

WISKUNDE B-DAG 2009

vrijdag 20 november

How to
crash
crash
crash
a dot



De Wiskunde B-dag wordt mede mogelijk gemaakt door



Vooraf

Tijdens deze Wiskunde B-dag bestudeer je een spel dat is bedacht in de jaren '70 van de vorige eeuw. Het was één van de eerste computerspelletjes. Het spel is in principe heel simpel, want computers konden toen nog niet zoveel. Dus ga vooral niet via internet zoeken naar het spel, want op de meeste computers werkt het spel niet meer en je hebt er weinig aan voor de opgave zoals die hier is geformuleerd. Wij gaan vooral kijken naar de wiskunde achter het spel!

De indeling van de opdracht

Deze Wiskunde B-dag opdracht omvat de volgende onderdelen:

Deel 1 Aanzet

Hier worden de spelregels geformuleerd waarmee je een stip langs roosterpunten kunt laten bewegen en je krijgt de gelegenheid om de regels van het spel te leren gebruiken. Dat is erg belangrijk om er voor te zorgen dat je een goed beeld krijgt van de opdrachten die in het vervolg worden geformuleerd, maar de vragen (we noemen ze "aanzetten") in dit deel zijn het niet echt waard om in je verslag op te nemen.

Deel 2 Racen langs een rechte horizontale lijn

In dit deel verken je het geval van bewegingen in één dimensie. Hoe gebruik je de regels om een stip zo te laten bewegen dat het gehoorzaamt aan jouw acties? Resultaten van dit deel zijn zeker nuttig om op te nemen in je verslag!

Deel 3 Racen in twee dimensies

Vervolgens worden de bewegingen in zowel horizontale als verticale richting bekeken. Daarbij kun je gebruik maken van de resultaten die je hebt gevonden bij deel 2. Ook hiervoor geldt dat gevonden resultaten het waard zijn om op te nemen in het verslag.

Deel 4 De slotopdrachten

In dit deel worden drie verschillende eindopdrachten geformuleerd, waarbij je zelf een keuze moet maken tussen:

- alle drie behandelen en het risico lopen om er oppervlakkig over te rapporteren
- of
- een verstandige keuze maken en daarover uitgebreid en zorgvuldig te rapporteren.

Dagindeling

Het lijkt verstandig om als team de tijd te nemen om de spelregels (deel 1) heel goed in de vingers te krijgen. Daarna zijn de delen 2 en 3 bedoeld om de wiskundige aspecten van dit spel goed te doorgronden. Verdeling van taken binnen het team kan daarbij goed werken, maar onderling overleggen over gevonden resultaten moet zeker ook plaatsvinden. Uiteindelijk ligt de uitdaging om bij één of meerdere van de slotopdrachten (deel 4) een goede, met wiskundige argumenten onderbouwde, route te vinden die in de mening van jullie als team de beste is. Zorg er daarom voor dat deze eindopdracht voldoende tijd krijgt.

Globaal resulteert dit in het volgende advies:

- Neem een uur (in ieder geval voldoende tijd) om deel 1 grondig door te werken en onderling te bespreken;
- Gebruik de tijd van 10 tot 12 uur om de delen 2 en 3 door te werken en te bespreken;
- Werk aan deel 4 en beslis welk onderdeel / welke onderdelen worden opgenomen in het verslag;
- Bedenk dat je het verslag om 16 uur moet inleveren en deel daarop je denk- en werktijd goed in!

Hulpmiddelen bij deze opdracht

Je hebt vast veel ruitjespapier nodig. Met name in het begin helpt het om veel tekeningen te maken om het spel goed in de vingers te krijgen.

De (grafische) rekenmachine zal je niet echt nodig hebben!

Vanaf deel 3 is er een Excel bestand beschikbaar, waarmee je heel makkelijk routes die je noteert in 'knoppentaal' kunt laten tekenen. Daarvan kun je gebruik maken; het is niet verplicht!
In een bijlage wordt de werking van dat Excel bestand uitgelegd.

Het eindproduct

Je uiteindelijke verslag moet goed leesbaar zijn voor iemand die niet van te voren al weet waar de opgave over gaat. Dat betekent dat je helder moet beschrijven waar het om gaat, onder andere de regels van het spel, en wat je als team hebt onderzocht.

