winter 1989

W 12-16

Freudenthal instituut
Oerarchief

RAAMPLAN

Inhoud

1 Inleiding

voorgeschiedenis

In dit raamplan beschrijven wij de stand van zaken in februari 1989. Het raamplan is een afgeleide van anderhalf jaar denken en werken van het team Wiskunde 12-16 over wiskundeonderwijs in de eerste fase van het voortgezet onderwijs. Als start voor het werk van het team W12-16 is in juni 1987 door de COW[1] een 'Plan' opgesteld; dat is ook de basis waarop het Ministerie van Onderwijs & Wetenschappen subsidie verleent voor het project.
In oktober 1988 is een eerste versie van het voorliggende raamplan - 'Raamplan in aanbouw, zomer 1988' - besproken in de COW. Reacties van COW-leden zijn verwerkt in een volgende versie die speciaal voor de VALO-conferentie in november 1988 is gemaakt: 'Raamplan in aanbouw, herfst 1988'. Reacties op dit stuk zijn door de VALO wiskunde/informatica[2] geordend en aangeboden aan het team W12-16. Deze reacties, tezamen met opmerkingen van docenten van de experimenteerscholen zijn gebruikt bij het schrijven van het voorliggende raamplan.

inhoud

De beweegredenen die geleid hebben tot dit project en de visie op wiskundeonderwijs zoals deze zich aan het ontwikkelen is, staan beschreven in hoofdstuk 2.
Hoewel onze plannen en ons ontwikkelwerk zich op de toekomst richten, vindt u in dit stuk ook veel weerspiegeld van de huidige situatie in het voortgezet onderwijs in Nederland. Het ontwikkelwerk voor de toekomst vindt immers plaats in nauwe samenwerking met een aantal experimenteerscholen. (Zie hoofdstuk 3 voor de plaats van de experimenteerscholen in het project en de werkwijze van het team W12-16.) In hun diversiteit vormen de experimenteerscholen een redelijke doorsnede van het huidige voortgezet onderwijs in ons land. Er zijn grote scholengemeenschappen betrokken bij het experiment, maar ook kleine categorale scholen; scholen met verschillende afdelingen van lbo, mavo, havo tot en met vwo. Ook de wijze waarop binnen de experimenteerscholen het onderwijs ingericht is, verschilt van school tot school. Daarmee hangen mogelijkheden en beperkingen samen voor individuele leerlingen wat betreft het vak wiskunde, maar ook voor ons experiment. Er wordt geëxperimenteerd in scholen met brugklassen,

waarin uitsluitend leerlingen zitten die verder zullen gaan binnen één schooltype (mavo, lbo), en met brugklassen waarin de leerlingen min of meer heterogeen geplaatst zijn of dakpansgewijs zijn ingedeeld.

Op twee van de experimenteerscholen zijn ook speciale klassen voor ibo. De ontwikkeling voor het ibo valt buiten de taakstelling van de COW. Voor het ibo is een project van een behoorlijke omvang van de grond gekomen bij de SLO - OWI[3] genaamd - dat loopt tot augustus 1991. Voor onderlinge afstemming van de beide projecten zijn afspraken gemaakt. Twee leden van OWI hebben zitting in de COW.
In hoofdstuk 3 staan ook de huidige examenprogramma's, ideeën over toetsen en voornemens over gebruik van allerhande hulpmiddelen in het wiskundewerklokaal.
In hoofdstuk 4 staan de algemene mathematische onderwijsleerdoelen beschreven. Hoofdstuk 5 gaat over het vlechtwerk van de leerlijnen, de ideeën die er nu zijn over programma-inhouden voor de zeer brede groep van leerlingen van 12 tot 16 jaar. Met de haalbaarheid wordt het team W12-16 voortdurend geconfronteerd in de experimenteerscholen.
In hoofdstuk 6 staat aangegeven hoe gedacht wordt over mogelijkheden van realisering van het eerder beschreven wiskundeonderwijs voor alle leerlingen van 12 tot 16 jaar in een weinig veranderende onderwijsstructuur, waar echter inhouden van onderwijs en toetswijzen wel sterk kunnen veranderen.
In hoofdstuk 7 staat het verband met overige publikaties beschreven zoals het 'Plan', de eindtermen, het nascholingsplan en de leerlingenpakketten.

wiskunde verplicht

Wiskunde als verplicht vak legt een zware druk en verantwoordelijkheid op het project. In het eerste leerjaar, de brugklas, is wiskunde voor alle leerlingen een verplicht vak met drie of vier lesuren in de week; voor een deel van de leerlingen ligt de keuze voor een bepaald schooltype dan al vast, voor de meeste andere leerlingen valt de keuze lbo, mavo, havo, of vwo aan het eind van het eerste leerjaar. Die keuze wordt o.a. bepaald aan de hand van de resultaten die voor de verschillende vakken in het eerste leerjaar behaald zijn. In de huidige situatie is het tweede leerjaar voor sommige leerlingen al het jaar, waarin ze voorbereid worden op de mogelijkheid wiskunde te kiezen dan wel te laten vallen in de verdere schoolloopbaan (mavo, lbo). Bij de lbo-afdelingen hangt de mogelijkheid en de wenselijkheid om wiskunde te kiezen nu nog vaak samen met een te kiezen richting in het derde en vierde leerjaar. Wat precies de effecten zullen zijn van het besluit wiskunde in 1992 verplicht te stellen in de bovenbouw van havo en vwo is op dit moment nog niet te overzien, maar dat dit ook reeds voor '92 een uitstraling zal hebben naar lagere leerjaren en schooltypen als mavo en lbo ligt voor de hand. De actie 'Kies exact' is in dit verband wellicht te beschouwen als een wegbereider voor deze nieuwe besluiten. Voor leerlingen die verder willen en kunnen op havo of vwo is wiskunde gedurende de gehele onderbouw - eerste, tweede en derde

leerjaar - een verplicht vak en komt in de huidige situatie de mogelijkheid om al dan niet wiskunde te kiezen in het pakket pas aan het eind van het derde leerjaar (havo) of aan het eind van het vierde leerjaar (vwo) nog slechts tot 1992 aan de orde.

basisvorming en eindtermen

Bij het maken van een raamplan voor wiskunde spelen niet alleen de huidige schooltypen en de organisatie van het onderwijs een rol, de mogelijke komst van de 'basisvorming' kunnen we niet geheel buiten beschouwing laten, al staat er nog weinig vast over de 'basisvorming'. De COW heeft op verzoek van het Ministerie van Onderwijs & Wetenschappen eindtermen geformuleerd voor het vak wiskunde[4]. Ook voor andere vakken zijn dergelijke eindtermen gemaakt. Het is de bedoeling dat deze eindtermen voor de verschillende vakken een rol spelen bij de besluitvorming over de wet op de basisvorming. Het is geen eenvoudige opgave de plannen voor de basisvorming, die nog niet afgerond zijn en waarover de politieke besluitvorming nog moet plaatsvinden, in ons werk te betrekken.
Er tekent zich wel een aantal hoofdlijnen af. Wij kunnen er bijvoorbeeld van uitgaan dat het vak wiskunde binnen de basisvorming één van de verplichte vakken zal worden. Zo lijkt het ook waarschijnlijk dat de huidige schooltypen gehandhaafd blijven. Maar hoe de toetsing van de basisvorming zal plaatsvinden op basis van de dan bestaande eindtermen staat niet vast; wel is er steeds sprake van toetsing op twee niveaus. In het eindtermenstuk van de COW staat een voorlopige beschrijving van eindtermen voor het vak wiskunde in de basisvorming.
Het team Wiskunde 12-16 (W12-16), dat onder de verantwoordelijkheid van de COW werkt, is bezig met de ontwikkeling van een totaalprogramma voor de eerste fase van het voortgezet onderwijs en het opstellen van een eindexamenprogramma voor mavo/lbo. Het eindresultaat van het ontwikkelwerk, dat in nauwe samenwerking met een aantal scholen verloopt, is de beschrijving van wiskundeonderwijs voor leerlingen van de leeftijdsgroep 12 tot 16 jaar (met uitzondering van de ibo-groep).

wat niet in het raamplan staat

De haalbaarheid, hoe ver kun je komen met bepaalde groepen van leerlingen bij de in hoofdstuk 4 genoemde wiskundige inhouden? Daarover schrijven we hier niet, omdat we daar nu nog veel te weinig van weten.

De haalbaarheid, hoe ver kun je gaan met docenten? Het onderwijsklimaat is voor docenten weinig inspirerend. Echte veranderingen binnen de klas - en daar gaat het uiteindelijk om - zijn alleen mogelijk als docenten daartoe van harte bereid zijn uit overtuiging dat ze bezig zijn met goede veranderingen en als ze beschikken over vaardigheden en kennis die nodig zijn bij deze veranderingen.

Het onderwerp haalbaarheid zal in dit raamplan verder niet meer genoemd worden omdat de praktijk van het experiment op scholen en bij heroriëntering van docenten voortdurend haalbaarheidsoverwegingen afdwingt.

De zwakke leerlingen. Zowel in het onderwijs als in het ontwikkelwerk komen we hier de grootste problemen tegen. Vooral omdat er zoveel externe factoren zijn waar binnen het onderwijs of binnen ontwikkelingsonderzoek niets aan gedaan kan worden. In de afgelopen tijd is opnieuw gebleken hoe weerbarstig de problemen zijn, juist bij de leerlingen die nauwelijks kunnen rekenen, een zwakke taalvaardigheid hebben, grote moeite hebben met het lezen van een tekst.

Juist de verplichting van wiskunde voor deze leerlingen legt een grote verantwoordelijkheid op het maken van een voor hen passend programma, passend in de zin dat ze het aan kunnen maar ook in de zin dat het hen weerbaar maakt in de samenleving.

We schrijven hier niet uitvoeriger over omdat we in dit raamplan niet de indruk willen wekken dat we hierover al enigszins gevorderd zijn in het vinden van oplossingen.

In het werk van W12-16 en in andere publikaties zal veel aandacht zijn voor deze groep leerlingen.

1 COW: Commissie Ontwikkeling Wiskundeonderwijs, ook wel genoemd Commissie Van der Blij.

2 VALO: Veld Advisering Leerplan Ontwikkeling, in dit geval voor wiskunde en informatica.

3 OWI: Ontwikkeling Wiskunde IBO

4 Advies over de voorlopige eindtermen basisvorming in het voortgezet onderwijs.
10 wiskunde (Uitgegeven door het Ministerie van O&W)

2 Achtergronden

De vraag naar de achtergronden van de vernieuwingsplannen kunnen we op twee manieren beantwoorden: we kunnen ingaan op de historische achtergrond en de aanleiding tot de vernieuwing en we kunnen ook op zoek gaan naar de inhoudelijke grondslagen van de vernieuwing.
Beide invalshoeken zullen we hier aan bod laten komen. Voor wat de historische context van de verandering betreft zullen we vooral ingaan op de *argumenten* die voor een aanpassing van het programma pleiten. In het inhoudelijke deel bespreken we de *visie op wiskundeonderwijs* die aan de vernieuwing ten grondslag ligt.

argumenten voor een verandering

Het lijkt wel of het wiskundeonderwijs altijd in beweging is. Ook zonder expliciete overheidsinitiatieven verandert het wiskundeonderwijs continu. We zien dat bijvoorbeeld ook in de schoolboeken voor de eerste fase van het voortgezet onderwijs. Er komen regelmatig nieuwe schoolboeken op de markt en bestaande methoden worden regelmatig vernieuwd. Toch wordt het team W12-16 gevraagd voorstellen te formuleren voor een nieuw leerplan voor het onderwijs aan de leeftijdsgroep 12 tot 16 en voor een nieuw eindexamenprogramma mavo/lbo. Waarom? Om de ontwikkelingen op de schoolboekenmarkt te legitimeren? Of moet er meer veranderen?
Als dit laatste het geval is moet je met goede argumenten komen. Je moet tenslotte goede argumenten hebben als je in deze tijd met een programmawijziging wilt komen. Er is lef voor nodig om docenten lastig te vallen met vernieuwingen in een onderwijs dat sterk onder druk staat van bezuinigingen en maatschappelijke onderwaardering.
Die argumenten zijn er:
Er zijn ontwikkelingen in het onderwijs gaande en ook al gerealiseerd in de programma's in basisschool en bovenbouw vwo/havo. We noemen in dit verband de hewet-wiskunde A en B, de hawex-experimenten en de massale ingebruikname van realistische reken/wiskundemethoden in de basisschool. Waarbij de laatste ontwikkeling aan betekenis wint door de overeenstemming tussen de nieuwe eindtermen voor het basisonderwijs en de doelen van de nieuwe methoden.
Bovengenoemde ontwikkelingen weerspiegelen nieuwe inzichten binnen de samenleving. Wiskundeleerstof is minder vanzelfsprekend, er worden eisen gesteld aan toepasbaarheid van het geleerde en aan de relevantie voor de leerling in

zijn of haar verdere loopbaan. Er is een duidelijke maatschappelijke keuze om de wiskunde dichter bij de leerling te zoeken en daarbij ook te zorgen dat groepen als meisjes en allochtonen aan hun trekken komen.
De veranderingen die door de maatschappelijke ontwikkelingen in gang gezet worden, gaan gepaard met een fundamentele verandering in de kijk op wiskunde en wiskundeonderwijs, waarbij meer nadruk komt te liggen op wiskunde als activiteit.
Deze veranderingen werken al door in het programma in de eerste fase van het voortgezet onderwijs. In de schoolboeken voor het brugjaar en tweede leerjaar is dat goed te zien. In 3 en 4 mavo/lbo kan deze lijn echter niet doorgezet worden, daar dan op de vigerende examenprogramma's voor mavo en lbo aangestuurd moet worden.
In feite zijn veel docenten en ook auteurs op enigszins veilige afstand van het eindexamen - in brugjaar en tweede leerjaar - al een richting ingeslagen die niet strookt met het huidige eindexamenprogramma. Daarna moet echter de bocht genomen worden naar de meer formele wiskunde, op een tijdstip dat veel leerlingen daar nog niet aan toe zijn en sommige al lang. Met name voor de leerlingen van de toekomstige onderstroom is er geen passend programma.
Met de opdracht tot het opstellen van een nieuw eindexamenprogramma heeft het team W12-16 de mogelijkheid nieuwe wegen in te slaan.

visie op wiskunde en wiskundeonderwijs

In de basisschool zien we een ontwikkeling in de richting van toepassingsgericht reken/wiskundeonderwijs. De zogenoemde realistische reken/wiskundemethoden kiezen toepassingssituaties zelfs als bron voor het ontwikkelen van begrippen en vaardigheden. Deze realistische aanpak stemt daarin overeen met de benadering van de wiskunde A in de bovenbouw van het voortgezet onderwijs. Achter deze realistische aanpak gaat een bepaalde visie op wiskundeonderwijs schuil. Deze visie op wiskundeonderwijs hangt samen met een visie op wiskunde en met een visie op het leren van wiskunde.

wiskunde

Wiskunde wordt vaak gezien als een kant en klaar produkt. Wiskundigen hebben ook de gewoonte hun resultaten zo te presenteren.
De documentatie van wiskundige processen is veelal vergelijkbaar met de werkwijze van een Indiaan die zijn sporen uitwist met een tak met bladeren. Het produkt van zijn activiteit is nog goed zichtbaar: de resten van een bison, de nog smeulende as van een blokhut van een beverjager. Hoe hij de bison benaderde,

met wind tegen, is versluierd door de uitgewiste voetsporen. Welke poging pas succes had, is niet meer te achterhalen aan de resten van het dier.

Zo ontstaat een eenzijdig beeld van wiskunde. Aan wiskunde zit tenslotte ook een proceskant.
De wiskunde kan van buitenaf benaderd worden als een min of meer afgerond systeem van afspraken, stellingen en procedures, maar de wiskunde kan ook meer van binnenuit bekeken worden door de bril van wiskundigen. Voor wiskundigen is wiskunde een activiteit. Een typisch wiskundige activiteit is het mathematiseren. Dit houdt in het zo organiseren van bepaalde kennis, dat deze meer wiskundig georganiseerd wordt of op een wiskundig hoger niveau gebracht wordt. Bij zuivere wiskunde gaat het alleen om het organiseren van wiskundige kennis. In de toegepaste richtingen heeft het mathematiseren ook betrekking op niet-wiskundige inhouden. Mathematiseren betekent hier letterlijk verwiskundigen: het probleemveld wordt zo bewerkt dat het binnen de wiskunde gehaald kan worden, opdat de problemen vervolgens met wiskundige middelen opgelost kunnen worden. In het wiskundeonderwijs spreekt men in dit verband over 'horizontaal mathematiseren' - het binnen de wiskunde halen - tegenover het 'verticaal mathematiseren' dat een niveauverhoging binnen de wiskunde bewerkstelligt.
Kenmerkend aan het realistisch wiskundeonderwijs is nu dat men ervan uitgaat dat de wiskunde als systeem geleerd kan worden via de wiskunde als activiteit, met andere woorden: via het mathematiseren.

wiskunde leren
Wanneer wiskunde geleerd wordt als een verzameling van regels, routines en procedures zijn de vragen 'Wat moet ik doen?' en 'Hoe moet ik het doen?' de kernvragen in het leerproces. Het realistische wiskundeonderwijs kiest echter voor een manier van leren die gericht is op het leggen van verbanden en het zien van samenhangen. In dit soort leerproces staan de waarom-vragen meer op de voorgrond.
Men beoogt dat de wiskunde die de leerlingen leren, in het geheugen wordt opgeslagen als een samenhangend geheel van kenniselementen; in de vorm van een cognitieve structuur, schema, of relatienet. Het leren van wiskunde bestaat dan uit het opbouwen, uitbouwen en aanpassen van zo'n relatienet. Dergelijk wiskunde leren vraagt een mentale activiteit van de leerlingen. De leerling construeert als het ware zijn/haar eigen wiskundige kennis. Dat wil zeggen, dat is de bedoeling. Natuurlijk moet het onderwijs daar dan wel op ingericht zijn!

wiskundeonderwijs

Hoe richt je je onderwijs zo in dat het de leerlingen de gelegenheid biedt en liefst ook stimuleert tot het zelf construeren van wiskunde?

