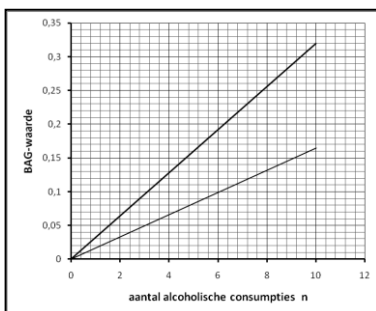
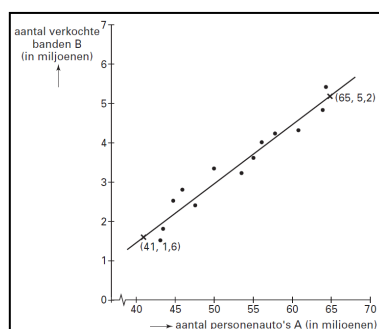


NAAM:

KLAS:

SaLVO!

15 Verhoudingen en evenredigheid



WISKUNDE A

KLAS 4HAVO

SaLVO!

Dit lesmateriaal is een onderdeel van het samenwerkingsproject SaLVO!. Het doel is om meer samenhang te ontwikkelen in het rekenonderwijs in de bètavakken en in andere vakken.

Overzicht projectmateriaal

De leerlijn SaLVO! rond verhoudingen, verbanden, formules en grafieken is opgebouwd uit een aantal delen bij verschillende vakken:
biologie = B, economie = E, natuurkunde = N, scheikunde = S, wiskunde = W.

deel	titel	vak(ken)	leerjaar
1	Verhoudingen en evenredigheden	W	2 HV
2	Een verband tussen massa en volume	N	2 HV
3	Vergroten en verkleinen	N, W	2HV
4	Omgekeerd evenredig verband	W	2/3 HV
5	Planeten en Leven	B, N, S, W	2/3 HV
6	Economie en procenten	E, W	3 HV
7	Verhoudingen bij scheikundige reacties	S	3 HV
8	Formules en evenredigheden	N	3HV
9	Formules in de economie	E, W	3 HV
10	Exponentiële verbanden	N, W	3 HV
11	Evenredigheden en machten	WB	4 HV
12	Vebanden beschrijven	N	4 HV
13	Exponentiële functies	B, N, S, W	5 V
14	Periodieke functies	N, W	5 V
15	Verhoudingen en evenredigheid	WA	4H

Colofon

Project	SaLVO! (Samenhangend Leren Voortgezet Onderwijs)
Auteur	Kees Hooyman
Versie	september 2010, versie 1
M.m.v.	St. Bonifatiuscollege, Utrecht Geref. Scholengemeenschap Randstad, Rotterdam Freudenthal Inst. for Science and Mathematics Education, Univ. Utrecht

Copyright

Op de onderwijsmaterialen in deze reeks rust copyright. Het copyright ligt bij de stichting SLO. Het materiaal mag worden gebruikt voor niet-commerciële toepassingen. Het is niet toegestaan het materiaal, of delen daarvan, zonder toestemming op een of andere wijze openbaar te maken. Voor zover wij gebruik maken van extern materiaal proberen wij toestemming te verkrijgen van eventuele rechthebbenden. Mocht u desondanks van mening zijn dat u rechten kunt laten gelden op materiaal dat in deze reeks is gebruikt dan verzoeken wij u contact met ons op te nemen.

Inhoudsopgave

1 VERGROTEN EN VERKLEINEN	5
2 PROCENTEN IN EEN VERHOUDINGSTABEL	9
3 EEN VERHOUDINGSTABEL IN ANDERE SITUATIES.....	13
4 EVENREDIG	17
5 DE GRAFIEK BIJ EEN EVENREDIG VERBAND	21
6 TWEE FORMULES BIJ EVENREDIGHEID	26
HERHALINGSOPGAVEN	30
OEFENOPGAVEN.....	31

Verhoudingen en evenredigheid

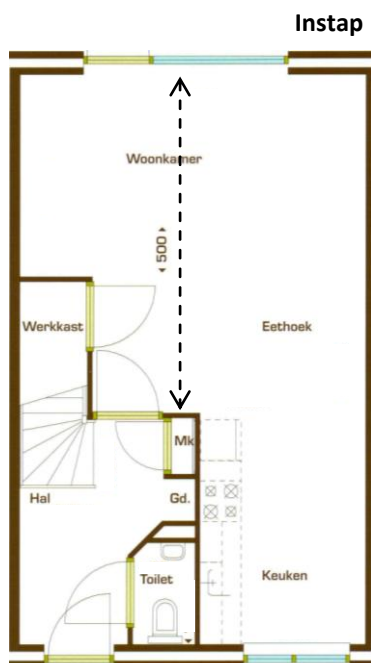
1 Vergroten en verkleinen

In de onderbouw heb je al kennis kunnen maken met het rekenen in verhoudingen. Daarmee wordt bedoeld dat getallen op dezelfde manier groter of kleiner worden gemaakt.

Paragraafvraag

Hoe kun je getallen vergroten en verkleinen in verhouding?

In deze paragraaf gaan we bekijken hoe je te werk kunt gaan als aantallen veranderen, terwijl de verhouding hetzelfde moet blijven.



figuur 1 – Plattegrond van een woning.

Schaaltekening

De ouders van Jeroen en Maikel willen de woonkamer, de eethoek en de keuken opnieuw inrichten. Van hun huis hebben ze een oude tekening op schaal van de begane grond. Die tekening willen ze gebruiken om uit te zoeken hoe de meubels het best opgesteld kunnen worden. Het probleem is alleen dat de schaal van de tekening niet bekend is.

De lengte van de woonkamer, die in werkelijkheid 500 cm is, is op de tekening op schaal 20,0 cm is. In de tekening meten ze nog meer afstanden.

	afmetingen in schaaltekening	afmetingen in werkelijkheid
lengte woonkamer	20,0 cm	500 cm
lengte hele kamer	33,6 cm	
breedte woonkamer	20,4 cm	
breedte eethoek	16,0 cm	
zitbank		90 bij 230 cm
eettafel		80 bij 180 cm
kast		60 bij 120 cm

- Wat is nu een handige manier om de werkelijke afmetingen te berekenen? Bedenk hoe je dit zelf zou aanpakken en vergelijk jouw aanpak met anderen. Van hun oude meubelen willen ze in elk geval de zitbank, de eettafel en een kast laten staan. Met kartonnen schaalmodellen van de meubels kunnen ze makkelijk zien of de nieuwe meubels in de kamer passen.
- Bereken de afmetingen van de schaalmodellen.
- Jeroen heeft bij de vorige vraag alle afmetingen vermenigvuldigd met 0,04. Hoe komt hij aan dat getal?

bespreking

verhoudingstabel

Bij vergroten en verkleinen is rekenen met een factor vaak handig. Bespreek hoe je in dit voorbeeld daarvan gebruik kunt maken.

Theorie

Vergroten en verkleinen

Het vergroten en verkleinen van getallen gaat vaak *in gelijke verhouding*. Twee grootheden staan in vaste verhouding tot elkaar, als voldaan wordt aan de volgende eigenschap:

- Als de ene getal k keer zo groot wordt, dan wordt het andere getal ook k keer zo groot.

Deze eigenschap geldt niet alleen bij vergroten maar ook bij verkleinen. In beide gevallen worden alle getallen met een gelijke factor k vermenigvuldigd.

Het getal k noemen we de **vermenigvuldigingsfactor**. Bij elke vergroting of verkleining wordt k bepaald door:

$$\text{vermenigvuldigingsfactor: } k = \frac{\text{nieuwe waarde}}{\text{oude waarde}}$$

Bij vergrotingen is k groter dan 1, bij verkleiningen is k kleiner dan 1 (en groter dan nul).



figuur 2 – Drie pinguïns.

Voorbeeld

Je wilt van een foto van 10 bij 15 cm een vergroting laten maken van 24 bij 36 cm. Je kunt de vermenigvuldigingsfactor k zowel met de lengte als met de breedte berekenen:

$$k = \frac{\text{nieuwe waarde}}{\text{oude waarde}} = \frac{24 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} = 2,4 \quad \text{of} \quad \frac{36 \text{ cm}}{15 \text{ cm}} = 2,4$$

De vermenigvuldigingsfactor k is dus 2,4.

Op de foto staan drie pinguïns. De pinguïns op de foto zijn 9,0 cm hoog. Op de vergroting zijn de pinguïns ook 2,4 keer zo groot geworden.

$$9 \xrightarrow{\times 2,4} 21,6 \text{ cm}$$

Dezelfde foto is hiernaast verkleind weergegeven. De afmetingen van de verkleining zijn 3,0 bij 4,5 cm. De vermenigvuldigingsfactor k is nu:

$$k = \frac{\text{nieuwe waarde}}{\text{oude waarde}} = \frac{3,0 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} = 0,3 \quad \text{of} \quad \frac{4,5 \text{ cm}}{15 \text{ cm}} = 0,3$$

Rekenen met verhoudingstabellen

Het rekenwerk bij vergroten en verkleinen gaat eenvoudiger en sneller met behulp van een verhoudingstabel. Zo'n tabel is vooral een overzichtelijke manier om de getallen op te schrijven. Meestal noteer je de oude waarde in de eerste kolom en de nieuwe waarde in de tweede kolom. De vermenigvuldigingsfactor kun je boven en onder de tabel noteren.

$$\times 2,4$$

	oude waarde	nieuwe waarde
lengte foto	15 cm	36 cm
breedte foto	10 cm	24 cm
hoogte boom	9 cm	21,4 cm

$$\times 2,4$$

1 Waar of niet waar?

- Om k te berekenen deel je de oude waarde door de nieuwe waarde.
- Bij vergroten is k groter dan 1, bij verkleinen is k kleiner dan 1 (en groter dan nul).
- Bij vergroten moet je vermenigvuldigen met k , bij verkleinen moet je delen door k .
- Bij vergroten en verkleinen blijven de verhoudingen tussen de getallen gelijk.
- Een verhoudingstabel kun je alleen gebruiken bij vergroten.

2 Limonade

In de volgende situaties zijn de prijzen constant en er is geen statiegeld.

- Drie flessen limonade kosten € 2,55. Hoeveel betaal je voor twaalf flessen?
- Vierentwintig kleine flesjes kosten € 7,20. Hoe duur zijn vier kleine flesje?
- Drie flessen limonade kosten samen € 2,55. Hoeveel flessen kun je kopen voor € 15,-?
- Een fles met 1,5 liter cola kost € 1,29. Een 2-liter-fles kost € 1,69. Welke cola is in verhouding het duurst?



figuur 3 – Flessen limonade.

3 Vergroten en verkleinen

- Het aantal inwoners van een stad is gegroeid van 125.000 naar 165.000. Bereken de vermenigvuldigingsfactor.
- Het aantal bezitters van een mobiele telefoon wordt elke vijf jaar zes keer zo groot. Tien jaar geleden waren er 80 duizend bezitters van een mobiele telefoon, hoeveel zijn dat er nu?

