welke?
- Hoe kun je deze nieuwe formule ook uit de figuur hieronder aflezen?



Pythagorese drietallen(1)

Als je twee kwadraten met elkaar vermenigvuldigt, krijg je weer een kwadraat. Bijvoorbeeld: $2^2 \times 3^2 = 6^2$.
Als je twee kwadraten van hele getallen optelt, krijg je in meestal niet het kwadraat van een heel getal.
Bijvoorbeeld: $2^2 + 3^2 = 13$ en dit ligt tussen 3^2 en 4^2.
Maar er zijn genoeg uitzonderingen.
De bekendste is deze:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

Het drietal (3, 4, 5) wordt een pythagorees drietal genoemd.
Dat heeft natuurlijk te maken met de stelling van Pythagoras!

- Waarom?

De formule die je onderaan de vorige bladzijde hebt ontdekt, kun je zo schrijven:

$$(a - b)^2 + 4ab = (a + b)^2 \qquad (*)$$

Stel dat je voor zowel *a* als *b* een kwadraat (van een heel getal) invult .
Dan is $4ab$ zeker ook het kwadraat van een heel getal.

- Verklaar dit.

De formule (*) maakt het mogelijk om zoveel pythagorese drietallen te maken als je maar wilt.

- Neem bijvoorbeeld $a = 9$ en $b = 4$.
  Welk Pythagorees drietal vind je nu?

- Voor welke waarden van a en b krijg je het drietal (3, 4, 5)?.

- Maak zelf nog drie nieuwe pythagorese drietallen.

Pythagorese drietallen(2)

Een beroemd Babylonisch kleitablet (dateert van ca. 1800 voor Chr.) bevat vijftien pythagorese dtrietallen.
Daarbij zijn een paar hele grote.
Bijvoorbeeld het drietal:

$$(4961, 6480, 8161)$$

Een fantastische prestatie, zo'n 3800 jaar geleden!

- Controleer met een rekenmachientje dat dit inderdaad een pythagorees drietal is.

De Babyloniërs moeten over een formule of recept hebben beschikt om pythagorese drietallen te vinden.
Misschien was het onze formule;

$$(a - b)^2 + 4ab = (a + b)^2$$

- Welke kwadraten moet je invullen voor a en b in deze formule om het Babylonische drietal (4961, 6480, 8161) te vinden?

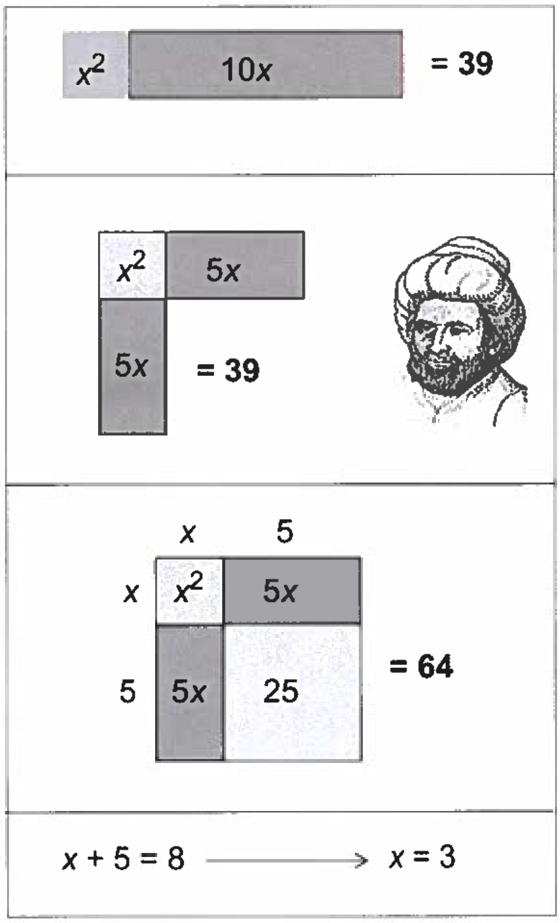
De methode van Al Khwarizmi(1)

Al Khwarizmi (790-856) was een Arabisch wiskundige die een boek schreef over het oplossen van vergelijkingen. De titel van het boek was:

Hisab al-jabr w'al-muqabala.

Uit het woord 'al-jabr' (een technische term die betrekking heeft op het uitvoeren van dezelfde bewerking op linker- en rechterlid van een vergelijking is het woord Algebra ontstaan. Je kunt dus zeggen dat Al Khwarizmi de naamgever is van dit vak. En dan is er ook het woord *algoritme*, duidelijk een verbastering van zijn naam!

Al Khwarizmi behandelt in zijn boek de vergelijking $x^2 + 10x = 39$ als volgt:

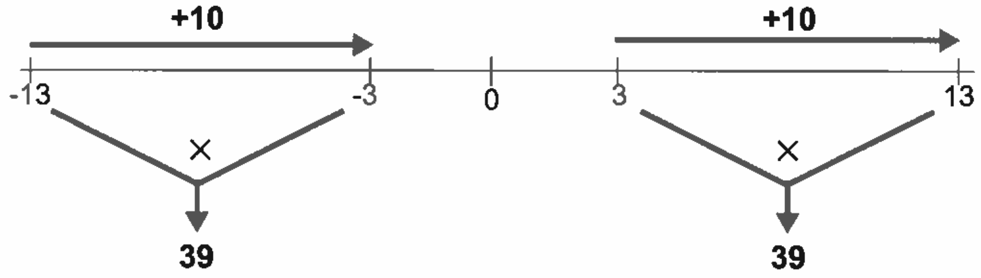


- Controleer iedere stap in de oplossing van Al Khwarizmi.

  Maar er is nog een tweede (negatief!) getal dat aan de vergelijking voldoet!
- Welk getal is dat?
  (Hint: de derde stap in de oplossing kun je schrijven als $(x + 5)^2 = 64$.

De methode van Al Khwarizmi(2)

De vergelijking $x^2 + 10x = 39$ had je misschien ook door slim proberen kunnen oplossen. Via: $x \cdot (x + 10) = 3 \cdot 13$ kun je $x = 3$ wel zien zitten. En na spiegeling op de getallenlijn komt ook -13 in beeld.



Maar neem nu de vergelijking $x^2 + 10x = 30$.

- Bekijk de oplossing van Al Khwarizmi op de vorige bladzij en pas die toe op deze nieuwe vergelijking. Nu komt de berekening niet mooi uit. Ga na dat de positieve oplossing gelijk is aan $\sqrt{55} - 5$.

- Welk negatief getal voldoet aan de vergelijking ?

- Vul de gevonden oplossingen in bij $x \cdot (x + 10) = 30$ en controleer of ze inderdaad voldoen.

- Los x op uit: $x \cdot (x + 8) = 4$

De methode van Al Khwarizmi(3)

De oplossingen van de vergelijkingen $x^2 + 6x = 27$ en $x^2 + 6x = 16$ zijn gehele getallen.

- Welke oplossingen hebben die vergelijkingen?

- Als je in de vergelijking $x^2 + 6x = ...$ op de stippeltjes een geheel getal invult, dat tussen 16 en 27 in ligt, krijg je geen mooie gehele oplossingen. Kies een getal tussen 27 en 16 en los de vergelijking op met de plaatjes-methode van Al Khwarizmi.

- Als je het goed gedaan hebt, liggen je oplossingen tussen die van de vergelijkingen $x^2 + 6x = 27$ en $x^2 + 6x = 16$. Controleer dit.

- Als je in de vergelijking $x^2 + 6x = ...$ op de stippeltjes een gebroken getal tussen 27 en 16 invult, kunnen er gebroken getallen (zonder wortels) uitkomen. Probeer zo'n getal te vinden en geef de twee oplossingen.

Babylonisch vraagstuk

Op een Babylonisch kleitablet is het volgende vraagstuk gevonden.

Ik telde 7 keer de zijde van mijn vierkant op bij 11 keer mijn vierkant en het resultaat was $6\frac{1}{4}$. Hoe lang was de zijde van mijn vierkant?

In onze algebrataal staat er:

los x op uit: $11x^2 + 7x = 6\frac{1}{4}$

De Babyloniërs bedachten een slimme truc.
Zij vermenigvuldigden de beide leden met 11 en kregen dan:

$$(11x)^2 + 7 \cdot 11x = 68\frac{3}{4}$$

- Controleer of dit resultaat goed is.

Vervolgens namen zij als nieuwe variabele 11 maal de zijde van het vierkant. In onze taal: $\boldsymbol{X} = 11x$.
De vergelijking wordt dan:

$$\boldsymbol{X}^2 + 7\boldsymbol{X} = 68\frac{3}{4}$$

- Los deze vergelijking op met de methode van Al Khwarizmi.
  Beperk je daarbij tot de positieve oplossing voor $\boldsymbol{X}$.