Natuurlijk mag je in het verslag de afzonderlijke opgaven volgen. Maar het is ook goed denkbaar dat je een verslag inlevert dat uitgaat van de slotopdracht(en) die je bij deel 4 hebt gekozen, met daarbij een grondige verantwoording, waarbij wordt gebruik gemaakt van elementen die in de delen 1, 2 en 3 zijn aangekaart en door jullie zijn onderzocht.

Verdere tips:

- lever een goed kopieerbaar verslag in. Als je handgeschreven stukken toevoegt, zorg dan voor zwarte inkt omdat dit beter kopieert dan andere kleuren.
- let op het feit dat je verslag leesbaar moet zijn zonder dat de lezer de opgave bij de hand heeft.

Tenslotte...

We hopen dat jullie als team plezier hebben bij het werken aan deze opdracht.
Daarom vanuit het ontwerpteam de volgende wens:

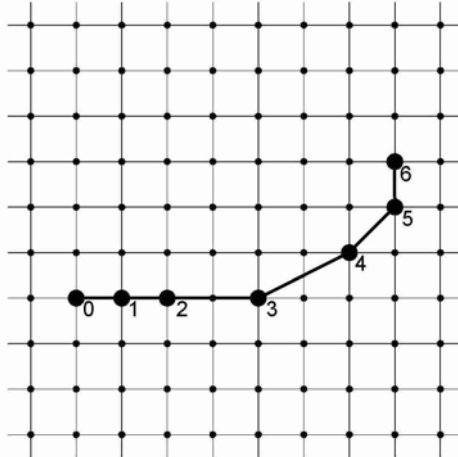
Veel plezier en succes

Deel 1 Aanzet en ook: Aan Zet

In dit eerste deel oefen je vooral met de regels van het spel. Het is dus een aanzet voor de volgende delen. En omdat het spel bestaat uit het doen van zetten, ben je zelf steeds “aan zet”.

Turnracer kun je in je eentje spelen (hoewel het ook leuk is om tegen iemand anders te racen). Het speelveld bestaat uit een rooster van horizontale en verticale lijnen.

Je bevindt je ergens (aangegeven door een dikke stip) in dit veld op een snijpunt van roosterlijnen, dus in een roosterpunt. In de loop van het spel beweegt de stip in een aantal zetten over het veld; daarbij bereikt de stip steeds nieuwe posities op het veld.



Dat kan bijvoorbeeld op deze manier:

De getallen in de figuur staan voor de posities die je achtereenvolgens bereikt; die posities zijn gekoppeld aan de zetten. Je begint bij positie 0; dat is het startpunt van de stip.

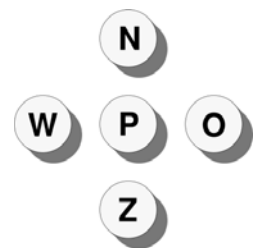
Na de eerste zet is de stip in positie 1 aangekomen, na de tweede zet is de stip in positie 2 aangekomen, enzovoorts.

Hoe bepaal je nu de route die de stip aflegt?

Daarvoor heb je de beschikking over een aantal knoppen die je kunt activeren. Je bedient het spel met vijf knoppen (zie tekening hiernaast).

Iedere zet druk je op één van de vijf knoppen. Met het indrukken van een knop beïnvloed je de *snelheid* van de stip tijdens die zet en ook de richting waarin de stip langs een rechte lijn beweegt (O=oost, N=noord, W=west en Z=zuid).

Als je de snelheid bij een zet *niet* wilt veranderen, dan druk je op de knop P (van Pass).



De route in bovenstaande figuur krijg je nu op de volgende manier:

Bij de start staat de stip stil in positie 0.

Zet 1: Druk op O. De snelheid van de stip wordt hierdoor: één vakje per zet naar rechts. Na zet 1 is de stip dus één vakje naar rechts opgeschoven en is in positie 1.

Zet 2: Druk op P. De snelheid verandert dan niet. De snelheid was: één vakje per zet naar rechts en dit blijft zo. Na zet 2 is de stip dus weer één vakje opgeschoven en komt in positie 2.

Zet 3: Druk op O. Bij de snelheid moet je nu één vakje in oostelijke richting optellen. De snelheid wordt dus: twee vakjes per zet naar rechts. Na zet 3 is de stip dus twee vakjes opgeschoven en in positie 3 aangekomen.