4 Folders rondbrengen

Maud en Nick brengen folders rond in dezelfde buurt. Maud heeft 200 adressen en doet daar 40 minuten over, Nick doet in 50 minuten 300 adressen.

- Wie is het snelst met het rondbrengen van folders?
- Hoe lang zou Maud doen over 300 folders?
- Hoe lang zou Nick doen over 200 folders?

Maud en Nick krijgen meer folders om rond te brengen en ze besluiten om samen te gaan werken. De folders worden zo verdeeld dat ze allebei even lang bezig zijn. In totaal gaan ze 1200 folders rondbrengen.

- Hoe moeten ze de folders verdelen? Bereken daarvoor eerst hoeveel folders ze samen in 1 minuut kunnen rondbrengen.



figuur 4 – Folders bezorgen

5 Oefenen met rekenen

Maak de volgende vragen zoveel mogelijk zonder rekenmachine.

- Met welk getal moet je 13 vermenigvuldigen om 39 te krijgen?
- Met welk getal moet je 10 vermenigvuldigen om 25 te krijgen?
- Met welk getal moet je 0,4 vermenigvuldigen om 10 te krijgen?
- Een bepaald getal is met 7 vermenigvuldigd. De uitkomst is 21. Wat was het getal?
- Een bepaald getal is met 30 vermenigvuldigd. De uitkomst is 15. Wat was het getal?
- Met welk getal moet je 30 vermenigvuldigen om 3 te krijgen?
- Met welk getal moet je 60 vermenigvuldigen om 15 te krijgen?



figuur 5 – Afbeelding van een Fries paard.

6 Vergroten en verkleinen

Het plaatje van een paard (in de kantlijn) is 3,0 bij 4,5 cm. Je wilt in het word-document het plaatje vergroten zodat het 10,8 bij 16,2 wordt.

a. Bereken de vermenigvuldigingsfactor k .

Het paard heeft op dit plaatje een hoogte van 3,1 cm.

b. Bereken hoe hoog het paard op de vergroting is.

Van een andere foto van 10 bij 15 cm wil je een verkleining maken. Als vermenigvuldigingsfactor gebruik je 0,42.

c. Hoe groot wordt de verkleinde foto?

d. Op de verkleining staat een voorwerp dat 2,1 cm hoog is. Hoe groot is dit voorwerp op de oorspronkelijke foto?

7 Beeldschermen

Bij een traditionele televisie is de verhouding breedte:hoogte = 4:3.

a. Het scherm van de monitor op de foto heeft een breedte van 48 cm. Bereken de hoogte van het scherm.

b. Het beeldscherm bestaat uit 1280 bij 960 pixels. Is dat dezelfde verhouding als 4:3?

Bij een breedbeeldscherm is de verhouding 16:9. Een bepaald scherm heeft in de hoogte 1080 pixels.

c. Hoeveel pixels heeft het scherm in de breedte?

8 MP3-bestanden

Een MP3-speler kan vaak veel muziek opslaan, omdat de bestanden veel kleiner zijn dan op een normale CD. Daarvoor worden zogenaamde MP3-bestanden gebruikt. Een MP3-bestand is een gecomprimeerd bestand dat veel kleiner is dan het originele bestand. De kwaliteit van een MP3-bestand is wel wat minder dan van een muziekbestand op een CD.

Een muziknummer dat op CD bijvoorbeeld een grootte heeft van 44 Mb (mega-byte) wordt verkleind naar een MP3-bestand van 4,0 Mb.

a. Welke vermenigvuldigingsfactor geldt hier? Schrijf het antwoord als breuk of rond af in vier decimalen (cijfers achter de komma).

b. Een bepaalde muziek-CD bevat 550 Mb aan geluidsbestanden. Hoeveel Mb ruimte zullen de gecomprimeerde bestanden innemen?

c. Een bepaald MP3-bestand is 4,8 Mb. Bereken hoe groot het originele bestand was.

Bij het omzetten van normale muziek-bestanden naar MP3-bestanden kun je soms ook zelf een compressieverhouding instellen. Daarbij geldt wel dat hoe kleiner het bestand gemaakt wordt, hoe groter het verlies aan geluidskwaliteit is.

Een bepaalde MP3-speler heeft nog 725 Mb vrije ruimte. Je wilt 20 CD's op deze speler zetten, die elk 650 Mb muziek bevatten. Om de kwaliteit zo goed mogelijk te krijgen wil alle ruimte op de MP3-speler benutten.

d. Welke vermenigvuldigingsfactor moet worden gebruikt?



figuur 6 – Beeldscherm met een verhouding 4:3



figuur 7 – MP3-speler

Verhoudingen en evenredigheid

2 Procenten in een verhoudingstabel

Rekenen met procenten is voor veel mensen, ook voor veel volwassenen, vrij lastig. Bij het rekenen met procenten gaat het vaak ook om vergroten en verkleinen. Kun je daarbij ook gebruik maken van rekenen met een vermenigvuldigingsfactor?

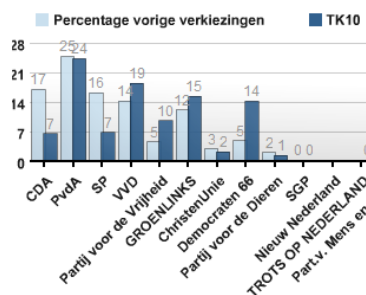
Paragraafvraag

Hoe gebruik je bij procentberekeningen een verhoudingstabel?

Instap

Verkiezingen

Bij de verkiezingen voor de tweede kamer in 2010 waren er grote verschuivingen tussen de politieke partijen. In de onderstaande tabel zie je de uitslag in de gemeente Utrecht.



figuur 8 – Uitslag van de verkiezingen voor de tweede kamer in de gemeente Utrecht in 2010.

Gemeente Utrecht aantal inwoners (2010): 306438
 uitgebrachte stemmen (2010): 176751

partij	Tweede Kamer 2006		Tweede Kamer 2010	
	stemmen	percentage	stemmen	percentage
CDA	28605	17,0	11503	6,5
PvdA	41795	24,8	42921	24,3
SP	27294	16,2	12058	6,8
VVD	24072	14,3	32717	18,5
PVV	7682	4,6	17025	9,6
GROENLINKS	20468	12,1	27221	15,4
ChristenUnie	4877	2,9	3852	2,2
Democraten 66	8052	4,8	25140	14,2
opkomst		78,5%		77,3%

Beantwoord de onderstaande vragen. Gebruik steeds een verhoudingstabel voor de berekeningen.

- Het CDA heeft veel stemmen verloren ten opzichte van 2006. Bereken met hoeveel procent het aantal stemmen is afgenomen.
- Met hoeveel procent is het aantal stemmen op D66 toegenomen?
- De opkomst was 77,3%. Bereken hoeveel inwoners stemgerechtigd waren.
- De Partij voor de Dieren verloor 29,5% van haar stemmen en kwam uit op 2395 stemmen. Hoeveel stemmen had de partij in 2006 gehaald?
- De PvdA werd met 24,3% de grootste partij in Utrecht. De tweede kamer heeft 150 zetels. Hoeveel is 24,3% van 150 zetels?

Werkvormen

Deze instapvraag bestaat uit een aantal opdrachten waarbij op verschillende manieren met procenten gerekend moet worden. Kies enkele opdrachten uit of verdeel de opdrachten over de klas.

bespreking

verhoudingstabel en procenten

Ook bij rekenen met procenten is een verhoudingstabel vaak handig. Bespreek hoe je in dit voorbeeld daarvan gebruik kunt maken.

Theorie



Procenten in een verhoudingstabel

Rekenen met procenten is in feite ook rekenen met verhoudingen en vermenigvuldigingsfactoren. Als een kopieerapparaat ingesteld is op 150% dan worden alle afmetingen vermenigvuldigd met 1,5. Als in de winkel alle prijzen met 15% naar beneden gaan dan is dat hetzelfde als alle bedragen vermenigvuldigen met 0,85 (want je houdt 85% over).

Bij het gebruik van een verhoudingstabel is het handig om steeds de waarde die bij 100% hoort in de eerste kolom te zetten.

$\times 0,85$
↔

in procenten	100%	85%
prijs in euro	€ 4,80	

De vermenigvuldigingsfactor k is hier 0,85. De uitkomst is: $4,80 \times 0,85 = € 4,08$. De korting is 15% van € 4,80 = $4,8 \times 0,15 = € 0,72$.

Er zijn ook andere manieren om de uitkomst te berekenen, bijvoorbeeld met het kruisproduct of met terugrekenen naar 1%.

Voorbeelden

Rekenen met procenten is vaak lastig omdat er zoveel verschillende berekeningen zijn. In het onderstaande overzicht zie je bij alle berekeningen hoe je daarbij een verhoudingstabel kunt gebruiken.

vraag	verhoudingstabel	berekening				
Hoeveel is 12,5% van 84?	<table border="1"> <tr><td>100%</td><td>12,5%</td></tr> <tr><td>84</td><td></td></tr> </table>	100%	12,5%	84		$k = 0,125$ $84 \times 0,125 = 10,5$
100%	12,5%					
84						
Hoeveel procent is 18 van 51	<table border="1"> <tr><td>100%</td><td></td></tr> <tr><td>51</td><td>18</td></tr> </table>	100%		51	18	$k = 18 / 51 = 0,353$ $100 \times 0,353 = 35,5\%$
100%						
51	18					
Hoeveel procent is de toename bij een groei van 60 naar 80?	<table border="1"> <tr><td>100%</td><td></td></tr> <tr><td>60</td><td>80</td></tr> </table>	100%		60	80	$k = 80 / 60 = 1,333$ $100 \times 1,333 = 133,3\%$ toename = 33,3%
100%						
60	80					
Hoeveel procent is de afname bij een daling van 580 naar 480?	<table border="1"> <tr><td>100%</td><td></td></tr> <tr><td>580</td><td>480</td></tr> </table>	100%		580	480	$k = 480 / 580 = 0,828$ $100 \times 0,828 = 82,8\%$ afname = 17,2%
100%						
580	480					
80 neemt toe met 12%. Hoeveel krijg je dan?	<table border="1"> <tr><td>100%</td><td>112%</td></tr> <tr><td>80</td><td></td></tr> </table>	100%	112%	80		$k = 1,12$ $1,12 \times 80 = 89,6$
100%	112%					
80						
90 neemt af met 20%. Hoeveel krijg je dan?	<table border="1"> <tr><td>100%</td><td>80%</td></tr> <tr><td>90</td><td></td></tr> </table>	100%	80%	90		$k = 0,80$ $90 \times 0,80 = 72$
100%	80%					
90						
Bij een toename van 18% wordt het aantal 320. Hoeveel had je?	<table border="1"> <tr><td>100%</td><td>118%</td></tr> <tr><td></td><td>320</td></tr> </table>	100%	118%		320	$k = 1,18$ $320 / 1,18 = 271,2$
100%	118%					
	320					
Bij een afname van 25% wordt het aantal 240. Hoeveel had je?	<table border="1"> <tr><td>100%</td><td>75%</td></tr> <tr><td></td><td>240</td></tr> </table>	100%	75%		240	$k = 0,75$ $240 / 0,75 = 320$
100%	75%					
	240					

Oefenopgaven

De oefenopgaven zijn bedoeld voor leerlingen die moeite hebben met rekenen in procenten.