- Wat is de (positieve) oplossing van de oorspronkelijke Babylonische vergelijking?

Babylonisch recept(1)

Zo'n duizend jaar voordat Al Khwarizmi leefde, hadden Babyloniërs al een recept bedacht om vergelijkingen van de tweede graad (vierkantsvergelijkingen) op te lossen.

Maar de ontcijfering van teksten op kleitabletten vond pas plaats in de twintigste eeuw, zodat Al Khwarizmi niet van het bestaan van dit recept wist.

In algebra-taal komt het Babylonisch recept hier op neer.
Neem de vergelijking

$$x^2 + Gx = H$$

G en H staan voor bekende getallen.
De oplossing gaat als volgt:

Breek G in tweeën: $\frac{1}{2}G + \frac{1}{2}G$

Bereken $\frac{1}{2}G \times \frac{1}{2}G = \frac{1}{4}G^2$

Tel hier H bij op: $\frac{1}{4}G^2 + H$

Trek hier de wortel uit: $\sqrt{\frac{1}{4}G^2 + H}$

Verminder dit antwoord met G en de oplossing is:

$$x = \sqrt{\frac{1}{4}G^2 + H} - G$$

- Laat met de methode van Al Khwarizmi zien, dat dit recept klopt.

Babylonisch recept(2)

Het vierkant van Al Khwarizmi kun je vervangen door een tabel.
Voordeel: x, *G en H* kunnen ook best negatieve getallen voorstellen.

$\times$	x	$\frac{1}{2}G$
x	x^2	$\frac{1}{2}Gx$
$\frac{1}{2}G$	$\frac{1}{2}Gx$	$\frac{1}{4}G^2$

$$(x + \tfrac{1}{2}G)^2 = x^2 + Gx + \tfrac{1}{4}G^2$$

Voorbeeld: *Gevraagd om x op te lossen uit* $x^2 + 24x = 81$

- Vul de ontbrekende getallen in het oplossingsschema in:

$$x^2 + 24x = 81$$
$$\downarrow$$
$$x^2 + 24x + \ldots\ldots = 81 + \ldots\ldots$$
$$\downarrow$$
$$(x + 12)^2 = \ldots\ldots$$
$$\swarrow \qquad \searrow$$
$$x + 12 = \ldots\ldots \qquad x + 12 = \ldots\ldots$$
$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$
$$x = \ldots\ldots \qquad\qquad x = \ldots\ldots$$

$\times$	x	12
x	x^2	$12x$
12	$12x$	**?**

- Controleer je twee oplossingen door in te vullen in de vergelijking.

- Los nu x ook op uit: $x^2 - 24x = 81$

Kwadraat afsplitsen(1)

De methode van Al Khwarizmi of Babylonische methode om vergelijkingen van het type $x^2 + Gx = H$ op te lossen, wordt ook wel *kwadraat afsplitsen genoemd.* Je kunt daarbij een tabel gebruiken zoals op bladzij 113, maar als je war meer geoefend hebt, kun je je waarschijnlijk ook zonder tabel redden.

- Gebruik een tabel en los x op uit:

  a. $x^2 + 12x = 64$

  b. $x^2 + 12x = -32$

×		

- Gebruik een tabel en los x op uit:

  a. $x^2 - 12x = 13$

  b. $x^2 - 12x = -34$

×		

- Verklaar waarom de vergelijking $x^2 + 8x = -16$ slechts één oplossing heeft.

- Verklaar waarom de vergelijking $x^2 + 8x = -26$ géén oplossing heeft.

Kwadraat afsplitsen(2)

- Los op met kwadraatafsplitsing:

$x^2 - 26x = -25$	$y^2 + 36y = -35$	$z^2 - 50z = -225$

- $\sqrt{10} - 3$ is een oplossing van de vergelijking $x(x + 6) = 1$
  Je kunt dit laten zien door
  a. dit getal voor x in te vullen;
  b. de vergelijking $x^2 + 6x = 1$ op te lossen met kwadraatafsplitsing.

  Doe dit allebei!

- De vergelijking $x(x + 6) = 1$ heeft nog een tweede oplossing.
  Welk getal is dat?

Kwadraat afsplitsen(3)

- Los op met kwadraatafsplitsing:

$x(x-18) = 319$	$y^2 + 5y = -6\frac{1}{4}$	$z^2 = 6z - 7$

- Los op x op uit $25x^2 + 20x = 5$ via de substitutie $\boldsymbol{X} = 5x$

- Bepaal de positieve oplossing van $7y^2 - 2y = 329$ via de substitutie $\boldsymbol{Y} = 7y$. Hint: vermenigvuldig eerst beide leden met 7.

- Los z op uit: $3z^2 - 20z + 25 = 0$

Kwadraat afsplitsen(4)

- Los de volgende twee vergelijkingen elk op met kwadraatafsplitsing:

$$x^2 + \tfrac{2}{3}x = \tfrac{1}{3} \quad \text{en} \quad x^2 + \tfrac{1}{3}x = \tfrac{2}{3}$$

- Doe dit ook voor: $x^2 + \tfrac{2}{5}x = \tfrac{3}{5}$ en $x^2 + \tfrac{3}{5}x = \tfrac{2}{5}$

- Kijk nog eens naar beide paren vergelijkingen en naar de oplossingen.
  Kun je een zekere overeenkomst zien? Zo ja, wat?

- Bedenk zelf een paar vergelijkingen dat lijkt op de vorige twee paren en los deze op.

- p en q zijn willekeurige getallen zodat $p + q = 1$.
  Toon aan dat -1 en q oplossingen zijn van de vergelijking $x^2 + px = q$.

S, V, P, Q (1)

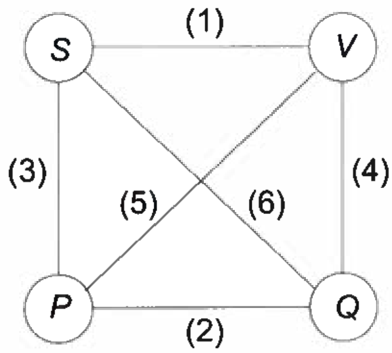
S, V, P, Q staan respectievelijk voor *som, verschil, product, quotiënt* van twee willekeurige getallen, zeg *x* en *y*.

$S = x + y$

$V = x - y$

$P = x \cdot y$ of xy

$Q = x / y$ of $\dfrac{x}{y}$



Als je twee uitkomsten uit het rijtje *S, V, P, Q* kent. kun je in principe de getallen *x* en *y* berekenen. In het schema hierboven zie je dat er zes paren te vormen zijn uit *S, V, P, Q*. Hieronder staat van elk een voorbeeld.

- Los *x* en *y* op uit :

(1) $x + y = 36$ $x - y = 14$	(2) $x \cdot y = 288$ $x / y = 8$
(3) $x + y = 36$ $x \cdot y = 288$	(4) $x - y = 14$ $x / y = 8$
(5) $x - y = 14$ $x \cdot y = 275$	(6) $x + y = 99$ $x / y = 8$

S, V, P, Q (2)

In principe kun je x en y uitdrukken in *twee* van de vier variabelen S, V, P, Q. Hieronder zie je de bijpassende formules.

- Controleer je uitkomsten van de vorige bladzijde met deze formules.

$$\left.\begin{aligned} x+y&=S \\ x-y&=V \end{aligned}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}(S+V) \\ y &= \tfrac{1}{2}(S-V) \end{aligned}\right.$$

- Geldt dit ook als $S = V$?
- En als $S < V$?

$$\left.\begin{aligned} x\cdot y&=P \\ x/y&=Q \end{aligned}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{aligned} x &= \sqrt{PQ} \\ y &= \sqrt{P/Q} \end{aligned}\right.$$

- Dit geldt *niet* als $PQ < 0$
  Had je dit kunnen voorzien?

$$\left.\begin{aligned} x+y&=S \\ x\cdot y&=P \end{aligned}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}S+\tfrac{1}{2}\sqrt{S^2-4P} \\ y &= \tfrac{1}{2}S-\tfrac{1}{2}\sqrt{S^2-4P} \end{aligned}\right.$$

- Dit geldt niet als $S^2 < 4P$ ofwel $P > (\tfrac{1}{2}S)^2$
  Had je dit kunnen voorzien?
  Hint: Zie bladzijde 70.

$$\left.\begin{aligned} x-y&=V \\ x/y&=Q \end{aligned}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{aligned} x &= \frac{QV}{Q-1} \\ y &= \frac{V}{Q-1} \end{aligned}\right.$$

- Dit geldt niet als $Q = 1$ en $V \neq 0$
  Hoe was dit te voorzien?
- Hoe zit het als $Q = 1$ en $V = 0$?

$$\left.\begin{aligned} x-y&=V \\ x\cdot y&=P \end{aligned}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}V+\tfrac{1}{2}\sqrt{V^2-4P} \\ y &= -\tfrac{1}{2}V+\tfrac{1}{2}\sqrt{V^2-4P} \end{aligned}\right.$$

- Aan welke voorwaarde moeten V en P voldoen?

$$\left.\begin{aligned} x+y&=S \\ x/y&=Q \end{aligned}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{aligned} x &= \frac{QS}{Q+1} \\ y &= \frac{S}{Q+1} \end{aligned}\right.$$

- Aan welke voorwaarde moet Q voldoen?

