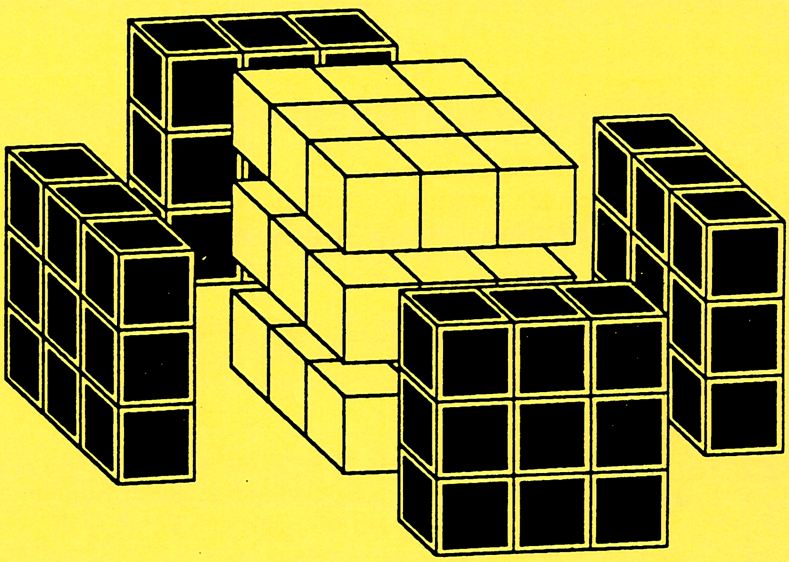
juni 1990

experimentele versie

Winnende Formules

Docentenhandleiding
met leerlingentekst



Publikatie van het team W12-16
onder verantwoordelijkheid van de
Commissie Ontwikkeling Wiskundeonderwijs

ontwerper: Pieter van der Zwaart

Deze publikatie is te bestellen bij
Instituut voor Leerplanontwikkeling (SLO), Enschede (053-840840)
onder vermelding van AN-nummer 3.315.6170

De algebralijn

Winnende Formules is een pakket uit de algebralijn W12-16. Deze algebralijn is nog volop in ontwikkeling.

Een aantal belangrijke punten in deze lijn zijn:

- Niet de diverse functietypen moeten onderwerp zijn van het programma, maar de algebraïsche technieken waarmee de leerling formules en functies aan kan pakken.
- In de algebra moet meer aandacht komen voor het globale karakter van functies en formules, denk aan groei, grootte-orde.
- De variabelen die leerlingen gebruiken moeten echt varieren.
- Leerlingen moeten zelf formules construeren uit situaties en daarbij veel ruimte krijgen voor eigen formuleringen. Daarbij kan de context een natuurlijke steun zijn.

Veel van deze uitgangspunten zijn in Winnende Formules terug te vinden.

In de Nieuwe Wiskrant special (sept. 1990) staat een uitgebreid artikel over de algebralijn.

Inhoud van Winnende Formules

De leerstofkern van het pakket is: Het vergelijken van twee verbanden op lokale (bijvoorbeeld snijpunten) en globale (bijvoorbeeld welke wint op den duur) eigenschappen.

In het eerste gedeelte van het pakket construeren de leerlingen zelf twee formules, vanuit een rij bouwsels. Dat doen zij met behulp van meetkundige en rekenkundige kennis die zij grotendeels al bezitten. Met behulp van die kennis en door het kijken naar de rij bouwsels, kunnen de leerlingen hun resultaten controleren.

In het tweede deel van het pakket zijn de formules niet meer, of lastig, af te leiden uit een situatie. Het zijn gewoon formules, die een verband aangeven dat niet nader wordt omschreven. Daarbij blijft, als controlemogelijkheid bij het redeneren, het maken van tabellen en grafieken wel staan. Het gaat er uiteindelijk om dat de leerlingen hun conclusies trekken op basis van de structuur van de formules, echter wel met behoud van de diverse controlemogelijkheden.

Plaats van Winnende Formules in het experimenteel programma

Het pakket is bedoeld voor begin 3^{e} leerjaar MAVO. De leerlingen in het experimenteel programma hebben dan de functielijn-pakketten "Grafiekentaal", "Hoe langer hoe meer" en "Regelrecht" al gehad en verder enige eenvoudige formules en vergelijkingen in het 2^{e} leerjaar.

De leerlingen gebruiken die kennis tijdens het werken met Winnende Formules. Uit de functielijn is de kennis van de globale grafiek van belang: Je bekijkt de grafiek niet punt voor punt, maar naar wat er gebeurt als de variabele over een heel gebied verandert. Verder moeten de leerlingen in staat zijn om eenvoudige verbanden na enige voorbereiding weer te geven in een formule. In Winnende Formules is die voorbereiding de inhoud van blz. 1 en 2.

Het pakket is prima te behandelen naast het algebraprogramma dat nu nog op de (experimenteer-) scholen draait. Hier en daar is wel een verbinding te leggen, zie daarvoor de bespreking per blz.

De resultaten van het uitproberen van Winnende Formules zullen gebruikt worden bij de verdere ontwikkeling van een nieuw algebraprogramma voor de huidige MAVO/LBO C/D en voor de komende basisvorming.

Steun bij het onderzoek aan de formules

De rij bouwsels, de tabellen, de grafieken en de kennis van het rekenen en de meetkunde dienen zeker niet alleen als controlemiddel. De leerlingen kunnen, door te kijken naar de tabel, de grafiek of naar de rij bouwsels, op ideeën en redeneringen komen over de formules. Dat is, in deze fase van het leren van wiskunde, zelfs de belangrijkste bron voor hen om tot redeneren over formules te komen. Daarom is het ook belangrijk dat leerlingen in eerste instantie zoveel mogelijk zelf de formules opstellen en daarbij eigen gekozen namen voor de variabele gebruiken.
Het materiaal moet gebruikt worden samen met een computerprogramma dat grafieken en tabellen kan genereren.
Tijdens het uitproberen van het materiaal is gebruik gemaakt van het computerprogramma "Tabel"
Dit programma is geschreven door en te bestellen bij:
Aad Goddijn, OW & OC, Tiberdreef 4, 3561 GG Utrecht.
Indien u met een ander computerprogramma wilt werken, dan zijn de eisen die het materiaal er aan stelt de volgende: het moet

- bij minstens twee formules tabellen en grafieken maken in één assenstelsel;
- diverse benamingen voor de invoervariabele accepteren;
- op eenvoudige wijze veranderingen in de formule toestaan, die veranderingen moeten direkt worden verwerkt in de tabellen en de grafieken;
- op eenvoudige wijze veranderingen in het domein toestaan, waarbij het domein in gelijke stappen wordt doorlopen.

De leerlingen bij wie het materiaal werd uitgeprobeerd, hadden het computerprogramma al eerder uitgebreid tijdens een lesuur kunnen verkennen. De docent liet daarbij de leerlingen experimenteren met verschillende namen voor de variabele en diverse notaties voor formules.
Dit bevorderde de voortgang van het materiaal omdat de leerlingen niet tegelijkertijd de formules moesten onderzoeken èn het computerprogramma moesten verkennen.

Over deze handleiding

Het pakket is in december 1989 in een eerste versie uitgeprobeerd met 4 leerlingen uit een 3^{e} klas van de Radboud-MAVO te Oldenzaal.