Vraag je docent welke opgaven je moet maken.

9 Waar of niet waar?

- 50% van 250 is 12500
- Bij een toename van 150% geldt $k = 1,50$
- Bij een afname van 50% geldt $k = \frac{1}{2}$.
- Bij $k = 0,78$ is de afname 22%.
- Een afname van 80% betekent delen door 1,8
- Een broek is 50% afgeprijsd en kost nu € 80,-. De oude prijs was € 120,-.

10 Oefenopgaven

Schrijf als decimaal getal:

- | | |
|----------|-----------|
| a. 20% = | c. 700% = |
| b. 1% = | d. 0,3% = |

Schrijf als procenten

- | | |
|---------------|----------------|
| e. $k = 0,80$ | g. $k = 0,005$ |
| f. $k = 1,3$ | h. $k = 7,5$ |

11 Oefenopgaven

Bereken

- | | |
|------------------|------------------|
| a. 5% van 700 | c. 0,3% van 877 |
| b. 16,4% van 122 | d. 207% van 4400 |

12 Oefenopgaven

Bereken de nieuwe hoeveelheid. Rond af op 2 decimalen

- Een hoeveelheid van 22 neemt met 27% toe.
- Een hoeveelheid van 160 neemt met 6% af.
- Een hoeveelheid van 88 neemt met 0,3% toe.
- Een artikel in de winkel is 35% afgeprijsd en kost nu € 3,73. Wat was de originele prijs?
- De vermenigvuldigingsfactor is 0,33. Hoeveel % is dan de afname?
- De vermenigvuldigingsfactor is 2,5. Hoeveel % is dan de toename?
- Hoe groot is de vermenigvuldigingsfactor bij een toename van 100%?

13 Aardoppervlak

Ongeveer 71% van het aardoppervlak bestaat uit water, bij elkaar een oppervlakte van 362 miljoen km^2 .

- Hoeveel % van de oppervlakte bestaat uit land?
- Bereken de totale oppervlakte van het land.

14 Opletten met toename en afname

Iemand beweert: als je van 80% naar 100% gaat dan komt er 20% bij, en dan moet je dus vermenigvuldigen met 1,2

- Leg uit waarom die bewering niet klopt.
- Met welke factor moet je dan wel vermenigvuldigen?
- Met welke factor moet je vermenigvuldigen als je van 75% naar 100% rekent?
- Als je moet rekenen van 75% naar 100% dan kun je ook delen door een bepaald getal. Door welk getal moet je dan delen?



figuur 9 – Afgeprijsde artikelen.



figuur 10 – Wereldbol.



figuur 11 - Kortingssticker



figuur 12 – Tekening van een wooncomplex.

15 Prijsstijging

Een woningcorporatie verhuurt verschillende woningen. Elk jaar opnieuw worden de huren van de woningen aangepast aan de inflatie. Bij inflatie wordt geld minder waard waardoor alle prijzen stijgen. De woningcorporatie besluit om alle huurprijzen te verhogen met 5%.

- Met welke factor moeten de huurprijzen vermenigvuldigd worden?
- De oude huur van een bepaalde woning is € 552,80. Wat zal de nieuwe huur worden?
- Van een andere woning is de huur € 662,40. Met hoeveel euro zal de huur omhoog gaan?
- Bij een andere corporatie stijgt de huur van € 330,- naar € 340,-. Hoeveel % is de huur gestegen?
- Bij een dure woning stijgt de huur met 7% tot € 945,-. Wat was de oude huur?
- Bij een dure woning stijgt de huur elk jaar met 7%. Met hoeveel procent stijgt de huur per 5 jaar? Gebruik een voorbeeld.

16 Berekeningen met procenten

Gebruik zoveel mogelijk een verhoudingstabel.

- Het aantal inwoners van een stad is in 5 jaar gestegen van 128.000 naar 147.800. Hoeveel % bedraagt de groei?
- Tussen 2000 en 2002 zijn de aandelen 40% in waarde gedaald. Iemand had in 2000 voor € 24.000,- aandelen. Hoeveel waren de aandelen nog waard in 2002?
- De benzine is in twee jaar tijd 18% duurder geworden. Een liter benzine kost nu € 1,37. Hoe duur was een liter benzine twee jaar geleden?
- Het kopieerapparaat staat ingesteld op 80%. Van een pagina van een boek wordt eerst een kopie gemaakt, en daarna wordt er een kopie van de kopie gemaakt, ook op 80%. Hoeveel % is de uiteindelijke kopie van het origineel?

17 Belasting

In Nederland bedraagt de BTW 19%. Op een internetsite worden producten aangeboden exclusief BTW. Dit betekent dat de klant bovenop de genoemde prijzen een toeslag van 19% moet betalen. Die toeslag wordt door de leverancier afgedragen aan de belastingdienst.



figuur 13 – De belastingdienst.

- Met welke factor moet de klant de prijs van de internetsite vermenigvuldigen om te weten wat hij moet betalen?
- Een blik verf kost € 18,28 exclusief BTW. Hoeveel moet het blik kosten inclusief BTW?
- Welk bedrag aan BTW moet de leverancier dan afdragen aan de belastingdienst?

De prijzen die je in een normale winkel moet betalen zijn altijd inclusief BTW.

- Een broodbakmachine kost in de winkel inclusief BTW € 169,-. Wat is de prijs zonder BTW?

Verhoudingen en evenredigheid

3 Een verhoudingstabel in andere situaties

Verhoudingstabellen kun je gebruiken bij rekenen met procenten en bij vergroten en verkleinen. Er zijn meer situaties waarbij het rekenwerk eenvoudiger wordt door een verhoudingstabel.

Paragraafvraag

In welke situaties kun je een verhoudingstabel gebruiken?

instap

Brandstofverbruik

In reclamefolders van auto's wordt het brandstofverbruik meestal opgegeven in liter per 100 km. Met 8 L/100 km wordt bedoeld dat de auto voor een afstand van 100 km gemiddeld 8 liter benzine nodig heeft. In het dagelijks gebruik wordt echter vaak gesproken over een verbruik van 1 op zoveel. Met 1 op 12 wordt bedoeld dat de auto op 1 liter benzine gemiddeld 12 kilometer kan rijden.

In een showroom staan twee auto's. Het type Smert heeft een brandstofverbruik van 1 op 25,4, het type Twango verbruikt 5,4 L/100 km.

- Welke auto is het zuinigst? Leg uit hoe je dat ziet of kunt berekenen.
- De Smert rijdt 25,4 km op één liter benzine. Hoeveel liter heeft deze auto nodig om 100 km te rijden? Bereken het antwoord met een verhoudingstabel.
- De Twango verbruikt 5,4 liter benzine per 100 km. Hoe ver rijdt deze auto op één liter? Bereken het antwoord met een verhoudingstabel.
- De benzine kost € 1,80 per liter. Bereken voor beide auto's de brandstofkosten per kilometer. Bereken het antwoord met een verhoudingstabel.

1 liter	
25,4 km	

5,4 liter	
100 km	

instap

Bonus verdelen

Een grote winkelketen belooft elk jaar het beste filiaal met de prijs 'Filiaal van het jaar'. De prijs bestaat uit een bedrag van € 5.000,- dat onder de werknemers verdeeld wordt. Dit jaar is de prijs gewonnen door een klein filiaal met maar zes werknemers. De werknemers besluiten om de prijs te verdelen naar verhouding van het aantal dagen dat ze per week werken. Die dagen staan in de onderstaande tabel.

werknemer	Carla	Stefana	Othman	Maikel	Colin	Nicole	totaal
dagen /week	5	3	4	3	2	3	
bedrag							5.000,-

- Hoe zou jij dit aanpakken?
 - Bereken hoeveel dagen de werknemers in totaal per week werken.
 - Bereken voor elke werknemer het bedrag dat hij of zij ontvangt.
 - Bij het rekenwerk kun je gebruik maken van een vermenigvuldigingsfactor of van het kruisproduct. Wat is hier het handigst?
- Een van de werknemers klaagt dat de prijs eigenlijk veel te laag is voor 'een heel jaar keihard werken'.
- Neem aan dat alle werknemers 48 weken per jaar werken. Bereken hoe groot de bonus is per gewerkte dag per persoon.

Werkvormen

Deze instapvraag bestaat uit twee opdrachten waarbij een verhoudingstabel gebruikt wordt.

Kies een opdracht uit of verdeel de opdrachten over de klas.



Theorie

Rekenmethoden bij een verhoudingstabel

Bij het rekenen met verhoudingstabellen zijn er verschillende manieren om aan het antwoord te komen. Elke methode levert het goede antwoord.

1. Terugrekenen naar 1

Deze methode wordt vaak gebruikt bij procenten. Werkt altijd goed maar kost ook steeds twee rekenstappen.

2. Horizontaal vermenigvuldigen

Vermenigvuldigen met de factor k bij een stap naar rechts. Terugrekenen (bij een stap naar links) betekent delen door k .

		$\times 0,75$	
in procenten	100%	75%) $\times 6,4$
prijs in euro		480	

3. Verticaal vermenigvuldigen

Vermenigvuldigen met de factor k bij een stap naar beneden. Terugrekenen (bij een stap naar boven) betekent delen door k .

Een methode die bij een verhoudingstabel ook werkt is het kruisproduct.

18 Waar of niet waar?

- Bij een verhoudingstabel is de horizontale vermenigvuldigingsfactor even groot als de verticale vermenigvuldigingsfactor.
- Een verhoudingstabel mag je zowel gebruiken bij vergroten als bij verkleinen.
- Een verhoudingstabel mag je alleen gebruiken bij rekenen met procenten.
- Een verhoudingstabel kun je gebruiken als er sprake is van 'per-eenheden', zoals euro/uur of cent/kilometer.
- Bij terugrekenen naar 1 pas je in feite twee keer een vermenigvuldigingsfactor toe.

19 Op vakantie

Drie vrienden, Johan, Evert en Marco gaan samen op vakantie. Zij besluiten om de kosten van de reis en de accommodatie te verdelen naar inkomen. Evert blijkt anderhalf keer zoveel te verdienen als Johan. Marc verdient evenveel als Johan en Evert samen. De totale kosten van de vakantie bedragen € 880,-.

Hoe wordt het bedrag verdeeld?