S, V, P, Q (3)

- Controleer de formules van de vorige bladzijde door de uitdrukkingen voor x en y in te vullen in het stelsel links van de pijl.

$x = \frac{1}{2}(S+V)$ en $y = \frac{1}{2}(S-V)$ $x + y =$ .... + ... = ... $x + y =$ .... + ... = ...	$x = \sqrt{PQ}$ en $y = \sqrt{P/Q}$
$x = \frac{1}{2}S + \frac{1}{2}\sqrt{S^2 - 4P}$ en $y = \frac{1}{2}S - \frac{1}{2}\sqrt{S^2 - 4P}$ Hint: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	$x = \dfrac{QV}{Q-1}$ en $y = \dfrac{V}{Q-1}$
$x = \frac{1}{2}V + \frac{1}{2}\sqrt{V^2 - 4P}$ en $y = -\frac{1}{2}V + \frac{1}{2}\sqrt{V^2 - 4P}$	$x = \dfrac{QS}{Q+1}$ en $y = \dfrac{S}{Q+1}$

S, V, P, Q (4)

Als je twee van de vier waarden S, V, P, Q kent, kun je de andere twee in principe ook vinden. Immers je kunt dan de getallen x en y berekenen en die uitkomsten gebruiken om het andere tweetal te vinden.
Dat betekent dat elk tweetal uit S, V, P, Q kunt uitdrukken in het resterende tweetal.

Voorbeeld: druk P en Q uit in S en V.

Uit $x = \frac{1}{2}(S + V)$ en $y = \frac{1}{2}(S - V)$ (zie de vorige bladzijden) volgt:

$$P = \frac{1}{4}(S^2 - V^2) \quad \text{en} \quad Q = \frac{S+V}{S-V}$$

- Ga na dat dit klopt.

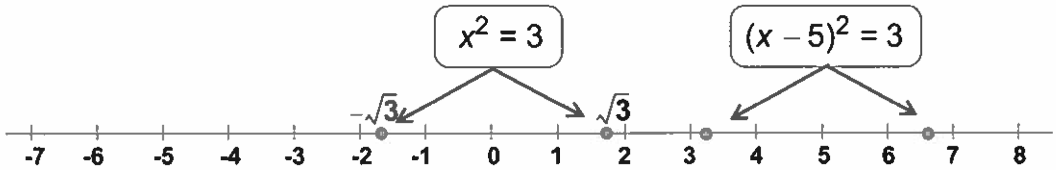
- Druk nu S en V uit in P en Q.

- Druk V uit in S en P.

- Druk P uit in V en Q.

- Druk S uit in V en P.

Schuiven op de getallenlijn(1)



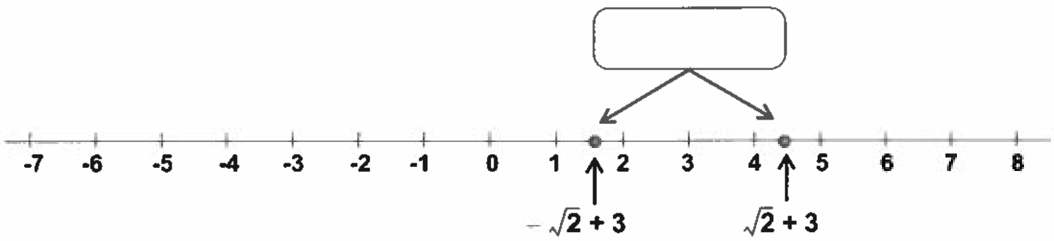
De oplossingen van een vergelijking kunnen worden afgebeeld op een getallenlijn. Zo passen bij $x^2 = 3$ de punten $\sqrt{3}$ en $-\sqrt{3}$.

- Welke punten passen bij $(x - 5)^2 = 3$?

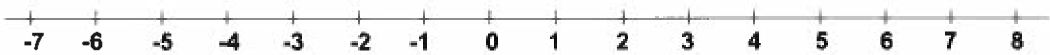
Je ziet dat de oplossingen van $(x - 5)^2 = 3$ ten opzichte van die van $x^2 = 3$ 5 eenheden naar rechts zijn verschoven.

- Hoe zit dat met de oplossingen van $(x + 4)^2 = 3$?
  Geef die punten aan op de getallenlijn.

- Van welke vergelijking zijn $-\sqrt{2} + 3$ en $\sqrt{2} + 3$ de oplossingen?



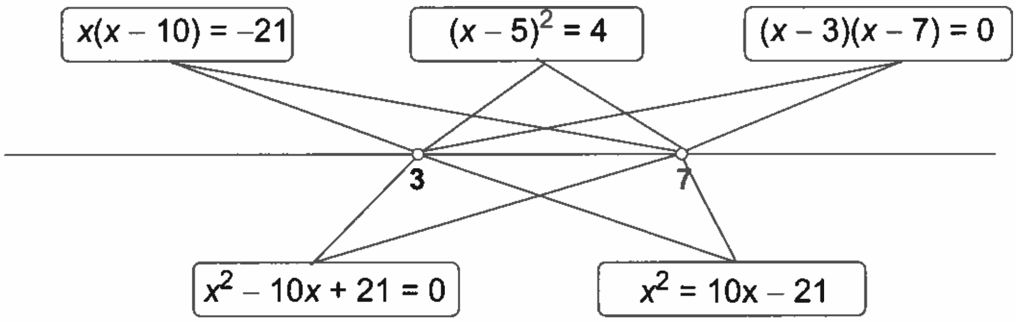
- Van welke vergelijking zijn $-\sqrt{5} - 1$ en $\sqrt{5} - 1$ de oplossingen?
  Teken de bijbehorende punten op de getallenlijn.



- Vul in:
  door het paar oplossingen van de vergelijking $x^2 = 50$ op de getallenlijn acht stappen naar rechts te schuiven krijg je de oplossingen van de vergelijking ....

Schuiven op de getallenlijn (2)

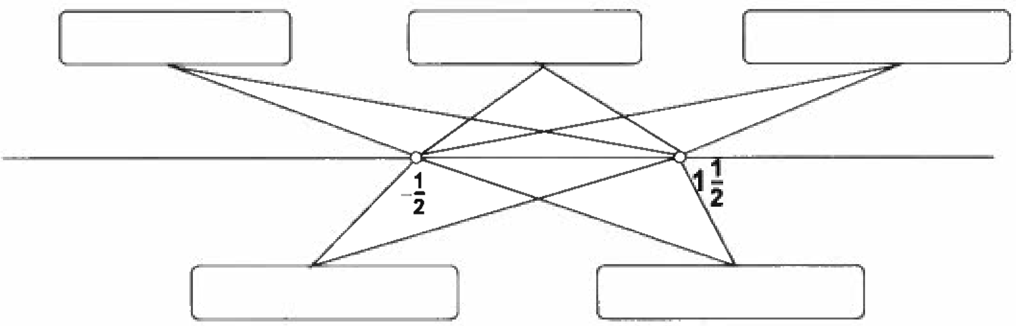
In de figuur wordt gesuggereerd dat 3 en 7 de oplossingen zijn van vijf verschillende vergelijkingen.



- Laat zien dat dit correct is.

- Het puntenpaar 3 en 7 wordt op de getallenlijn 3 eenheden naar links geschoven. Geef vier verschillende vormen van vergelijkingen waarvan de nieuwe getallen juist de enige oplossingen zijn.

- Vul vijf verschillende vergelijkingen in waarvan $-\frac{1}{2}$ en $1\frac{1}{2}$ de enige twee oplossingen zijn.