Zet 4: Druk op N (Noord). Bij de snelheid komt nu ook een component omhoog: twee vakjes per zet naar rechts (dat was het al) **en** één vakje per zet omhoog. Het punt beweegt dus nu schuin omhoog en komt aan in positie 4.

Zet 5: Druk op W. De snelheid wordt nu: per zet één vakje naar rechts en één vakje omhoog. Dus weer schuin omhoog naar positie 5.

Aanzet 1

- Op welke knop is in zet 6 gedrukt?
- Op welke knop moet je drukken, als je de stip in zet 7 wilt stilzetten?
- Had je de stip ook in zet 5 al kunnen stilzetten?

Het is handig om een reeks zetten te beschrijven met 'knoppentaal'.
Zo betekent bijvoorbeeld de knoppenreeks

NNWZZPPZ

'Druk bij de eerste zet op N, bij de tweede zet op N, bij de derde zet op W, ...'

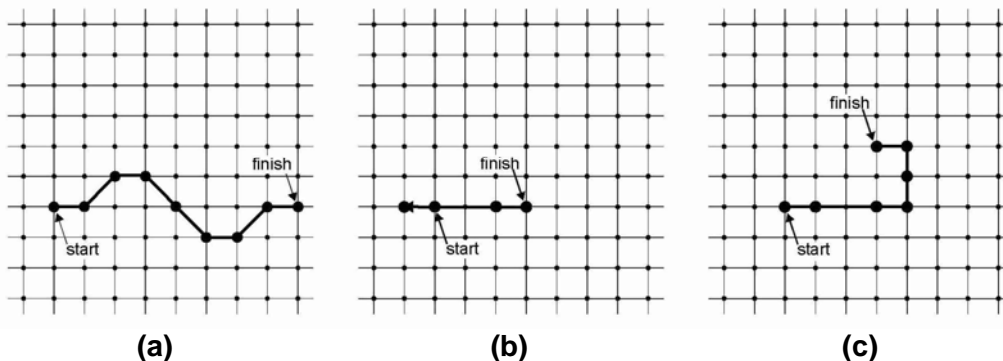
We spreken af dat je **altijd vanuit stilstand begint**.

Aanzet 2

- Teken de route die hoort bij de knoppenreeks NNWZZPPZ.
- Je wilt naar een punt dat vier hokjes naar links en drie omhoog ligt ten opzichte van het startpunt. Beschrijf een knoppenreeks die dit doet.
Je hoeft aan het einde niet stil te staan, maar je moet wel precies in dat punt aankomen.

Aanzet 3

Wat moet je doen om de volgende routes te maken?
Let op: soms ben je meerdere zetten op dezelfde positie!



Aanzet 4

Waarom kun je een haakse bocht (90°) alleen maken als je in de bocht een zet stilstaat?

Het doel van het spel is om zo snel mogelijk van het startpunt naar een gegeven eindpunt te komen. '*Zo snel mogelijk*' betekent '*in zo min mogelijk zetten*', dus met zo min mogelijk drukken op een knop.

Met de laatste zet moet de stip wel precies in het bedoelde eindpunt eindigen en er niet overheen gaan. Welke snelheid de stip bij aankomst in dat eindpunt heeft is niet belangrijk.

Aanzet 5

Je wilt vanaf het startpunt vier vakjes naar rechts.

- Waarom lukt dat niet in twee zetten?
- Hoe kan het in drie zetten?
- Zoek alle manieren om in drie of in vier zetten 4 vakjes naar rechts te gaan. Geef ook steeds de eindsnelheid die bij deze manier hoort.

Deel 2 Racen langs een rechte horizontale lijn

Een belangrijke vraag is: hoe kan ik in zo min mogelijk zetten een bepaalde positie bereiken? Voor het gemak zullen we ons eerst bezighouden met alleen *horizontale* bewegingen. De knoppen N en Z doen dus nu even niet mee.

Opgave 1

- a. Vergelijk de volgende knoppenreeksen (steeds 5 keer O en 1 keer P en de laatste reeks met alleen 5 keer O):

OOOOOP
OOOOPO
OOOPOO
OOPOOO
OPOOOO
POOOOO
OOOOO

Met welke knoppenreeks kom je het verst?

Zoals je ziet, is het moment waarop je gebruik maakt van knop P belangrijk voor het bereiken van verschillende posities.