	Johan	Evert	Marco	Totaal
inkomen per week	€ 240	€ 360	€ 600	
bedrag				€ 880



figuur 14 – Op vakantie

20 Brandstofkosten

- a. Benzine kost € 1,42 per liter. Hoeveel benzine kun je kopen met € 15,-?

volume	1 L	
bedrag	€ 1,42	€ 15,-

Bij een bepaalde auto is het gemiddeld brandstofverbruik 7,2 liter per 100 km. Per jaar rijdt de auto ongeveer 24.000 km, de prijs van de brandstof is € 1,42 per liter.

- b. Hoe hoog zijn de brandstofkosten per kilometer? Bereken het antwoord in centen en rond af op een decimaal.
c. Hoeveel kost het benzineverbruik per jaar? Rond af op honderden euro's.

21 Snelheden omrekenen

Het omrekenen van snelheden van m/s naar km/h of omgekeerd geeft vaak verwarring. Een handig bruggetje is om te beginnen met de snelheid van een wandelaar. Als de wandelaar elke seconde een stap van 1 meter zet dan is zijn snelheid 1 m/s.



figuur 15 – Een wandelaar loopt met een snelheid van ongeveer één meter per seconde.

- a. Hoeveel meter legt deze wandelaar af in één uur?
b. Leg daarmee uit dat geldt: $1 \text{ m/s} = 3,6 \text{ km/h}$.
c. Reken om: $5 \text{ m/s} = \dots \text{ km/h}$.
d. Reken om: $120 \text{ km/h} = \dots \text{ m/s}$.

snelheid in m/s	1 m/s	
snelheid in km/h	3,6 km/h	120 km/h

22 Kaartschalen

Een kaart of plattegrond is een mooi voorbeeld van een afbeelding waarbij alle afmetingen in verhoudingen zijn weergegeven. De schaal van een kaart kan op twee manieren zijn gegeven, bijvoorbeeld

$1 : 25\,000$ of $1 \text{ cm op de kaart} = 250 \text{ m in werkelijkheid}$
(toelichting: $1 \text{ cm op de kaart is } 25\,000 \text{ cm}$, dat is 250 m)

- a. De afstand van huis naar school is 1,8 km. Hoe groot is de afstand op de kaart?

op de kaart	1 cm	
in werkelijkheid	250 m	1800 m

- b. Hoe kun je in dit voorbeeld het antwoord berekenen met een vermenigvuldigingsfactor?
c. Controleer het antwoord met behulp van het kruisproduct.
d. De schaal van een kaart is $1 : 200.000$. Hoe groot is 4,5 cm op de kaart? Geef het antwoord in km.

op de kaart	1 cm	4,5 cm
in werkelijkheid	200 000 cm	



figuur 16 – Topografische kaarten zijn vaak in een schaal $1:25\,000$



figuur 17 – Topografische atlas van Nederland.

23 Topografische atlas

Een topografische kaart is zeer gedetailleerd. De schaal van de kaarten in de topografische atlas zijn 1 op 50 000.

- Hoeveel km is 1 cm op de kaart in werkelijkheid?
- Op de kaart is een raster van lijnen gedrukt die 2 cm uit elkaar liggen. Welke afstand is dat in werkelijkheid?
- De afstand tussen twee dorpen is in werkelijkheid 6,5 km. Bereken hoeveel cm dat is op de kaart.

De atlas bestaat uit vier delen met elk ruim 100 kaarten. Elke kaart in het boek is 20 bij 26 cm.

- Bereken hoeveel km² op één kaart staat afgebeeld.
- De totale oppervlakte van Nederland bedraagt 41.528 km². Bereken daarmee hoeveel kaarten er minstens in de atlas moeten zitten

24 Fotokopie

In de tekenles heb je met houtskool een mooie tekening gemaakt op een A4-blaadje. Je wilt die tekening nu verkleinen met een kopieerapparaat zodat het past in een lijstje van 10 bij 15 cm. A4-papier is 21,0 bij 29,7 cm.

- Je stelt het kopieerapparaat in op 40%. Past de kopie van de tekening dan in de lijst? Gebruik een berekening.
- Je stelt het kopieerapparaat in op 50%. Laat met een berekening zien dat de kopie nu niet meer in het lijstje past.
- Op hoeveel procent moet je het kopieerapparaat instellen zodat de hele kopie binnen het lijstje past? Gebruik een verhoudingstabel.

Je besluit om het kopieerapparaat in te stellen op 45%. Een figuur op je tekening blijkt dan precies 6 cm groot te zijn.

- Hoe groot was die figuur op de originele tekening?

Het lijstje kost in de winkel € 4,95. Deze prijs is inclusief de BTW van 19%.

- Bereken hoeveel BTW er in de prijs zit.



figuur 18 – Tekening van een hond.

Verhoudingen en evenredigheid

4 Evenredig

Bij het rekenen in verhoudingen worden alle getallen met dezelfde factor vermenigvuldigd. Zoiets noemen we *evenredig* (evenredig betekent letterlijk 'met gelijke factoren').

Paragraafvraag

Wat wordt bedoeld met evenredig?

oriëntatie

Minimumloon

Het minimumloon hangt af van het aantal uren dat per week gewerkt wordt. In januari 2009 golden de onderstaande bedragen voor een 15-jarige. Het loon blijkt *evenredig* te zijn met het aantal gewerkte uren. Dat kun je controleren met vermenigvuldigingsfactoren.



figuur 19 – Minimumloon.

		$\times 2$		$\times 1,25$	
uren /week	4	8	12	16	20
minimumloon	€ 10,08	€ 20,16	€ 30,24	€ 40,32	€ 50,40
		$\times 2$		$\times 1,25$	

Niet elk verband is evenredig. Om te onderzoeken of er sprake is van evenredigheid kijk je naar de vermenigvuldigingsfactoren of je gebruikt de verhouding (zie het theorieblok).

instap 1

Magneetstickers

Een bedrijf produceert magnetische stickers, die gebruikt worden bij planborden. De prijs per product hangt af van de oppervlakte en het aantal magneetstickers. De onderstaande tabel geldt voor magneten met een oppervlakte van 25 cm².

Aantal	500	1000	2000	5000	10000	50000
Prijs per stuk	€ 0,42	€ 0,23	€ 0,20	€ 0,18	€ 0,17	€ 0,15

- Is de prijs per stuk evenredig met het aantal?
- Is de totale prijs van een bestelling evenredig met het aantal?

Bij bestellingen vanaf 50.000 stuks gelden de volgende prijzen:

Oppervlakte	25 cm ²	40 cm ²	60 cm ²	80 cm ²	100 cm ²
Prijs per stuk	€ 0,15	€ 0,24	€ 0,36	€ 0,48	€ 0,60

- Is de prijs per stuk evenredig met de oppervlakte?

Ook bij bestellingen van 5000 stuks is de prijs evenredig met de oppervlakte.

- Vul de onderstaande tabel verder in.

Oppervlakte	25 cm ²	40 cm ²	50 cm ²		100 cm ²
Prijs per stuk	€ 0,18			€ 0,54	




figuur 20 – Magnetische stickers.

instap 2

Verticaal vermenigvuldigen

Evenredigheid is soms makkelijk te herkennen aan de getallen in de tabel. In de onderstaande tabel zijn de vermenigvuldigingsfactoren makkelijke getallen. Als dat niet het geval is kun je beter kijken naar de verticale vermenigvuldigingsfactor.


uren /week	4	8	12	16	20
minimumloon	€ 10,08	€ 20,16	€ 30,24	€ 40,32	€ 50,40



- Met welk getal moet je hier verticaal vermenigvuldigen?
- Hoe heb je die factor berekend?
- Welke betekenis heeft die factor in dit geval?

Nicole heeft uit een groot stuk karton vijf figuren geknipt. Van elk van de vijf figuren meet zij de oppervlakte en het gewicht.

oppervlakte	13,7 cm ²	28,4 cm ²	35,3 cm ²	42,8 cm ²	57,7 cm ²
gewicht	8,8 g	18,2 g	22,6 g	27,4 g	36,9 g
verhouding					



- Bereken voor elk van de vijf figuren de verticale vermenigvuldigingsfactor. Rond het getal af op twee decimalen.
- Welke betekenis heeft die factor in dit voorbeeld?

De vermenigvuldigingsfactor is in dit voorbeeld de *verhouding* tussen het gewicht en de oppervlakte.

- Leg in je eigen woorden uit dat bij een evenredig verband de *verhouding* steeds hetzelfde moet zijn.

Theorie

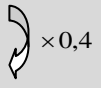
Evenredig verband

Het woord 'rede' betekent factor. Evenredig betekent dus letterlijk:

*Als de ene grootheid met een getal wordt **vermenigvuldigd** dan wordt de andere grootheid met hetzelfde getal **vermenigvuldigd**.*

Tussen deze grootheden bestaat een *evenredig verband*. Deze eigenschap kun je herkennen aan de getallen in de tabel. Horizontaal zijn de vermenigvuldigingsfactoren onder en boven gelijk.

		$\times 3$		$\times 2$	
grootheid x	13	39	65	130	
grootheid y	5,2	15,6	26	52	
		$\times 3$		$\times 2$	



Constante verhouding

Bij een evenredig verband hoort ook dat de verhouding tussen de twee grootheden steeds hetzelfde is. De verhouding is dus constant. Dat is te controleren door te kijken naar de verticale vermenigvuldigingsfactor.

In dit voorbeeld geldt: de verhouding $\frac{y}{x} = 0,4$ (dat is een constante).

Constante groei

Bij een evenredig verband is de groei ook constant, in dit voorbeeld neemt bij elk horizontaal stapje (toename van x met 1) de waarde van y toe met 0,4.

25 Waar of niet waar?

- Een evenredig verband betekent dat de ene grootheid tien keer zo groot wordt als de andere grootheid met tien toeneemt.
- Bij een evenredig verband is de verhouding tussen de grootheden constant.
- Bij een evenredig verband nemen beide grootheden met dezelfde factor toe of af.
- Als de verticale vermenigvuldigingsfactor steeds even groot is dan moet er sprake zijn van een evenredig verband.
- Bij een evenredig verband kun je geen gebruik maken van een verhoudingstabel.

26 Reiskostenvergoeding

Een bedrijf geeft een reiskostenvergoeding die afhangt van de afstand van het huisadres naar de werkplaats, en van het aantal werkdagen per week. Zie de onderstaande tabel. De bedragen zijn in euro per jaar.

Enkele-reisafstand	1 dag	2 dagen	3 dagen	4 dagen	5 dagen
10 km	62,50	125,00	187,50	250,00	
15 km	93,75	187,50	281,25	375,00	
20 km	125,00	250,00	375,00	500,00	
30 km	187,50	375,00	562,50	750,00	
40 km	250,00	500,00	750,00	1000,00	
50 km	312,50	625,00	937,50	1250,00	
60 km	375,00	750,00	1125,00	1500,00	

- Mevrouw van Zandvoort woont op 10 km afstand van haar werk. Is de vergoeding die zij krijgt evenredig met het aantal reisdagen per week?
- Hoe groot is voor haar de verhouding (vergoeding / aantal dagen)
Verschillende werknemers werken vier dagen per week.
- Is de vergoeding die zij krijgen evenredig met de afstand?
- Hoe groot is voor hen de verhouding (vergoeding / afstand)?

