Examen VWO

2015

tijdvak 2
woensdag 17 juni
13.30 - 16.30 uur

wiskunde A (pilot)

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 21 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 82 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

VW-1024-f-15-2-o

OVERZICHT FORMULES

Differentiëren

naam van de regel	functie	afgeleide
somregel	$s(x)=f(x)+g(x)$	$s'(x)=f'(x)+g'(x)$
productregel	$p(x)=f(x)\cdot g(x)$	$p'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
quotiëntregel	$q(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$q'(x)=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
kettingregel	$k(x)=f(g(x))$	$k'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$ of $\dfrac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}\cdot\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$

Logaritmen

regel	voorwaarde
${}^{g}\log a+{}^{g}\log b={}^{g}\log ab$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ b>0$
${}^{g}\log a-{}^{g}\log b={}^{g}\log\dfrac{a}{b}$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ b>0$
${}^{g}\log a^{p}=p\cdot{}^{g}\log a$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0$
${}^{g}\log a=\dfrac{{}^{p}\log a}{{}^{p}\log g}$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ p>0,\ p\neq 1$

Lepelaars

Een lepelaar is een vogel met een lepelvormige snavel die in Nederland onder andere op de Waddeneilanden voorkomt. Sommige lepelaars hebben ringen om hun poten, waardoor onderzoekers ze individueel kunnen volgen.

foto

Lepelaars die geringd worden, krijgen zes smalle ringen om, drie om elke poot. Hierbij gelden de volgende regels:
– één van de zes ringen is een zilverkleurige ring;
– de andere vijf ringen kunnen voorkomen in acht andere kleuren, waarbij dezelfde kleur ook vaker gebruikt mag worden;
– één van die vijf gekleurde ringen heeft een uitsteeksel, een 'vlag'.

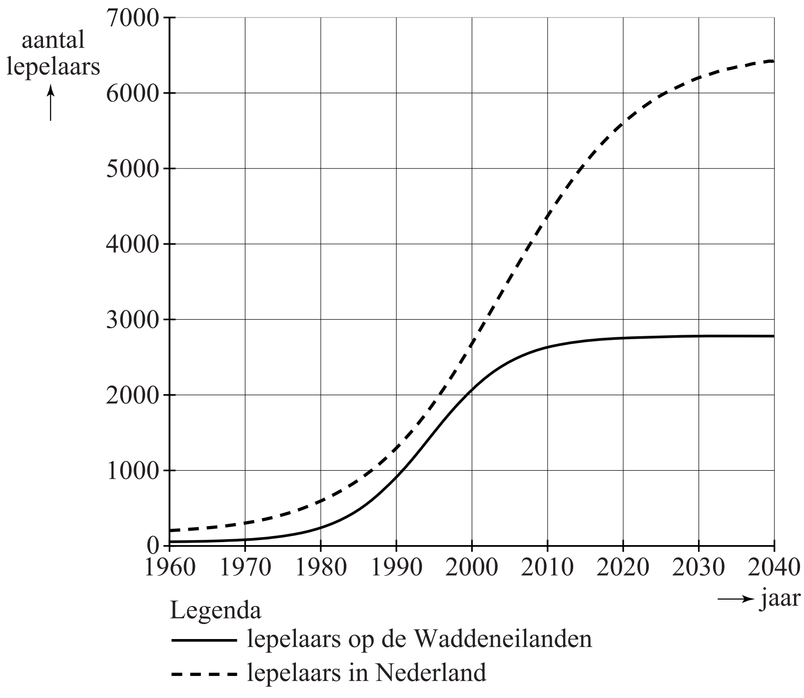
4p **1** Bereken op hoeveel verschillende manieren een lepelaar volgens deze regels geringd kan worden.

Onderzoekers hebben op basis van waarnemingen modellen opgesteld voor het aantal lepelaars in Nederland. In de figuur zie je de aantallen lepelaars voor de Waddeneilanden en voor heel Nederland in de periode 1960-2040. De figuur staat ook op de uitwerkbijlage. De doorgetrokken grafiek is een model voor het aantal lepelaars op de Waddeneilanden en de gestippelde grafiek voor het totale aantal lepelaars in Nederland.

Uit de figuur kun je aflezen dat het percentage van het totale aantal lepelaars in Nederland dat op de Waddeneilanden leeft, in de periode 1980 tot 2000 toegenomen is tot meer dan 75%.

We kijken naar het percentage van het totaal aantal lepelaars in Nederland dat op de Waddeneilanden leeft.

figuur



3p **2** Onderzoek met behulp van een redenering aan de hand van de figuur of dit percentage in de periode 2010-2040 toeneemt of afneemt.