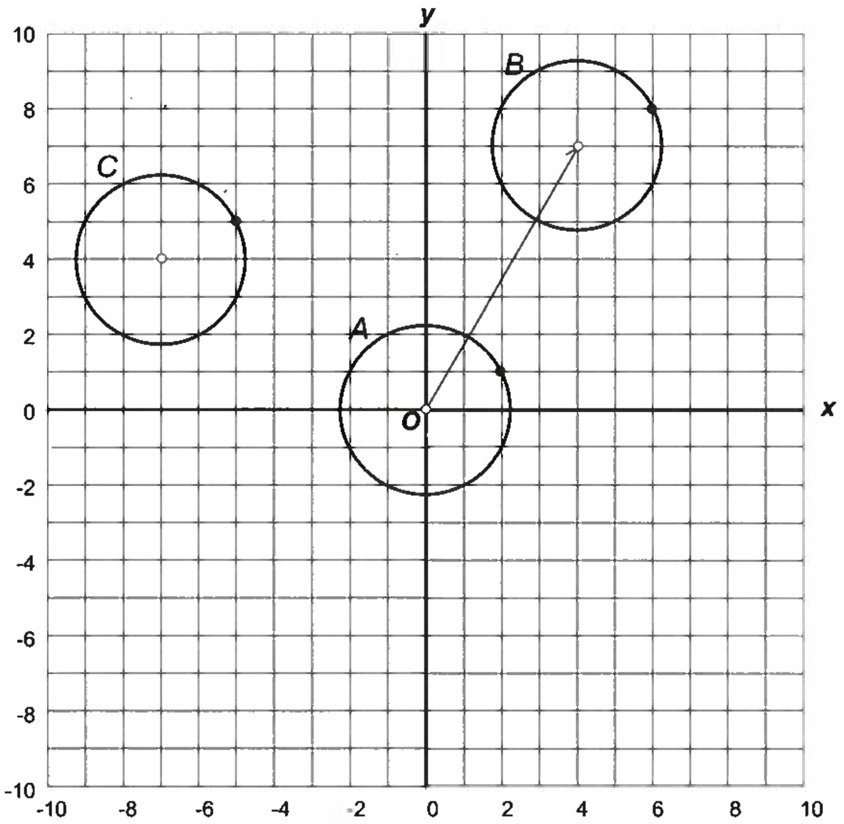


Schuiven in het vlak(1)

In het getallenparenvlak zijn drie even grote cirkels getekend; *A*, *B* en *C*. Kijk eerst naar *A*. Die cirkel heeft de oorsprong als middelpunt en gaat door acht roosterpunten, onder andere het punt (2, 1).

- Welke zijn de andere zeven roosterpunten die op A liggen?

De straal van *A* is $\sqrt{5}$ en de bij *A* passende vergelijking is $x^2 + y^2 = 5$. Verklaar dit.



Cirkel *B* ligt ten opzichte van A 4 stapjes naar rechts en 7 stapjes naar boven verschoven.

- Welke acht roosterpunten liggen op *B*?

- Welke van de twee volgende vergelijkingen past bij *B*:

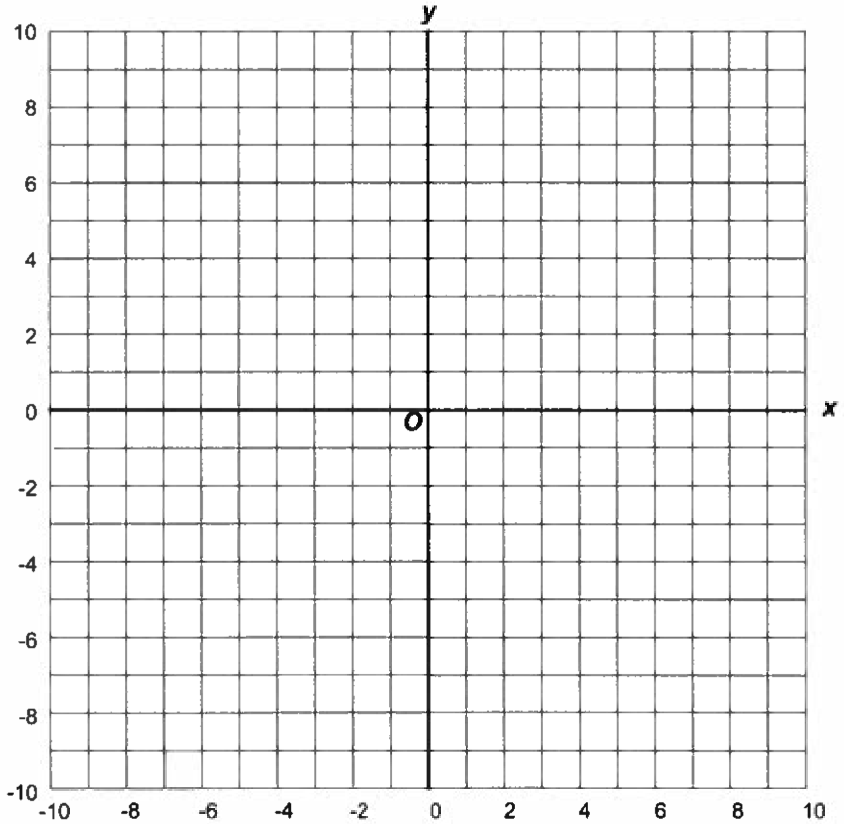
$$(x + 4)^2 + (y + 7)^2 = 5 \text{ of } (x - 4)^2 + (y - 7)^2 = 5\ ?$$

Cirkel *C* ligt ten opzichte van *A* 7 stapjes naar links en 4 stapjes naar boven verschoven.

- Welke vergelijking past bij *C*?

Schuiven in het vlak(2)

- Teken de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = 13$.
  Welke roosterpunten liggen op die cirkel?

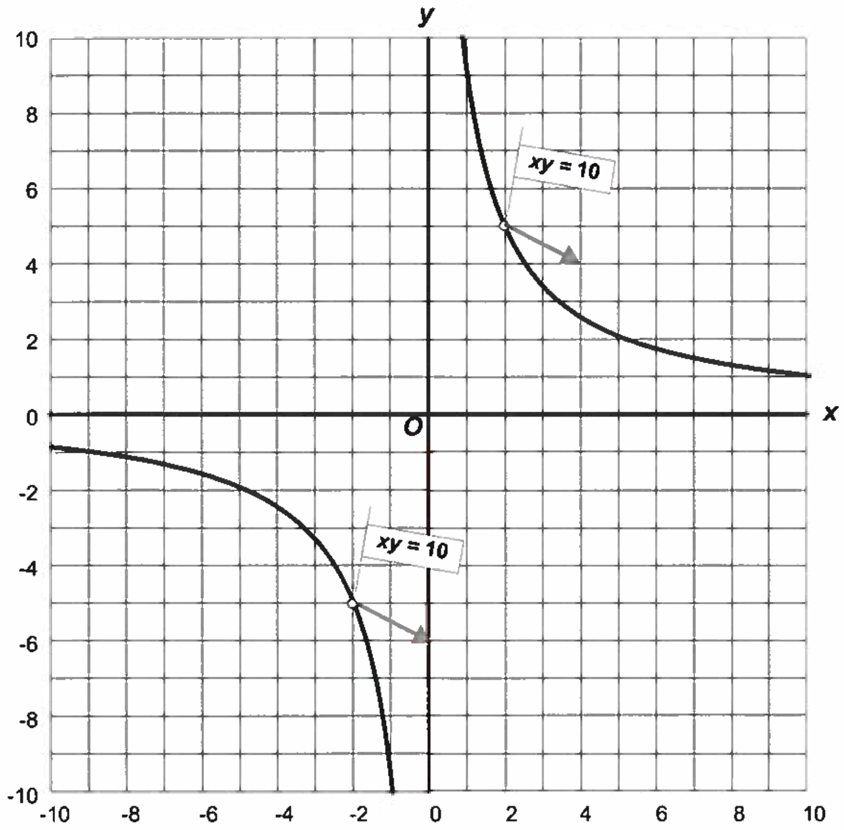


- Verschuif de cirkel 3 eenheden naar rechts en 2 eenheden omhoog.
  Welke roosterpunten bevat de nieuwe cirkel?
  En welke vergelijking past erbij?

- Teken de cirkel met vergelijking $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 13$
- Ook de cirkel met vergelijking $(x + 6)^2 + (y - 1)^2 = 13$
- Ook de cirkel $(x + 6)^2 + (y - 1)^2 = 9$

Schuiven in het vlak(3)

- In de figuur is de hyperbool met vergelijking $xy = 10$ getekend.
  In tegenstelling tot een cirkel, kunnen we de hyperbool nooit volledig tekenen. Waarom kan dat eigenlijk niet?



We kunnen deze hyperbool nu verschuiven in het vlak.
Bijvoorbeeld zo dat elk punt 2 eenheden naar rechts en 1 eenheid omlaag wordt verschoven. De punten (2, 5) en (–2, –5) gaan dan respectievelijk naar (4, 4) en (0, –6).