In het realistische wiskundeonderwijs hanteert men de volgende principes:
- aansluiten bij het niveau van de leerlingen;
- uitgaan van een fenomenologische analyse van de leerstof;
- het progressief mathematiseren gebruiken voor het opbouwen van de leerstof.

<u>1. niveau</u>

Het onderwijs dient te starten op een niveau waar de gehanteerde begrippen een grote mate van vertrouwdheid hebben voor de leerlingen ('concreet' zijn voor de leerlingen). Alleen vandaaruit kan betekenisvolle kennis opgebouwd worden.

<u>2. fenomenologie</u>

De wiskunde is ontstaan uit het mathematiseren van de werkelijkheid. De didactische fenomenologie gaat op zoek naar die oorsprong door te kijken hoe bepaalde wiskundige begrippen in de werkelijkheid functioneren. Zo worden probleemsituaties gevonden die benut kunnen worden voor het ontwikkelen van 'intuïtieve' noties. Daaruit ontstaan de mentale objecten die de basis voor de te vormen begrippen bieden. De feitelijke begripsvorming dient dan via een re-invention proces te verlopen.

<u>3. progressief mathematiseren</u>

Het re-invention principe verwijst naar de geschiedenis van de wiskunde als inspiratiebron bij het construeren van een leergang. Zo kan de leerling in de gelegenheid gesteld worden de historische ontwikkeling globaal te volgen.

Meestal begint zo'n ontwikkeling met het oplossen van praktische problemen, waarna een proces volgt van generaliseren, schematiseren, formaliseren en algoritmiseren. Het her-uitvinden kan daarom georganiseerd worden als een vorm van progressief mathematiseren: een combinatie van horizontaal en verticaal mathematiseren wordt ingezet om informele, soms omslachtige oplossingsprocedures te verkorten en te veralgemeniseren.
De hantering van het re-invention principe biedt ook de gelegenheid, de leerlingen te laten ervaren dat overal ter wereld wiskunde is uitgevonden, en dat wiskunde geen exclusief Westerse verworvenheid is.

Binnen het realistische wiskundeonderwijs kunnen we verschillende accenten plaatsen. In het W12-16 programma onderscheiden we de volgende hoofdthema's:
- wiskunde is leuk;
- wiskunde is nuttig;
- wiskunde bouw je op.

wiskunde is leuk
Eén van de hoofddoelstellingen van het programma is de leerlingen te laten ervaren dat het leuk kan zijn om wiskunde te bedrijven. Vooral een meetkundige wereldoriëntatie biedt tal van intrigerende problemen die met een bescheiden bagage aan eigen ervaringskennis opgelost kunnen worden. Wel moeten we er dan rekening mee houden dat die ervaringskennis niet voor allen gelijk is. Door een gevarieerde keuze van contexten kunnen allochtone en autochtone meisjes en jongens geïnspireerd worden en daar kunnen allen ook het gevoel opdoen zelf wat te kunnen. Met name voor de zwakkere leerlingen vinden we succesbeleving bij wiskunde belangrijk.

wiskunde is nuttig
Ook de ontdekking, dat de wiskunde die je leert een relatie heeft met de 'gewone werkelijkheid', kan de motivatie van de leerlingen ondersteunen. Andersom mag je van wiskundeonderwijs toch minimaal verwachten dat het je mogelijk maakt eenvoudig wiskundig gereedschap in te kunnen zetten in die praktische situaties waar dat geëigend is. Naast het rekenen denken we hier vooral aan het gebruik van modellen en beschrijvingsmiddelen.

wiskunde bouw je op
In onze beschrijving van een visie op wiskundeonderwijs kreeg de verticale component van het leerproces veel aandacht. Voor veel leerlingen zal een verdere groei in het systeem van de wiskunde echter een minder prominente plaats innemen. Voor hen zullen de wiskundige activiteiten en het opdoen van ervaringen met eenvoudig wiskundig gereedschap belangrijker zijn. Voor de meisjes en jongens die wel meer wiskunde aankunnen zal een programma uitgelijnd moeten worden dat ze in de gelegenheid stelt zo'n groei door te maken. Daarnaast zullen alle leerlingen moeten ervaren dat je binnen de wiskunde voortbouwt op eerdere ervaringen en eerder ontwikkelde kennis. Het gaat dan om de bewustwording van het feit dat je op een gegeven moment dingen nodig hebt die je eerder geleerd of ontdekt hebt.

In onze ideeën over goed wiskundeonderwijs sluiten we zo aan bij:

- Ontwikkelingen in het basisonderwijs
  (dr. A. Treffers: *Three Dimensions*),
- Ontwikkelingen in het kader van hewet
  (dr. J. de Lange: *Mathematics, Insight and Meaning*),
- Ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs aan 12- tot 16-jarigen
  (H. Krabbendam en J. ter Pelle: *Wiskundeonderwijs is nooit af*).

3 Werkwijze van het team W12-16

De opdracht aan het team omvat grofweg drie taken. In de eerste plaats is dat het ontwerpen van een nieuw leerplan voor de eerste fase van het voortgezet onderwijs voor alle leerlingen en voor alle schooltypen, een tweede taak is het beschrijven van het eindexamenprogramma voor mavo/lbo-cd en de derde taak is het opstellen van een passend nascholingsplan. Bij het uitvoeren van deze drie taken wordt samengewerkt met een aantal experimenteerscholen, die nieuwe materialen in de klas uitproberen, adviseren over wat wel en niet haalbaar is en kritisch meedenken.

experimenteerscholen

De A-scholen participeren vanaf augustus 1987 in het project. Zij zullen vanaf voorjaar 1990 leerlingen afleveren die volgens hetzelfde programma, maar met andere opgaven, geëxamineerd zijn. Aanvankelijk zullen de veranderingen in het examen nog beperkt zijn, maar in de loop van de volgende jaren zal steeds meer afgeweken worden van het huidige examen, doordat het nieuwe examenprogramma zich binnen het project steeds duidelijker zal aftekenen. De B-scholen zijn in augustus 1988 betrokken geraakt bij het W12-16-project. Zij zijn, evenals de A-scholen, in de eerste klassen gestart met veranderingen in het eersteklas-leerplan. De planning is erop gericht dat eersteklas-leerlingen van de A- en B-scholen van het schooljaar 1988-89 in het voorjaar van 1992 mavo/lbo-cd-examen gaan doen volgens een vernieuwd eindexamenprogramma. Leerlingen uit deze groep die naar havo/vwo-bovenbouw doorstromen zullen in het jaar 1991-92 in de vierde klas havo of vwo komen, een jaar waarin naar alle waarschijnlijkheid ook op havo-niveau de nieuwe programma's voor wiskunde A en B zijn ingevoerd.

De vijf experimenteerscholen waar het W12-16-project op dit moment mee samenwerkt zijn:

<u>A-scholen</u>

- GSG Greijdanus te Zwolle (vwo, havo, mavo, lto, lhno)
- Radboudmavo te Oldenzaal,
- SG Lunetten te Utrecht (mavo, leao)

<u>B-scholen</u>

- CSG Revius te Deventer (atheneum, havo, mavo, lto, lhno)
- SG Augustinus te Amsterdam (atheneum, havo, mavo, lto, lhno).

Naast deze A- en B-scholen, waar geëxperimenteerd wordt met het oog op het totale leerplan en een veranderend examenprogramma, zijn er met ingang van het schooljaar 1988-89 ook enkele vrouwelijke docenten betrokken bij het project. Deze constructie is mede gekozen om ook hun inbreng te waarborgen, aangezien het aantal vrouwelijke docenten op de vijf experimenteerscholen relatief klein is. Zij participeren vooral in enkele lokale experimenten, zoals het zoeken naar alternatieve toetsvormen en de determinatie- en keuzeproblematiek. Maar er worden ook nieuwe materialen op de scholen van deze docenten uitgeprobeerd. Daarnaast wordt getracht de betrokkenheid van meisjes bij het wiskundeonderwijs te vergroten.
Via deze constructie zijn docenten van de volgende scholen betrokken bij het project:

- RSG Broklede te Breukelen (havo,vwo),
- Don Bosco College te Volendam (vwo, havo, mavo, lhno),
- Nobelschool te Schagen (lhno),
- Het Baken te Almere (vwo, havo, mavo, lbo),
- Barlaeusgymnasium te Amsterdam.

middenniveau

Naast het ontwikkelen van nieuwe leerlingmaterialen in samenwerking met de experimenteerscholen werkt het team aan leerplanbeschrijving op middenniveau. Daarbij denken we aan doelstellingen, leerstofgebieden, leerlijnen, didactiek en invoeringscondities. Door middel van ontwikkelingsonderzoek willen we voortdurend reflecteren op ervaringen met ontwikkelde produkten, ideeën bijstellen, nieuwe noties formuleren en gevonden resultaten expliciteren. Op middenniveau besteden wij ook aandacht aan groepen leerlingen die wat wiskundeprestaties betreft speciale aandacht vragen, zoals meisjes en allochtonen.
Wij zijn niet van plan een volledige methode voor de verschillende schooltypen te ontwikkelen, maar wij richten ons bij het maken van een nieuw programma op 'beschrijving op afstand', waarbij voor bepaalde, vernieuwende onderdelen ook voor uitwerking op leerlingniveau gekozen wordt. Deze keuze is enerzijds ingegeven door noodzakelijke beperkingen die wij onszelf moeten opleggen, anderzijds door het besef dat er op sommige terreinen al uitstekend materiaal beschikbaar is in de bestaande leerboeken voor de eerste fase van het voortgezet onderwijs. Ons ontwikkelwerk zal voorlopig sterk gericht zijn op de derde en vierde klas van mavo en lbo (alle niveaus) en op vernieuwende onderdelen uit de verschillende leerstofgebieden.

trends

Vooral ten behoeve van de A-scholen, waar het examen in 1990 al afwijkend zal zijn, heeft het team trends aangegeven in de ontwikkeling, die mede dienen om de docenten van de A-scholen de weg te wijzen in deze fase van het project. De genoemde trends zijn de volgende:

aansluiten bij ontwikkelingen in het basisonderwijs

We willen aansluiten bij ontwikkelingen in het basisonderwijs op gebied van het reken- en wiskundeonderwijs. Daar is enerzijds een ontwikkeling gaande in de richting van meer realistisch rekenen; rekenen dat betekenisvolle contextsituaties bevat en dat de eigen probleemoplossingen van leerlingen als uitgangspunt voor de didactiek neemt. Anderzijds zijn de verschillen in kennis en vaardigheden tussen leerlingen erg groot geworden. We kunnen er bijvoorbeeld niet zonder meer van uitgaan dat leerlingen de tafels beheersen, laat staan breuken kunnen vermenigvuldigen. In de toekomst is te verwachten dat de reken/wiskundekennis van leerlingen die de basisschool verlaten wat minder uiteenlopend zal zijn.

hawex en hewet

Aan de andere kant van ons project staan de invloedssferen van hewet en hawex; belangrijk hierin is de grote nadruk op toepassingen van de wiskunde. De toepassingen zijn geen extra hoofdstuk achteraf meer; wiskundige technieken worden verkend aan de hand van toepassingsproblemen. Gevolg zal zijn dat er minder nadruk op de zuivere, formele kant van de wiskunde komt en meer aandacht voor informele oplossingsmethoden.

notaties

Notaties moeten hulpmiddelen zijn. Het mag niet zo zijn dat, zoals nu wel eens het geval lijkt, kennis van notaties de rol van wiskundige inhouden overneemt.

minder, maar wel goed

Leerlingen laten ervaren dat ze met een beperkt aantal 'gereedschappen' meer kunnen bereiken dan wanneer ze iedere keer weer met een nieuw 'gereedschap' komen aandragen. Beter één onderwerp goed van verschillende kanten leren kennen en echt leren beheersen dan 'de geur van tien te ruiken'. Er zal veel aandacht moeten zijn voor transfer van het geleerde. Dat zullen we o.a. gestalte geven in relatie met andere vakken.

rekenmachine en computer
De rol van de rekenmachine en de computer wordt groter. De leerlingen zullen zelf wel een rekenmachine hebben en vaak op school met de computer kennis kunnen maken. Wiskunde is naast het ontwikkelen en beheersen van technieken ook het onderzoeken van situaties waarin die technieken gebruikt worden. Het kan onderzoeken van de 'werkelijkheid' zijn, maar ook het verkennen van een simulatie. Dat laatste zal vaak met de computer gaan. Ook in andere opzichten zal de computer een rol gaan spelen, zoals bij het oefenen van sommige vaardigheden, bij het verkennnen van het functiebegrip, bij het werken met variabelen en zeker ook in de meetkunde.

lestijd reserveren
Binnen het programma willen we tijd reserveren voor een invulling die van school tot school verschillend kan zijn. Te denken valt aan tijd voor projecten, een wiskundige bijdrage aan een werkweek, maar ook tijd om iets te doen aan het verzamelen van gegevens in de eigen omgeving, het ordenen ervan en het reflecteren erop. Ook kan in deze tijd aandacht besteed worden aan het werken aan integratie van vakken of aan de actualiteit.

examenprogramma
We hebben ook ten behoeve van de A-scholen de examenonderwerpen uit het vigerende programma van commentaar voorzien en daarmee aangegeven in welke richting de nieuwe ontwikkeling gaat op basis van de hiervoor beschreven trends. In overleg tussen de docenten van de A-scholen, teamleden en COW-leden wordt de weg naar de eerste experimentele examens uitgezet. Er wordt gewerkt aan een bundel met toetsopgaven voor de derde en vierde klassen, waarin de trends gestalte krijgen.

wiskundewerklokaal
In de experimenteerscholen wordt gewerkt aan de realisering van een wiskundewerklokaal. We willen laten zien dat wiskunde naast een denkvak, óók een vak is van proberen en experimenteren. Daarmee willen we ook bereiken dat het niet kinderachtig gevonden wordt om bij wiskunde even iets met je handen te doen. Bij andere schoolvakken is al veel ervaring opgedaan met practica, ervaringen waarmee we bij wiskunde ons voordeel kunnen doen. Daarbij is het van belang dat alle leerlingen voldoende aan hun trekken komen, jongens én meisjes. Dit kan door enerzijds te zorgen voor een brede spreiding in opdrachten en te gebruiken hulpmiddelen en materialen, anderzijds door te kiezen voor een organisatievorm waarbij voorkomen wordt dat jongens automatisch het initiatief

nemen en meisjes in een soort 'secretaresse'-rol terecht komen. Uit onderzoek is gebleken dat dit laatste zich bij natuurkunde-practica vaak voordoet als daar niet expliciet op gelet wordt.
Op de A- en B-scholen is inmiddels geïnvesteerd in de aanschaf van een computer, viewer en printer op een kar. Daarnaast wordt er gewerkt met eenvoudiger spullen als speciaal papier, touw, foto's, kompas, scharen, pritstiften en spiegels.

computer

Een hulpmiddel met in principe veel mogelijkheden voor wiskundeonderwijs is de computer. Er zijn verschillende opzetten denkbaar, variërend van klassikale demonstratie tot leerlingenpractica. Beide vormen stellen hun eigen eisen aan apparatuur en programmatuur. Verder vraagt goed computergebruik in de wiskundeles nogal wat van de docent: specifieke kennis, maar ook organisatievermogen. De voorkennis en houding van leerlingen ten opzichte van computers is zeer divers. Het is belangrijk dat docenten daar goed mee om kunnen gaan, anders dreigt het gevaar dat enkele leerlingen een groot deel van de apparatuur claimen, waardoor de andere niet aan hun trekken komen.
Er wordt geëxperimenteerd met programma's die begripsondersteunend zijn, zoals bijvoorbeeld 'Badkuip' (van de SLO) en met programma's gericht op het oefenen van vaardigheden. Daarnaast worden ook programma's beproefd die aansluiten bij belangrijke delen van de leerstof, zoals een programma om grafieken van functies te tekenen (VU-grafiek). Zo'n programma kan een essentiële rol spelen bij het onderzoeken van een functie; leerlingen kunnen zo een dynamischer beeld krijgen van een functie en gevoel ontwikkelen voor de betekenis van parameters in een functievoorschrift.

toetsen

Op de experimenteerscholen hebben we de ruimte voor een aangepast examen in de jaren 1990 t/m 1992. Daar kan wellicht ook geëxperimenteerd worden met andere toetsvormen, zoals een mondelinge toets, een werkstuk of een verslag maken. Op dit moment worden op scholen waar lokaal geëxperimenteerd wordt, ervaringen opgedaan met alternatieve toetsvormen, waaronder eigen produkties van leerlingen in de vorm van proefwerkopgaven en werkstukken. Dit soort experimenten zijn alleen levensvatbaar als ze ook in het examenjaar terugkeren bij schoolonderzoeken of centraal schriftelijk eindexamen. We zullen er ook naar toe moeten dat zaken die moeilijk puur schriftelijk toetsbaar zijn, zoals bijvoorbeeld computergebruik, in andere vormen bij schoolonderzoeken aan de orde komen.