Met behulp van deze ervaringen is een tweede versie gemaakt. Deze versie is uitgeprobeerd in een 3^{e} klas MAVO van de GSG Greijdanus te Zwolle. De docent heeft het pakket in die versie ook in de andere 3^{e} klassen MAVO gebruikt.

Veel ervaringen van het uitproberen zijn in deze handleiding neergelegd en dienen vooral om u (de docent) te inspireren bij het gebruik van Winnende Formules.

Voor iedere constructieve opmerking houd ik mij aanbevolen,

Pieter van der Zwaart, SLO, Postbus 2041, 7500 CA Enschede.

Blz. 1

De leerlingen verkennen hier eerst de meetkundige structuur van de bouwsels.
Na de algemene inleiding op het pakket is het zelfstandig of in groepjes doorwerken van deze bladzijde goed mogelijk. De bladzijde moet wel worden afgerond met een klassegesprek waarin de diverse manieren waarop de leerlingen de vragen hebben beantwoord aan de orde komen.

1. De leerlingen moeten even de vorm van de bouwsels verkennen om later uitspraken te kunnen doen over het zwarte en het witte gedeelte apart.

2. Het is de bedoeling dat zij zelf een verbinding leggen met de inhoudsformule voor het aantal witte. Veel leerlingen zeggen hier: "5 lang, 5 breed, 5 hoog. Je rekent uit 5 keer 5 keer 5."

3.a. Sommige leerlingen praten over een stuk van 1 bij 5 bij 5. Zij houden vast aan de inhoudsformule. De meesten zeggen: "Eén stuk is 5 bij 5 blokjes."

c. Die eersten zeggen hier dan ook 1 keer 5 keer 5 en dat 4 keer.

"4 keer" of " * 4" blijft bij veel leerlingen vrij lang achteraan staan, ook als zij formules hebben gemaakt. Geef hun daar ook de ruimte voor en sta er niet op dat zij, volgens conventie, de cijferfactor voorop moeten zetten. De leerlingen kunnen straks gemakkelijker over de formules redeneren, als daar hun eigen formulering staat.

4. Is een herhaling van opdracht 2 en 3. "Even kijken of we het nu echt doorhebben."

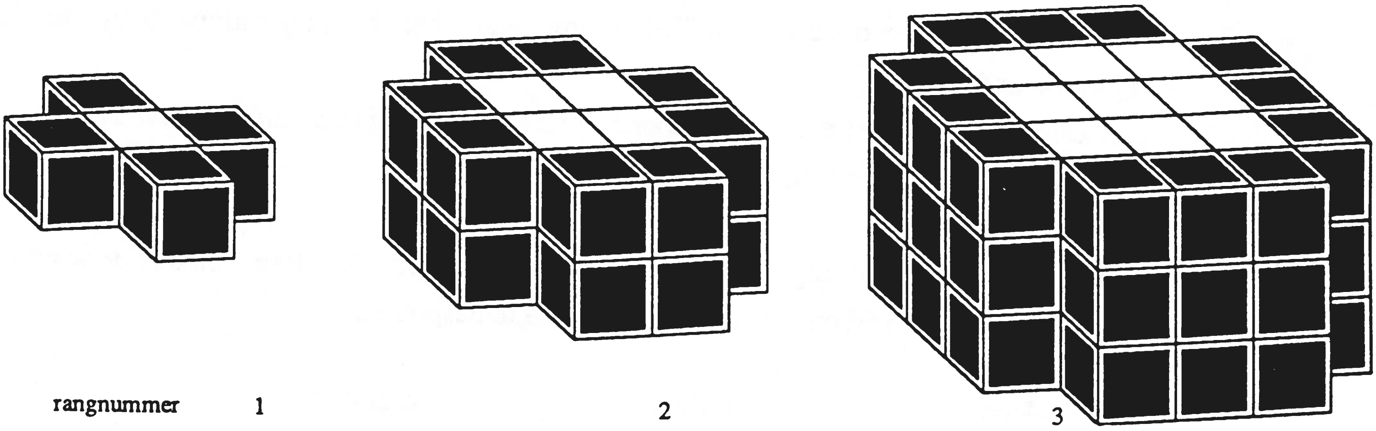
5. Bij vraag b. is een antwoord: "Bij beide 4 * 4 * 4 dus niet acceptabel. Veel leerlingen lossen het probleem op door de bouwsels in gedachten te "ontleden" (Zie sheet 1 en 2).
Daarbij ontleden zij het witte gedeelte ook in plakken: "Bij nummer 3 heb je 3 witte plakken, bij nummer 4 heb je er 4,..."
U kunt sheet 1 en 2 op de overheadprojektor laten zien, daarbij is het wel aan te raden om de leerlingen eerst te laten vertellen wat zij hebben gedaan.

6. De redeneringen kunnen bij deze vraag ver uiteen lopen:
"Nee, want na nummer 4 heeft wit altijd meer plakken en daarvoor minder."
"Nee, want je doet bijvoorbeeld bij nummer 7 voor wit 7 * 7 * 7 en voor zwart 7 * 7 * 4 en dan komt er na nummer 4 voor wit altijd meer uit."
Eén leerling kwam met de suggestie om een grafiek te maken, dan kon je zien welke sneller omhoog ging. De docent zei dat ze dat straks ook gingen doen.

Het spraakgebruik "voor nummer 4" en "na nummer 4" past zeer goed bij het denken in een variabel rangnummer. De docent kan dit denken stimuleren door dit spraakgebruik over te nemen.

In de lengte, de breedte en de hoogte (1)

Hieronder is het begin van een rij bouwsels getekend. Die bouwsels zijn opgebouwd uit zwarte en witte kubussen, volgens een vast patroon. Naarmate je verder komt in de rij worden ze steeds groter, zowel in de lengte, als in de breedte als in de hoogte.



rangnummer 1 2 3

1. Hoe ziet bouwsel nummer 4 er uit?

Je gaat nu bouwsel nummer 5 onder handen nemen.

2. a. Hoe ziet het witte gedeelte van bouwsel 5 er uit?
   b. Hoeveel kubussen zitten daar in en hoe reken je dat uit?

3. Het zwarte gedeelte bestaat uit vier stukken.
   a. Hoe ziet één zo'n stuk er uit?
   b. Hoeveel zwarte kubussen zitten er totaal in bouwsel nummer 5?
   c. Hoe heb je dat uitgerekend?

Nog even kijken naar rangnummer 7:

4. a. Hoe reken je het aantal witte kubussen uit in bouwsel nummer 7?
   b. En hoe bereken je het aantal zwarte kubussen?

5. a. Welk bouwsel heeft evenveel witte als zwarte kubussen?
   b. Kun je dat beredeneren zonder te rekenen?

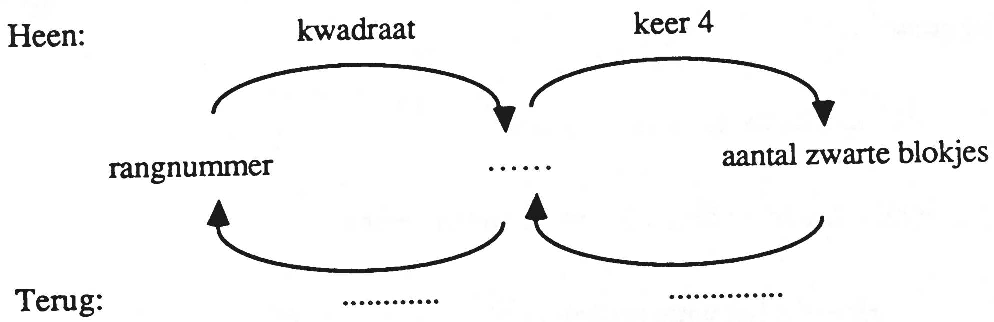
6. Zijn er nog meer bouwsels met evenveel zwarte als witte kubussen?