- Verschuif zo een paar punten van de hyperbool, zo nauwkeurig mogelijk en teken de *asymptoten* *) van de nieuwe hyperbool.

- Teken nu, zo goed en zo kwaad als je kunt, de twee takken van de nieuwe hyperbool.

- Welke vergelijking kun je bij de nieuwe hyperbool bedenken?
  Controleer aan vier roosterpunten of dit klopt.

Schuiven in het vlak(4)

De verschuiving (of *translatie*) 2 eenheden naar rechts en 1 eenheid omlaag duiden we aan met $T_{2,-1}$

Als (a, b) een willekeurig punt is, geldt:

$$(a, b) \xrightarrow{T_{2,-1}} (a + 2, b - 1)$$

Op de vorige bladzijde heb je misschien gevonden dat de vergelijking van de verschoven hyperbool luidt: $(x - 2)(y + 1) = 10$.
Je kunt dit met algebra bewijzen:

punt (a , b) ligt op hyperbool $xy = 10$	$\xrightarrow{T_{2,-1}}$	punt $(a + 2, b - 1)$ ligt op hyperbool $(x - 2)(y + 1) = 10$

- Leg dit uit.

- Welk twaalf roosterpunten liggen op de hyperbool $xy = 12$?

- Pas op deze punten de translatie $T_{3,4}$ toe. Welke punten krijg je?

- Op welke hyperbool liggen deze punten?

- Laat zien dat $xy = 4x + 3y$ ook een vergelijking van die laatste hyperbool is.

- De laatste vergelijking kun je ook in deze vorm schrijven: $\frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 1$. Verklaar dit.

Schuiven in het vlak(5)

- Vul in:

punt (1, 3) $\xrightarrow{T_{-5,4}}$ punt ....

cirkel $x^2 + y^2 = 10$ $\xrightarrow{T_{-5,4}}$ cirkel ....

punt (−3, −8) $\xrightarrow{T_{5,2}}$ punt ....

hyperbool $xy = 24$ $\xrightarrow{T_{5,2}}$ hyperbool ....

punt (4, 6) $\xrightarrow{T_{1,-1}}$ punt ....

lijn $x + y = 10$ $\xrightarrow{T_{1,-1}}$ lijn ....

punt (−4, 6) $\xrightarrow{T_{4,-6}}$ punt ....

lijn $x - y = -10$ $\xrightarrow{T_{4,-6}}$ lijn ....

punt (4, 16) $\xrightarrow{T_{-4,-6}}$ punt ....

parabool $y = x^2$ $\xrightarrow{T_{-4,-6}}$ parabool ....

- Vul passende translaties in:

punt (5, 8) $\xrightarrow{T_{..........}}$ punt (0, 16)

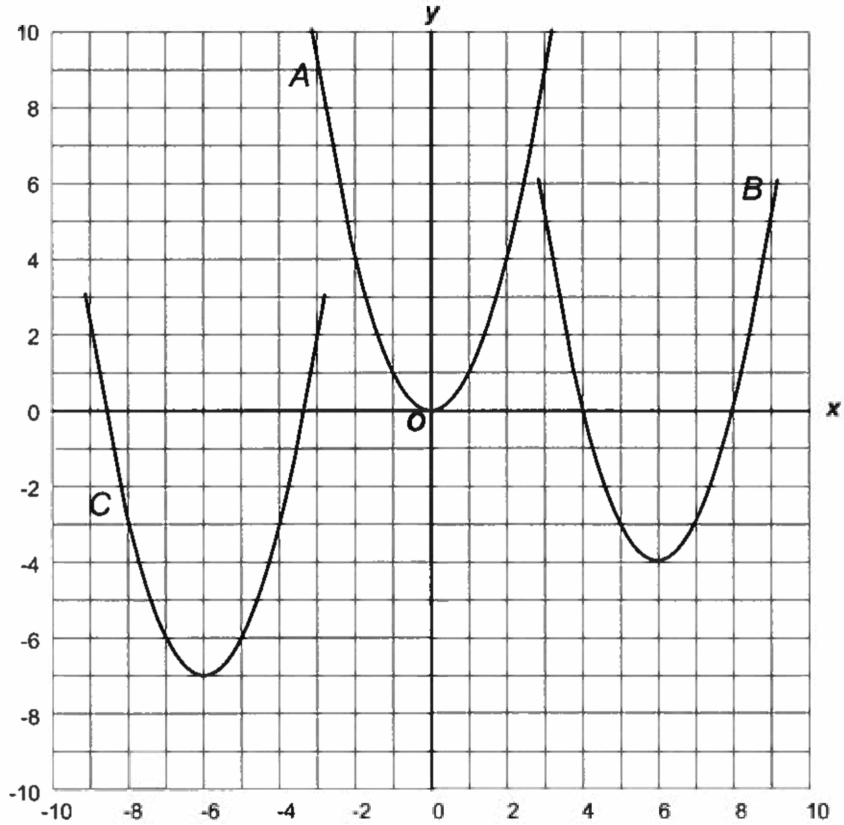
cirkel $x^2 + y^2 = 25$ $\xrightarrow{T_{..........}}$ cirkel $(x - 5)^2 + y^2 = 25$

lijn $x + y = 25$ $\xrightarrow{T_{..........}}$ lijn $x + y = 50$

hyperbool $xy = 25$ $\xrightarrow{T_{..........}}$ hyperbool $x(y + 4) = 25$

parabool $4x = y^2$ $\xrightarrow{T_{..........}}$ parabool $4x + 8 = (y + 8)^2$

Parabolen(1)

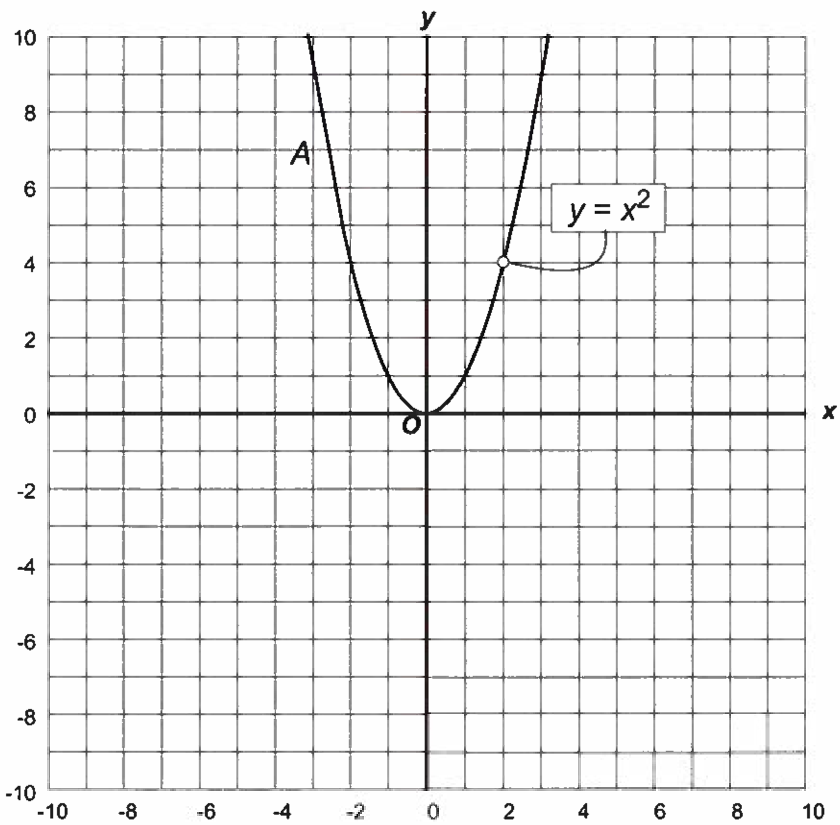


Bij parabool *A* past de vergelijking $y = x^2$.

- Welke vergelijking past er bij *B*? En bij *C*?

- Teken de parabool *D* met vergelijking: $y = (x + 5)^2$
- Teken de parabool *E* met vergelijking: $y = (x - 7)^2 - 8$
- Teken de parabool *F* met vergelijking: $y = (x + 3)^2 - 9$
- Teken de parabool *G* met vergelijking: $y = x^2 + 6x$

Eén parabool, meer vergelijkingen



- Teken de parabool B met vergelijking $y + 4 = (x - 5)^2$.

- Welke van de volgende vergelijkingen past ook bij B?