In de periode 1980-2000 groeide het aantal lepelaars op de Waddeneilanden bij benadering exponentieel. In 1980 waren er ongeveer 200 lepelaars op de Waddeneilanden en in 2000 ongeveer 2100. Op basis van deze gegevens kun je een formule opstellen voor deze exponentiële groei. Met deze formule is het aantal lepelaars op de Waddeneilanden in 2010 te voorspellen.

5p **3** Stel deze formule op en bereken het verschil tussen het aantal lepelaars op de Waddeneilanden in 2010 volgens deze formule en volgens het model in de figuur. Rond je antwoord af op honderdtallen.

Een betere benadering voor het aantal lepelaars op de Waddeneilanden geeft de volgende formule:

$$N(t) = \frac{2780}{1 + 12{,}9 \cdot 0{,}834^t}$$

Hierin is N het aantal lepelaars en t de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 maart 1980.

De grafiek van N is eerst toenemend stijgend en daarna afnemend stijgend.

6p **4** Toon aan dat de afgeleide van N gelijk is aan $N'(t) = \dfrac{6510 \cdot 0{,}834^t}{\left(1 + 12{,}9 \cdot 0{,}834^t\right)^2}$ en bereken vervolgens met behulp van deze afgeleide in welk jaar de grafiek van N overgaat van een toenemende stijging naar een afnemende stijging.

Volgens de bovenstaande formule van $N(t)$ nadert het aantal lepelaars op de Waddeneilanden op den duur de grenswaarde 2780.

5p **5** Leg uit hoe die grenswaarde uit deze formule volgt en bereken in welk jaar het aantal lepelaars op de Waddeneilanden volgens deze formule voor het eerst minder dan 5% verschilt van de grenswaarde.

Bloedalcoholpromillage

Het drinken van alcohol beïnvloedt de rijvaardigheid negatief. Het alcoholpromillage in het bloed hangt af van de hoeveelheid genuttigde alcohol, van de tijd die verstreken is sinds het nuttigen van de alcohol en van persoonlijke factoren zoals lichaamsgewicht en geslacht.
De hoeveelheid genuttigde alcohol drukken we uit in a, het aantal glazen alcoholische drank met een vaste hoeveelheid alcohol per glas.

Het bloedalcoholpromillage P voor vrouwen kunnen we berekenen met de volgende formule:

$$P = 13,33 \cdot \frac{a}{G} - 0,15u$$

Hierbij is G het gewicht van de vrouw in kg en u het aantal uren na consumptie van de alcohol. In Nederland is het verboden om met een bloedalcoholpromillage van meer dan 0,5 aan het verkeer deel te nemen.

Een vrouw drinkt 5 glazen alcoholische drank. Volgens de formule mag zij na 4 uur weer aan het verkeer deelnemen.

3p **6** Bereken het minimale gewicht van deze vrouw.

Sinds 2006 geldt voor nieuwe bestuurders een strengere norm: gedurende de eerste vijf jaar nadat je je rijbewijs hebt ontvangen, mag het bloedalcoholpromillage maximaal 0,2 zijn.
Een vrouw van 70 kg heeft drie maanden haar rijbewijs. De nieuwe norm betekent dat ze minder alcoholische drank mag drinken als ze aan het verkeer wil gaan deelnemen dan in de situatie vóór 2006.

4p **7** Bereken hoeveel glazen zij door de nieuwe norm minder mag nuttigen als ze direct na het nuttigen van de alcohol aan het verkeer wil deelnemen. Rond je antwoord af op halve glazen.

Er wordt beweerd dat zware vrouwen 'beter tegen alcohol kunnen'. Dat zou betekenen dat bij gelijkblijvende waarden van a en u het alcoholpromillage kleiner is als het gewicht groter is. Dit is inderdaad het geval. Je kunt dat concluderen met behulp van alleen de formule, maar ook met behulp van de afgeleide $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}G}$.

4p **8** Toon aan dat op grond van alleen de formule en op grond van de afgeleide geconcludeerd kan worden dat zware vrouwen 'beter tegen alcohol kunnen'.

Hoe lang het duurt voordat een vrouw na het drinken van alcohol weer aan het verkeer mag deelnemen, is afhankelijk van haar gewicht, het aantal gedronken glazen alcohol en het toegestane promillage.