Blz. 2

Ook deze opdrachten kunnen goed zelfstandig of in groepjes worden gemaakt.
De leerlingen moeten eerst een aantal malen "heen en terug" rekenen, voordat zij straks de formules op stellen.
Ook hier wordt het variabele karakter van het rangnummer steeds genadrukt.

7. Veel leerlingen proberen als volgt: "Bij nummer 4 zijn het er 64, bij nummer 5 zijn het 125, bij nummer 6; 216.
Het komt voor dat leerlingen delen door 3. Vraag dan om bij b. de uitkomst bij 27 te controleren. Daarmee wordt hun fout vanzelf duidelijk.

8. Hier zijn een aantal leerlingen die echt terugrekenen: Eerst delen door 4 en dan de wortel.
Een goede gelegenheid om het volgende schema te bespreken:



Als u de leerling attent wilt maken op het bestaan van de 3^e machts wortel, dan kunt u voor opdracht 7 ook zo'n schema laten zien.

Indien de leerlingen goed vertrouwd zijn met de "machtsnotatie", dan kunnen zij hun antwoorden ook formuleren als bijvoorbeeld 7^3, of als rangnummer-tot-de-derde.

Notatie-afspraak:
Als de leerlingen verderop in het pakket met formules gaan werken, kunnen zij beter voorlopig de machtsnotatie vermijden. Deze notatie werkt namelijk hinderlijk bij het vergelijken van de structuur van de formules.
Er is geen bezwaar tegen om zo nu en dan te laten zien dat de formules ook anders kunnen worden geschreven. In welke mate u dat kunt doen, zal afhangen van de ervaring van de leerlingen in het werken met formules.

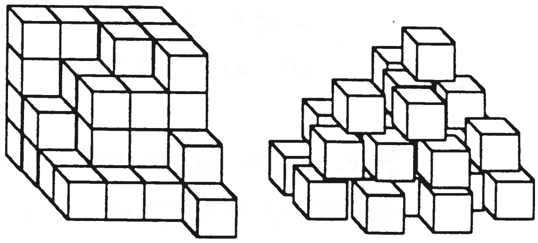
9. Deze opdracht is bedoeld om al enigermate te laten voelen hoe ver een 2^e macht en een 3^e macht op den duur uit elkaar gaan lopen.
De vraag met 1.000.000 witte kubussen wordt i.h.a. door middel van "trial and error" beantwoord. Bij de zwarte kubussen redeneren de leerlingen vaak volgens het bovenstaande schema.

7. Nog steeds dezelfde rij:
   a. Is er een bouwsel met precies 200 witte kubussen?

   Hier staat een rij getallen:

   100, 1, 40, 27, 512, 16, 0, 1000, 25

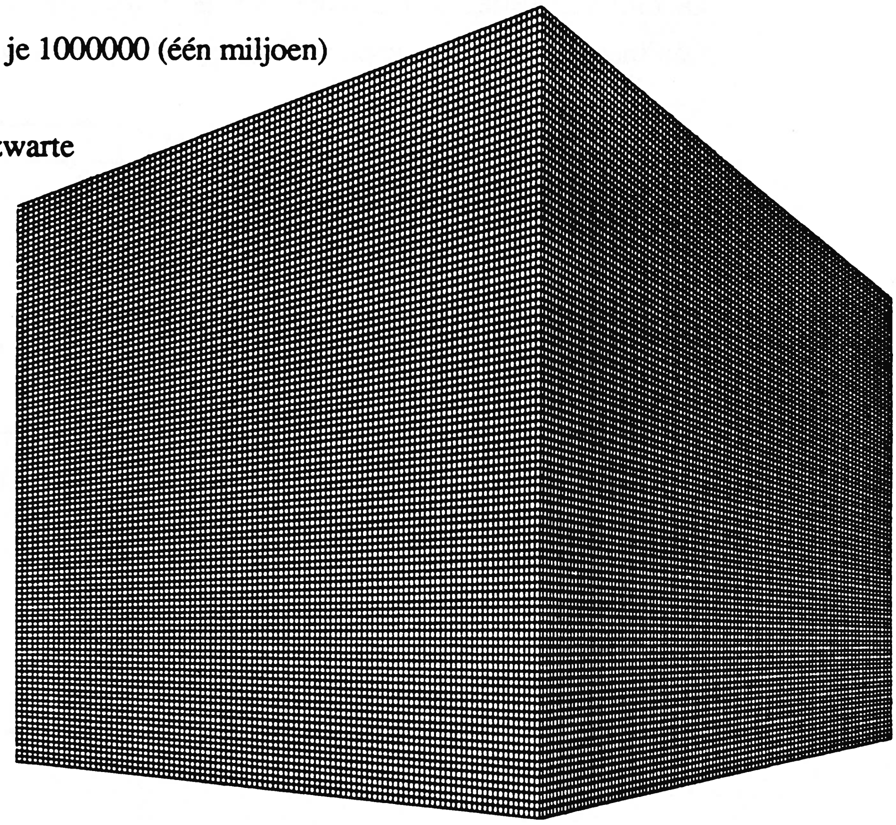
   b. Welke getallen uit dit rijtje zijn wel het aantal witte kubussen van een bouwsel?
   Welke rangnummers horen erbij?
   c. Kun je er nog een stel noemen?
   d. Hoe bereken je die getallen?



Zou het precies uitkomen met 200?

8. a. Is er een bouwsel met precies 200 zwarte kubussen?
   b. Welke getallen zijn het aantal zwarte kubussen van een bouwsel?
   100, 1, 40, 27, 512, 16, 0, 1000, 25
   Welke rangnummers horen er hier bij?
   c. Weet je er nog meer?
   d. Hoe bereken je hier die getallen?

9. a. Bij welk rangnummer heb je 1000000 (één miljoen) witte kubussen nodig?
   b. Heb je dan ook 1000000 zwarte kubussen nodig?
   Of is dat eerder of later?



10.a. De leerlingen produceren twee verschillende antwoorden:
lengte * breedte * hoogte en **rangnummer * rangnummer * rangnummer** of afgekort **l * b * h**, resp. **r * r * r**.

Heel veel leerlingen denken sterk in de meetkundige achtergrond. Ook degenen die rangnummer in het antwoord gebruiken. Degenen die lengte, ... gebruiken zijn gemakkelijk bij te sturen door hun nog een keer de vraag goed te laten lezen.

10.b. Antwoorden **lengte * breedte * 4** of **rangnummer * rangnummer * 4**.
Net als bij het rekenen schrijven de leerlingen hier vrijwel zonder uitzondering de factor 4 achteraan. Ik zou weer zeggen: "Rustig laten staan." De observaties bij het uitproberen gaven duidelijk aan dat de leerlingen het zelf uitermate onveilig vonden als zij met formuleringen aan de slag moesten, die niet van hunzelf waren.
Na een poosje nemen de leerlingen wat meer afstand van hun eigen formuleringen. En dan is herformuleren geen probleem.