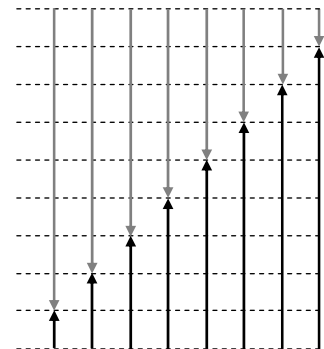
- b. Beredeneer dat je iedere willekeurige, gehele afstand (dus 1, 2, 3, ...) rechts van het startpunt (dus in oostelijke richting) kunt afleggen door alleen maar op O en *hoogstens één* keer op P te drukken. Het aantal zetten wat daarvoor nodig is moet je zelf kiezen.

Opgave 2

- a. Je drukt, vanuit stilstand, 8 zetten lang alleen maar op O. Toon aan dat de positie die je dan hebt bereikt, gevonden kan

worden met de berekening: $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot (8 + 1)$

Hint. Hiernaast zie je een plaatje waarin de achtereenvolgende afstanden die per zet worden afgelegd als zwarte pijlen zichtbaar zijn. Ze zijn ook, geroteerd over 180 graden, als grijze pijlen boven op de zwarte pijlen geplaatst. Hoe kun je nu hiermee de som van de lengtes van de zwarte pijlen berekenen?



- b. Nu doe je, vanuit stilstand, n zetten waarbij je steeds alleen maar op O drukt.

Toon aan dat de positie die je dan hebt bereikt gegeven wordt door $\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n + 1)$

Opgave 3

- a. Bekijk nog eens de reeksen van zes zetten waarmee opgave 1 begon. Wat is in al die gevallen de eindsnelheid?
- b. Formuleer een algemene uitspraak over de eindsnelheid na een serie zetten waarin je alleen de knoppen P en O gebruikt.

Opgave 4

Je doet, vanuit stilstand, n zetten waarbij je alleen maar drukt op W en O. Welke posities kun je na die n zetten hebben bereikt?

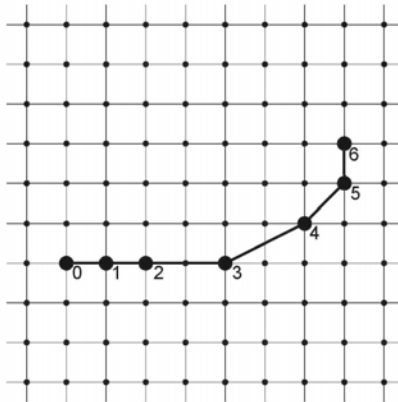
In de volgende opgave wordt een extra eis opgelegd. Je moet niet alleen in een gegeven positie aankomen, maar daar ook tot stilstand komen.

Opgave 5

Beschrijf een manier om, voor een gegeven positief geheel getal x , in zo min mogelijk zetten **precies** x vakjes naar rechts te gaan. Zorg er voor dat daarbij je eindsnelheid nul is. Je mag de knoppen O, P en W gebruiken.

Deel 3 Racen in twee dimensies

We keren nu terug naar het hele veld: de knoppen N en Z doen dus nu ook weer mee. Het is handig om x - en y -coördinaten te gebruiken voor de punten in het veld. Je begint altijd in $(0,0)$. Hier zie je nog eens de route die in Deel 1 is beschreven met zetten:



Deze route, met startpunt $(0,0)$, kan als volgt worden weergegeven in een tabel:

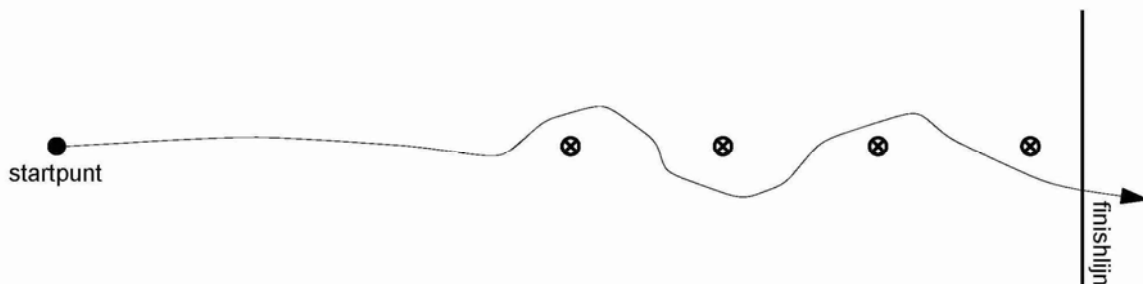
zet	actie	Snelheid tijdens zet	Positie na zet
1	O	$(1,0)$	$(1,0)$
2	P	$(1,0)$	$(2,0)$
3	O	$(2,0)$	$(4,0)$
4	N	$(2,1)$	$(6,1)$
5	W	$(1,1)$	$(7,2)$
6	W	$(0,1)$	$(7,3)$