Om deze tijd te bepalen, kun je de formule $P = 13,33 \cdot \frac{a}{G} - 0,15u$ herleiden tot de vorm $u = \frac{6,67(13,33a - PG)}{G}$.

4p **9** Laat deze herleiding zien.

Eén tegen honderd

Eén tegen honderd is een populair televisiespelletje. Eén kandidaat speelt tegen 100 tegenspelers. Er wordt een vraag gesteld die eerst alle tegenspelers via een kastje beantwoorden. Daarna beantwoordt de kandidaat de vraag. Is zijn antwoord goed dan krijgt hij een bedrag voor elke tegenspeler die de vraag fout beantwoordde.
Deze tegenspelers doen daarna niet meer mee. Zij zijn 'weggespeeld'.
Het spel gaat verder met de overige spelers met de volgende ronde: er wordt weer een vraag gesteld. Dit gaat door tot de kandidaat een fout antwoord geeft of er geen tegenspelers meer over zijn.

Bij iedere vraag geldt het volgende: het bedrag dat per weggespeelde speler door de kandidaat tijdens de betreffende ronde gewonnen wordt, is gelijk aan € 50 000 gedeeld door het aantal nog meespelende tegenspelers. Dus als er nog 50 tegenspelers over zijn, is elke tegenspeler € 1000 waard. Zijn er dan 6 die het antwoord fout hebben, dan voegt de kandidaat € 6000 toe aan zijn totaalbedrag en speelt hij verder tegen de overige 44 spelers. Alle berekende bedragen worden voortdurend op gehele euro's afgerond. We gaan er in deze opgave van uit dat de kandidaat op alle vragen het goede antwoord weet en we zien af van andere regels van het spel.

4p **10** Bereken hoeveel een kandidaat in totaal wint als hij in vijf rondes elke keer 20 tegenspelers wegspeelt.

In een bepaalde spelsituatie zijn er nog vier tegenspelers over. Die kan onze kandidaat in één keer wegspelen. Hij kan ze ook één voor één wegspelen.
Het maakt voor het te winnen bedrag niet uit of er beurten tussen zitten waarbij geen tegenspelers worden weggespeeld. Zo levert 0-0-0-4 hetzelfde op als 0-4 en ook als 4. We noteren dat allemaal als 4.

Eén voor één wegspelen (1-1-1-1 dus) van deze vier tegenspelers levert veel meer op dan de vier spelers in één keer uitschakelen.

3p **11** Bereken dat verschil in opbrengst.

Er zijn nog meer mogelijkheden om ze weg te spelen dan deze 4 en 1-1-1-1. We gaan er daarbij van uit dat er in elke ronde minstens één tegenspeler wordt weggespeeld.

3p **12** Bereken hoeveel verschillende mogelijkheden er in totaal zijn om de laatste vier tegenspelers weg te spelen.

Het lukt de kandidaten niet vaak alle tegenstanders weg te spelen. Maar als ze winnen, blijken ze altijd minstens € 50 000 te winnen[1].

3p **13** Leg uit waarom een winnaar altijd minstens € 50 000 wint.

Door per ronde steeds één speler weg te spelen, wint de kandidaat het maximale bedrag. In de tabel zie je hoe het totaalbedrag bij dit spelverloop oploopt. Ook hierbij zijn alle bedragen steeds tussentijds op hele euro's afgerond.

tabel

ronde n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
aantal spelers bij begin van ronde	100	99	98	…	…	…
waarde van de in deze ronde weggespeelde speler	500	505	510	…	…	…
totaalbedrag B_n na ronde n	500	1005	1515	…	…	…

3p **14** Bereken het totaalbedrag na ronde 6.

B_n is het totaalbedrag na ronde n als de kandidaat in elke ronde één speler heeft weggespeeld.

4p **15** Stel een recursieve formule op voor het totaalbedrag B_n na ronde n en bereken daarmee het maximale bedrag dat de kandidaat kan winnen. Aan het afronden hoeft in de formule geen aandacht te worden besteed.

noot 1 Dat dit bij het echte televisiespel niet altijd gebeurt, is een gevolg van de andere spelregels waar we in deze opgave dus geen rekening mee houden.