11. De bedoeling is om te benadrukken dat de naamkeuze voor de variabele in een formule vrij willekeurig is.

De formule die de leerlingen opstellen geeft toegang tot het computerprogramma.
Daarmee is meteen een goede reden gegeven om formules te maken.

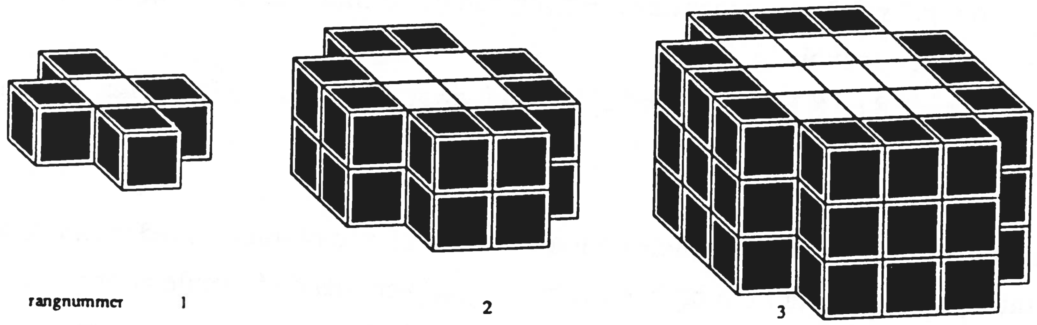
Tijdens het uitproberen startte het programma "Tabel" met deze kop:

r	4 * r * r	
0	0	
1	4	

4 * r * r is bewust gekozen. De leerlingen worden zo geconfronteerd met een andere formulering dan de hunne. Sommigen veranderen de formule in de computer, anderen veranderen hun eigen formule en weer anderen gebruiken beide formuleringen een poos naast elkaar.
Het gebruik van deze twee formuleringen naast elkaar levert geen enkel probleem op. Alle vragen zijn met **4 * r * r** even goed te beantwoorden als met **r * r * 4**.

10. a. Zeg met een formule hoe je met behulp van het rangnummer, het aantal witte kubussen uitrekent.
    b. Maak ook zo'n formule voor het aantal zwarte kubussen.

11. a. Hoe heb jij het rangnummer in je formules genoemd?
    b. Zijn er andere namen mogelijk?



Je gaat nu de computer gebruiken.

12. Zet je formules in het programma.
    Bekijk de tabellen en de grafieken.

13. Kloppen jouw antwoorden op blz. 1 en 2 met die van de computer?

Blz. 4
De leerlingen gaan met andere formules werken. Dat gebeurt eerst nog (t/m blz. 7) door de situatie te veranderen. Pas na blz. 7 wordt het de bedoeling dat leerlingen hun conclusies over de formules trekken aan de hand van de vorm van de formules, met alleen de steun van tabel en grafiek.

14. Deze vraag is bedoeld om de leerlingen de ruimte te geven voor allerlei redeneringen die niet direkt met de formules te maken hebben, zoals de redeneringen met de plakken bij opdr. 5.

15.a. Tijdens het uitproberen verschenen hier zeer gevarieerde antwoorden voor zwart:
r * r * 4 * 2, 4 * r * r * 2, r * r * 8, 8 * r * r.
r * r * 4 * 2 was de formule voor de vorige rij, maar dan met twee keer zo veel.
4 * r * r * 2 ook, maar deze leerling had de formule uit het computerprogramma genomen en die verdubbeld.
r * r * 8 en **8 * r * r** "Want er waren 8 zwarte plakken." Maar ook: "Je kunt voor **4 * 2** ook **8** opschrijven."

Iets om na het maken van de hele opdracht met de klas te bespreken. Ieder van de formules is natuurlijk goed. Echter om bij b. en c. het vergelijken met de formule voor wit **r * r * r** te vergemakkelijken heeft de schrijfwijze met alleen de **8** nu een zekere voorkeur.
N. B. In een andere situatie kan de schrijfwijze met de **4** en de **2** juist de voorkeur hebben: Vergelijk

voor zwart:	**8 * r * r**	en	voor zwart:	**4 * r * r * 2**
voor wit :	**r * r * r**		voor wit :	**4 * r * r * r**

b, c. Bij het bespreken van de opdrachten werkt het goed om de formules voor wit en voor zwart op een slimme manier onder elkaar te zetten:

8 * r * r
r * r * r

Daarbij is volgende te zien: Dit gedeelte is verschillend. Dit gedeelte is steeds hetzelfde.

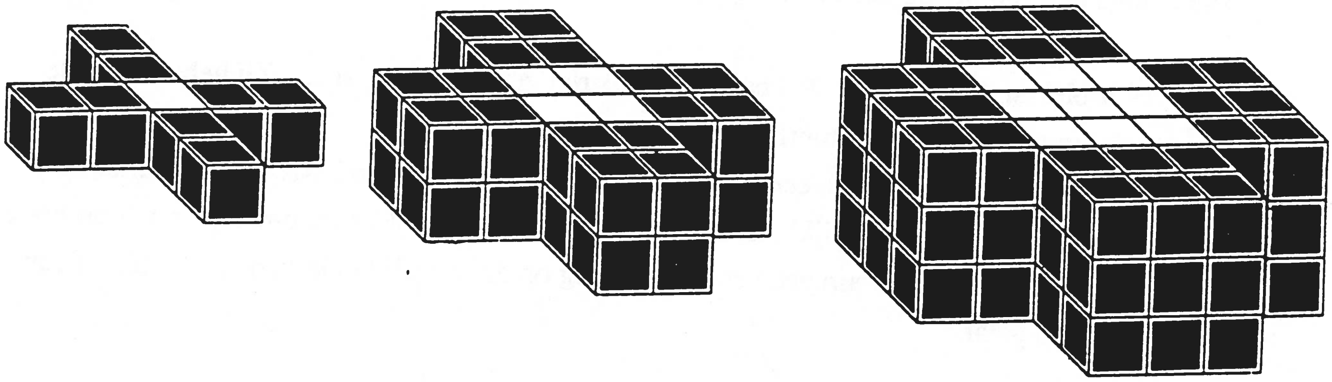
Het substitueren van rangnummers steunt deze redenering:

nr 5	nr 8	nr 12	nr 17695
8 * 5 * 5	8 * 8 * 8	8 * 12 * 12	8 * 17695 * 17695
5 * 5 * 5	8 * 8 * 8	12 * 12 * 12	17695 * 17695 * 17695

16 Hier kan het kijken naar de juiste stukken van de formules veel helpen, bijvoorbeeld:
a. **8 * r * r** **8** moet twee keer zo groot worden dan **r**. Dat is als **r** gelijk is aan 4.
r * r * r

Deze opdracht is later toegevoegd. Er is nog geen ervaring mee opgedaan in de klas.

Hier staat een nieuwe rij bouwsels, met dubbel zoveel zwart.



rangnummer 1 2 3

14. Je hebt nu twee keer zoveel zwart als eerst. Die wint nu zeker, of niet?

15. a. Geef weer formules voor zwart en wit.
    b. Welke kleur wint het op den duur?
    c. Bij welk rangnummer zijn er nu evenveel zwarte als witte kubussen?