27 Broodjes bakken

Mieke gaat in een broodbakmachine zelf broodjes bakken. Zij heeft een pak 9-granen broodmix gekocht. Op de verpakking staat een tabel waarin de ingrediënten voor 6, 9 en 12 broodjes zijn aangegeven in grammen.



figuur 21 – Broodjes bakken.

aantal broodjes	6	9	12
meel	300	450	600
water	180	270	360
boter	15	22,5	30
zout	5	7,5	10
droge gist	3	4,5	6
suiker	2	3	4

- Zijn de hoeveelheden van de ingrediënten evenredig met het aantal broodjes? Leg uit.
- Mieke wil precies 10 broodjes bakken. Bereken hoeveel gram ze van elk ingrediënt nodig heeft. Leg duidelijk uit.

28 Posttarieven

Een postbedrijf hanteert voor normale brievenpost de volgende tarieven:

gewicht	postzegel
0 - 20 gr	€ 0,44
20 - 50 gr	€ 0,88
50 - 100 gr	€ 1,32
100 - 250 gr	€ 1,76
250 - 500 gr	€ 2,20

Is de prijs van de postzegel evenredig met het gewicht van de brief? Zo ja: laat zien met een berekening. Zo nee: leg uit waarom niet.

29 Bungeekoord

Bij bungeejumpen worden koorden gebruikt die zeer elastisch zijn en tot wel drie keer hun lengte kunnen uitrekken. De uitrekking hangt natuurlijk af van het gewicht dat aan het koord hangt.

Als voorbeeld gebruiken we een koord met een lengte van 12 meter. Om te onderzoeken of de uitrekking van het koord evenredig is met het aantal kg dat aan het koord hangt zijn enkele metingen gedaan (zie tabel).



figuur 22 – Bungeejumpen.

gewicht	2 kg	8 kg	15 kg		25 kg
uitrekking koord	1,2 m		9,0 m	12 m	

- Laat met een berekening zien dat de uitrekking van het koord evenredig is met het aantal kg dat aan het koord hangt.
- Vul de tabel verder in.
- Laat zien dat de verhouding $\frac{\text{uitrekking}}{\text{gewicht}}$ steeds even groot is.
- Welke eenheid heeft deze constante?

Verhoudingen en evenredigheid

5 De grafiek bij een evenredig verband

Bij een evenredig verband hoort een tabel, een grafiek en een formule. Hoe kun je aan de grafiek herkennen of het een evenredig verband is?

Paragraafvraag

Welke grafiek hoort bij een evenredig verband?

instap

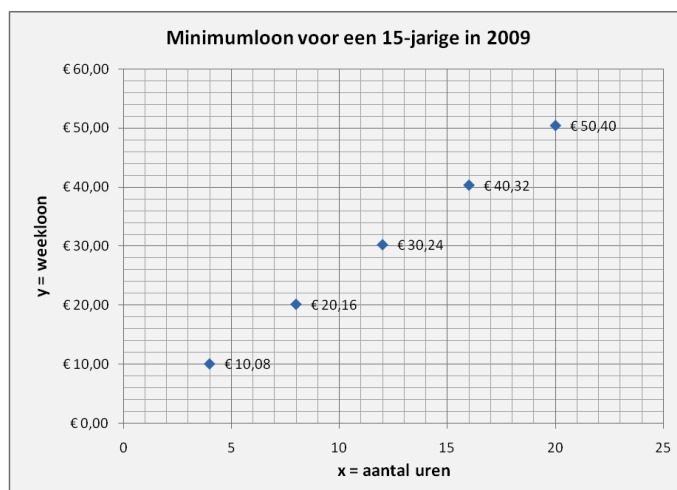


figuur 23 – Minimumloon.

Nogmaals minimumloon

Bij een 15-jarige hangt het minimumloon per week af van het aantal uren dat per week gewerkt wordt. In de tabel staan de bedragen voor januari 2009. Aan de getallen in de tabel is te zien dat het loon evenredig is met het aantal gewerkte uren. Van deze gegevens is ook een grafiek gemaakt.

uren x	4	8	12	16	20
loon y	€ 10,08	€ 20,16	€ 30,24	€ 40,32	€ 50,40



figuur 24

Hellingsgetal

Het hellingsgetal geeft aan hoe steil een lijn loopt. Als het hellingsgetal 4 is dan betekent elke stap naar rechts vier stapjes omhoog.

Als er bij de grafiek eenheden staan dan heeft het hellingsgetal ook een eenheid. In het voorbeeld van het minimumloon is dat bijvoorbeeld euro per uur. Voor elk uur extra neemt het loon met dat bedrag toe.

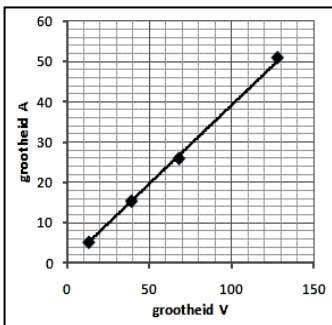
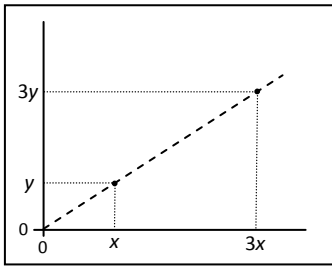
- Teken een lijn bij de punten. Wat voor soort grafiek is dit?
- Leg uit dat deze grafiek door de oorsprong moet gaan.
- Gaat de grafiek bij elk evenredig verband door de oorsprong? Leg uit.
- Is de grafiek bij elk evenredig verband altijd een rechte lijn? Leg uit.

Constante verhouding

Bij een evenredig verband hoort ook een constante verhouding. In dit voorbeeld is die verhouding: $\frac{\text{loon}}{\text{uren}} = 2,52$ euro per uur.

- Wat betekent deze verhouding?
- Bepaal het hellingsgetal van deze lijn.
- Leg in je eigen woorden uit waarom het hellingsgetal gelijk is aan de verhouding loon/uren .
- Geef een formule voor deze lijn.

Theorie



figuur 25 – Grafieken bij een evenredig verband.

Evenredig verband - grafiek en formule

Bij een evenredig verband hoort altijd een rechte lijn door de oorsprong. In de bovenste grafiek zijn de punten (x,y) en $(3x,3y)$ getekend. De twee punten liggen op een rechte lijn door de oorsprong. Daarbij hoort de formule:

Bij grafiek 1: $y = a \cdot x$

Bij grafiek 2: $A = c \cdot V$

De constante a of c is het hellingsgetal van de lijn. Bij een rechte lijn die niet door de oorsprong gaat hoort de formule $y = a \cdot x + b$

Constante verhouding

Bij een evenredig verband is de verhouding tussen de twee grootheden constant. Daarmee kun je controleren of het verband evenredig is.

De verhouding tussen de grootheden y en x is: $verhouding = \frac{y}{x}$

Bij een evenredig verband is de verhouding constant. Dit getal wordt de *evenredigheidsconstante* genoemd. Het is ook het hellingsgetal van de lijn.

Constante groei

Bij een evenredig verband is de groei constant. Bij elk stapje (van 1) in de horizontale richting is de toename in de verticale richting even groot.

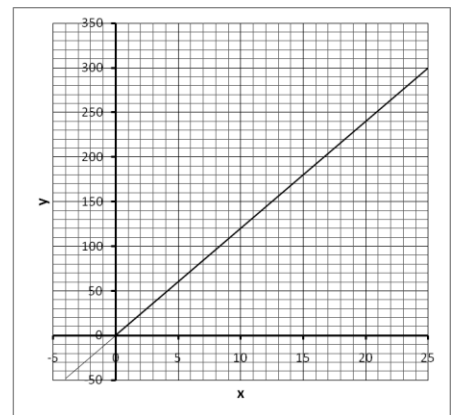
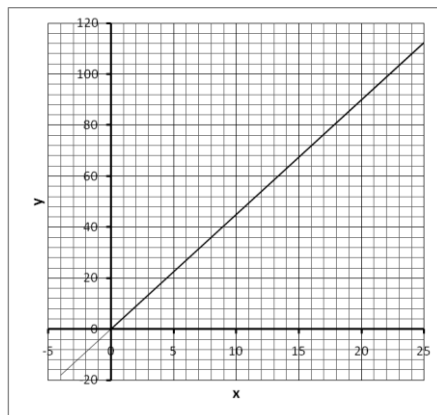
$$\text{het hellingsgetal van een rechte lijn} = \frac{\text{verticale toename}}{\text{horizontale toename}}$$

30 Waar of niet waar?

- De grafiek bij een evenredig verband is altijd een rechte lijn door de oorsprong.
- Bij een evenredig verband is de verhouding tussen de twee grootheden even groot als het hellingsgetal van de lijn.
- Een rechte lijn die niet door de oorsprong gaat kan ook bij een evenredig verband passen.
- Bij de lijn met formule $V = 3,8 \cdot A$ is het hellingsgetal van de lijn 3,8.
- Bij een groter hellingsgetal hoort een steilere lijn.

31 Evenredig verband

De twee onderstaande grafieken horen bij een evenredig verband.

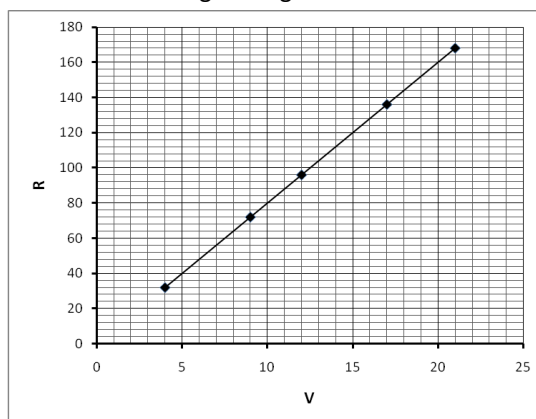


figuur 26

- Bij welke grafiek hoort de formule $y = 12x$?
- Welke formule hoort bij de andere grafiek?
- Bepaal bij beide grafieken de verhouding $\frac{y}{x}$.