Het CITO werkt mee aan het maken van toetsen ten behoeve van de experimenteerscholen. We hopen dat in samenwerking zó te doen dat onze doelen die in de 'trends' aangegeven zijn, gehonoreerd worden. Het gaat dan niet alleen om leerdoelen die te maken hebben met cognitieve vaardigheden maar ook om leerdoelen in verband met toepassingen en een wiskundige houding.

4 Algemene leerdoelen

In deze fase van het ontwikkelingswerk is het nog te vroeg om de concrete doelen van het nieuwe programma te kunnen beschrijven. We kunnen wel de algemene doelen formuleren en we kunnen de voorlopige leerstoflijnen schetsen, waarbij we even voorbij gaan aan het feit dat deze leerstoflijnen in het uiteindelijke programma niet los van elkaar maar alleen geïntegreerd voorkomen.
In dit hoofdstuk bespreken we de algemene doelen, de lijnen komen in het volgende hoofdstuk aan bod.

Algemene mathematische onderwijsleerdoelen zijn algemeen in de zin dat ze permanent in het wiskundeonderwijs kunnen worden nagestreefd en derhalve op den duur tot bepaalde leerlingenkwaliteiten kunnen leiden. Deze leerlingenkwaliteiten betreffen algemene vaardigheden, dat wil zeggen, vaardigheden die het totale bereik van de leerinhouden bestrijken en daarom los van die leerinhouden samenvattend en generaliserend worden geformuleerd.

Globaal kan gesteld worden dat de leerling zich allerlei activiteiten eigen dient te maken die betrekking hebben op het kunnen mathematiseren.
Dat wil zeggen dat de leerling:
- relevante gegevens, verbanden en structuren opspoort;
- wiskundige verbanden en structuren construeert;
- vaardigheden in de basisalgoritmen van de verschillende deelgebieden weet te benutten;
- vaardigheden in standaardmethodieken inzet bij toepassingsproblemen;
- zicht heeft op en kan oordelen over allerlei toepassingen van de wiskunde;
- verbindingen legt tussen probleemsituaties en wiskundige begrippen, verbanden en structuren;
- resultaten die verkregen zijn na het oplossen van een probleem, betekenis geeft binnen een context en die kritisch analyseert;
- zich van adequate onderzoeks- en redeneerstrategieën bedient;
- wiskundige isomorfieën in verschillende problemen herkent;
- een model op grond van kritische analyse bijstelt of verfijnt;
- verschillende modellen en oplossingsmethoden integreert en combineert;
- dwarsverbanden legt tussen de diverse leerstofgebieden.

Er zijn allerlei manieren om leerlingen te helpen de kennis, vaardigheden en inzichten te leren verwerven, die in genoemde doelen vervat liggen. Daartoe zullen de leerlingen in het wiskundeonderwijs onder meer de gelegenheid moeten krijgen:

- een wiskundige werkhouding te ontwikkelen, waarbij aan de orde komen:
  - creatief bedenken van oplossingen;
  - flexibel gebruik van aangeleerde kennis en vaardigheden;
  - systematisch, methodisch werken;
  - generaliseren van gegevens;
  - kritisch beoordelen van gegevens en uitkomsten;
  - rekenen in de juiste orde van groottes;
- waardering voor wiskunde op te bouwen, waarbij aan de orde komt:
  - appreciëren van wiskundige werkwijzen;
  - plezier beleven aan wiskundige activiteiten;
  - vertrouwen in eigen wiskundig kunnen opbouwen;
- coöperatief wiskunde te bedrijven.

5 Vlecht

In dit hoofdstuk worden vijf zogenaamd lange lijnen getrokken. Die van:
grafieken, verbanden en functies,
algebra,
meetkunde,
rekenen,
informatie en modellen.
Deze diverse onderdelen worden zo beschreven om duidelijk te maken wat de bedoelde inhouden zijn van het wiskundeonderwijs. De beschrijving heeft als nadeel dat een beeld van een vakjes-wiskunde wordt opgeroepen in plaats van één vak wiskunde. Vandaar de titel 'Vlecht'.
De gedachte van integratie wordt nog eens onderstreept door GWA - geïntegreerde wiskundige activiteiten - op te nemen achter de hier beschreven lijnen. Bij GWA gaat het niet alleen om integratie met andere schoolvakken of kennis- en ervaringsgebieden buiten de wiskunde, het gaat ook om de mogelijkheid tijd te reserveren waarin leerlingen ervaringen kunnen opdoen met actualiteit of projecten.
Een groter nadeel van deze beschrijving is dat de nadruk sterk ligt op nieuwe onderwerpen en dat daardoor de indruk kan ontstaan dat veel van de bestaande onderwerpen die in het wiskundeonderwijs hun nut bewezen hebben niet meer of nauwelijks van belang zijn. Ook kan door de nadruk op nieuwe elementen gemakkelijk de indruk ontstaan dat oefenen, op een rijtje zetten wat een leerling geleerd heeft, lijstjes van kennen en kunnen, in het algemeen consolideren van kennis en vaardigheden, niet meer belangrijk zouden zijn.
Als deze lange lijnen aan elkaar geknoopt worden en de beschikbare tijd langs deze draad gelegd wordt, is er draad over en tijd tekort. In de lange lijnen staan opties, wensen zoals we die nu hebben. Verdere uitlijning kan leiden tot verkorting van de draad. Experimenten kunnen leiden tot noodzakelijke verlenging van de tijd bij een stukje van de draad.
Kortom: de lange lijnen laten zien wat de stand van het denken is en niet hoe de stand van zaken is.

5.1 Grafieken, verbanden en functies

inleiding

In dit leerstofgebied gaat het om het bestuderen van en het opereren met verbanden tussen grootheden in (concrete) situaties. Op dit terrein is al veel werk verzet, met name binnen de SLO en er is al heel wat van terug te vinden in de diverse methoden. Ook hawex en hewet stellen het onderwerp uitvoerig aan de orde. Het team W12-16 borduurt hierop voort en probeert uitbreiding te geven aan dit werk.
We schetsen eerst een overzicht van het leerstofgebied.

functielijn

a. Verbanden tussen grootheden kunnen beschreven worden in woorden, tabellen, grafieken en (woord)formules.
In eerste instantie richten we de aandacht vooral op de eerste drie beschrijvingsinstrumenten. De vragen die we dan stellen, gaan over de interpretatie van informatie, beschreven met genoemde representatievormen, kwalitatief en kwantitatief, over het oplossen van problemen hiermee en over het doen van voorspellingen in concrete of concreet voorstelbare situaties. De (woord)formules komen later aan de orde en dan nog vooral in de hogere stromen.

Tussentijden 1000 m

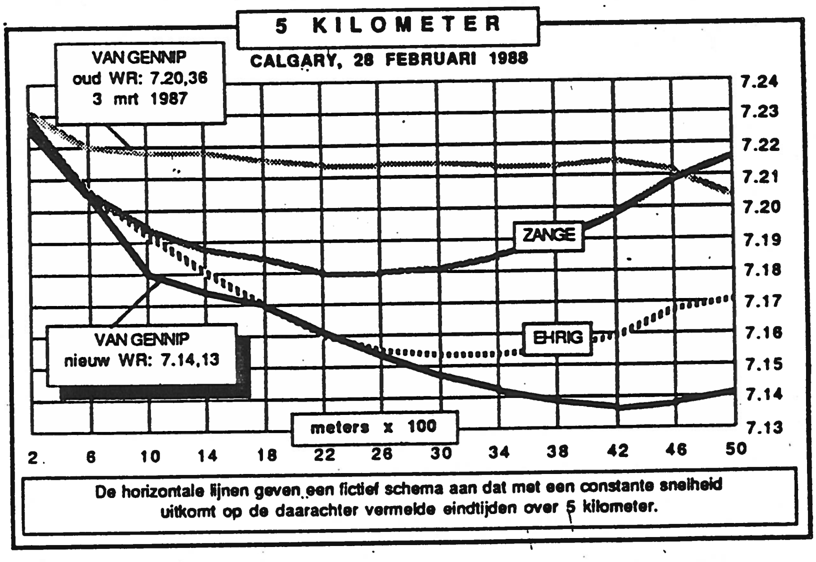
	Rothenburger	Kania	Blair	Kania (oud WR)
200 m	17,98	18.35	18,11	18,52
600 m	46,71	47,22	46,73	47,67
1000 m	1.17,65	1.17,79	1.18,31	1.18,11

Tussentijden 1500 m

	Van Gennip	Kania	Ehrig	Kania (WR)
300 m	26,87	26,28	26,80	26,75
700 m	57.13	56.95	57,16	56,62
1100 m.	1.28.39	1.28.81	1.28,80	1.27,58
1500 m	2.00,68	2.00,82	2.01,49	1.59,30

Tussentijden 5000 m

	Van Gennip	Ehrig	Van Gennip (oud WR)
200 m	20,21	20.39	20,73
600 m	52.31	53,41	54,79
1000 m	1.26,03	1.27,26	1.29,79
1400 m	2.00,58	2.01,24	2.05,02
1800 m	2.35,37	2.35,35	2.39,94
2200 m	3.09.73	3.09,63	3.14,98
2600 m	3.44,16	3.44,32	3.50,18
3000 m	4.18,71	4.19,38	4.25,40
3400 m	4.53.43	4.54,56	5.00.53
3800 m	5.28.24	5.29,92	5.35,69
4200 m	6.03.22	6.05.53	6.11,05
4600 m	6.38.68	6.41,38	6.45,91
5000 m	7.14,13	7.17,12	7.20,36



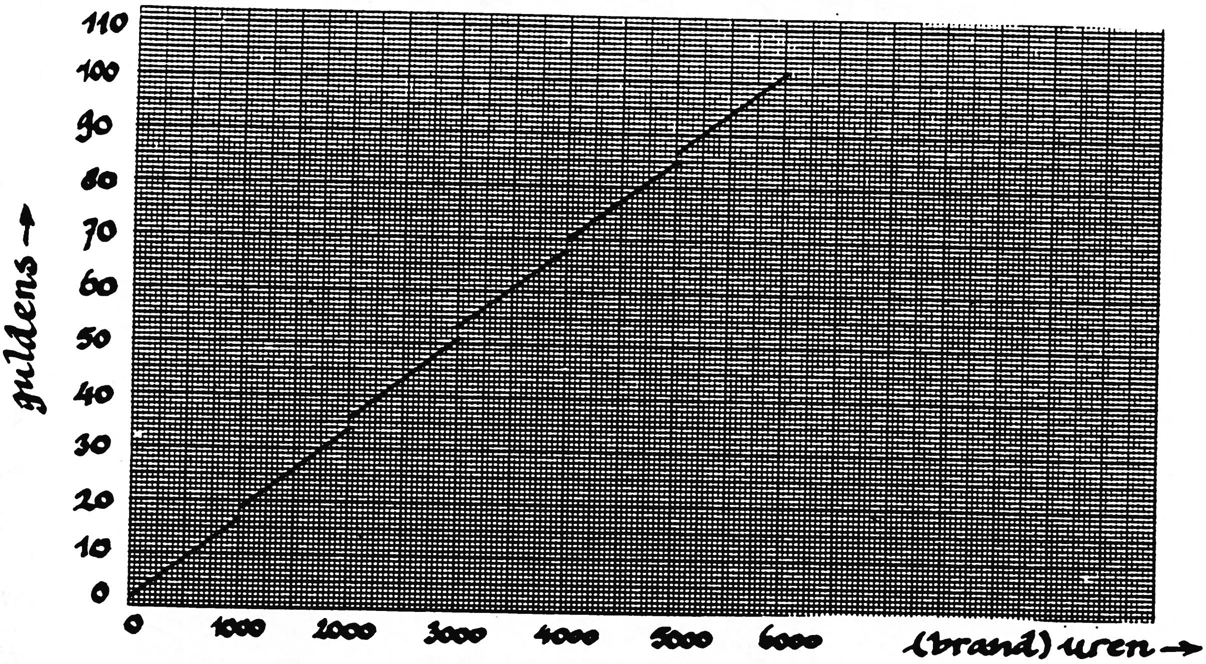
wat zegt deze grafiek?

fig.1: interpretatie van informatie

Een gloeilamp verbruikt stroom als hij brandt.

Een lamp van 75 watt kost ongeveer 1,5 cent per uur aan electriciteit, ofwel *f* 15,- per 1000 branduren. Na die 1000 branduren (ongeveer) geeft hij het meestal op; dan moet je een nieuwe kopen. Prijs (pakweg) *f* 2,-.

De grafiek geeft je de kosten, afhankelijk van het aantal branduren.



Waarom zijn er 'sprongetjes' in de grafiek te zien?

De laatste jaren zijn er een aantal energie besparende lampen in de handel gekomen, zoals de Philips SL-lamp. Deze verbruikt veel minder electriciteit, maar geeft evenveel licht als de 75 watt gloeilamp.

De SL-lamp brandt ongeveer 1000 uur voor *f* 4,-. De lamp zelf kost rond de 30 gulden èn gaat zo'n 5000 branduren mee. Dan moet er een nieuwe komen.

Teken de kostengrafiek van de SL-lamp.

wat is het beste?

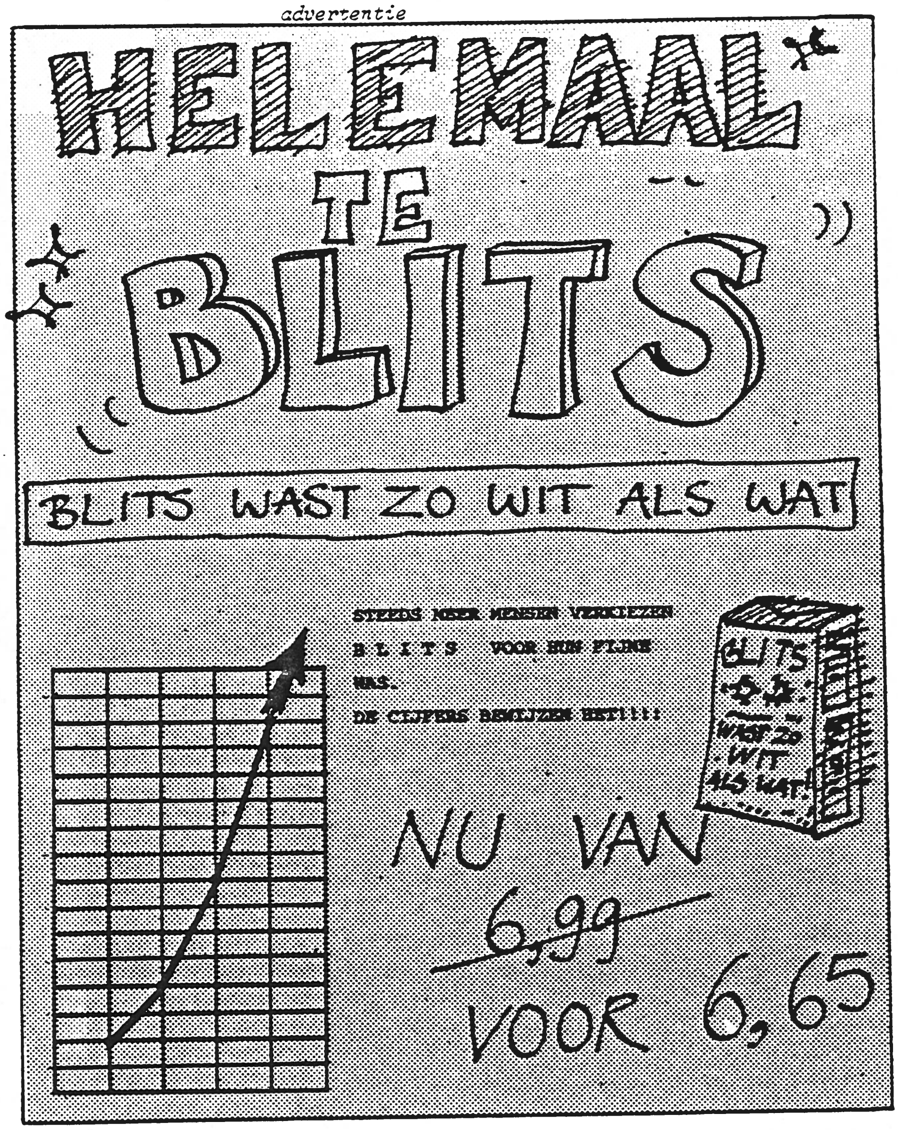
fig.2: oplossen van problemen

Korte tijd na het bezoek aan het reclamebureau staan er grote advertenties in de kranten.

Hieronder zien jullie er een.

Zetten jullie bij de assen van de grafiek een schaalverdeling, zodat de grafiek klopt met de verkoopcijfers.

advertentie



Geven jullie eens commentaar op dit verhaal en op het gebruik van de grafieken daarbij.

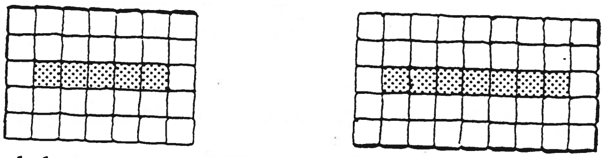
voorspellen, een beetje gewaagd!

fig.3: voorspellingen doen

De tweede stap is het reflecteren op de gehanteerde modellen. Bijvoorbeeld het ontdekken van regelmaat in een tabel, eigenschappen van een grafiek analyseren, verbanden classificeren, manipuleren met formules. Ook die bij voorkeur in concrete situaties en niet voor alle stromen in gelijke mate.

We gaan het nog een keer doen, nu met een ander 'patroon'.