16. a. Bij welk rangnummer zijn er twee keer zoveel zwarte als witte?
    b. En wanneer zijn er twee keer zoveel witte als zwarte?
    c. Is er ook een bouwsel met 100 keer zoveel witte als zwarte?

17 Na enig proberen komen de leerlingen er vaak zelf achter dat wit altijd wel moet winnen.
"Die **r** kun je altijd groter maken dan het getal."

9 * r * r wordt vaak niet door leerlingen geaccepteerd, maar het is natuurlijk mogelijk om 3 zwarte lagen langs één kant te leggen en twee langs de andere kanten.

18/19 Hier bleken de leerlingen wel bereid om allerlei getallen toe te staan. Zij hebben wel de neiging om binnen de natuurlijke getallen te blijven.
Eenmaal heb ik leerlingen een negatief getal zien proberen. Op basis van de grafieken verwierpen zij die mogelijkheid. Zwart loopt dan (natuurlijk) naar omlaag en wit omhoog.
Bij het uitproberen kwam geen enkele leerling op de mogelijkheid van een breuk, of een decimaal getal.

20/21 In deze opdrachten moeten de leerlingen echt expliciet maken, hoe zij de structuur van de formules gebruiken. Een redenering zoals bij opdracht 15 staat is hierbij voldoende.

22 Als antwoord is hier te verwachten:

1 * r * r
r * r * r.

"Want dan heb je één zwarte plak."
U kunt natuurlijk aangeven dat **r * r** hetzelfde resultaat oplevert als **1 * r * r**.
Deze opdracht is later te gebruiken als het gemakkelijk is om een **1** toe te voegen aan een formule bij het vergelijken. Bijvoorbeeld bij opdracht 40. f.

Dit is ook een goed moment om in de klas de vraag aan de orde te stellen of bijvoorbeeld in:

9 * r * r
r * r * r

9 het enige getal is waarbij de formules dezelfde uitkomsten hebben. Daarbij moet u dan wel zeggen dat het niet om de blokjes gaat, maar puur om de formules.
Tijdens het uitproberen werd eerst 81 geopperd, maar 9 * 81 * 81 is niet gelijk aan 81 * 81 * 81. En we hadden al eerder opgemerkt dat na 9 wit altijd groter moest zijn.
Daarna werd -9 voorgesteld, maar ook -9 * 9 * 9 is niet gelijk aan 9 * 9 * 9. Uit de klas kwam de opmerking dat dus geen enkel negatief getal kan.
Uiteindelijk kwam 0 als mogelijkheid naar voren, waarop en groot deel van de klas meteen zag dat dat klopte. De rest werd overtuigd met 9 * 0 * 0 is gelijk aan 0 * 0 * 0.
De waarde van deze vraag is, dat de leerlingen even op een andere manier naar de formules moeten kijken: Niet kijken naar de stukken die verschillend zijn, maar slim een getal invullen.

Veranderende formules (1)

Henk zegt: "Als ik in de rij van blz. 1 het zwart 3-dik maak, krijg ik als formule **12 * r * r** en als ik hem nog dikker maak kan ik zelfs **r * r * 400** krijgen."

17. Lukt het om zwart op deze manier te laten winnen?
    Je kunt nog andere getallen nemen.

Ineke kiest voor de formule van zwart **9 * r * r**. Volgens haar kun je ieder getal wel nemen.

18. Zouden er getallen zijn voor de formule van zwart, zodat zwart op den duur wint?

Hier staat een rij pogingen om zwart te laten winnen:

zwart	**9*r*r**	**1/2*r*r**	**8*r*r**	**400*r*r**	**12*r*r**	**4*r*r**	**6000*r*r**
wit	**r*r*r**	**r*r*r**	**r*r*r**	**r*r*r**	**r*r*r**	**r*r*r**	**r*r*r**

19. Kun je aan de formules zien bij welk rangnummer zwart gelijk is aan wit?

20. a. Kun je aan de formules zien welke kleur wint?
    b. Waarom is dat zo?

21. a. Wat gebeurt er als je voor het getal 1 neemt?
    b. Hoe zien de formules er dan uit?

22. Bij alle paren formules voor zwart en wit, heb je steeds een getal gevonden waar ze elkaar inhalen.
    Is er nog een getal waarbij bijvoorbeeld de formules:

    9 * r * r

    r * r * r

    dezelfde uitkomst hebben?

23 Veel gehoord in de klas: "Nee, want zwart is steeds de helft van wit."

24 Leverde geen probleem op. De leerlingen overtuigden elkaar ervan dat bij een getal groter dan 1, zwart altijd wint en bij een getal kleiner dan 1 wit altijd wint.

25 In deze opdracht komt op een rij te staan dat een 3^e macht altijd wint van een 2^e macht. Iets wat best even expliciet gemaakt kan worden in de bespreking.

27/28 Op de rest van de bladzijde komt even het gebied "in de buurt van 0" in beeld.
Daar wint juist de 2^e macht van de 3^e macht. Een onderwerp dat in dit materiaal niet wordt uitgewerkt, maar dat in het nieuwe leerplan zeker zijn plaats zal krijgen.
Er is geen enkel bezwaar tegen als u dat met de klas wel verder uitwerkt.
Dat kan op dezelfde manier als tot dusverre is gedaan bij grote waarden voor **r**.
Als je **r** klein neemt is **4 * r * r** natuurlijk groter dan **r * r * r**. Zet de formules maar weer onder elkaar en kijk naar de gedeeltes die verschillen.

29 Waar leerlingen de opdracht niet begrepen, werden zij op het goede spoor gezet door medeleerlingen. "Je moet hier die **40** vergelijken met **1/2 * r**. Dan zie je zo dat ze bij 80 gelijk zijn en dat daarna de onderste wint."

Het computerprogramma "Tabel" accepteert alleen een notatie zonder een =-teken.
De leerlingen moeten **40 * r * r** intypen en niet **40 * r * r = z.**
De =-notatie wordt in het pakket gebruikt om twee redenen. Ten eerste om bij iedere formule de betekenis aan te geven. Iedere keer schrijven "de formule voor zwart is:" wordt langdradig. Verder is deze notatie wat formeler van karakter dan "de formule voor zwart is" en naar dat formele wil het materiaal juist toe. De tweede reden is dat deze schrijfwijze zeer veel gebruikt wordt in de techniek en de natuurkunde.
Als je werkt met formules, bereken je eerst en daarna schrijf je de uitkomst op. Daarom staan "= **z**", of "= **w**" achteraan.

Het lukt niet om zwart te laten winnen door het getal in de formule te veranderen.
Henk zegt: "Ik probeer deze formule voor zwart: **1/2 * r * r * r**."

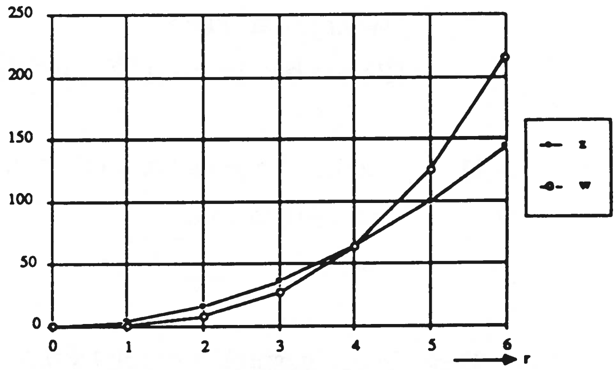
23. Wint zwart als je deze formule neemt?