  (1) $y = (x - 5)^2 + 4$ (2) $y = (x - 5)^2 - 4$ (3) $y = x^2 - 10x + 21$

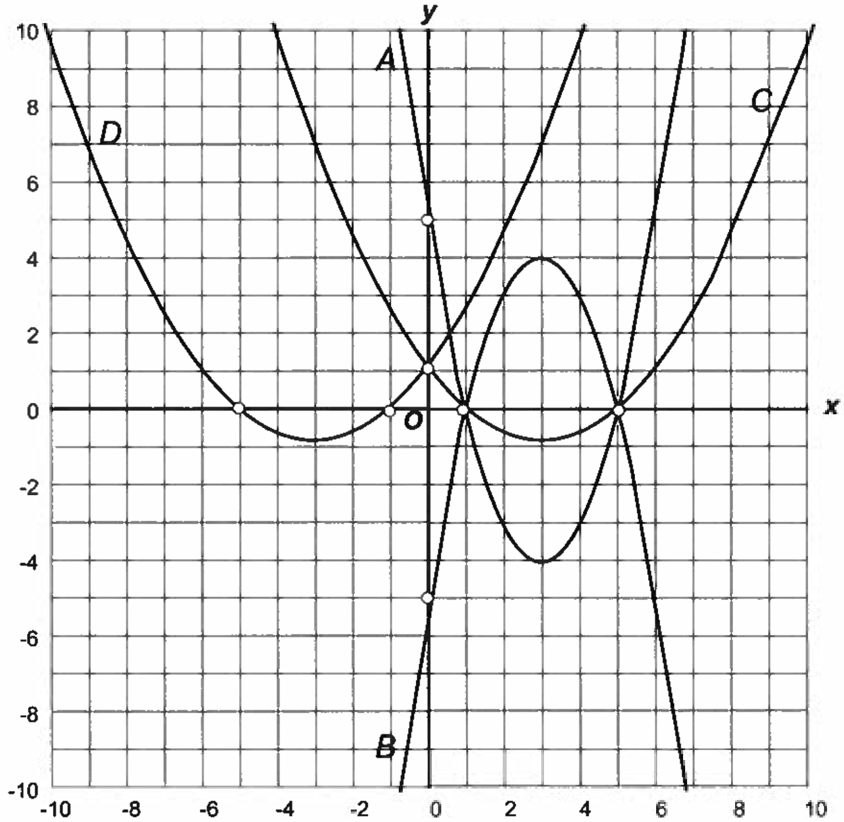
  (4) $y = (x - 3)(x - 7)$ (5) $y = x(x - 10) + 21$ (6) $y + 4 = x^2 + 25$

- Uit welke vergelijking kun je het snelst aflezen waar B de x-as snijdt?

- Uit welke vergelijking kun je het snelst aflezen waar B de y-as snijdt?

- Uit welke vergelijking kun je het snelst aflezen wat het laagste punt is op B?

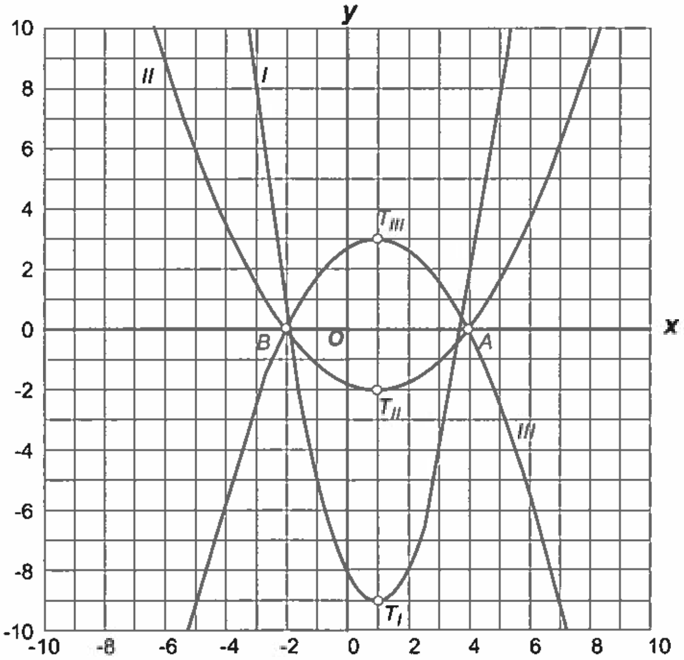
Snijpunten met de assen



De parabool *A* past bij de vergelijking $y = (x - 1)(x - 5)$.

- Controleer dit aan de hand van de snijpunten met de *x*- en *y*-as.
- De symmetrie-as van de parabool gaat door het punt (3, 0).
  $y = (x - 3)^2 + ...$ is een alternatieve vergelijking van A.
  Welk getal moet er op de plaats van de stippen staan?
- De parabool *B* is het spiegelbeeld van *A* bij spiegeling in de *x*-as.
  Geef twee vergelijkingen die bij *B* passen.
- De parabool *C* heeft dezelfde snijpunten met de *x*-as als *A*, maar het snijpunt met de *y*-as ligt nu in (0, 1) in plaats van (0, 5).
  Nu is $y = \frac{1}{5}(x - 1)(x - 5)$ een vergelijking die bij *C* past. Klopt dat?
  Wat zijn de coördinaten van het laagste punt van *C*?
- De parabool *D* is het spiegelbeeld van *C* bij spiegeling in de *y*-as.
  Geef een vergelijking die bij *D* past.

Een bundel parabolen(1)



De drie parabolen *I, II* en *III* gaan door de punten $A(4, 0)$ en $B(-2, 0)$.
De verzameling parabolen met een verticale symmetrie-as en die door twee vaste punten gaan, noemen we een *bundel.*
In het geval dat A en B die vaste punten zijn, zijn er twee manieren om vergelijkingen bij exemplaren van de bundel te vinden.

(1) $x = 4$ en $x = -2$ moeten ingevuld in de vergelijking de waarde 0 geven.
Daaruit volgt dat $y = c(x - 4)(x + 2)$ een vorm van de vergelijking is.

- Bereken de waarde voor c bij elk van de parabolen I, II en III.
  Hint: vul de coördinaten van een derde punt van de parabool in.

(2) De *toppen* van de parabolen in de bundel hebben de x-coördinaat 1.
Dat betekent dat $y = c(x - 1)^2 + b$ een vorm van de vergelijking is.

- De waarde van c weet je al en die van b kun je direct uit de figuur aflezen. Hoe? Geef de drie vergelijingen in deze vorm en laat zien dat ze gelijkwaardig zijn met de eerder gevonden vergelijkingen.

Een bundel parabolen (2)

De twee vormen (1) en (2) van vergelijkingen waarmee je op de vorige bladzij hebt kennisgemaakt, noemen we hier respectievelijk *nulvorm* en *topvorm*.

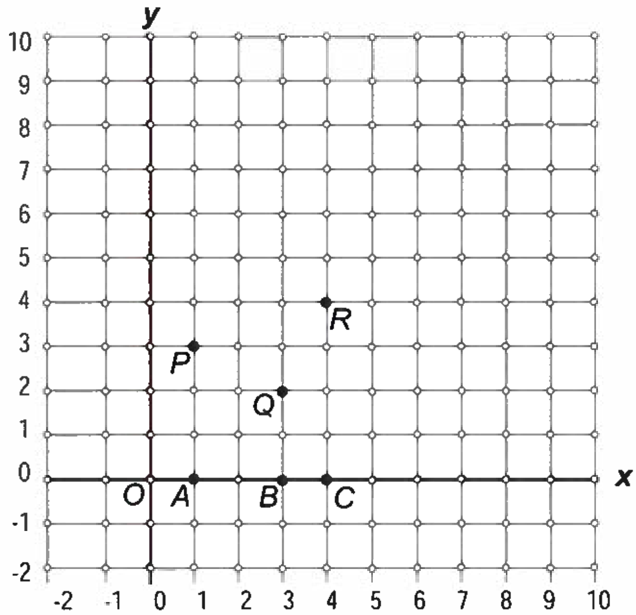
- Geef de nulvorm en de topvorm van de vergelijking van de parabool uit de bundel van de vorige bladzij in het geval de top de coördinaten $(1, -27)$ heeft. Controleer dat beide vormen gelijkwaardig zijn.

- Een parabool uit de bundel snijdt de y-as in $C(0, 12)$
Vind een vergelijking voor die parabool.

- Een parabool uit de bundel gaat door het punt $D(10, 72)$
Vind een vergelijking voor die parabool.

- Door elk punt dat niet op een van de verticale lijnen door A en B ligt, gaat precies één exemplaar van de bundel.
Hoe kun je dit verklaren uit de nulvorm $y = c(x - 4)(x + 2)$?