32 Verband tussen R en V

De onderstaande grafiek geeft een verband tussen twee grootheden R en V weer.



figuur 27

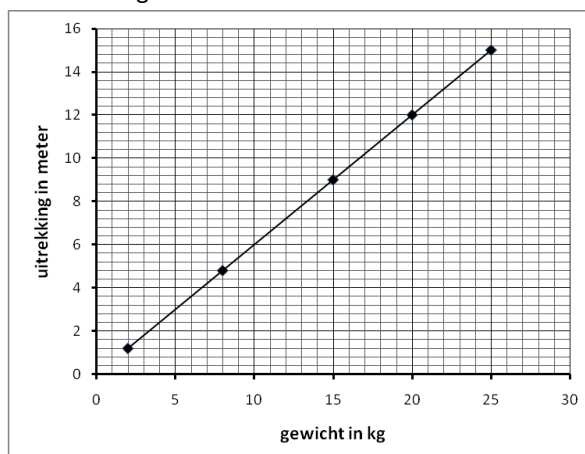
- Bepaal voor twee punten de verhouding $\frac{R}{V}$.
- Bepaal het hellingsgetal van de lijn.
- Leg uit dat de formule bij deze lijn is: $R = 8,0 \cdot V$

33 Bungeekoord

Bij bungeejumpen worden koorden gebruikt die zeer elastisch zijn en tot wel drie keer hun lengte kunnen uitrekken. De onderstaande grafiek hoort bij een koord met een lengte van 12 meter.

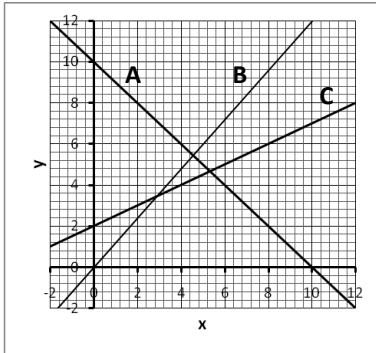


figuur 28 – Bungeejumpen.



figuur 29

- Hoe kun je aan de grafiek zien dat hier sprake is van een evenredig verband?
 - Lees af bij welk gewicht de uitrekking 10 m is.
 - Bepaal uit de grafiek het hellingsgetal.
 - De verhouding tussen de uitrekking en het gewicht is constant. Laat met één rekenvoorbeeld zien dat de verhouding (uitrekking gedeeld door gewicht) gelijk is aan het hellingsgetal.
 - De maximale uitrekking is 24 m. Welke massa hoort daarbij? Geef een berekening.
- Een langer koord rekt ook verder uit. Bij een koord van 24 meter is de uitrekking bij gelijk gewicht twee keer zo groot als de uitrekking van een koord van 12 meter.
- Is de uitrekking van het koord evenredig met de lengte van het koord? Leg kort uit.
 - Laat zien dat bij een twee keer zo lang koord de verhouding (uitrekking gedeeld door gewicht) dan twee keer zo groot is.
 - Beschrijf hoe de grafiek verandert als het koord 6 meter lang is.



figuur 30 – Grafiek met drie rechte lijnen.

Theorie

34 Rechte lijnen

In de grafiek in de kantlijn zijn drie rechte lijnen A, B en C getekend.

- Welke lijn hoort bij een evenredig verband? Leg uit.
- Bepaal bij elke lijn het hellingsgetal.
- Bij welke lijn is de verhouding tussen y en x constant? Hoe groot is die verhouding daar?

Bij een evenredig verband hoort een lijn van het type $y = a \cdot x$

- Hoe groot is de waarde van a bij het evenredige verband in de grafiek?
- Leg in je eigen woorden uit dat bij een evenredig verband het hellingsgetal altijd gelijk moet zijn aan de verhouding tussen de twee grootheden.

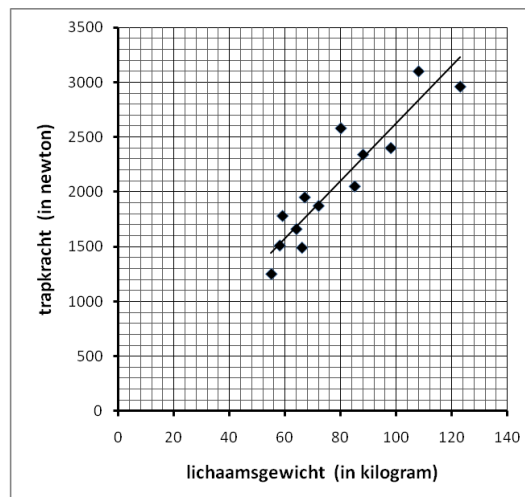
Dataset en trendlijn

Bij een dataset of een serie metingen liggen de punten vaak niet netjes op een rechte lijn. Toch kun je aan de hand van een grafiek goed nagaan of er sprake is van een evenredig verband. Daarbij wordt gebruik gemaakt van een trendlijn die globaal het verband weergeeft.

Een trendlijn wordt meestal getekend met behulp van een computerprogramma zoals Excel. Bij een evenredig verband hoort dan een trendlijn die door de oorsprong gaat.

35 Trapkracht

De maximale spierkracht die krachtssporters met hun benen kunnen leveren wordt de trapkracht genoemd. De trapkracht hangt sterk af van het lichaamsgewicht van de sporters. In de onderstaande grafiek zie je voor een aantal krachtssporters de trapkracht afgezet tegen het lichaamsgewicht.



figuur 31 – De trapkracht van krachtssporters hangt af van het lichaamsgewicht

- Hoe kun je aan de grafiek zien dat er (globaal) sprake is van een evenredig verband?

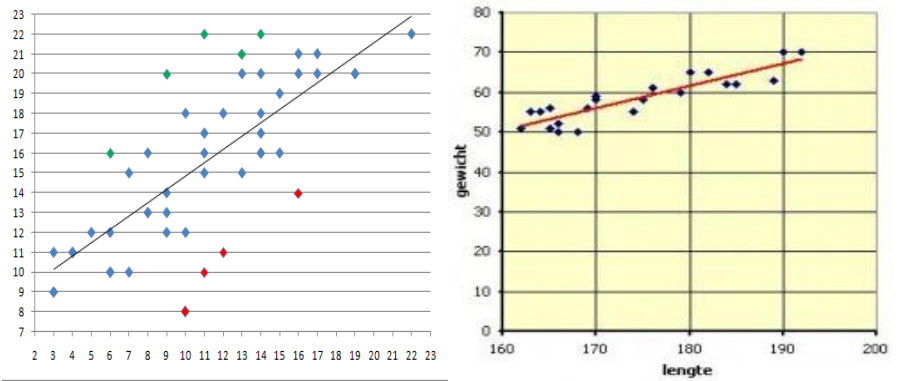
- Is bij de punten in de grafiek de verhouding tussen trapkracht en lichaamsgewicht constant? Leg uit.

Bij punten op de trendlijn moet de verhouding tussen de trapkracht en het lichaamsgewicht wel constant zijn.

- Controleer bij minstens twee punten op de lijn dat die verhouding constant is.

36 Lineair verband

De twee onderstaande grafieken horen bij een lineair verband.



figuur 32 – Twee grafieken van lineaire verbanden

- Wat is het verschil tussen een grafiek van een evenredig verband en een grafiek van een lineair verband?
- Bepaal voor beide lijnen het hellingsgetal.
- Laat voor beide grafieken zien dat de getekende trendlijn geen evenredig verband is. (tip: gebruik de constante verhouding)

Verhoudingen en evenredigheid

6 Twee formules bij evenredigheid

Bij een evenredig verband hoort een tabel, een grafiek en een formule. De formule bij een evenredig verband kan op verschillende manieren geschreven worden.

Paragraafvraag

Welke formules horen bij een evenredig verband?

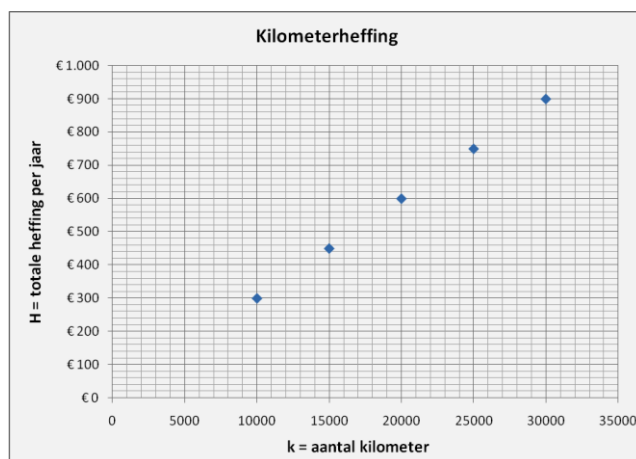
Instap

Kilometerheffing

In een van de vele voorstellen rond het invoeren van een kilometerheffing werd de heffing berekend evenredig met het aantal gereden kilometers per jaar. Verder werden er voor personenauto's enkele verschillende klassen ingevoerd die afhankelijk waren van het gewicht van de auto.

Enkele gegevens uit dit voorstel zijn weergegeven in de onderstaande tabel en in het assenstelsel.

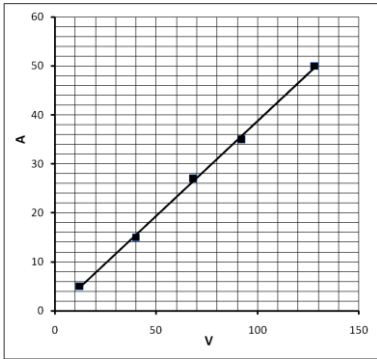
kilometer	10 000	15 000	20 000	25 000	30 000
klasse A	€ 220	€ 330	€ 440	€ 550	€ 660
klasse B	€ 300	€ 450	€ 600	€ 750	€ 900
klasse C	€ 440	€ 660	€ 880	€ 1100	€ 1320



figuur 33 – Kilometerheffing.

- Van welke klasse auto's is de heffing in de grafiek weergegeven?
- Bereken voor deze klasse de verhouding tussen de heffing H en het aantal kilometers k . Noteer de verhouding als: $\frac{H}{k} = \dots$
- Welke betekenis heeft deze verhouding?
- Noteer de formule van de lijn als: $H = \dots$
- Je hebt nu twee formules gevonden: $\frac{H}{k} = \dots$ en $H = \dots$. Zijn die twee formules hetzelfde? Leg uit of laat zien.
- Stel voor de twee andere klassen ook twee formules op.
klasse A: $\frac{H}{k} = \dots$ en $H = \dots$ klasse C: $\frac{H}{k} = \dots$ en $H = \dots$
- Van de twee andere klassen is de grafiek ook een rechte lijn. Bij welke klasse loopt de lijn steiler dan in de hierboven getekende grafiek? Leg uit.

Theorie



figuur 34 – Evenredig verband.

Evenredig verband - twee formules

De grafiek van een evenredig verband is altijd een rechte lijn door de oorsprong. Bij een rechte lijn door de oorsprong hoort een formule van de vorm:

$$y = a \cdot x$$

De constante a is het hellingsgetal van de lijn. Bij de hiernaast getekende grafiek is het hellingsgetal 0,39. De formule wordt dan:

$$A = 0,39 \cdot v$$

Bij een evenredig verband is de verhouding tussen de twee grootheden constant. In dit voorbeeld geldt dan de volgende vergelijking:

$$\frac{A}{v} = 0,39$$

Deze twee formules zijn in feite identiek, ze worden alleen op verschillende manieren geschreven.