Hier zie je twee voorbeeldjes; de witte rand is nu dubbeldik.



tabel:

tegel-regel: aantal witte tegels is ....

r	w
5	
7	
10	
100	
	150

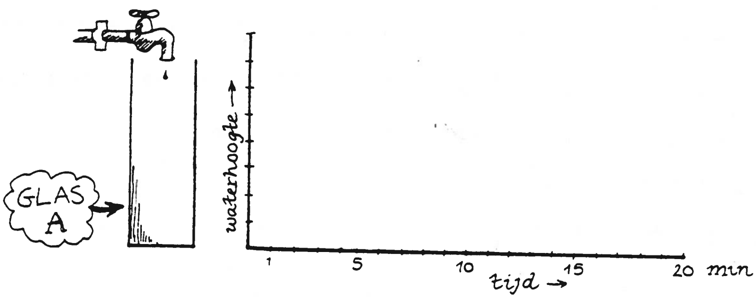
regelmaat in een tabel

fig.4: regelmaat ontdekken

De kraan druppelt regelmatig.

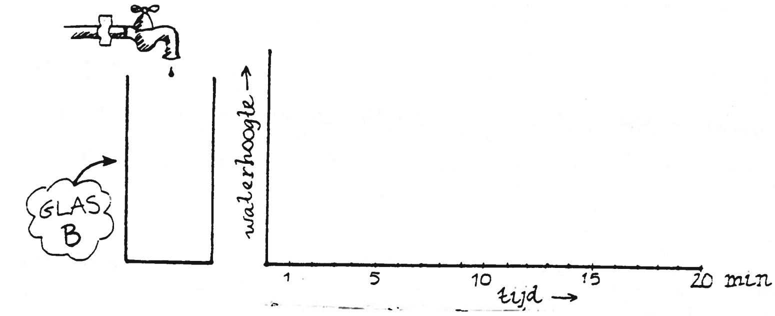
Teken de grafiek die het verloop van de waterhoogte in glas A beschrijft.

Het glas is na acht minuten vol.



In glas B kan twee keer zoveel water als in glas A.

Teken ook de grafiek die het verloop van de waterhoogte in glas B beschrijft.



een eenvoudige verkenning

fig.5: eigenschappen analyseren

Er is een - veel gebruikte - vuistregel, waarmee je ongeveer kunt uitrekenen welke remweg hoort bij welke snelheid.
Vuistregel 1 zegt: neem het kwadraat van de snelheid en deel die uitkomst door 100. Dan heb je de remweg in meters.
Hoe lang is, volgens regel 1, de remweg als je 50 km per uur rijdt?

formules vaak met woorden

fig.6: manipuleren met formules

b. Bovengenoemde activiteiten worden op verschillende manieren ingeperkt. Zo geldt, dat we veelal werken met concrete of concreet voorstelbare situaties. Ander criterium voor de context is de relevantie: we zoeken naar situaties waarmee de leerling iets kan, in zijn eigen leven of in een vervolgopleiding. Om dit te laten functioneren, is het van belang aandacht te geven aan het mathematiseren, aan aanpak van oplossing van een vraagstuk en aan reflectie op het geleerde.
Sprekend in termen van de grafiek, komen lokale (punt, snijpunt) en globale (stijgen, dalen, constant, extrema) zaken aan bod. Globale aspecten echter voornamelijk kwalitatief. Er is plaats ingeruimd voor het werken met assen en effecten van (schaal) transformaties. Bij het oplossen van problemen en het doen van voorspellingen, speelt snijpuntbepaling, asymptotisch gedrag en inter- en extrapolatie een belangrijke rol. Het is niet de bedoeling om dit allemaal op formeel niveau te doen.

'Vorige week drie keer de was gedaan. Lakens en slopen e.d. op 90°, spijkerbroeken en zo op 40° en de gordijnen uit de woonkamer op 20°. Drie keer een machine vol, je krijgt er wat van.
Voor de grap eens gekeken hoeveel energie dat nou kostte.
Hier zie je de resultaten van mijn speurwerk.

90°	3,2 KWh
40°	1,4 KWh
20°	1,2 KWh

Je kunt wel zien dat wassen op 90° veel energie kost. Dat zit er natuurlijk ook wel in, omdat je het waswater dan flink moet verwarmen. Je hoort tegenwoordig vaak zeggen dat je de 'kookwas' gerust op 60° kunt wassen en dat het dan nog steeds goed schoon wordt. En dat zal vast wel flink wat energie schelen.'
Proberen jullie eens een voorspelling te doen over de benodigde energie als je (met een volle machine) wast op 60°. Bedenk daarvoor twee manieren.

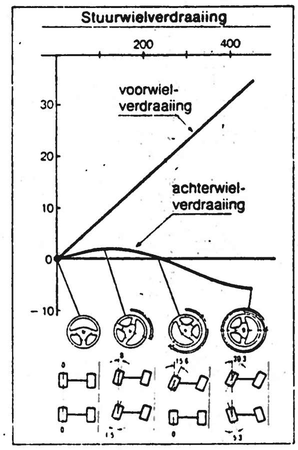
een praktisch voorbeeld

fig.7: situatie uit de praktijk

De typen verbanden die aan bod komen zijn allereerst verbanden uit de realiteit, die zich niet eenvoudig laten vangen in categorieën, en verder lineaire en eenvoudige hyperbolische, kwadratische en exponentiële verbanden. Lineaire verbanden nemen daarbij een prominente plaats in. Het is op dit moment echter prematuur om deze afbakening te zien als definitief. Bovenstaande geeft wel een indicatie van de richting waarin we denken.

Opnieuw leren parkeren met meesturende achterwielen

Japanse autofabrikanten brengen iets nieuws op de markt: auto's met meesturende achterwielen. Daardoor zouden rijgemak en veiligheid worden bevorderd. Een nuttige voorziening of tijdelijke bevlieging? De concurrentie ziet er voorlopig weinig in en wacht af hoe de consument reageert.



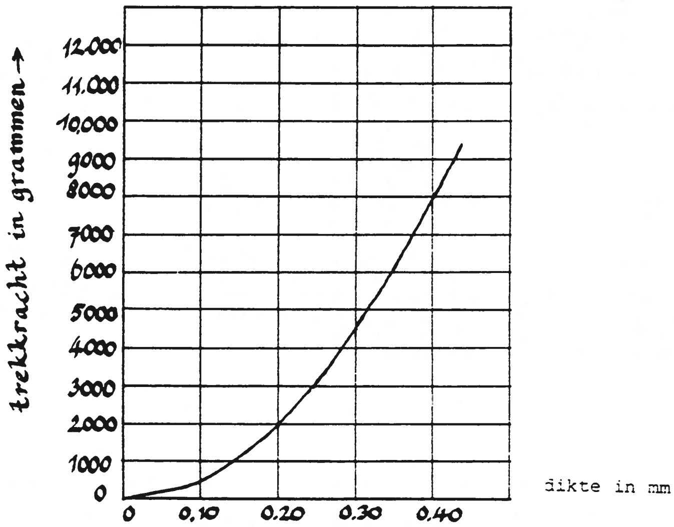
Verdraaiingsgrafiek van stuurwiel, voor- en achterwielen.

De uitslag van de achterwielen is afhankelijk van de mate waarin het stuurwiel wordt rondgedraaid: bij een geringe verdraaiing (bijvoorbeeld bij hogere snelheden), sturen de achterwielen enigszins (maximaal 1,5 graad) mee in dezelfde richting. Wordt het stuur verder gedraaid (in de praktijk alleen bij lage snelheden), dan wordt de bewegingsrichting in het achterste stuurhuis omgekeerd en sturen de achterwielen tegengesteld aan de voorwielen (maximaal 5,3 graad). Het Honda-systeem, dat als 'optie' is te bestellen, kost ongeveer 2000 gulden.

de realiteit van het achterwiel, de lineariteit van het voorwiel

fig.8: verband uit realiteit / lineair verband

In de bibliotheek vindt Gemma een boek over vissen, het *Alles wat u weten moet*-boek over zoet- en zoutwatervissen. 'Net wat voor mij', denkt Gemma en begint te bladeren. Plotseling valt haar oog op deze grafiek.



kwadratisch, bijvoorbeeld de trekkracht

fig.9: kwadratisch verband

In het knipsel uit de krant kun je lezen dat onder gunstige omstandigheden bacteriën zich *elke 20 minuten* verdubbelen. Dat betekent dat een bacterie zich in 20 minuten 'deelt' in twee gelijke exemplaren die zich vervolgens in 20 minuten kunnen delen in weer twee bacteriën, enz. enz. Zo heb je er na 20 minuten twee; na 40 minuten vier en na een uur al ...

'Je begint met één en machtig snel heb je er 16 miljoen.'
16 Miljoen, dat zijn er meer dan er mensen wonen in heel Nederland!
Proberen jullie eens uit te rekenen hoeveel tijd dat kost.

Als de omstandigheden voor de bacteriën minder gunstig zijn, dan groeit hun aantal minder snel.
Geen 16 miljoen, maar 'slechts' 256, volgens het kranteartikel.
Dan verdubbelen de bacteriën zich elke .... minuten.
Hoeveel tijd zou het dàn kosten voordat de bacteriën gezellig met z'n 16 miljoenen zijn?

Keutels op vloer van keuken en schimmel op muur

Door
Els Flipsen

Aspergesoep, karbonade met andijvie, gekookte aardappelen en jus de frambozenvla toe waren vanmiddag favoriet bij de bejaarde bewoners van het Rotterdamse tehuis Hoppesteijn. De kans dat zij daar ziek van worden, is heel klein.

De keuken van Hoppesteijn is goed toegerust, er wordt scherp op de hygiëne gelet en bacteriën wordt, waar mogelijk, de pas afgesneden. "Je loopt de hele dag je handen te wassen", zegt keukenchef Aad Ottens (38). Snel verhitten en zonodig snel afkoelen typeert de werkwijze.

De keuringsdienst van waren maakt het ook wel anders mee. Vorige week nog werd in het Rotterdamse keuringsgebied bij een instelling het dessert afgekeurd en vernietigd; eerder werden in een bejaardentehuis tientallen bewoners ziek door het nagerecht. Vorig jaar werd een kindertehuis betrapt op spinrag in de keuken en vuile koelkasten, bij een andere instelling was de bereiding van rijst en pudding riskant voor de gezondheid.

Bezuinigingen

Drs. H. Prins, directeur van de Rotterdamse keuringsdienst, en H. van Buuren, chef van de keurmeesters, zien als belangrijkste oorzaak de toeneming van ongeschoold personeel, een gevolg van de bezuinigingen.

"Men werkt met mensen die in de verste verte niet weten waar het om gaat. Ze koken produkten en laten die rustig afkoelen in de hoek van de keuken. In die tijd krijgen de bacteriën alle kans. Als ze op een lekker temperatuurtje zitten, kunnen bacteriën zich elke twintig minuten verdubbelen. Je begint met één en machtig snel heb je er zestien miljoen, terwijl dat er bij koeling maar 256 zijn", aldus Van Buuren.

Het belangrijkste is, zegt hij, dat het keukenpersoneel beseft dat bacteriën altijd en overal aanwezig zijn, ook al zie je niets. "Ik ben nog steeds voor zwaailichtjes erop".

Personeel in zieken-, kinder- en bejaardenhuizen zou volgens de keuringsdienst veel beter moeten worden ingelicht over de noodzaak van opperste hygiëne. In afwachting daarvan geeft de dienst zelf informatie aan groepen, op verzoek of wanneer ergens iets fout zit.

Handjes wassen

Van Buuren: "Kinderen leren al op de kleuterschool dat ze hun handjes moeten wassen, maar waarom, dat horen ze ook in hun verdere schooltijd nooit. Ik heb meegemaakt dat iemand van het keukenpersoneel zei: "Ik ben heel netjes naar de wc geweest en ik heb gisteravond nog gedouched; dan ben ik toch schoon?"

In de horeca is de situatie allesbehalve beter, zoals steeds weer blijkt uit de jaarverslagen van de keuringsdiensten: Muizekeutels op de vloer, kakkerlakken achter het fornuis, schimmel aan de muur en een dweil voor alle doeleinden.

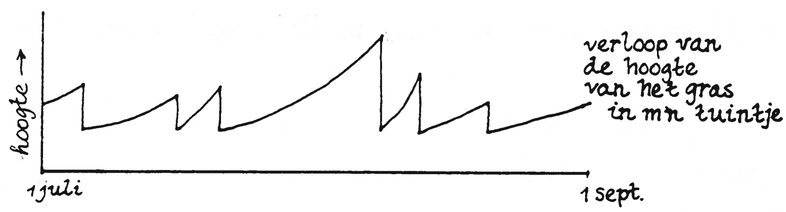
groei, vaak een exponentieel verschijnsel

fig. 10: exponentieel verband

differentiatie in drie stromen

In de functielijn experimenteren we met een drietal differentiatievormen:

- differentiatie naar oplossing en oplossingsniveau;
- differentiatie in de inhoud;
- differentiatie naar tempo en moeilijkheidsgraad.



Deze grafiek vertelt heel wat. Maak een kort verhaaltje naar aanleiding van deze grafiek.

Zorg ervoor dat de veranderingen die de grafiek te zien geeft, goed verklaard worden.

hier zijn veel niveaus denkbaar

fig. 11: differentiatie naar oplossingen en oplossingsniveau

Doel van het experiment is om de mogelijkheden in de praktijk nader te verkennen. We proberen daarbij om in het begin de inhouden van het programma niet teveel te laten variëren.

5.2 De algebralijn

inleiding

In de functielijn is beschreven hoe we leerlingen op een 'globale' manier met allerlei verbanden in aanraking willen brengen. In dit hoofdstuk - met de titel algebra - willen we de meer formele zijde van het probleemgebied belichten.

Daarbij moeten ter sprake komen:

- het opstellen van verbanden tussen grootheden
- het gebruik van variabelen, aangeduid met woorden, afkortingen, letters of andere symbolen
- het onderzoeken van dergelijke verbanden
- de belangrijkste typen die we wat meer aandacht willen geven
- de vaardigheden die bij dit werkgebied horen.

Uiteindelijk dienen uiteraard functielijn en algebralijn tot één geheel gemaakt te worden, zowel in het beoogde onderwijs als in een leerplanbeschrijving ervan. Dat er toch aparte hoofdstukken voor functielijn en algebralijn zijn opgenomen komt omdat de functielijn zich baseert op een bestaande serie pakketten en de algebralijn nog geheel in de steigers staat.

Uiteindelijk dienen de bovengenoemde punten ook in samenhang met de stromenindeling gebracht te worden, omdat vooral in dit gebied van het meer formele, eisen worden gesteld door de vervolgopleidingen.

Maar daarvóór willen we kenbaar maken wat onze bedoelingen op dit terrein zijn, wat de hoofdrichting is, waarin we willen gaan.

de algemene koers

Intussen is wel duidelijk dat we algebra niet identificeren met een afgesloten gebied in de wiskunde waarin 'met letters wordt gerekend'.

We willen veel meer aansluiten bij de algemene lijn van uitgaan van realistische situaties en van zoeken naar wiskunde die geschikt is om die situaties te belichten. Algebra dus niet als extra struikelblok, maar als hulpmiddel. Niet als cryptische geheimtaal, maar als verduidelijking van wat in wezen al bekend is. Daarna mag het hulpmiddel meehelpen nieuwe aspecten van de onderzochte situaties aan het licht te brengen.

Het gaat hierbij om een accentverschuiving. We willen niet meer het systematisch beheersen van eng bepaalde oplossingsvaardigheden als hoogste doel zien. We verschuiven de aandacht naar een bredere inbedding van fundamentele begrippen die aan zulke vaardigheden ten grondslag moeten liggen.

Aan de hand van drie onderdelen willen we deze verschuiving nader toelichten. We kiezen: het 'klassieke' onderdeel 'vergelijkingen', het 'nieuwe' gebied 'groei', het vermeend lastige gebied 'introductie van variabelen'.

voorbeeld 1: vergelijkingen

Een vergelijking oplossen betekent: zoek een waarde voor één (of meer) van de variabelen, waarbij gelijkheid tussen twee zaken ontstaat.

Bijvoorbeeld: we leggen een pad om een vierkante tuin. Het pad wordt één meter breed.
Kan het zo zijn dat daardoor de oppervlakte van de vergrote tuin twee keer zo groot wordt?

Een eerste stap is het formuleren van de verbanden:

tuinoppervlak = zijde * zijde
padoppervlak = 4 * zijde + 4
nieuw oppervlak = tuinoppervlak + padoppervlak.

De vraag is: zoek een zijde, zó dat
nieuw oppervlak = 2 * tuinoppervlak.

Een scala aan mogelijkheden ligt nu open:

a. Proberen, gewoon met zelf rekenen. Je zou zijde = 1 kunnen proberen. En dan zijde =10. Je merkt dat het gezochte getal tussen 10 en 1 moet liggen. 5 is een betere keuze, enz... Formele manipulatie is beperkt tot substitutie in de formules.
b. Proberen, met een tabellen- of grafiekenprogramma.
   Nu is het rekenwerk uitbesteed en is er gelegenheid overzicht over méér zijden-invullingen te krijgen.
   Systematische tweedeling, benadering in enkele decimalen van het antwoord ligt nu voor de hand.
c. Expliciet oplossen van de vergelijking; de methode die algemener lijkt, maar dat slechts ten dele is. Algemener omdat we álle(!) vierkantsvergelijkingen met deze methode aankunnen, beperkter omdat het alléén vierkantsvergelijkingen zijn.