Parabool door drie punten



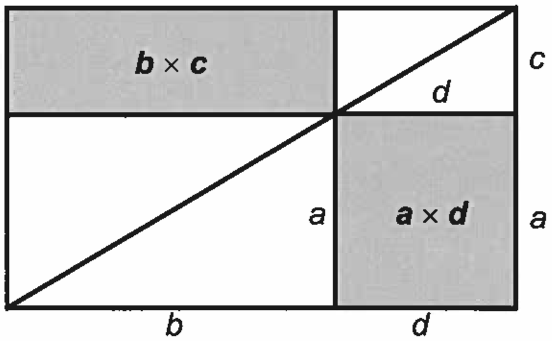
- Geef een vergelijking voor de parabool die door *A*, *B* en *R* gaat.

- Ook voor de parabool door *B*, *C* en *P* .

- Ook voor de parabool door *C*, *A* en *Q*

- We noemen de drie vergelijkingen, achtereenvolgens $y = r(x)$, $y = p(x)$ en $y = q(x)$. Er is ook een parabool met vergelijking $y = r(x) + p(x) + q(x)$. Bijna zonder rekenwerk (!) kun je begrijpen dat die door *P*, *Q* en *R* gaat. Verklaar dit.

Kruislings vermenigvuldigen(1)



De diagonalen van de twee witte rechthoeken hebben dezelfde helling.

Dat wil dus zeggen: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

- Leg uit waarom de twee grijze rechthoeken dezelfde oppervlakte hebben en waarom dus geldt: $a \times d = b \times c$.

Dat uit $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ volgt $a \times d = b \times c$ kan ook algebraïsch worden aangetoond:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{c}{d} \\ \times b \quad a &= \frac{b \times c}{d} \\ a \times d &= b \times c \quad \times d \end{aligned}$$

- Veronderstel dat *a, b, c* en *d* niet gelijk zijn aan 0
  Kun je de stelling ook omdraaien, dat wil zeggen geldt:

$$a \times d = b \times c \longrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad ?$$

Het afleiden van $a \times d = b \times c$ uit $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ wordt *kruislings vermenigvuldigen* genoemd.

Kruislings vermenigvuldigen(2)

Kruislings vermenigvuldigen kan handig worden toegepast bij zogeheten *gebroken vergelijkingen*.

- Los x op uit:

a $\dfrac{2}{x} = \dfrac{x}{18}$ (twee oplossingen!)

b. $\dfrac{2}{x+1} = \dfrac{x+1}{18}$

c. $\dfrac{x}{x+1} = \dfrac{x+5}{12}$

d. $\dfrac{x}{x+1} = \dfrac{x+3}{x+2}$

e. $\dfrac{x+10}{x+20} = \dfrac{x-20}{x-30}$

f. $\dfrac{2x+1}{x+2} = \dfrac{x-1}{x-2}$

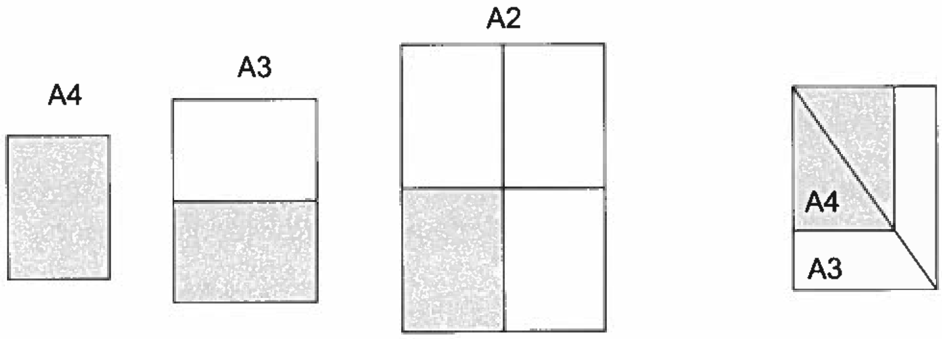
- Toon aan dat de punten (x, y) in het getallenparenvlak, waarvoor geldt

$$\frac{x}{3-y} = \frac{3+y}{x}$$

op een cirkel liggen.

- Van welke punten van die cirkel voldoen de coördinaten *niet* aan deze vergelijking?

Papierformaten



Als twee A4-tjes met de lange kant tegen elkaar worden gelegd, krijg je het formaat van een krantenpagina (in tabloid). Dit formaat wordt ook aangeduid als A3.
Een uitgevouwen krant heeft het A2-formaat. Het bijzondere van de deze formaten is dat ze allemaal dezelfde lengte-breedte-verhouding hebben. Het idee van deze formaten schijnt bedacht te zijn door Napoleon ....

- Stel de lengte-breedte-verhouding van A4 is gelijk aan x. Ga na dat uit de gelijkvormigheid van A4 en A3 volgt: $1 : x = x : 2$ ofwel $\frac{1}{x} = \frac{x}{2}$

  Conclusie: $x =$ ....

- Het grootste A-formaat is A0. Daarvan zijn de afmetingen 4 keer de afmetingen van A4 en de oppervlakte is gelijk aan 1 m^2.
  Stel de breedte van het A0-formaat is y mm.
  Laat zien dat hieruit volgt $y \approx 841$. ($\approx$ betekent 'is ongeveer gelijk aan')

- Hieronder zie je de officiële afmetingen van de A-formaten. Een A4-tje is dus 210 mm breed en 297 mm lang (meet het maar na!). De helling van een diagonaal op A4 is dus gelijk aan $\frac{99}{70}$. Bereken het kwadraat van deze breuk en je ziet wel dat dit een heel goede benadering is van ....

afmetingen in mm

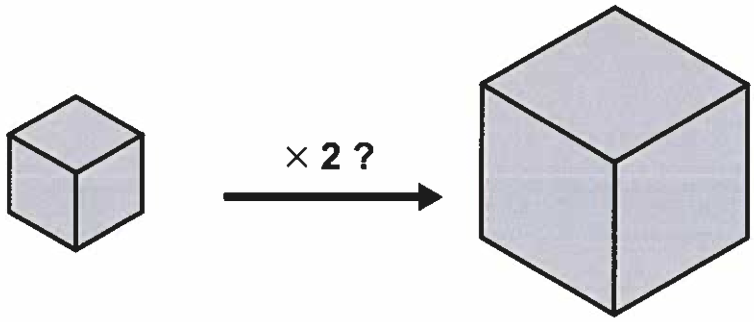
A0	841 × 1189
A1	594 × 841
A2	420 × 594
A3	297 × 420
A4	210 × 297
A5	148 × 210
A6	105 × 148

A7	74 × 105
A8	52 × 74
A9	37 × 52
A10	26 × 37
A11	18 × 26
A12	13 × 18
A13	9 × 13

Verdubbeling van de kubus(1)

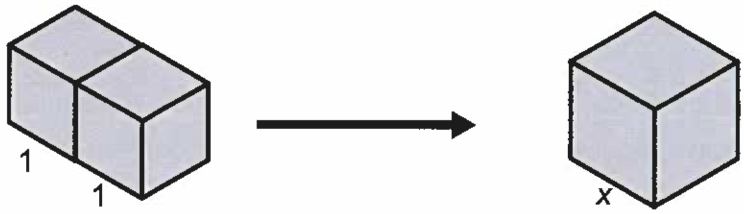
Toen in het jaar 430 v.Chr. in Athene aan het eind van de Peloponnesische oorlog de pest uitbrak en een kwart van de bevolking stierf, raadpleegden de burgers van Athene het orakel van Apollo in Delos om te horen hoe zij deze pestplaag konden bestrijden. Het orakel antwoordde dat zij hun kubus-vormige altaar moesten verdubbelen.

De bewoners namen die raad ten harte en verdubbelden de ribbe van de kubus, maar dit hielp niet. integendeel, de pest werd alleen maar erger.



- Als de ribbe van een kubus wordt verdubbeld, met welke factor wordt dan de oppervlakte van een zijvlak vermenigvuldigd? En hoe zit het dan met het volume van de kubus?

Nu bedachten de Atheners dat het orakel bedoeld zou hebben dat het volume van de kubus 2 verdubbeld zou moeten worden, maar dat de kubusvorm moets worden gehandhaafd.



- Stel de ribbe van het oorspronkelijke altaar is 1 meter.
  Verklaar dat de ribbe van het nieuwe altaar gelijk zou moeten zijn aan $\sqrt[3]{2}$ meter.