Evenredigheidsconstante

De constante in de formules wordt ook wel de *evenredigheidsconstante* genoemd. Die constante is dus gelijk aan de verhouding tussen de twee grootheden. In de grafiek is de evenredigheidsconstante gelijk aan het *hellingsgetal*.

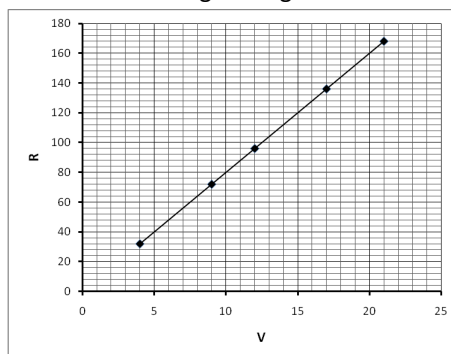
De evenredigheidsconstante heeft vaak een bepaalde betekenis die afhangt van de situatie. Net als bij het hellingsgetal kun je de betekenis vaak afleiden uit de eenheid die bij de constante hoort. Omdat je daarbij twee getallen door elkaar deelt moet je ook de eenheden delen. Meestal krijg je dan een 'per'-eenheid zoals euro per uur of liter per m².

37 Waar of niet waar?

- De formule $\frac{y}{x} = 3$ is hetzelfde als $y = 3x$ (behalve als $x = 0$).
- De grafiek die bij formule $y \cdot x = 3$ hoort gaat door de oorsprong.
- De evenredigheidsconstante is gelijk aan het hellingsgetal van de grafiek.
- De formule $\frac{v}{R} = 3$ is hetzelfde als $R = 3v$.
- De lijn met formule $\frac{A}{T} = 0,0038$ gaat niet door de oorsprong.

38 Rechte lijnen

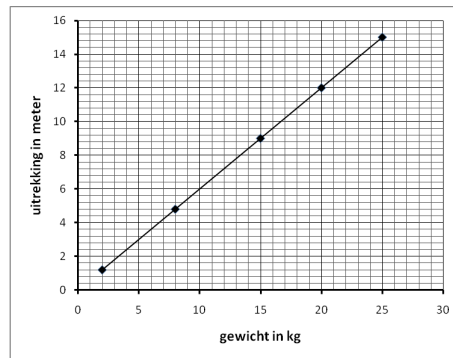
De onderstaande grafiek geeft een verband tussen twee grootheden R en V weer.



figuur 35

- Schrijf de formule van deze lijn op twee manieren.

De onderstaande grafiek geeft het uitrekken van een bungeekoord weer. De uitrekking u is evenredig met het gewicht m dat aan het koord hangt.



figuur 36

b. Schrijf de formule van die lijn op twee manieren.

c. Teken een grafiek bij het verband $\frac{Q}{p} = 0,12$, met p tussen 0 en 1000.

39 Vliegen en zwemmen

Uit biologisch onderzoek blijkt dat vogels, vleermuizen en insecten op een vergelijkbare manier met hun vleugels bewegen als vissen met hun staartvin. Onderzoekers hebben ontdekt dat de vliegsnelheid evenredig is met de slagfrequentie (het aantal slagen per seconde van de vleugels of staartvin).

De kolibrie is een klein vogeltje dat vliegt met een hoge slagfrequentie. Voor een kolibrie geldt het volgende verband.

$$v = 0,27 \cdot f$$

In deze formule is:

- f de slagfrequentie (het aantal slagen per seconde van de vleugels of staartvin);
- v de vliegsnelheid (in meter per seconde).

Een kolibrie heeft een vliegsnelheid van 13,5 meter per seconde.

- a. Toon aan dat een kolibrie een slagfrequentie van 50 heeft.
- b. Bereken de snelheid van de kolibrie als het vogeltje 40 slagen per seconde maakt.

De constante in de formule geeft aan hoeveel meter het dier bij één slag aflegt. De eenheid is dus meter per slag. Een tuimelaar (een dolfijnensoort) legt per slag een grotere afstand af dan een kolibrie.

- c. Is de constante in de formule bij een tuimelaar groter of kleiner dan bij een kolibrie?
- d. Stel dat de kolibrie en de tuimelaar evenveel slagen per seconde maken, wie heeft dan de grootste snelheid? Leg uit m.b.v. de formule.

Een tuimelaar bij een bepaalde snelheid maakt vier slagen in vijf seconde.

- e. Bereken de slagfrequentie bij deze snelheid.
- f. Bij die slagfrequentie is de snelheid 15 meter per seconde. Wat is bij een tuimelaar de formule voor de snelheid v en de slagfrequentie f ? Leg uit.

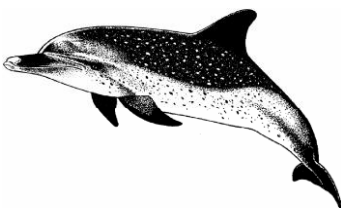
De gewone huisvlieg is ook onderzocht. In figuur 39 is de beweging van het uiteinde van de vleugels van de vlieg tijdens de vlucht weergegeven. In 0,024 s maken de vleugels drie slagen. Voor de huisvlieg geldt:

$$v = 0,022 \cdot f$$

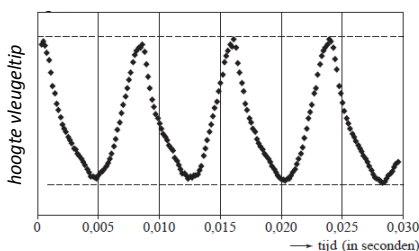
- g. Bereken de vliegsnelheid van de huisvlieg. Licht je antwoord toe.



figuur 37 - Kolibrie



figuur 38 - Tuimelaar



figuur 39 – Slagbeweging van een huisvlieg.



figuur 40 – In een glas wijn zit ongeveer evenveel alcohol als in een glas bier.

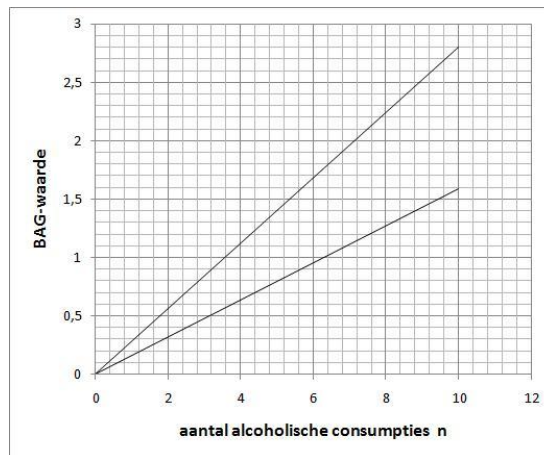
40 Alcoholgehalte

Het drinken van alcoholische consumpties beïnvloedt de rijvaardigheid negatief. Het is in Nederland dan ook verboden om met een alcoholgehalte van meer dan 0,5‰ een auto te besturen. Dit alcoholgehalte heet het bloedalcoholgehalte, afgekort BAG. Het BAG is afhankelijk van verschillende factoren:

- de hoeveelheid alcohol die je drinkt;
- je gewicht;
- of je een man of een vrouw bent;

Er zijn formules opgesteld waarmee je nauwkeurig kunt berekenen wat je BAG is. Een eenvoudige berekening gaat uit van het aantal consumpties met alcohol omdat in elke consumptie ongeveer evenveel alcohol zit als in een glas bier van 25 cl.

De onderstaande grafiek geeft voor twee personen de BAG-waarde weer na het innemen van een aantal alcoholische consumpties. De ene lijn hoort bij een vrouw van 60 kg, de ander bij een man van 90 kg.



figuur 41 – BAG-waarde voor een vrouw van 60 kg en een man van 90 kg.

Voor een man van 90 kg is de BAG-formule: $BAG = 0,16 \cdot n$

Hierin is n het aantal alcoholische consumpties.

- a. Welke lijn uit de bovenstaande grafiek hoort bij deze formule?
- b. Laat met een berekening zien dat deze man niet meer dan 3 alcoholische consumpties mag nuttigen voor deelname aan het verkeer.

Voor een vrouw van 60 kg geldt de andere lijn in de grafiek.

- c. Stel voor deze vrouw aan de hand van de grafiek een formule op voor de BAG-waarde en het aantal consumpties.
- d. Voor een man van 60 kg geldt: $BAG = 0,24 \cdot n$. Mag een man van 60 kg meer of minder glazen drinken dan een vrouw van 60 kg.

Als je net je rijbewijs gehaald hebt dan geldt een strengere grens. Voor beginnende bestuurders is de grens voor de BAG-waarde 0,2‰.

- e. Leg uit dat voor de meeste jongeren deze grens meestal al bij één glas bier overschreden wordt.

Een man van 90 kg heeft bij een feestje acht alcoholische consumpties gedronken. De alcohol wordt door het lichaam langzaam afgebroken waardoor de BAG daalt met 0,17 per uur.

- f. Bereken hoe lang het duurt voordat alle alcohol in het lichaam van deze man afgebroken is.

Een vrouw van 60 kg heeft bij hetzelfde feestje ook acht alcoholische consumpties gedronken. De alcohol wordt door het lichaam langzamer afgebroken dan bij een man. De BAG daalt voor haar met 0,15 per uur.

- g. Bereken hoe lang het duurt voordat alle alcohol in het lichaam van deze vrouw afgebroken is.

Samenvatting

Vergroten en verkleinen in verhouding

- Bij vergroten en verkleinen kun je gebruik maken van de vermenigvuldigingsfactor k .
- Om k te berekenen deel je de nieuwe waarde door de oude waarde.
- Bij vergroten is k groter dan 1, bij verkleinen tussen 0 en 1.
- Bij vergroten en verkleinen blijven de verhoudingen tussen de getallen gelijk.
- Voor het rekenwerk kun je gebruik maken van een verhoudingstabel.

Procenten en verhoudingstabel

- Rekenen met procenten is in feite rekenen met vermenigvuldigingsfactoren.
- Een percentage kun je omrekenen naar een decimaal getal, b.v. $120\% = 1,20$. Het decimale getal is de vermenigvuldigingsfactor k .
- Bij het rekenen met procenten kun je ook gebruik maken van een verhoudingstabel.
- Een handige afspraak is om de procenten in de bovenste rij te plaatsen en de waarde die bij 100% hoort in de eerste kolom.
- Met een kruisproduct kun je het antwoord controleren

Evenredig verband

- Bij een evenredig verband tussen twee grootheden geldt: Als de ene grootheid met een getal wordt vermenigvuldigd dan wordt de andere grootheid met hetzelfde getal vermenigvuldigd
- Bij een evenredig verband is de grafiek een rechte lijn door de oorsprong.
- Bij een evenredig verband is de formule: $y = c \cdot x$
- De evenredigheidsconstante c in de formule is gelijk aan het hellinggetal van de grafiek, ook wel de richtingsgetal of richtingscoëfficiënt genoemd.
- Bij een evenredig verband is de verhouding tussen de twee grootheden constant.
- Bij een evenredig verband past ook de formule: $\frac{y}{x} = c$
- Het hellinggetal van de lijn is gelijk aan de evenredigheidsconstante c .