De opzoekmethodes geven de kans meer variatie in de gestelde problemen te brengen en leiden daarbij tot andere wiskundige systematieken, die in wezen elementairder zijn, maar voor expliciete uitvoering vaak meer technische - rekenmachine, computer - hulp vragen. We zouden onze kop in het zand steken als we geen oog hebben voor de trend van het vak in dezen.

voorbeeld 2: groei
In het voorbeeld boven is te zien dat de oppervlakte van het pad in verhouding klein is ten opzichte van de tuin, als de tuin groot is. Het pad is maar een zoompje.
Dergelijke intuïtieve beoordelingen van de situatie zijn visueel te verkennen, maar dienen ook met behulp van variabelen onder woorden gebracht te kunnen worden.
Als de zijde groeit, groeit zijde * zijde op den duur veel harder dan 4 * zijde + 4, want ...

De uitgebreide verkenning van de onderlinge verhouding der functies (nu maar in traditionele notatie genoteerd), ax, bx^2, cx^3 is van belang voor verstandig zoeken in de zin van boven bedoelde vergelijkingen-aanpak.
De relaties tussen verschillende groeitypen, lineaire en kwadratische en kubische, maar ook die van voortdurende verdubbeling, geeft veel mogelijke toepassingen en is ook een vruchtbaar gebied om inzichten over meer formele verbanden als

$$a^n * a^m = a^{n+m}$$

op te bouwen.
In deze richting wordt momenteel met een experimenteel pakket gewerkt.

voorbeeld 3: invoering variabelen
Het lijkt er soms op dat in de leergang slechts één keer ingegaan hoeft te worden op wat een variabele is. We denken dat het gebruik van variabelen voortdurend en in verschillende elkaar verduidelijkende gestalten 'ingevoerd' moet worden. Woordformules, zelf door de leerling opgesteld èn als 'regel' gegeven, mogen daarbij op alle niveaus voorkomen.

Het opstellen van relaties als in bovenstaand voorbeeld moeten gezien worden als minstens de helft van de oplossing van het probleem, en niet als een aanleiding om een bekende oplossingsmethode te exerceren.
We verwachten dat computers, bijvoorbeeld met een spreadsheet, of met een programma dat formules in woordvorm accepteert, hierbij van nut kunnen zijn.
Experimenten op dit gebied zijn in vergevorderd stadium van voorbereiding.

voorlopig besluit
Nadere detaillering van deze koers moet via experimenten in klassen en met kleine groepen leerlingen tot stand komen. Afgetast moet worden wat vervolgopleidingen - niet alleen de technische opleidingen - aan wiskundige inzichten verwachten. Het uiteindelijke raamplan moet de aansluiting tussen een en ander onderbouwd aangeven.
We willen daar binnen het project voldoende tijd voor nemen om niet met schijnoplossingen aan te komen enerzijds, maar ook om niet in een slechts weinig vermomde vorm van een al lang verstard programma terug te vallen.

5.3 De meetkundelijn

uitgangspunten

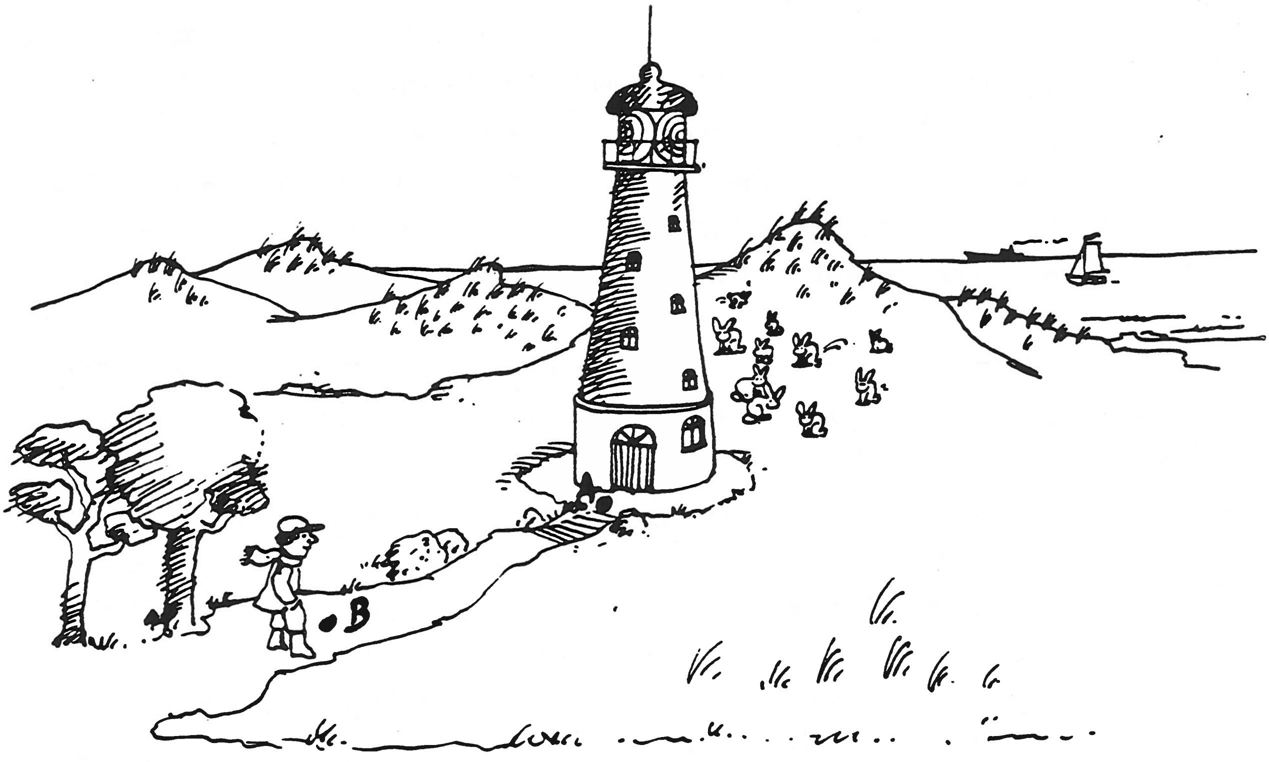
'De' meetkunde geldt nog vaak als schoolvoorbeeld van een volmaakt deductief opgebouwd systeem. Vanuit eenvoudige beginselen wordt naar complexiteit gewerkt. Basisobjecten zijn punt, lijn, vlak, ... Deze worden niet 'waargenomen', er mag slechts over geredeneerd worden aan de hand van hun axiomatisch vastgelegde eigenschappen. Intuïtie is verboden; figuren zijn slechts geheugensteun, een teken van zwakte van de beoefenaren van deze ijle kunde.
De vlakke meetkunde kent slechts punt en lijn; ze gaat daarom logisch vooraf aan de ruimtemeetkunde, die ook vlakken als objecten kent.

Er is heel wat water bij deze wijn gedaan om iets drinkbaars voor onze doelgroep van minderjarigen te krijgen; zo wordt de meetkunde bijvoorbeeld geïllustreerd met allerlei materiële zaken: een dobbelsteen is een kubus, een pyramide een pyramide, maar een ruit geen ruit.
We pretenderen binnen dit project de 'gewone' dingen serieuzer te nemen. Onze wiskunde moet daar echt mee te maken hebben, daar vanuit gaan zelfs. Dat is iets anders dan illustreren van overigens zuivere begrippen; daarin is ook plaats voor reflectie, naar aanleiding van wat zich voordoet. Een 'lokaal' soort deductie, niet de totale doororganisatie van Euclides, de transformatiemeetkunde, o.i.d.
Tegen deze achtergronden van verlaten van de deductieve opbouw en kiezen voor realiteit, komen we tot uitgangspunten die deze stellingname nader preciseren. Ook zal duidelijk worden dat bovenstaande er niet toe leidt dat we tevreden zijn met alleen handelingen op concreet niveau.

a. Je weet al heel wat!

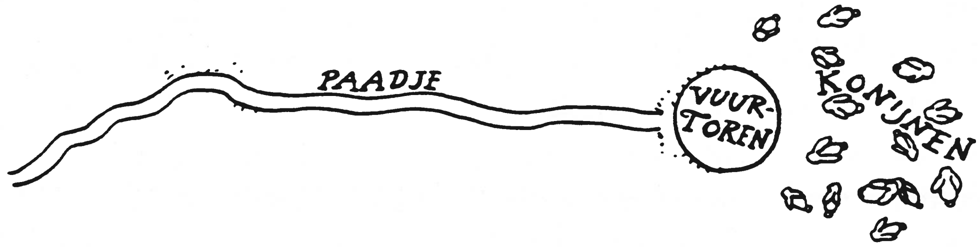
Leerlingen komen binnen met een schat aan ervaringen; we hoeven niet te doen alsof ze die niet hebben. Als we verwijzen naar 'de werkelijkheid' zal het ook niet lukken deze ervaringen te passeren.
Taak van ons meetkundeonderwijs is aan te sluiten bij die ervaringen, en te komen tot een expliciet maken van de al aanwezige intuïties.
Omdat het hier om een uiterst fundamenteel aspect van de gevolgde koers gaat, nemen we een voorbeeld op om het straks te formuleren uitgangspunt te illustreren. In het algemeen zal in dit hoofdstuk niet zo concreet naar

voorbeelden worden verwezen, die horen meer thuis in de beschrijvingen van uitgewerkte delen van de leerstof, niet in een raamplan dus.
Hier is het voorbeeld:

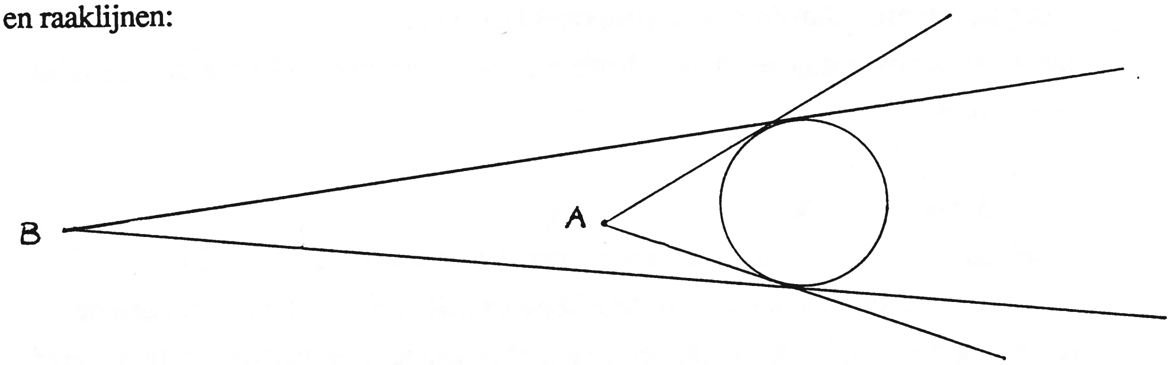


De vuurtorenwachter loopt naar de vuurtoren. Achter de toren spelen konijnen in het gras. Ze lopen niet meer weg voor de vuurtorenwachter. Thuis vertelt de vuurtorenwachter aan zijn kinderen: 'Als ik naar de toren loop, kom ik steeds dichter bij de konijnen. Ze lopen niet weg en toch zie ik er steeds minder. Hoe kan dat?'

Iedereen weet dat je vanaf B meer konijnen ziet dan vanaf A. We verscherpen die kennis met meetkundige middelen.
Een bovenaanzicht:



en raaklijnen:



We weten nu waarom, en hoeveel!

Om met deze middelen te werken is nog niet nodig:

- dat het bovenaanzicht als orthogonale projectie is gedefinieerd;
- dat de raaklijn aan de cirkel met exacte middelen (discriminant, passer) geconstrueerd wordt.

uitgangspunt 1

De meetkunde van 12-16 maakt gebruik van de al aanwezige intuïtie en probeert die te verhelderen en uit te breiden.

Laten we er meteen aan toevoegen dat die intuïtie ook onder vuur genomen moet worden van tijd tot tijd. Een - klein - voorbeeld:

> Trek een dubbeltje om op dun papier.
Knip het rondje uit. Kan er een kwartje door het gat?

Voor dit soort verbazing moet het leerplan voldoende gelegenheid bieden; het kan aanleiding zijn tot opnieuw gebruiken en verwoorden van al aanwezige kennis zoals: de omtrek van een cirkel is ruim meer dan twee keer de middellijn.

b. We leven in de ruimte!

De traditionele meetkunde verkent eerst het vlak en gebruikt de gevonden resultaten in de ruimte.

Bij uitgaan van 'de werkelijkheid' blijkt dat onnatuurlijk. We leven in de ruimte.

Eigenlijk is dit punt een specialisatie van het vorige, maar toch maar even expliciet.

uitgangspunt 2

Vanaf het begin worden activiteiten ondernomen die in de ruimte plaats hebben.

Dit uitgangspunt is in deze vorm natuurlijk te oppervlakkig: het gaat er niet om leerlingen bijvoorbeeld te leren traplopen of de lift te bedienen.

Het gaat om méér dan doen, dan materieel handelen.
De volgende twee uitgangspunten hebben op de aard van de reflectie over de ruimte betrekking.

c. Stel je voor: in je hoofd
Meetkunde is meer dan het herkauwen van al bekende ervaringen. Het vuurtoren-voorbeeld laat dat zien: de tekenactiviteit levert juist iets meer dan de grove intuïtie. Het 'meer' wordt verkregen door iets te doen wat de eerste illustratie te buiten gaat. Je stelt je de situatie van bovenaf voor. In eerste instantie is dat een mentale activiteit, een gebeurtenis in de fantasie, puur in de geest. De 'echte' vuurtoren wordt tot een mentaal object waar van alles mee kan: verkleinen, oprekken, op de aarde plat slaan desnoods. Het mentale spel geeft aanleiding tot reflectie; het maakt nieuwe, precieze conclusies mogelijk.
Dit spel wordt niet door ieder vanzelf gespeeld. We weten dat lang niet alle leerlingen naar een bovenaanzicht grijpen als dat handig is (in onze optiek dan ...). Het oefenen in mentaal voorstellen, jongleren in gedachten als het ware, is dus van belang om tot meer te komen dan meetkunde-op-de-tast.

uitgangspunt 3
Het prikkelen van het mentale voorstellingsvermogen is nodig om van het niveau van concreet handelen te komen tot reflectie, voorspellen en redeneren.

Voorspellen en natuurlijk kijken of het klopt wat je bedacht hebt.
Het heen en weer gaan tussen waarneming en bedacht beeld, het corrigeren van onjuiste conclusies, het zelfs bewust worden van waarom je de fout inging, het hoort bij het je kunnen voorstellen hoe iets is, zou moeten zijn, kan zijn, enz.
De weg van werkelijkheid via mentale voorstelling naar reflectie op werkelijkheid en voorstelling ervan, wordt in de beoogde meetkunde voortdurend in beide richtingen doorlopen. Hier onderscheidt zich meetkunde van het pure 'knippen en plakken'.

d. Stel je voor: vanaf papier
We vinden het van belang dat mensen kunnen decoderen: de juiste informatie oppikken uit kranten, diagrammen, kaarten, wegwijzers enz.
Op meetkundige gebieden kennen we perspectieftekeningen, uitslagen, doorsneden enz. als middelen om de ruimte op een plat vlak weer te geven. Het oefenen in lezen van dergelijke zaken is niet alleen een middel om tot verder liggende zaken te

komen, het is een belangrijk doel op zichzelf. Vanzelfsprekend ligt er een schat aan prachtige meetkunde in de aangegeven representatie-technieken; het is een rijke context op zich om met meetkunde bezig te zijn.

uitgangspunt 4

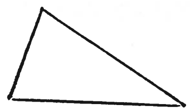
Het meetkundeprogramma moet veel gebruik maken van verschillende vormen van representatie zoals die overal functioneren in de wereld buiten school.

Dit zegt ook: niet altijd parallelprojectie schuin van rechtsboven, om maar eens iets te noemen. Men kan zeggen: vertrouwde, steeds terugkerende representaties bieden meer zekerheid. Dat is maar schijn: zo gauw je iets treft buiten de vertrouwde vormen ontstaan dan de problemen.

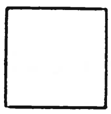
e. Geen parallellopipidactiek!

De traditionele meetkunde definieert zijn eigen termen: vierkant, rechthoek, octaeder, parallellopipidum.

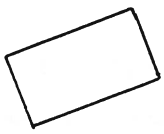
Doordat de leerling op de plaatjes drijft en niet de definities gebruikt, merken we:



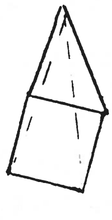
is niet gelijkbenig



is geen rechthoek, maar een vierkant



is ook geen rechthoek,



is geen pyramide.

Je zou kunnen zeggen in deze gevallen: dat mentaal handelen met het object moet zulks toch voorkòmen. Jawel, maar als je het laatste object mentaal op zijn vierkant zet is het wel een pyramide, maar na terugleggen misschien niet...
Het probleem is: de terminologie is ingevoerd om de begrippen zo ruim mogelijk te gebruiken, maar het eigenlijke gebruik schiet tekort om die terminologie zinvol te maken.
Het is moeilijk precies regels te geven welke termen zinvol zijn; probleem is ook dat we 'in de wiskunde' termen vaak anders gebruiken dan 'normaal'. We kunnen in veel methoden zulke passages aankruisen:

'in de wiskunde zegt men:'

Alsof de wereld van de wiskunde ergens in het buitenland ligt, waar men nu eenmaal een beetje raar praat.
Zo moet het niet. We moeten niet kost wat kost beweren dat een vierkant een rechthoek is, als we dat buiten school niet zo doen.
Van de andere kant gezien: het kan heel zinvol zijn met leerlingen uit te zoeken wat de consequenties van gemaakte afspraken zijn, te laten zien dat een 'logische' opbouw ook zo zijn charmes heeft. Zijn nut zelfs. De vraag blijft in welke situaties dat nuttig is. Bij het vierkant/rechthoek geval gaat het nog alleen om classificatie van objecten. Heel anders is het bij bijvoorbeeld de afspraak:

$x^o = 1$ $(x \neq 0)$

Die strijdt niet met intuïties, maar draagt via zijn starre logica wel bij tot een mooie structuur in het rijk der exponenten.
Zorgvuldig afwegen per geval lijkt nodig.
Voor de meetkunde, die we dus sterk in realistische situaties willen wortelen, kiezen we in het algemeen voor:

uitgangspunt 5
We moeten de meetkunde met normaal taalgebruik verwoorden. Daarbij kunnen wel nieuwe woorden verklaard worden, maar alleen als die woorden binnen een context goed bruikbaar zijn.