Verdubbeling van de kubus(2)

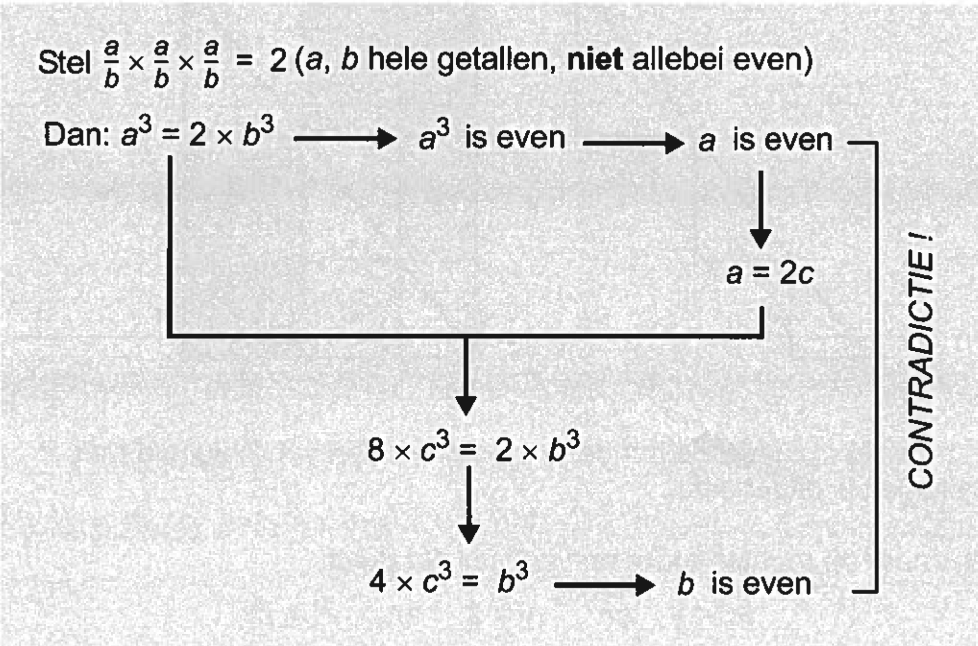
Het probleem was nu hoe je de ribbe van het altaar zou kunnen vergroten met de factor $\sqrt[3]{2}$.
Het zoeken naar een geschikte breuk leverde niets op ....

Met een rekenmachine kun je snel vinden dat de ribbe van het altaar met ongeveer 1, 25992105 moet worden vermenigvuldigd, maar de Grieken beschikten niet over zulke apparatuur en werkten met 'gewone' breuken. Bovendien wilden ze geen benadering, maar een exacte afmeting van de nieuwe ribbe.

- Ga na dat de breuken $\frac{5}{4}$ en $\frac{63}{50}$ redelijke benaderingen zijn.

De Grieken begrepen dat $\sqrt[3]{2}$ niet voor te stellen is door een breuk.

Een bewijs hiervoor ziet er in moderne en beknopte vorm zo uit:



- Ga elke stap in het bewijs nauwgezet na.

- Vergelijk het bewijs met dat op bladzijde 38. Zie je dat dit volgens hetzelfde principe is uitgevoerd?

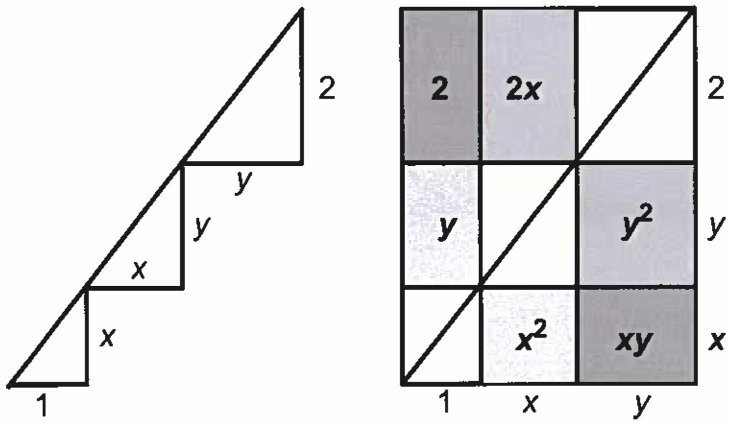
Verdubbeling van de kubus(3)

Op bladzijde 104 heb je gezien hoe vierkantswortels geconstrueerd kunnen op een getallenlijn met behulp van cirkels (dus met een passer).
Dat is gebaseerd op de constructie van het meetkundig gemiddelde van twee getallen, en de Grieken hadden die constructie uitgevonden.
Nu wilden zij ook met de passer het getal $\sqrt[3]{2}$ construeren.

De wiskundige Hippocrates van Chios bedacht dat zoals je $\sqrt{2}$ kunt construeren via de evenredigheid $1 : x = x : 2$ (dus $x^2 = 2$) het getal $\sqrt[3]{2}$ gevonden zou kunnen worden uit de geschakelde evenredigheid:

$$1 : x = x : y = y : 2$$

Bekijk onderstaande figuur:



In het linker plaatje zie je hoe de geschakelde evenredigheid met hellingen is uitgebeeld.

- Kijk naar de rechter figuur en verklaar dat geldt:

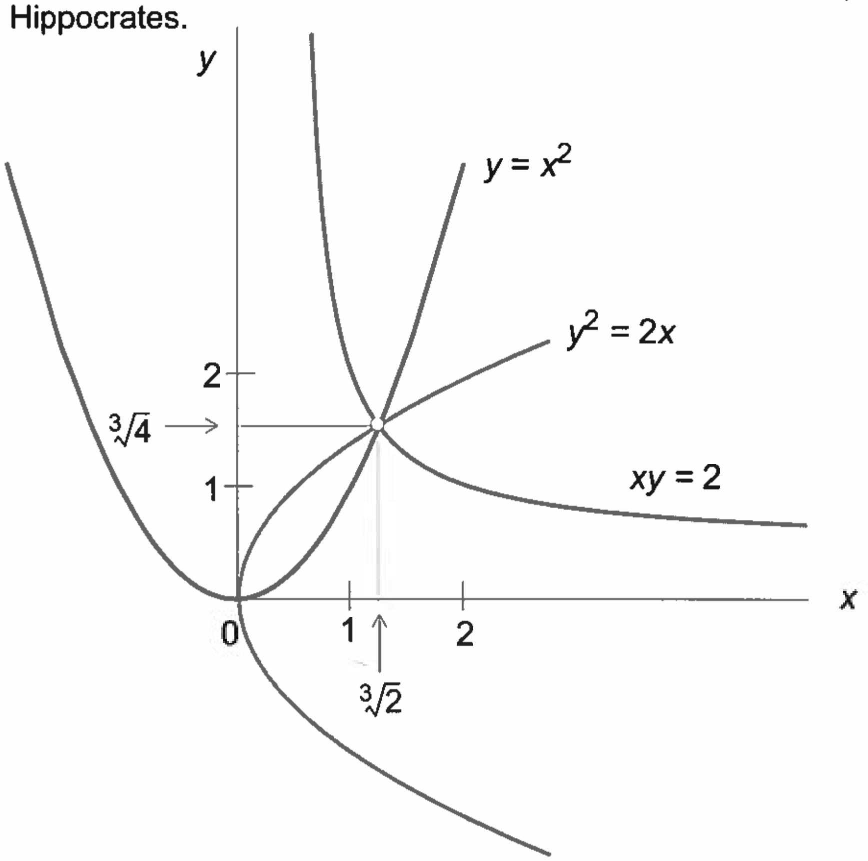
$$x^2 = y \quad \text{en} \quad xy = 2 \quad \text{en} \quad x^2 = 2x$$

- Laat zien dat hieruit volgt: $x^3 = 2$ en $y^3 = 4$

Verdubbeling van de kubus(4)

Wat ze ook probeerden, het lukte de Grieken niet om het getal $\sqrt[3]{2}$ met passer en liniaal te construeren, volgens de meetkundige spelregels.
Menaechmus die leefde rond 350 v.Chr. bedacht dat met andere kromme lijnen dan de cirkel wel $\sqrt[3]{2}$ zou kunnen 'construeren'.
Hij maakte gebruik van de parabool en de hyperbool.

- Zie de figuur hieronder.
  Ga na dat de drie kromme lijnen corresponderen met de vergelijkingen van Hippocrates.



- De coördinaten van het gemeenschappelijke punt van de drie kromme lijnen zijn dan $\sqrt[3]{2}$ en $\sqrt[3]{4}$ (zie de vorige bladzij).
  Meet na of dit aardig klopt in de figuur (de eenheid in de figuur is 1,5 cm en $\sqrt[3]{2} \approx 1,26$ en $\sqrt[3]{4} \approx 1,59$)

Eeuwenlang hebben wiskundigen vergeefs gezocht naar een methode om $\sqrt[3]{2}$ te construeren met passer en liniaal. In 1837 bewees de Fransman Pierre Wantzel langs algebraïsche weg dat zo'n constructie niet mogelijk is. De zoektocht van meer dan 2200 jaar heeft niets opgeleverd denk je nu misschien, maar het tegendeel is waar: het heeft een grote hoeveelheid mooie nieuwe wiskunde gebracht!