24. Ook in deze formule kun je het getal veranderen.
Kun je daarmee zwart laten winnen?

In de volgende opdracht kijk je alleen naar de formules voor zwart.

25. Schrijf alle formules die je tot nu toe voor zwart hebt gebruikt nog eens op.
Zet ze op volgorde met de verliezer voorop en de winnaar achteraan.

Voor de meeste formules uit opdracht 25 geldt dat wit op den duur wint.
Toch is wit dan niet altijd bij ieder rangnummer groter. Dat kun je ook in de grafieken zien.



4 * r * r = z
r * r * r = w

26. Wanneer is bij deze formules zwart groter dan wit?

N.B. Bij de formules heb ik "=z" en "=w" gezet zodat je weet welke bij wit en welke bij zwart hoort . "=z" en "=w" moet je in het computerprogramma <u>niet</u> bij de formules zetten.

27. a. Bij welke getallen voor r is zwart hier groter dan wit?

40 * r * r = z
r * r * r = w

b. Kun je dat beredeneren door alleen naar de formules te kijken?

28. a. Welke kleur wint op den duur bij deze twee formules?

40 * r * r = z
1/2 * r * r * r = w

b. Bij welke getallen voor r is de verliezer groter?

Blz. 7

Op deze bladzijde wordt in een andere vorm kort herhaald, wat de leerlingen hiervoor hebben gedaan:

Twee formules opstellen bij een situatie en vanuit de vorm van de formules concluderen dat één van de twee ongeacht de prijs per m of m^2 altijd de ander in zal halen.

29/30 Het opstellen van de formule gaat vaak in stapjes.

Eerst een formule voor de lengte van het hek, daarna een formule voor de prijs.

Ook hier zijn weer redenen om de formules vrij kort op te schrijven en niet zoals een leerling deed: prijs van het hekje is: **(2 * zijde + 2 * zijde) * 10.**

Een prima formule, maar de formulering is niet de meest geschikte om straks te gaan vergelijken met de prijs van het gras.

Op basis van dat argument vormde deze leerling de formule zelf om tot: **zijde * 40.**

Dat ging ongeveer als volgt: "**2 * zijde + 2 * zijde**? Oh ja, het is een vierkant dus is het **4 * zijde**. En **4 * zijde * 10** is hetzelfde als **zijde * 14.**"

"Weet je dat zeker?"

(Beetje beschaamd) "Natuurlijk niet het is **zijde * 40.**"

31 Veel leerlingen geven, in navolging van de vorige bladzijden, ook de lengte aan waarbij wordt ingehaald.

32ev In een gesprek met een leerling kwam hier expliciet naar voren dat de prijs van het gras altijd de prijs van het hek in zal halen. Zelfs bij de formules:

voor het hek: **99998 * zijde**

voor het gras: **0,10 * zijde * zijde**

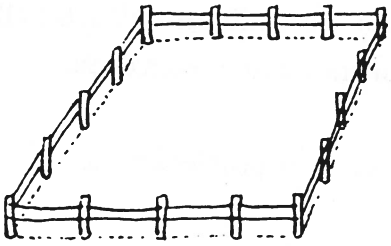
Dat zat volgens hem gewoon in het feit dat er één keer meer "**zijde**" stond.

Deze leerling gaf wel een grens aan, namelijk dat het grasveld nog wel op de aarde moet passen.

In feite wordt op deze (en de voorgaande) bladzijde(n) gespeeld met de parameters. Over dat onderwerp zal nog vervolgmateriaal gemaakt worden. Het is hier nog te vroeg om de parameter expliciet te maken.

Er op of eromheen

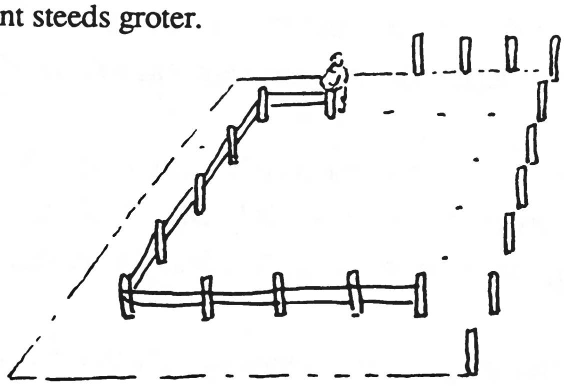
Op een vierkant stukje tuin komt gras
en er komt een hekje omheen
Grasplaggen kosten f 2,50 per m^2 en
een hekje kost f 10,-- per m.



29. Geef een formule waarmee je de kosten voor het hekje uitrekent, als je de zijde van het vierkant weet.

30. Geef ook een formule voor de kosten van het gras.

Je maakt het vierkant steeds groter.



31. Wat kost op den duur het meest het gras of het hekje?

Esmeralda wil een gouden hekje om het grasveld dat kost f 2.499,95 per meter.

32. Zullen nu de kosten voor het gras, de kosten van het hekje inhalen als je een steeds groter vierkant neemt?

33. Is er een hekje te verzinnen dat qua kosten het gras altijd voor zal blijven?

34. Gras zaaien kost f 0,10 per m^2.
Wat zal nu op den duur "het meeste kosten"?

Blz. 8

Op deze bladzijde zijn de formules zodanig gekozen dat het vrijwel onmogelijk is om er situaties bij te verzinnen. De leerlingen zullen het alleen met de structuur van de formules en de steun van tabellen en grafieken moeten doen.

35/36 Levert geen problemen op.

37 Is zeer lastig.
Tijdens het uitproberen besprak de docent deze opdrachten vrij uitgebreid met de klas, nadat leerlingen hun oplossingen op het bord hadden gezet.

a. Hier moet je **3 * l** splitsen:
l + 20
l + 2 * l
Vanaf dit moment was de opdracht weer volkomen helder voor de leerlingen, bij 10 halen ze in en daarna wint de onderste. Op het proefwerk was zo'n vraag ook geen probleem.

b. De docent werkte deze opdracht samen met de klas uit naar alle mogelijke oplossingen:
3 * r * r moet **27** worden, dus **r * r** wordt **9**. Dat lukt als je voor **r** 3 neemt en natuurlijk ook -3. Zijn er nog meer mogelijkheden? Uit de klas kwam 0.

c. Hier liet de docent zien dat je **2 * k * k** kunt splitsen in **k * k + k * k**.
Daarna was het duidelijk voor de leerlingen: **k * k** moest **100** worden.
0 is hier geen mogelijkheid, vul maar in, dan zie je dat er bij de bovenste **+ 100** uitkomt.

d. Deze opgave kan niet met de technieken uit Winnende Formules worden opgelost.
Geen probleem want de grafiek levert duidelijk de oplossingen.
De docent liet zien hoe deze opdracht met de abc-formule kon worden opgelost, de leerlingen hadden uit de methode al kwadratische vergelijkingen gehad.
Later zei een leerling: "De bovenste wint, want daar staat die ene **n** meer en die **- 12** maakt het toch maar minder." Voor deze conclusie is blijkbaar geen ingewikkelde algebra nodig.