Normaal zal vaak zijn: contextgebonden. Dat leidt meteen tot de constatering dat juist het in verband brengen van verschillende contexten met elkaar van belang is; de verbanden liggen dan in de onderliggende wiskundige structuur.
Hebben we vergroten met de diaprojector beschouwd, en zijn we nu met perspectief bezig, dan kan de term 'centrale projectie' die structuurovereenkomst eventueel verhelderen. Een eerste stap blijft de observatie: 'hé, dit gaat net als...'
Geïsoleerd toetsen van terminologie, niet uitgaande van een context lijkt dus niet in de aangegeven lijn te liggen.

f. Groot, klein en daartussen
Bij werkelijkheidsgeoriënteerde meetkunde horen echte maten, hoort gevoel voor grootte-orde en schaal, voor héél klein en héél groot. Deze band tussen pure meetkunde en werkelijkheid werd zelden gebruikt: de kennis van het matenstelsel was een onderdeel van het rekenen, vooral met nullen en komma's.

uitgangspunt 6
Noties over maten, kennis van maten van standaardobjecten, dienen in het meetkundeprogramma veel aan bod te komen.

Een koerswijziging. Meetkundige beelden kunnen noties over grote en kleine getallen versterken; juist in verband met de andere leerlijnen (rekenen, functies) is dit van belang.

g. Blijf bij je leest
Men omschrijft de bedoelde wiskunde wel als 'meetkundige wereldoriëntatie'. Het zou erop kunnen lijken dat we de grenzen van wat we onder wiskunde verstaan, vastleggen. Moet je eerst een stromende rivier overzwemmen om vectoren te leren gebruiken? Moet je verhuizen naar de Noordoostpolder om negatieve getallen te leren begrijpen? Of ècht gezeild hebben om schommelend een peiling met kompas te begrijpen?
Verrijkend zouden die ervaringen vast wel zijn!

Toch zijn er grenzen en in het kader van dit hoofdstuk moet er iets over gezegd worden.
De wiskunde van bijvoorbeeld de twee-richtingen-peiling gaat over twee lijnen die snijden; twee lijnen met gegeven richtingen door gegeven punten. Al doende - op het water - kom je er wel achter dat dit model op zijn minst uitgebreid moet worden met het werken met variaties in de gemeten hoeken. Niettemin is het pure model een kern op zich en als leidraad om de activiteit in werkelijkheid uit te voeren van belang.
Dat je - via de meetkunde - slechts met modellen, met vereenvoudigingen werkt, dient zeker aan de orde te komen.
Toch wil dat niet zeggen dat èlke context in volle hevigheid doorleefd moet zijn. Juist de mentale idealisering, het onvolledige model zijn de basis om de kracht van het meetkundig redeneren te kunnen toepassen.

uitgangspunt 7
Bij het werken met contexten en reële situaties in het meetkundeonderwijs is het van belang de leerlingen kritisch te leren kijken naar de waarde van de wiskundige modellen. Vaak zal 'de praktijk' de grenzen van het model aanwijzen, maar we moeten er naar streven dat de leerling ook zonder die praktijk zich van deze grenzen bewust is.

h. Zoek dat samen eens uit!
De wiskunde is ook voor de beroepsbeoefenaren niet meer een mausoleum waarin stellingen voor eeuwig worden bijgezet. Met name Lakatos ('Proofs and Refutations') laat diepgaand èn amusant zien dat de historie van het vak meer lijkt op een voortdurende discussie, een ruzie zelfs.
Hij vertelt daartoe een brok geschiedenis in de vorm van een discussie in de klas. Het onderwerp is nog meetkundig ook: de polyederstelling van Euler.
Het proces van hypotheses formuleren, toetsen, aanvullen, wijzigen kan zich ook op het door ons bedoelde niveau afspelen, als we maar problemen, vragen kiezen die daar uitgangspunt voor zijn. De klassesituatie moet dit toelaten, in ieder geval van tijd tot tijd. Binnen kleine groepen is zoiets mogelijk en altijd al gedaan ...

uitgangspunt 8
Het meetkundeplan moet voor de leerlingen regelmatig gelegenheid bieden samen te praten over hoe iets in elkaar steekt. Het gaat om het leren waarderen van argumenten, of die nu uit het boek komen, van de docent of van een medeleerling.

i. Terugblik
De geformuleerde uitgangspunten expliciteren in zekere zin wat meetkunde kan zijn binnen realistisch wiskundeonderwijs. Ze gaan ook uit van een visie op wat wiskunde voor 12- tot 16-jarigen is: niet iets dat alleen voorbereidt op later, maar wat 'nu' ook zijn waarde heeft. Er ligt het geloof in verborgen dat wie zò meetkunde doet ook eventueel vèrder kan, verder in de zin van meer formeel. Daarvoor is het bouwen aan het verband tussen werkelijkheid, mentale voorstelling en wiskundig model een essentiële voorwaarde. Veel hiervan gaat verder dan over meetkunde alleen. Maar juist bij de meetkunde liggen intuïtie en wiskundig model zo dicht bij elkaar, liggen ze direct in elkaars verlengde. Vandaar dat we vooral via de meetkunde de visie op het vak wiskunde goed kunnen illustreren.

5.4 Een eerste aanzet voor een rekenlijn

De door het IOWO in gang gezette vernieuwing begint geleidelijk aan door te werken in het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Een groeiend aantal basisscholen gebruikt een reken-wiskundemethode waarin de nieuwe ideeën redelijk tot goed uitgewerkt zijn. Inmiddels heeft meer dan de helft van de scholen zo'n 'realistisch' genoemde methode aangeschaft. Bij deze methode worden reële toepassingsproblemen in het hart van het onderwijs geplaatst. De toepassingen komen hier niet achteraf, als echte toepassingen, maar de contextproblemen vormen zowel startpunt als stoffering van elke leergang.
Onder invloed van deze vernieuwing heeft ook het denken over de doelstellingen van het reken-wiskundeonderwijs een ontwikkeling door gemaakt. Zo wordt het belang van toepassingen nu algemeen erkend. In de onlangs geformuleerde eindtermen voor het basisonderwijs zien we naast het toepassen verder veel aandacht voor basisvaardigheden, een nadruk op een brede inzichtelijke inbedding van lastige leerstof als breuken en verhoudingen, en een verbreding van het leerstofaanbod met meetkundige onderwerpen. Dit leidt er waarschijnlijk toe dat de algoritmen voor het formele breukrekenen in het voortgezet onderwijs afgerond zullen moeten worden.

Het betreft hier echter veranderingen die het voortgezet onderwijs pas op termijn beïnvloeden. Het kan nog jaren duren voor het merendeel van de scholen een moderne methode gebruikt èn deze tot in groep acht heeft doorgevoerd. Ook de eindtermen zullen pas geleidelijk aan invloed op het onderwijs krijgen. Een invloed die zich waarschijnlijk vooral zal doen gelden via een verandering van de inhoud van de eindtoetsen.
Op dit moment zitten we in een overgangssituatie die vooral voor het voortgezet onderwijs problematisch is. In de verschillende scholen voor basisonderwijs worden verschillende reken-wiskundemethoden gebruikt en binnen het leerstofaanbod van deze methoden worden door de schoolteams weer eigen keuzes gemaakt. Mede hierdoor is de instroom in het voortgezet onderwijs zeer divers. De altijd al aanwezige prestatieverschillen worden gemengd met verschillen in leerstofaanbod en verschillen in didactiek.
Het nieuwe programma voor de eerste fase van het voorgezet onderwijs zal de huidige basisonderwijs-voortgezet onderwijs-problematiek niet kunnen negeren maar toch zal het zich zoveel mogelijk op de toekomst moeten richten. Dat wil zeggen dat de recentelijk geformuleerde eindtermen voor het basisonderwijs als startpunt moeten dienen.

In de eindtermen constateerden we de nadruk op basisvaardigheden en toepassingen, een brede inbedding van breuken en verhoudingen, uitstel van het algoritmiseren in dit gebied, en een hernieuwde aandacht voor de meetkunde die zo'n 100 jaar geleden uit het lagere school-programma geschrapt werd.

In het nieuwe basisschoolprogramma nemen de basisvaardigheden een belangrijke plaats in. De vaardigheden die onderwezen worden betreffen: de basisautomatismen (de tafels) voor optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Tot de basisvaardigheden rekent men in het algemeen ook het hoofdrekenen en het cijferen. Nieuw aan het cijferen is de ruimte die er geboden wordt voor verschillen in oplossingsniveau. Zo kan de staartdeling met een lange staart, of maximaal verkort uitgerekend worden.

Er moeten 1633 voetbalsupporters vervoerd worden. In een bus gaan 48 passagiers.
>> Hoeveel bussen zijn er nodig?

Mogelijke oplossingen:

```
48 /  1633   \34  rest 1      48 / 1633   \34   rest 1      48 / 1633   \34   rest 1
       480    10                    960    20                   1440    30
      1153                          673                          193
       480    10                    480    10                    192     4
       673                          193                            1
       480    10                    192     4
       193                            1
        48     1
       145
        48     1
        97
        48     1
        49
        48     1
         1
```

rekenvaardigheid

Dergelijke niveauverschillen lijken in eerste instantie niet problematisch voor het voortgezet onderwijs. Van belang zijn vooral de echte basisvaardigheden. Waar nodig kunnen deze aangevuld worden met verstandig zakrekenmachine-gebruik (wat ook een onderdeel vormt van het nieuwe programma). Voor de leerlingen die aan tamelijk formeel wiskundeonderwijs toekomen zullen de basisvaardigheden echter uitgebreid moeten worden tot het formele breukrekenen. Zo zal er in het programma dus plaats ingeruimd moeten worden voor het onderhouden van de basisvaardigheden en voor een formalisering van het breukrekenen dat op de basisschool nog sterk aan contexten gebonden is.

praktisch rekenen

Het globaal rekenen vormt een belangrijk aspect van het toepassen. Zo'n 80% van onze rekenactiviteiten in het dagelijks leven betreft het globaal hoofdrekenen. Bijvoorbeeld:

Je doet boodschappen in de supermarkt.

2 liter karnemelk	à	*f* 0,98
1 wit brood	à	*f* 1,76
1 pakje margarine	à	*f* 0,65
1 blik appelmoes	à	*f* 1,28
1 pak vuilniszakken	à	*f* 3,25

Heb ik genoeg aan een tientje?

2 liter karnemelk	à	*f* 0,98	2,00
1 wit brood	à	*f* 1,76	+ 1,75 = 3,75
1 pakje margarine	à	*f* 0,65	
1 blik appelmoes	à	*f* 1,28	+ 2,00 = 5,75
1 pak vuilniszakken	à	*f* 3,25	+ 3,25 = 9,00

Als we in het dagelijkse leven rekenen dan hoeft dat meestal niet zo precies. Vaak ontbreken ons ook de juiste gegevens en maken we gebruik van schattingen en algemene 'maatkennis'. Je weet dat een deur ongeveer twee meter hoog is, dat je ongeveer vijf kilometer per uur loopt, dat de wereldbevolking uit zes miljard mensen bestaat, ... enz.

Een voorbeeld:

> In een reclame voor wasmachines lees ik dat deze dure machine lang meegaat:
>
> 'Zeer lange levensduur, gebouwd voor 5.000 wasbeurten'.
>
> >> Is dat veel 5.000 wasbeurten?

Onno (een brugklasleerling) die zichzelf deze vraag stelde, gaf na enig nadenken het volgende antwoord: 'Als je hem één keer per dag gebruikt gaat hij meer dan 10 jaar mee.'

Niet alle leerlingen kunnen echter direct met dit type opgaven uit de voeten. Wanneer je in een praktische toepassingssituatie handig wilt kunnen rekenen, moet een aantal voorwaarden vervuld zijn, je moet:

1. de structuur van de situatie doorzien,

   '.. keer per dag is ... keer per jaar, is 5000 keer in ... jaar'

2. de getallen die je nodig hebt kunnen (en durven) afronden,

   365 ≈ 500

3. beschikken over handige referentiepunten in de getallenwereld,

10 x 500 = 5000

4. beschikken over handige referentiepunten in de realiteit, over 'maatkennis',

'een jaar is 365 dagen'.

De combinatie van schatten, handig rekenen en maatkennis noemen we gemakshalve praktisch rekenen. Dit praktische rekenen is ons inziens een doelstelling voor alle leerlingen, hoewel voor de betere leerlingen wellicht niet meer nodig is dan het onderhouden en aanscherpen van reeds aanwezige kennis. Misschien is het voor hen voldoende dergelijke vaardigheden te onderhouden.
Voor de zwakkere leerlingen betekent deze doelstelling in ieder geval dat er de tijd genomen moet worden om ze praktisch rekenen te leren. Het kan deze leerlingen de mogelijkheid bieden veel te doen met een beperkte hoeveelheid rekenkennis.
Als hulpmiddel kunnen we de verhoudingstabel gebruiken. De verhoudingstabel kan benut worden om situaties te structureren en de verhoudingstabel biedt een basis voor het handig rekenen. Tevens kan de verhoudingstabel een kernrol vervullen bij het procentrekenen.

rekenen en algebra

De algebra vindt zijn voedingsbodem in het gewone rekenen. Algebra omvat generalisaties, abstracties en verkortingen van het gewone rekenen. Het ligt daarom voor de hand het gewone rekenen als één van de ingangen tot het letterrekenen te benutten. Zo kan er gewerkt worden met frames op de plaats van nog onbekende of nog in te vullen getallen; al dan niet gecombineerd met 'machientjes':

$10 + \square = 3 \times \square$

Welk getal past in het hokje?

in — + 8 — − 5 — uit

in	uit
	10
5	
$\square$	$\square + 3$

Mogelijk kunnen bij het rekenen gevonden regelmatigheden of eigenschappen in formules vastgelegd worden. Omgekeerd kunnen algebraïsche bewerkingen soms een voedingsbodem vinden in isomorfe berekeningen met getallen. We denken hier bijvoorbeeld aan de relatie tussen de distributieve eigenschap in het rekenen en de merkwaardige produkten in de algebra. De merkwaardige produkten komen voort uit wat je 'dubbele distributiviteit' zou kunnen noemen.
Degenen die ouderwets rekenonderwijs gehad hebben kennen echter trucjes die in wezen op dezelfde eigenschap steunen. Bijvoorbeeld:

> Wanneer je twee getallen van twee cijfers, met gelijke tientallen en waarvan de laatste cijfers samen tien zijn, met elkaar moet vermenigvuldigen kun je de volgende truc toepassen: je vermenigvuldigt de cijfers van de eenheden met elkaar, dat schrijf je op. En je vermenigvuldigt het cijfer van de tientallen met het volgende getal in de telrij, die uitkomst schrijf je voor de vorige en je bent klaar!

Voorbeeld:

26 x 24 = ...
6x4=24,
2x3=6 => 26 x 24 = 624.

Het onderzoek van dit soort trucjes zou één van de ingangen tot de algebra kunnen vormen:

26 x 24 = 20 x 24 + 6 x 24 =
20x20 + 20x 4 + 6x20 + 6x4 =
20x20 + 20x(4+6) + 6x4 =
20x20 + 10x20 + 6x4 =
30x20 + 6x4 =
3x2x100 + 6x4.

Tenslotte is er de mogelijkheid rekenhandelingen die vaak herhaald moeten worden met letters te beschrijven. De leerlingen kennen dit al van de basisschool waar de oppervlakte van een rechthoek beschreven werd met 'lxb'. Het werken aan problemen die al proberend opgelost moeten worden kan een goede aanleiding voor het gebruik van letters vormen. Bijvoorbeeld:

> Van een A4-blaadje wordt een rechthoekig bakje gevouwen door de randen om te buigen.
>
> >> Bij welke bakhoogte heeft het bakje een maximale inhoud?

In de voortzetting van het rekenen in het voortgezet onderwijs kunnen we dus drie hoofdlijnen onderscheiden:
- (kale) rekenvaardigheid;
- praktisch rekenen; en
- rekenen als ingang voor de algebra.

De keuze van de doelstellingen voor het rekenen zal tenslotte zorgvuldig afgewogen moeten worden tegen de tijd die daarvoor beschikbaar gesteld wordt.

5.5 Informatie en modellen

inleiding

Informatie en modellen is een werktitel voor een, goeddeels nieuw, onderdeel van het leerplan in ontwikkeling. Het bevat een aantal uiteenlopende onderdelen: onder de noemer informatie vinden we onderdelen uit de statistiek, bij modellen vinden we onderwerpen uit de grafentheorie en de kansrekening.

We starten met een opsomming van mogelijke inhouden voor dit onderdeel. Vervolgens gaan we kort in op de aanpak, die we ons voorstellen bij het ontwikkelwerk. Deze schets is daarbij startpunt, waarin mogelijkheden worden aangegeven, die in onze ogen perspectief bieden voor het ontwikkelwerk.