Herhalingsopgaven

Als je de stof uit deze bundel goed begrepen hebt dan ben je toe aan het maken van enkele oefenopgaven (41 t/m 45). Als je de stof nog niet helemaal beheerst dan is het beter om eerst enkele herhalingsopgaven te maken uit Getal & Ruimte.

Bij het onderwerp procenten: blz. 53, 54 en 55 opgave 9^{a, b, d, e}, 12, 13 en 14

Bij het onderwerp evenredigheid: blz. 84 opgave 15, 16, 17 en 18

Oefenopgaven



figuur 42 – Verfblikken.

41 Verf

We noemen het aantal vierkante meters dat met een liter verf geschilderd kan worden het rendement. Dikkere verf geeft een dikkere verflaag op de muur.

- Is het rendement bij dikkere verf hoger of lager dan bij dunnere verf? Leg uit. Op een blik verf van goede kwaliteit staat dat het rendement $12 \text{ m}^2/\text{liter}$ is.
- Bereken hoeveel verf volgens de fabrikant nodig is voor een muur van 8,5 bij 3,2 m.

De fabrikant vermeldt niet dat bij het verven 7,5% verloren gaat in de kwasten en de verffroller.

- Bereken hoeveel liter verf in werkelijkheid nodig is voor deze muur. Voor het aantal liter verf V dat in werkelijkheid nodig is voor een muur met oppervlakte A (in m^2) geldt een evenredig verband.

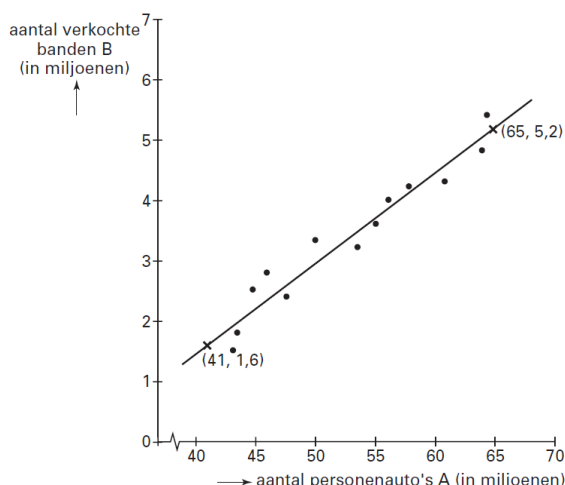
d. Laat zien dat voor deze soort verf geldt: $V = 0,090 \cdot A$

Verf van huismerken is meestal dunner dan verf van topmerken. Van een bepaald soort huismerk is het rendement 1,5 maal zo groot als in het bovenstaande voorbeeld.

- Welk verband geldt er voor dit huismerk tussen V en A ? Geef de formule en leg uit hoe je die gevonden hebt.

42 Autobanden

Het aantal personenauto's in de Verenigde Staten groeit jaarlijks met 2 tot 5 procent. Verkopers van autobanden verkopen daardoor ook meer banden. Drivewell, een fabriek in de VS die banden voor personenauto's produceert, onderzocht het verband tussen het aantal personenauto's in de VS en het aantal banden dat deze fabriek verkoopt. Zie figuur 43. Elk stipje stelt een jaar voor. De lijn in de grafiek is de trendlijn.



figuur 43 – Verkoop van autobanden in de VS.

- De grafiek is een rechte lijn, toch is er niet sprake van een evenredig verband. Waarom niet?

Tussen 1983 en 1995 steeg het aantal personenauto's van 43,5 miljoen naar 64,5 miljoen. Elk jaar was er sprake van een toename van het aantal auto's.

- Leg met behulp van de grafiek uit dat de bandenverkoop niet elk jaar toenam.

- c. Bereken met hoeveel procent het aantal auto's tussen 1983 en 1995 toegenomen is.

Drivewell heeft op de markt van autobanden enkele belangrijke concurrenten. De totale verkoop van autobanden in de VS is tussen 1983 en 1995 evenredig met het aantal personenauto's. Per miljoen auto's worden jaarlijks vierhonderduizend banden verkocht.

- d. Hoeveel autobanden werden er in 1995 in de VS verkocht?
 e. Is het marktaandeel van Drivewell tussen 1983 en 1995 toegenomen of afgenomen? Geef een berekening of leg uit.

43 Brandstofverbruik

Vliegen kost veel brandstof. Een flink deel van de totale kosten van een vlucht bestaat uit brandstofkosten. Voor vliegmaatschappijen is het dus interessant om zuinige vliegtuigen te gebruiken.

Om het brandstofverbruik van verschillende typen vliegtuigen te kunnen vergelijken, kijkt men naar het brandstofverbruik per kilometer per passagier. Men gaat er daarbij van uit dat alle plaatsen (stoelen) in het vliegtuig bezet zijn. Dit brandstofverbruik per kilometer per passagier wordt brandstofverbruik per skm (stoelkilometer) genoemd en wordt uitgedrukt in gram.

Een vliegtuig met 210 stoelen heeft bij een vlucht van 4500 km een brandstofverbruik van in totaal 26.325 kg.

- a. Ga met een berekening na dat het brandstofverbruik per skm voor dit vliegtuig tijdens deze vlucht bijna 28 gram is.
 b. Bereken hoeveel brandstof bij dit vliegtuig nodig is voor een vlucht van 6500 km.

Voor elk type vliegtuig kan een formule opgesteld worden die het aantal kg brandstof B geeft als functie van het aantal te vliegen kilometers s .

- c. Laat zien dat voor dit vliegtuig geldt: $B = 5,85 \cdot s$

Bij een ander type vliegtuig met 360 stoelen is het brandstofverbruik 25 gram per stoelkilometer.

- d. Stel voor dit type vliegtuig net zo'n formule op.

Een personenauto met vier stoelen verbruikt 6,8 liter benzine per 100 km. Een liter benzine heeft een gewicht van 0,72 kg.

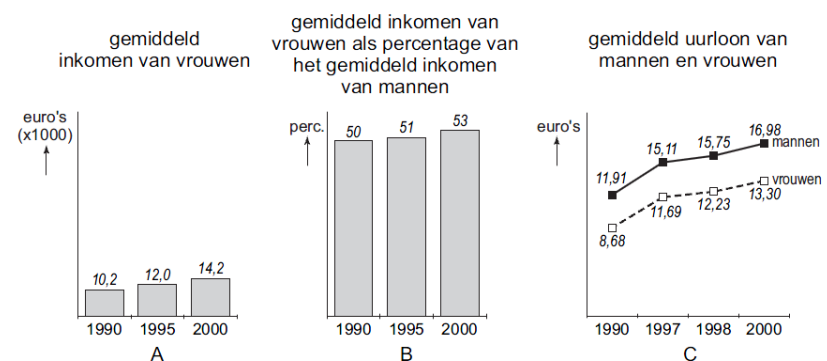
- e. Bereken het brandstofverbruik per skm van deze personenauto.



figuur 44 - Vliegtuig

44 Verdienen vrouwen minder?

In maart 2003 stond in de Volkskrant een artikel over de inkomensachterstand van vrouwen op mannen. Deze figuur stond er bij:



figuur 45 – Inkomensgegevens voor mannen en vrouwen tussen 1990 en 2000.

Figuur 45A gaat over het gemiddelde jaarinkomen van vrouwen.

- a. Toon met een berekening aan dat het gemiddelde jaarinkomen van vrouwen tussen 1990 en 2000 met ruim 39% is toegenomen.

In figuur 45B kun je zien dat vrouwen hun inkomensachterstand op mannen langzaam aan het inlopen zijn.

b. Bereken met figuur 45A en 45B het gemiddeld inkomen van mannen in 1990 en in 2000.

c. Laat daarmee zien dat het gemiddeld inkomen van mannen procentueel minder gestegen is dan dat van vrouwen.

Betekent dit nu dat vrouwen meer uren zijn gaan werken of dat ze per uur meer zijn gaan verdienen? In figuur 45C is te zien hoe het gemiddeld uurloon van mannen en vrouwen zich ontwikkeld heeft.

d. Laat met een berekening zien dat het uurloon van vrouwen procentueel meer gestegen is dan het uurloon van mannen.

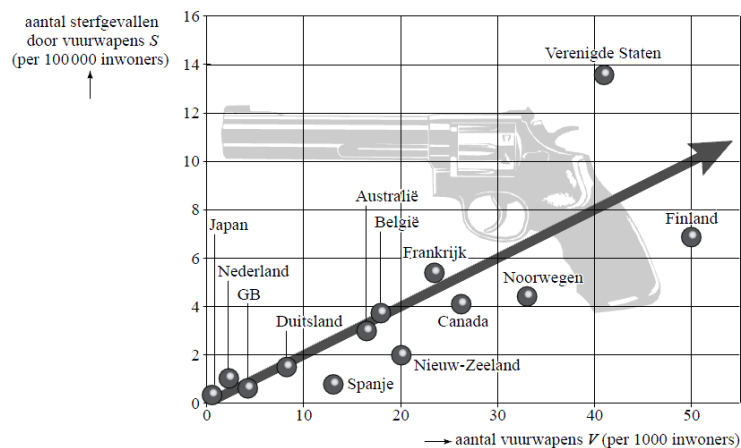
e. Laat met een berekening zien dat zowel mannen als vrouwen in 2000 minder uren werkten dan in 1990.

f. Wat is nu je conclusie? Waardoor halen vrouwen hun achterstand in?

45 Hebben is schieten?

De regels omtrent het in bezit mogen hebben van vuurwapens zijn per land verschillend. Tegenstanders van vuurwapenbezit beweren dat hoe makkelijker mensen aan vuurwapens kunnen komen, hoe meer die gebruikt worden.

Figuur 46 geeft het verband weer tussen het jaarlijks aantal sterfgevallen door vuurwapens S (per 100 000 inwoners) en het aantal vuurwapens V (per 1000 inwoners). In figuur 46 is ook een trendlijn getekend.



figuur 46 – Vuurwapens en sterfgevallen

a. Voor Finland geldt $V = 50$ en $S = 7$. Leg uit wat die getallen betekenen.

b. Finland heeft 5,2 miljoen inwoners. Bereken het aantal vuurwapens en het aantal doden per jaar. Gebruik een verhoudingstabel.

c. Stel een formule op voor het verband tussen S en V (bij de trendlijn).

d. De Verenigde Staten heeft ongeveer 295 miljoen inwoners. Bereken het aantal vuurwapens en het aantal sterfgevallen per jaar door vuurwapens in de Verenigde Staten.

e. Discussievraag: Hoe kun je in de grafiek aflezen in welke het relatief 'veilig' is? Zijn landen die onder de trendlijn liggen veiliger dan landen die boven de trendlijn liggen?