Advies: Laat de leerlingen deze opdrachten eerst zelf proberen en bespreek de pogingen met de hele klas. Als u wilt kunt u hierna de leerlingen meteen de opdrachten 40 en/of 41 laten maken.

U kunt dit moment ook aangrijpen om enige oefeningen in het herschrijven van formules te laten doen. Bijvoorbeeld schrijf **3 * k³** op zoveel mogelijk verschillende manieren.
Over het herschrijven van formules en het uitbreiden van oplossingsmethoden moet nog materiaal gemaakt worden.

35. Kun jij je bij deze formules een kubus-, een tegelpatroon, of een andere situatie voorstellen?

$$120 * r * r * r = w$$
$$6 * r * r * r * r = z$$

36. Welke wint op den duur, w of z?
En waar wordt ingehaald?

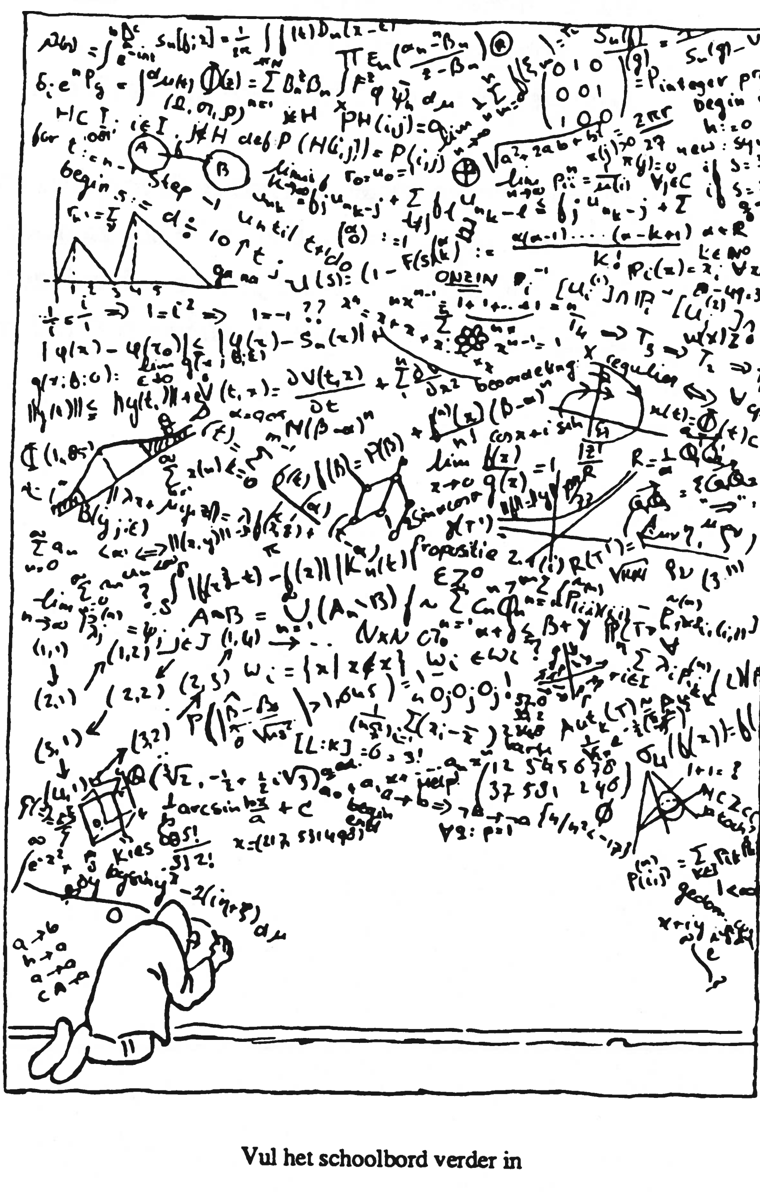
37. Onderzoek ook de volgende paren formules

a. $l + 20 = g$
$3 * l = h$

b. $3 * r * r * r * r = w$
$27 * r * r = z$

c. $k * k + 100 = p$
$2 * k * k = q$

d. $n * n = w$
$8 * n - 12 = z$



Vul het schoolbord verder in

38 Dit is een zeer vrije opdracht.
De leerlingen tonen zeer veel variatie in hun antwoorden.
Enkele leerlingen komen alleen tot een naamsverandering, zoals **p * p** en **4 * p**. Dat is natuurlijk niet de bedoeling, het moeten echt nieuwe formules zijn.

Het tekenen van de grafieken wil nog wel eens lastig zijn. Tijdens het uitproberen werden goede grafieken op het beeldscherm ook geaccepteerd.

Een tweetal leerlingen had het volgende stel formules:

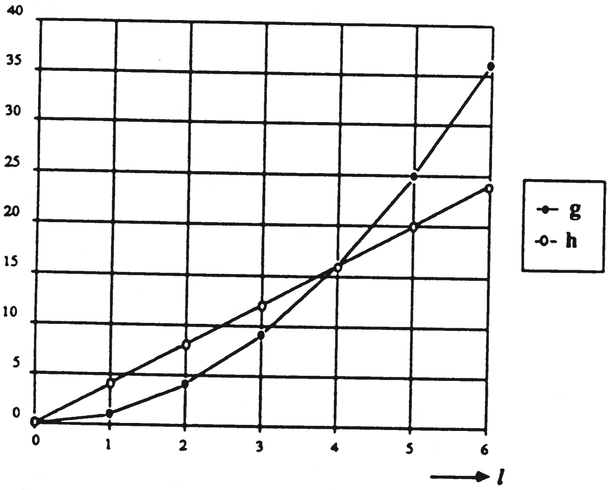
n * n * 4 * 4

4 * n * 16

bij navraag zat daar de volgende constructie achter:
"Wij deden onder eerst * 16.
Daarna moest de bovenst even groot worden bij 4.
Wij probeerden eerst *4.
Dat was niet goed, boven moest natuurlijk ook *16, dus nog een keer *4 erbij."

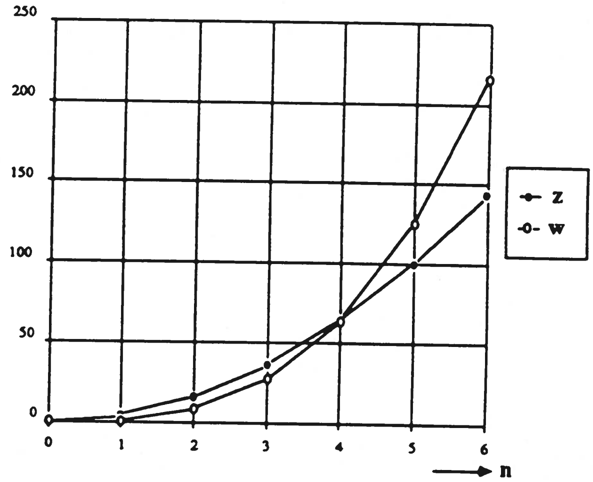
Deze leerlingen wisten wel hoe ze de formules korter op moesten schrijven. Dat wilden ze echter liever niet doen, want zo konden ze nog zien hoe zij er aan waren gekomen.
Deze vrijheid moet er ook zijn voor de leerlingen. Het zelf construeren geeft hun zeer veel aanleiding en animo om te spelen met allerlei formuleringen en herformuleringen.