Nadere uitwerking en weging zullen hun beslag dienen te krijgen in de loop van de tijd.

mogelijke inhouden

statistiek

We denken hierbij in de eerste plaats aan beschrijvende statistiek: het werken met diverse (grafische) representatievormen. Een uiteenlopend scala van representaties komt hiervoor in aanmerking. Verder het karakteriseren van gegevens met statistische middelen. Het gaat dan niet slechts om het technisch hanteren van een en ander, maar ook en vooral om een kritische beoordeling van statistische activiteiten.

Op het terrein van de beschrijvende statistiek wel te verstaan. Het zelf uitvoeren van een eenvoudig onderzoekje behoort tot de mogelijkheden.

Naast genoemde zaken kunnen ook regressie (alleen grafisch) en extra- en interpolatie aan bod komen. Het is niet de opzet om voor W12-16 in meer dan algemene termen in te gaan op problemen rond steekproeven.

grafen

We starten hier met het vertalen van situaties, waarin een verband tussen een aantal discrete grootheden een rol speelt, in een graaf en het interpreteren van informatie uit een graaf naar de situatie terug. De wat ruime formulering duidt op het feit dat we genoemde verbanden in eerste instantie breed op willen vatten: het kan gaan om een geografische situatie, maar ook om een roosterprobleem, een stroomdiagram of een systeemgraaf. Als representatie kan naast de graaf ook een matrix (tabel zo u wilt) worden gehanteerd.

Naast het modelleren zelf, is het van belang aandacht te schenken aan eigenschappen van dit discrete terrein. Denk bijvoorbeeld aan de consequenties die het ontbreken van ordening heeft. Dit zal zijn beslag moeten krijgen in een aantal concrete terreinen. Mogelijkheden daarvoor zijn:

* Modellen en systemen, waarin relaties tussen discrete variabelen een rol spelen.
  Dit kan meer kwalitatief, met tekengrafen, dan wel kwantitatief met gewogen grafen. Ook hier weer modelleren als belangrijke activiteit, maar ook verkenning van de systemen, bijvoorbeeld via het redeneren met cycles of het volgen van effecten van veranderingen. Het model kan als basis dienen voor het doen van beargumenteerde voorspellingen over de beschreven situaties.
* Problemen waarbij het modelleren in een graaf extra aandacht vraagt. We denken hier aan bijvoorbeeld toewijzingsproblemen, planningsproblemen, ook met tijd, maar de kleuringsproblematiek behoort eveneens tot de mogelijkheden.
* Routeproblemen, maar ook kortste-weg-vragen,de handelsreiziger of maximale capaciteit van een netwerk. We kunnen hierbij denken aan een verkenning van het terrein - hoe lees je een kaart, wat is het probleem, het vergelijken van de diverse, vaak sterk op elkaar gelijkende vraagstellingen -, het via trial and error werken aan een oplossing en het gebruik van algoritmen. Daarbij dienen zich eenvoudige combinatorische vragen aan. Ook enkele stellingen liggen binnen bereik.
* Boomdiagrammen in diverse situaties. Ordening van zaken via een boomdiagram, zoals mogelijkheden, keuzes, organisatieschema's, maar ook uitstapjes naar het werken met files in bestanden. Activiteiten die we ons daarbij voorstellen zijn bijvoorbeeld telproblemen of zaken rond omspannende bomen. Verder zijn we van plan om het werken met boomdiagrammen binnen de kansrekening te exploreren. We komen hierop terug.

kansrekening

Bij kansrekening stellen we ons voor om, uitgaande van intuïtieve noties hierover bij de leerlingen, te komen tot een verkenning van het empirische en/of theoretische kansbegrip. Daarbij kan het werken met modellen een aanknopingspunt zijn om deze begrippen nader uit te werken.
We stellen ons voor om te werken vanuit een meer kwalitatieve benadering, naar een kwantitatievere. Daarbij spelen zeker ook statistische en combinatorische vaardigheden een rol.

uitwerking naar het leerplan

Bovenstaande ideeën vragen in de eerste plaats om uitwerking in leerlingenmateriaal en onderzoek naar de mogelijkheden in de klas. Wat voor welke leerling op welk niveau haalbaar is, is in dit stadium niet precies af te bakenen. Op dit moment is meer het veld waarbinnen gezocht wordt, bepaald en staat vast dat een substantieel deel van het nieuwe leerplan hiervandaan zal komen.

Op basis van ontwikkeling en onderzoek moet de discussie over een definitiever afbakening van het terrein worden gevoerd. Ook blijft de vertaling van de resultaten van het ontwikkelingsonderzoek naar het leerplan, punt van aandacht.

Veel van bovenstaande is betrekkelijk nieuw, het is al gezegd. Het is dan ook niet eenvoudig om het verhaal uitvoerig en volledig te illustreren met voorbeelden. Een enkele verwijzing naar het buitenland: het materiaal van The Spode Group in Groot-Brittannië (The Decision Maths Pack) en van het Landesinstitut für Schule und Weiterbildung (Soest) over stochastiek.

In eigen land zien we aanzetten in het hawex-materiaal (Grafen & Matrices en Telproblemen).

5.6 Geïntegreerde wiskundige activiteiten (GWA)

geïntegreerde wiskundige activiteiten

Doel: leerlingen ervaringen laten opdoen met wiskunde die in de actualiteit en of in samenhang met andere vakken een belangrijke rol speelt. Leerlingen laten oefenen in het aanspreken en gebruiken van hun wiskundige bagage in levensechte situaties.

In het leerplan komt 5% ruimte voor GWA.

Dit betekent niet dat in de overige 95% van de beschikbare tijd dit soort zaken niet aan de orde hoeft te komen. Zij het dat ze dan moeten passen binnen de leerstofomschrijving van het leerplan.

We onderscheiden twee typen van GWA:

1 de niet ver van te voren geplande activiteit die inhaakt op de actualiteit en die slechts een deel van een lesuur in beslag neemt of hooguit een lesuur.

2 de vooruit geplande activiteiten, enige lesuren achter elkaar.

over de actuele GWA

Zeer actuele zaken kunnen aanleiding geven tot een half of hoogstens een heel lesuur GWA. Dit vraagt van de docent creativiteit, een groot vermogen tot improviseren, veel zelfvertrouwen ten aanzien van onverwachte wiskundige problemen. Bronnen: krant, tv, een foto, gebeurtenissen op school. Er zijn veel docenten die ook bij het huidige leerplan zulke uitstapjes ondernemen. Via de nascholing, scholing en publiciteit moeten voorbeelden van dergelijke onderwijsactiviteiten beoefend en besproken kunnen worden. Een bundel met dergelijke voorbeelden is de kalender voor 1989 van de NVORWO. Op het moment dat deze kalender uitkomt, is het een overzicht van gepasseerde mogelijkheden. Immers, de bijbehorende actualiteit is voorgoed voorbij. Toch kan zo'n kalender inspireren om nieuwe actualiteiten op een wiskundige manier te lijf te gaan.

over de vooruit geplande GWA, een paar voorbeelden

Voor de brugklas: een verkenning van de omgeving van de school met opdrachten zoals het maken van een schatting van de oppervlakte van de vijver in het park, het meten van hoeken en het schatten van de hoogte van een gebouw met behulp van de schaduw, het neerzetten van een patroon van gelijkzijdige driehoeken op een plein enz.

Voor een tweede klas: werken aan een boekje zoals ' De reis om de wereld in tachtig dagen' waarin elementen van wiskunde, aardrijkskunde, taal en geschiedenis sterk verweven voorkomen.

Voor een derde klas: een statistisch onderzoek in de eigen omgeving. Op grond van actuele gebeurtenissen. Bijvoorbeeld een landelijk onderzoek toetsen. Zelf deelnemen aan een onderzoek als controlegroep en zich nader verdiepen in de verwerking van deze gegevens. Of een onderzoek naar de eigen bestede tijd aan diverse sporten en de tijd die Studio Sport aan diverse sporten besteedt.

Voor een vierde klas: het Wiscom-programma 'zeilen' waarbij leerlingen een zeilsimulator in handen krijgen die hen in staat stelt een poolgrafiek te maken van de snelheid in diverse richtingen van het bootje op het scherm. Hierbinnen doen zich mogelijkheden voor van meten en rekenen, eenvoudige natuurkunde, redeneren en bewijzen, maar dat alles in een afgebakend wereldje.

In het algemeen bestaat ook de mogelijkheid om bij een hoofdstuk van een boek of een pakket een aantal opdrachten dan wel werkbladen uit te bouwen naar een bredere toepassing.
Er dient een 'bank' te komen van voorbeelden van GWA waarin de contexten een grote spreiding vertonen. Naast de spreiding in contexten kan ook de werkwijze variëren: opdracht aan individuele leerlingen, groepjes, opdracht voor huiswerk, op school, al of niet met excursie of werkweek....
Een docent moet kunnen kiezen uit een groot aantal voorbeelden. De docent moet zich allereerst vertrouwd voelen om met deze of gene context in zee te gaan.

toetsing

De toetsing van GWA dient plaats te hebben binnen het schoolonderzoek.

6 Uitwerking

Het zal duidelijk zijn dat het onderwijs in de bovengenoemde vijf lange lijnen: grafieken, algebra, meetkunde, rekenen, informatie en modellen en het overige samengevoegd zullen worden tot één wiskundelijn. Deze lijn begint bij het onderwijs aan hen die zojuist de basisschool verlaten hebben en eindigt voor ons bij de derde klas havo/vwo en het eindexamen lbo/mavo na vier jaar. Na dat ogenblik zullen de leerlingen wellicht nog verder gaan met wiskunde. Zeker in vier vwo en in vier havo, en misschien als doorstromers na het lbo/mavo-examen in mbo of havo.

Vanuit dit oogpunt wordt in het Plan juni 1987 gesproken over drie stromen. De drie stromen zijn kortweg te karakteriseren door het eindpunt. Bij de onderste stroom zal het wiskundeonderwijs voortgezet worden zonder voorbereiding op een centraal schriftelijk (mavo zonder wiskunde, lbo op a/b niveau).

Bij de middelste stroom wordt het onderwijs na vier jaar afgesloten met een centraal schriftelijk examen (lbo/mavo examen op c/d niveau). Bij de bovenste stroom gaat het onderwijs zonder examen door in de vierde klas van het vwo of van het havo. De einddoelen voor deze stromen zullen niet dezelfde zijn.

In zijn studie over de geschiedenis van het Mathematisch Centrum introduceert G. Alberts voor de wiskunde de termen cultuurfactor en produktiefactor. Ruwweg kunnen we deze woorden vertalen door de zinnetjes 'Wiskunde als kunst om de kunst of als spel om het spel' enerzijds en 'Nuttige wiskunde voor het dagelijkse leven en de toepassingen in andere activiteiten' anderzijds. Voor de leerlingen zullen beide facetten aan de orde komen, maar niet voor allen op dezelfde manier en in dezelfde omvang.

De cultuurfactor verwijst overigens naar het totaal van het onderwijsprogramma in een bepaalde school. En toepassing spreekt wellicht sterker aan wanneer er een relatie is met andere aangeboden leerstof op de school.

Wiskundige kennis is nuttig in 'adult life', al was het maar om kritisch om te kunnen gaan met eenvoudige kranteberichten. Voor sommigen zal bij latere studies de wiskunde nuttig zijn als hulpmiddel om fundamentele kennis van de natuur te verwerven of om technische constructies te realiseren.

Meetkunde is een vak waarin zowel het nuttige karakter als het 'spel'karakter een duidelijke plaats heeft. Maar ook getallen hebben geheimen, die voor kinderen boeiend kunnen zijn.

Abstractie voert niet noodzakelijk tot 'more general abstract nonsense' maar kan ook voeren naar meer inzicht in de samenhang van op het eerste gezicht verschillende fenomenen.

De invulling in details van de vijf bovengenoemde lijnen en hun onderlinge verhouding zal in verschillende klassen niet dezelfde zijn. De experimenteerscholen kennen zowel homogene als heterogene eerste klassen. De bevolking van de eerste klassen past niet bij de bovengenoemde stromen. In een categorale lbo of mavo eerste klas is nog niet duidelijk op welk niveau wiskunde in het eindpakket zal voorkomen.
In een categorale vwo-school is in de eerste klas duidelijk dat de leerling na vier jaar de wiskunde in zijn of haar eindexamenpakket zal kiezen. Daarnaast zullen in scholengemeenschappen eerste klassen voorkomen waarin alle leerlingen nog samen zijn en pas in de loop van de eerste jaren een keuze lbo, mavo, havo of vwo gemaakt zal worden.

In vrijwel alle gevallen zijn de derde klassen ingepast in een vast einddoel (mavo/lbo examen of havo/vwo examen).
Het is de verantwoording van de ouders te beslissen of het onderwijs aan een categorale school of wel aan een scholengemeenschap met min of meer heterogene brugperiode gevolgd zal worden. Het is de verantwoording van de school op welke wijze heterogene of homogene brugklassen gevormd worden. Wanneer in de negentiger jaren de structuur van de verschillende typen voortgezet onderwijs nog hetzelfde zal zijn, zal het nieuwe programma voor de wiskunde voor de leeftijdsgroep 12-16, daarmee rekening dienen te houden.

Het raamplan moet dus zowel elementen bevatten die voorbereiden op wiskundeonderwijs met het bestaande (vernieuwde) leerplan en examenprogramma havo en vwo, als elementen die zinvol zijn voor hen die in de vierde klas de wiskunde met een examen lbo/mavo afsluiten. Voor het examenprogramma van het laatste type moet natuurlijk ook met doorstroming naar vervolgonderwijs rekening gehouden worden. Daar het tijdstip waarop de leerlingen gesplitst worden in groepen die verschillend onderwijs gaan volgen van school tot school erg verschillend kan zijn, willen we een toekomstig wiskundeprogramma zo ontwerpen dat de leerlingen starten met een gemeenschappelijk programma dat na verloop van tijd kan uitmonden in onderling verschillende (deel)programma's.

Ook binnen het gemeenschappelijke programma zal recht gedaan moeten worden aan de verschillen tussen de leerlingen. Maar voor alle leerlingen zal het wiskundeonderwijs op hun eigen niveau een uitdaging moeten bevatten. Daarnaast zal iedere leerling een eigen tijd en leerweg nodig hebben om de noodzakelijke vaardigheden te verwerven. Wij denken dat in eerste instantie binnen hetzelfde programma aan deze verschillen tegemoet gekomen kan worden door differentiatie binnen klassikale interactie, bij groepswerk, of

door niveaudifferentiatie bij verwerkingsopdrachten. Deze differentiatie kan tot uitdrukking komen in verschillende opdrachten, maar kan ook spontaan plaatsvinden, doordat een opgave verschillende oplossingsniveaus toelaat en de leerling zelf bepaalt hoe hij/zij de opgave maakt.
Het is ook van belang in het nieuwe programma te zorgen voor voldoende aanknopingspunten, waarmee leerlingen zelf zicht kunnen krijgen op eigen kennen en kunnen in de wiskundeles. Het risico dat determinatie op oneigenlijke gronden plaatsvindt is niet denkbeeldig. Leerlingen moeten in de eerste fase van het voortgezet onderwijs via het aangeboden wiskundeonderwijs voldoende gelegenheid krijgen die wiskunde te leren die aansluit bij hun mogelijkheden en interesse, zodat zij zich een beeld kunnen vormen van hun eigen capaciteiten op het gebied van wiskunde.
De uitwerking van die delen van het raamplan, die in de derde en vierde klas onderwezen worden zal verschillend zijn voor de genoemde stromen.
Voor de eerste en gedeeltelijk tweede klas zal bij de experimenten rekening gehouden moeten worden met de verschillen van de klassesamenstelling in de verschillende experimenteerscholen. Bij de definitieve vormgeving van het programma, hetgeen mede door de te gebruiken leerboeken zal gebeuren, zullen vermoedelijk zowel leerlingenteksten voor homogene als voor heterogene klassen ontwikkeld worden.
De rekenlijn zal bijvoorbeeld op een categorale lbo-school anders uitgewerkt moeten worden dan voor een categorale vwo-school. Een heterogene school vraagt weer een andere uitwerking. De rekenvaardigheid was immers een van de criteria die gebruikt zijn om tot de plaatsing van de leerling in het ene of andere type school te komen.
De oorzaken en de aard van de verschillen kunnen echter zeer divers zijn. We hebben te maken met verschillen in motivatie en aanleg, maar deze worden nog eens gecompliceerd door de verschillen in gebruikte reken/wiskundemethode.
De grote verschillen eind basisonderwijs worden in categorale scholen opgevangen door een verschil in leerstofaanbod. Binnen heterogene klassen wordt gekozen voor een gemeenschappelijk aanbod en wordt de inbreng van de betere leerlingen benut om de zwakkere mee te trekken. Heterogeen onderwijs kan daarom leiden tot een meer homogene uitstroom. Categoraal onderwijs kan daarentegen leiden tot een vergroting van de verschillen, hoewel niet uitgesloten geacht moet worden dat ook zwakkere leerlingen kunnen profiteren van specifiek op hun niveau toegesneden onderwijs.
Voor welke organisatievorm in de eerste twee klassen gekozen wordt, achten wij de verantwoordelijkheid van de school en de ouders. Een consequentie van dit standpunt is dat het project zowel voor categoraal georganiseerde als voor heterogeen georganiseerde scholen voorbeelden uit zal moeten werken. In eerste instantie denken we aan de ontwikkeling van materialen die passend zijn voor de situatie op de experimenterende A- en B-scholen.