In de zomer zijn de dagen langer dan in de winter. Voor Rome in Italië geldt voor de daglengte in 2014 bij benadering de volgende formule:

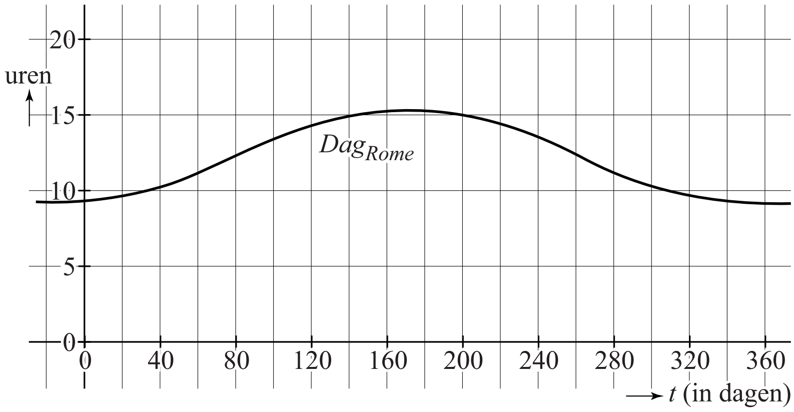
$$Dag_{Rome} = 12{,}14 + 3{,}12\sin(0{,}0172(t-80))$$

Hierbij is $t = 0$ op 1 januari 2014 en t in dagen.

Hierbij is de daglengte het aantal uren tussen de zonsopgang en de zonsondergang.

In de figuur en op de uitwerkbijlage zie je de grafiek die bij deze formule hoort.

figuur



We noemen het 'lekker lang licht' als de daglengte tenminste 14 uur is.

4p **16** Bereken met behulp van de formule op hoeveel dagen in het jaar het in Rome 'lekker lang licht' is.

De lengte van de dag wordt natuurlijk bepaald door de tijden van zonsopgang en zonsondergang. Voor de tijd van zonsopgang geldt voor Rome in 2014 bij benadering de volgende formule:

$$Zonop_{Rome} = 6{,}59 - 1{,}03\sin(0{,}0172(t-80))$$

Hierbij is $t = 0$ op 1 januari 2014 en t in dagen.

2p **17** Bereken de vroegste en de laatste zonsopgangtijd voor Rome.

5p **18** Bepaal een formule voor de tijd van zonsondergang in Rome in 2014. Leg vervolgens met behulp van deze formule uit wat meer invloed heeft op de variatie in daglengte: de verschillen in zonsopgangtijden of de verschillen in zonsondergangtijden.

Als je niet in Rome maar noordelijker woont op het noordelijk halfrond is er een groter verschil in daglengte. Voor een stad als Oslo in Noorwegen geldt in 2014 het volgende:

tabel

dag	**zon op**	**zon onder**	**daglengte**
21 juni	3u53	22u44	18,85
21 december	9u18	15u12	5,90

De langste dag in Noorwegen, 21 juni, is veel langer dan in Rome. Maar de kortste dag, 21 december, is ook veel korter.

Voor de daglengte in uren in Oslo is ook een formule op te stellen, net zoals voor Rome. Hieronder is een begin gemaakt met die formule:

$$Dag_{Oslo} = a + b\sin(c(t-80))$$

Hierbij geldt weer: $t = 0$ op 1 januari 2014 en t is in dagen.

3p **19** Hoe groot zijn a, b en c in deze formule?

4p **20** Onderzoek of het aantal dagen 'lekker lang licht' in Oslo groter is dan het aantal dagen 'lekker lang licht' in Rome.

Let op: de laatste vraag van dit examen staat op de volgende pagina.

Benzineverbruik

Op het bedieningspaneel van haar auto kan mevrouw Hendriks haar benzineverbruik aflezen. Het benzineverbruik wordt aangegeven met een getal. Dat getal stelt voor het gemiddelde benzineverbruik in liters per 100 km. In haar auto wordt dit op elk moment weergegeven over de laatst gereden 5000 km.

Mevrouw Hendriks gebruikt haar auto voornamelijk voor woon-werkverkeer. Daarbij gebruikt ze altijd 8,6 liter benzine per 100 km.

Mevrouw Hendriks ging in het voorjaar van 2014 voor het eerst met haar auto op vakantie. Bij haar vertrek stond de kilometerteller op 36 712 km en de benzineverbruikmeter op 8,6.
Bij haar thuiskomst van vakantie stond de teller op 37 712 en de benzineverbruikmeter op 8,1.

"Deze vakantie heb ik heel wat zuiniger gereden dan over de kilometers 31 712 – 32 712" merkt ze op. "Ik vraag me af hoeveel zuiniger."

6p **21** Onderzoek hoeveel lager het gemiddelde benzineverbruik per 100 km in deze vakantie was in vergelijking met het gemiddelde benzineverbruik over de kilometers 31 712 – 32 712. Geef een duidelijke toelichting.