Hieronder staan grafieken die horen bij formules, die je al eerder hebt gezien.
De grafieken snijden elkaar als je 4 invult voor **n** of *l*.



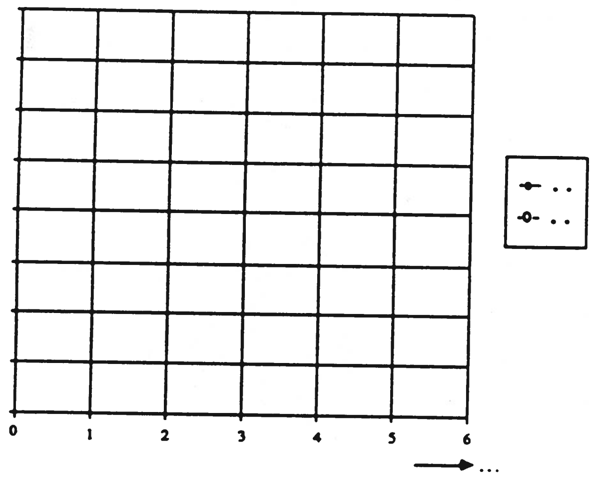
$l * l = g$

$4 * l = h$



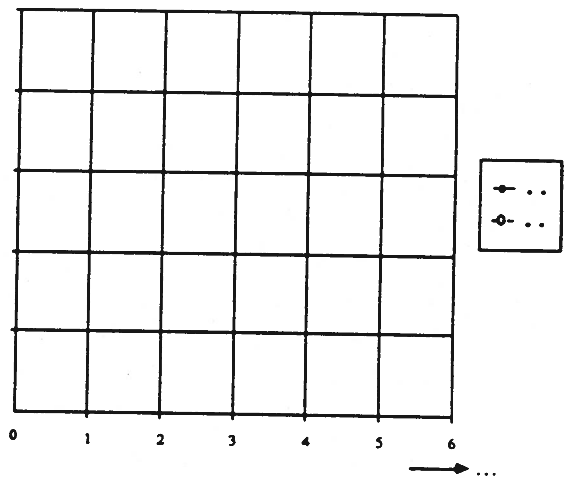
$4 * n * n = z$

$n * n * n = w$



.... = ..

.... = ..



.... = ..

.... = ..

38. Teken in de lege roosters steeds twee grafieken, die elkaar snijden als je 4 invult in de formules. Zet de formules er onder.
Je kunt de computer gebruiken om formules en hun grafieken op te sporen.

Blz. 10 en 11

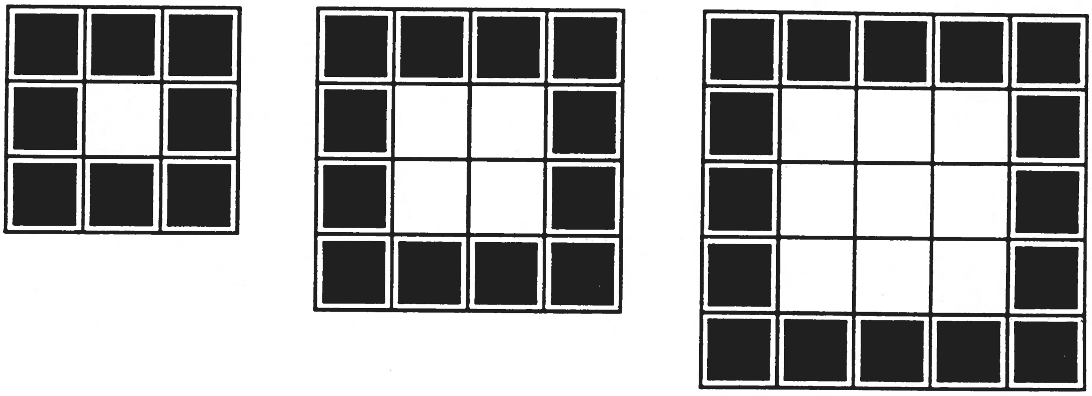
Deze bladzijden zijn bedoeld om al het voorgaande nog eens rustig te kunnen oefenen.
Opdracht 42 is natuurlijk facultatief.
U kunt naar eigen behoefte de opgaven verder aanvullen met andere opdrachten van dit type.

Oefeningen 1

leerlingentekst, blz. 10

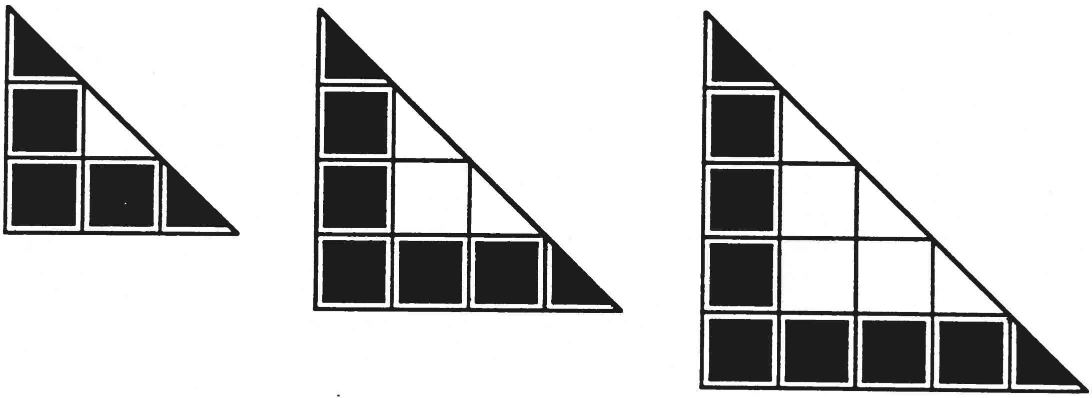
Bij de volgende opdrachten kun je alle "gereedschappen" gebruiken waarmee je in deze werkbladen hebt gewerkt: de patronen (voor zover van toepassing), de tabellen, de grafieken, de formules, de computer en bovenal natuurlijk je gezonde verstand.

39. a. Geef bij dit patroon formules voor het aantal zwarte en het aantal witte tegels. Welke kleur wint het op den duur?



rangnummer 1 2 3

b. Doe hetzelfde bij dit patroon.



rangnummer 1 2 3

Oefeningen 2

40. Zoek steeds uit welke op den duur wint, **z** of **w**. Geef ook aan vanaf welke **r** de winnaar het grootst is.

a. $2 * r * r * r = z$
$6 * r * r = w$

b. $3 * r + 12 = z$
$5 * r = w$

c. $3 * r * r = z$
$r * r + 50 = w$

d. $5 * r = z$
$8 * r + 12 = w$

e. $r * r * r * r = z$
$1/4 * r * r * r = w$

f. $r * r = z$
$1/4 * r * r * r = w$

41. En hier nog een stel met andere namen:

a. $4 * n * n * n * n * n = a$
$256 * n * n * n = b$

b. $4 * n * n * n * n * n = a$
$256 * n * n = b$

c. $x * x * x + 8 * x = p$
$2 * x * x * x = q$

d. $7 * d + 15 = k$
$5 * d + 23 = m$

c. $0{,}1 * p * p = b$
$2 * p = k$

d. $0{,}2 * l * l * l = g$
$1000 * l * l = h$

42. Maak een opgave voor een proefwerk over deze werkbladen.