Het verschil tussen a, b, c en d-examenprogramma's voor het lbo (mavo) zal beïnvloed worden door doorstroomrechten en het al dan niet aanwezig zijn van een centrale toetsing. Wellicht is het zinnig daar waar deze toetsing niet aanwezig is, voorbeelden te kiezen die aansluiten bij de reeds genomen beroepskeuze in de betreffende richting van het lbo. Op dit moment is er in feite geen sprake van een b-programma, wel zijn er leerlingen die het c-programma volgen maar geen c-examen doen. Wij pleiten voor de ontwikkeling van een zelfstandig b-programma. Dat zou het onderstroomprogramma kunnen worden voor de leerlingen voor wie dit wiskundeonderwijs eindonderwijs is. Een dergelijk programma zou naast een beroepsgerichte differentiatie vooral aandacht moeten besteden aan alledaagse wiskunde. Dit zou inhouden dat de leerling aan het einde van het tweede jaar kiest voor wel of geen wiskunde op het eindexamen.
Voor de leerlingen die wel een wiskunde-examen doen zullen de nu bestaande doorstromingsrechten behouden moeten blijven. In de praktijk van het werken op de experimenteerscholen betekent dit het maken van een nieuw eindexamenprogramma voor mavo en lbo met dezelfde rechten als het huidige c- en d-programma.

Om welke leerlingen gaat het in onze experimenteerscholen? Om de leerlingen die het havo/vwo-programma volgen in drie jaar en de leerlingen die mavo/lbo-c/d-examen doen na vier jaar. Uiteraard zijn hierbinnen grote verschillen. De rechten van doorstroming zijn verschillend: een mavo c-wiskunde geeft geen toelating tot de vierde klas havo, mavo-d wel, al stelt
een school voor havo soms wel eisen aan het cijfer voor wiskunde. Leerlingen van de derde klas havo kunnen overgaan naar de vierde klas havo met een onvoldoende voor wiskunde en zullen toch wiskunde in hun pakket hebben. Tussen mavo en lbo zijn er vaak nog verschillen in de lessentabel; meestal hebben de lbo-leerlingen minder lesuren om zich voor te bereiden op het examen dan de mavo-leerlingen.
Wie de examenopgaven voor mavo/lbo-c/d bekijkt, ziet vooral verschillen tussen c en d wat de omvang van de examenstof betreft. Het onderwijs voor het d-examen is te omschrijven als dat voor het c-examen plus een zestigtal lessen over aanpalende onderwerpen. Voor leerlingen van mavo en lbo is verandering van het examenprogramma het meest urgent om tot een ander wiskundeonderwijs te kunnen komen. De inhoud van de examens mavo/lbo-c/d is een afspiegeling van wiskunde met een sterk trucmatig karakter, met name de vierkeuzetoetsen illustreren een weetjes-en trucjeswiskunde. De leerlingen van de derde klas havo en vwo, die een door de school gecontroleerde overgang naar de vierde klas ondergaan, ontkomen aan deze examendruk.

Bij het programma dat leidt naar de vierde klassen havo zal de mogelijkheid ingebouwd moeten worden om tot een verantwoorde keuze tussen de te verwachten examenvakken wiskunde A en B op het havo te komen. De voor deze programma's noodzakelijke vaardigheden (en kennis) zullen in de derde klas aangebracht moeten zijn.
In het vwo vindt de keuze wiskunde A of B, of beide, pas plaats in het vierde leerjaar, het is de bedoeling dat in dit vierde leerjaar die onderwerpen aan de orde komen die het karakter van wiskunde A resp. wiskunde B duidelijk maken.
Aan wat voor wiskundeonderwijs in de voorafgaande jaren denken we?
Wiskundeonderwijs waarbij ook deze leerlingen uitgedaagd worden. Dat betekent een nadruk op het oplossen van problemen, waarbij de leerlingen de wiskunde verkennen, zich verbazen en de nodige theorie leren om nieuwe wiskundige problemen aan te kunnen. Vaardigheden op het gebied van rekenen zullen zij zeker nodig hebben.
Aan welke leerlingen van onze experimenteerscholen denken we dan?
Een groot aantal van deze leerlingen zit in het huidige vwo; een aantal leerlingen die dit bovenstroomprogramma aan zouden kunnen, zit in het huidige havo, mavo of lbo.
Voor een aantal van de leerlingen in klas 3 vwo is het met succes afsluiten van dit wiskundeonderwijs van de bovenstroom niet weggelegd.
Momenteel staan veel vwo-leerlingen droog bij een tamelijk steriel wiskundeprogramma waarin de moeilijkheid meer zit in letterrekenen, abstracties en het kennen van (school)conventies dan in het oplossen van moeilijke problemen. Een zelfstandige probleemaanpak waarbij ook tal van reeds bestaande computerprogramma's, zoals bijvoorbeeld spreadsheet en grafiekenprogramma's een rol spelen, wordt nagestreefd.

7 Relatie met andere stukken

het Plan

Als start van de werkzaamheden aan de vernieuwing van het wiskundeonderwijs in de eerste fase van het voortgezet onderwijs is door de COW (Commissie Ontwikkeling Wiskundeonderwijs) een plan opgesteld. Dit plan schetst in grote lijnen de aanpak van het werk. Het bevat een ontwikkelingslijn en het geeft de kaders aan waarbinnen het werk moet gebeuren, de beschikbare faciliteiten en de relaties met de verschillende betrokken instellingen zoals SLO, OW&OC, CITO, LPC en de initiële opleidingen. Verder staan in het plan aanbevelingen op het gebied van onderzoek en leerplanevaluatie. Het plan eindigt met enkele inhoudelijke adviezen voor het werk.

eindtermen

In het kader van de discussies over de invoering van de Wet op de Basisvorming heeft de COW op verzoek van het Ministerie van O&W voor het vak wiskunde de zogenaamde eindtermen beschreven. Deze eindtermen zijn voorlopig vastgesteld, omdat een meer definitieve formulering van eindtermen pas na het werk van het team W12-16 kan plaatsvinden. Na een verantwoording, criteria en algemene doelen volgt de beschrijving van de globale leerdoelen. Deze worden geschetst aan de hand van leerstofgebieden, die iets anders benoemd zijn dan in dit raamplan. Het is alleen een kleine afwijking in terminologie.

De volgende uitgangspunten vormden de gemeenschappelijke basis voor zowel het opstellen van de eindtermen als voor het schrijven van dit raamplan:

1. Wiskundeonderwijs vindt plaats in voor leerlingen herkenbare situaties.
2. In het wiskundeonderwijs staat het actief en wiskundig verantwoord bezig zijn met het oplossen van problemen centraal.
3. Wiskunde is nuttig
   - in het gebruik ervan bij andere vakken op school;
   - in het gebruik ervan bij niet-wiskundige probleemsituaties buiten school, in voortgezette opleidingen, in later beroepsleven, in anders dan beroepsmatig maatschappelijk functioneren;
   - bij het werken aan wiskundige problemen;
   - bij het onderzoeken van de rol van wiskunde als historisch en cultureel verschijnsel in onze samenleving.

4. De individuele leerling krijgt een goed beeld van haar/zijn vermogens om wiskunde te leren en in de praktijk te brengen, en wordt in staat gesteld in samenwerking met anderen overeenkomstig die vermogens te werken.
5. Wiskundeonderwijs sluit aan bij verschillende vormen van vervolgonderwijs.

Naast de beschrijving van leerstof die zowel in dit raamplan als in de eindtermen centraal staat, wordt er binnen het team W12-16 ook aan andere produkten gewerkt.

nascholings- en voorlichtingsplan

In een eerste voorlopige schets zijn aanzetten gegeven voor de opzet van een passende nascholing bij een vernieuwd wiskundeprogramma. Immers voor een goede implementatie van zo'n nieuw programma is een nascholingsopzet, die aansluit bij de behoeften en mogelijkheden van de onderwijsgevenden van essentieel belang. Het werk is erop gericht te komen tot een eigentijdse aanpak van de nascholing, die aan de ene kant tegemoet komt aan wensen en behoeften van scholen en docenten en aan de andere kant voldoende garantie biedt voor een adequate voorbereiding en begeleiding van docenten om het nieuwe leerplan en bijbehorende examenprogramma te kunnen uitvoeren.

In de nascholingsnota zal aandacht besteed worden aan de werkwijze in de klas en de mogelijk andere vaardigheden die van docenten gevraagd worden bij het werken met het nieuwe programma. Ons staat immers een wiskundeonderwijs voor ogen waarin interactie tussen docent en leerlingen, maar ook tussen leerlingen onderling een grote rol speelt. Ook het werken met wiskundige practica en het hanteren van de computer in de wiskundeles stellen eisen aan vaardigheden van docenten.
Behalve wiskundedocenten zullen ook andere betrokkenen geïnformeerd worden over de veranderingen in het wiskundeonderwijs in de eerste fase van het voortgezet onderwijs. Wij denken daarbij bijvoorbeeld aan ouders, basisschooldocenten, docenten in het vervolgonderwijs, maar ook aan schoolleiding en decanen. Ook deze voorlichtende taak zien wij als essentieel voor het welslagen van de vernieuwingen.

intercultureel wiskundeonderwijs
Op middenniveau wordt ook gewerkt aan een bundel over de positie van allochtonen in het wiskundeonderwijs en de mogelijkheden voor intercultureel onderwijs bij wiskunde. Deze bundel bevat ook artikelen van anderen, die een bijdrage kunnen leveren om de discussie over dit 'nieuwe thema' op gang te brengen. De bedoeling is om uiteindelijk met aanbevelingen te komen.

criteria voor emancipatorisch wiskundeonderwijs
Het team werkt ook aan het opstellen van criteria voor emancipatorisch en roldoorbrekend onderwijs. Daarbij gaat het voorlopig vooral om criteria voor het beoordelen van lesmaterialen en om een handleiding die van dienst kan zijn bij het ontwikkelen van materiaal, waarbij met dit emancipatorische aspect rekening wordt gehouden.

leerlingmaterialen
Materialen die op leerlingniveau zijn of worden uitgewerkt verkeren op dit moment in verschillende stadia. Sommige worden op grote schaal op de experimenteerscholen uitgeprobeerd, andere verkeren nog in een priller stadium. Over de ervaringen hiermee wordt naar buiten getreden op conferenties en studiedagen of er wordt over gepubliceerd in de bladen voor wiskundeonderwijs.

Bijlage A

Examenprogramma's mavo/lbo-cd

Programma MAVO-C	Programma MAVO-D
Bij het schoolonderzoek en het schriftelijk examen wordt onderzocht in hoeverre de kandidaat kennis heeft van en inzicht heeft in de volgende onderwerpen:	Bij het schoolonderzoek en bij het schriftelijk examen wordt onderzocht in hoeverre de kandidaat kennis heeft van - en inzicht heeft in de volgende onderwerpen:
1 Eenvoudige beschrijvende statistiek.	1 Beschrijvende statistiek
2 Relaties; de grafiek van een eerstegraads relatie.	2 Relaties: in het bijzonder eerstegraads relaties; grafieken. In het vlak; vergelijkingen van een lijn en cirkel; snijpunten en raaklijnen, hoeken en afstanden.
3 Functies: de grafiek van een functie; eerstegraads functies en eenvoudige tweedegraads functies.	3 Functies: de grafiek van een functie; in het bijzonder eerstegraads en tweedegraads functies.
4 Eerstegraads vergelijkingen en ongelijkheden met één veranderlijke.	4 Eerstegraads vergelijkingen en ongelijkheden met één veranderlijke.
5 Twee eerstegraads vergelijkingen met 2 veranderlijken.	5 Twee eerstegraads vergelijkingen met twee veranderlijken; eerstegraads ongelijkheden met twee veranderlijken.
6 Eenvoudige tweedegraads vergelijkingen.	6 Tweedegraads vergelijkingen en ongelijkheden.
7 Lijnspiegeling; puntspiegeling; translatie; rotatie; vermenigvuldiging; congruentie en gelijkvormigheid van figuren.	7 Lijnspiegeling; puntspiegeling; translatie; rotatie; vermenigvuldiging; congruentie en gelijkvormigheid van figuren. Vectoren in het vlak.
8 Metriek: lengten, oppervlakten en inhouden; de stelling van Pythagoras; Puntverzamelingen in het vlak.	8 Metriek: lengten, oppervlakten en inhouden; de stelling van Pythagoras; Puntverzamelingen in het vlak.
9 Eenvoudige berekeningen van hoeken en afstanden in het vlak en in de ruimte.	9 Berekeningen van hoeken en afstanden in het vlak en in de ruimte.
10 De goniometrische verhoudingen sinus, cosinus en tangens.	10 De goniometrische verhoudinoen sinus, cosinus en tangens; sinusregel en cosinusregel.

Bijlage B

Leerplan Rijksscholen

Wiskunde

Eerste leerjaar:

Verzamelingen.
De verzameling van de natuurlijke getallen; de verzameling van de gehele getallen; de verzameling van de rationale getallen; getallenlijn, ordening. In elk van de genoemde verzamelingen: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen, machtsverheffen met gehele positieve exponenten.
Eenvoudige eerstegraads vergelijkingen en ongelijkheden met één veranderlijke.
De commutatieve, associatieve en distributieve eigenschappen; toepassingen op enkele produkten en ontbindingen.
Inleiding in de meetkunde: kubus, rechthoekig blok, vlak, lijn, punt, hoek, afstand, driehoek, vierhoek, cirkel.
Afbeeldingen: lijnspiegeling, puntspiegeling, translatie, rotatie.
Evenwijdigheid van lijnen.
Congruentie van figuren.
Eigenschappen van driehoeken en van de vierhoeken: vlieger, parallellogram, ruit, rechthoek, vierkant.
Eenvoudige puntverzamelingen en hun doorsneden.

V.W.O.

Tweede, derde en vierde leerjaar:

Verzamelingen in verband met elementaire logische operaties; toepassingen op eerstegraads vergelijkingen en ongelijkheden en op puntverzamelingen.
De verzameling van de reële getallen.
Tweedegraadswortels; tweedegraads vergelijkingen en ongelijkheden.
Samenstellen van twee spiegelingen en van twee translaties.
Vectoren; rekenen met vectoren; verband tussen vectorcomponenten coördinaten van een punt.
Vermenigvuldigen van figuren; zwaartepunt van een driehoek; gelijkvormigheidsafbeelding; gelijkvormigheid van figuren; enkele eigenschappen van rechthoekige driehoeken; de goniometrische verhoudingen sin, cos en tan; sinusregel en cosinusregel.
Berekeningen van hoeken en afstanden in het vlak en in de ruimte.
Relaties; de grafiek van een relatie: de relaties $\{(x,y) | ax + by + c \gtreqless 0\}$; twee vergelijkingen of ongelijkheden met twee veranderlijken; reflexieve, symmetrische, transitieve relaties, equivalentierelaties.
Functies: de grafiek van een functie; eerstegraads en tweedegraads functies; absolute waarde; projectie; lengte; oppervlakte; inhoud; rijen; rekenkundige rijen, meetkundige rijen; permutaties en combinaties; inverse functie; wortelfunctie; samenstellen van functies.
Machten met reële exponenten; logaritmen.
Inleiding tot de differentiaalrekening.
Inleiding tot de beschrijvende statistiek.

H.A.V.O.

Tweede en derde leerjaar:

Irrationale getallen.
Metriek: lengten, oppervlakten en inhouden; enkele eigenschappen van rechthoekige driehoeken.
Eerstegraads vergelijkingen en ongelijkheden met één veranderlijke.
Relaties: de grafiek van een eerstegraads relatie; twee eerstegraads vergelijkingen met twee veranderlijken; eerstegraads ongelijkheden met twee veranderlijken.
Puntverzamelingen in het vlak.
Functies; de grafiek van een functie; eerstegraads en tweedegraads functies; tweedegraads vergelijkingen en ongelijkheden.
Vectoren in het vlak; vermenigvuldiging; gelijkvormigheid van figuren.
Beginselen van de beschrijvende statistiek.
De goniometrische verhoudingen, sin, cos en tan; sinusregel en cosinusregel.
Eenvoudige berekeningen van hoeken en afstanden in het vlak en in de ruimte.

M.A.V.O.

Tweede leerjaar of tweede en derde leerjaar
(verplicht programma voor de in de basistabel genoemde lessen):

Irrationale getallen.
Metriek: lengten, oppervlakten en inhouden; de stelling van Pythagoras.
Eerstegraads vergelijkingen en ongelijkheden met één veranderlijke.
Relaties: de grafiek van een eerstegraads relatie; twee eerstegraads vergelijkingen met twee veranderlijken.
Puntverzamelingen met twee veranderlijken.
Puntverzamelingen in het vlak.
Functies; de grafiek van een functie; eerstegraads en eenvoudige tweedegraads functies; eenvoudige tweedegraads vergelijkingen.
Inleiding tot de beschrijvende statistiek.

Derde en vierde leerjaar
(bovendien voor de leerlingen die wiskunde als examenvak kiezen):

Eerstegraads ongelijkheden met twee veranderlijken.
Tweedegraads functies, vergelijkingen en ongelijkheden.
Vectoren in het vlak; vermenigvuldiging; gelijkvormigheid van figuren.
De goniometrische verhoudingen sin, cos en tan; sinusregel en cosinusregel.
Berekeningen van hoeken en afstanden in het vlak en in de ruimte.
In het vlak: vergelijkingen van lijn en cirkel; snijpunten en raaklijnen; hoeken en afstanden.
Uitbreiding van de beschrijvende statistiek.

archief FI 02.01.13

Raamplan