De vierde zet, die start vanuit de positie $(4,0)$, is de actie "druk op N". Daardoor wordt de snelheid bepaald door 2 stappen naar rechts en 1 stap omhoog, weergegeven als $(2,1)$, en daardoor eindigt zet 4 in positie $(6,1)$.

Er is ook een Excel-bestand beschikbaar, waarmee je snel routes kunt laten tekenen. Dat kan handig zijn. Uiteraard ben je vrij om het bestand niet te gebruiken. In de bijlage vind je een beknopte beschrijving van het gebruik van dat bestand.

Opgave 6

Eén van de spelletjes die je kunt doen, is slalommen. Je staat stil in $(0,0)$. Het doel is om zo snel mogelijk de finishlijn $x = 200$ te passeren. Op weg naar de finish moet je echter om de punten $(100,0)$, $(130,0)$, $(160,0)$ en $(190,0)$ heen slalommen, bijvoorbeeld zo:

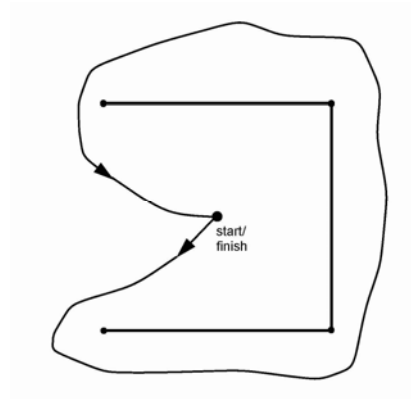


Probeer in zo min mogelijk zetten over de finishlijn te komen.
 Je hoeft niet precies op de finishlijn te komen; je moet hem wel geheel passeren.
 Je route mag uiteraard door geen van de vier gegeven punten gaan.

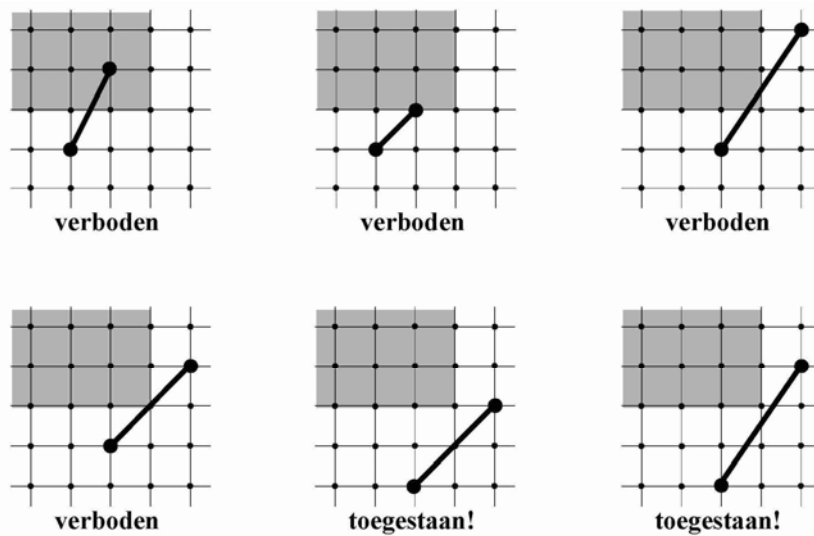
Opgave 7

In het volgende speelveld moet je om de vier punten $(-10, -10)$, $(10, -10)$, $(10, 10)$ en $(-10, 10)$ heen gaan. Je begint in de oorsprong. Je moet ook weer in $(0,0)$ eindigen, maar je hoeft dan niet stil te staan. De route mag de getekende verbindingslijnen tussen de punten (zie figuur) niet overschrijden.

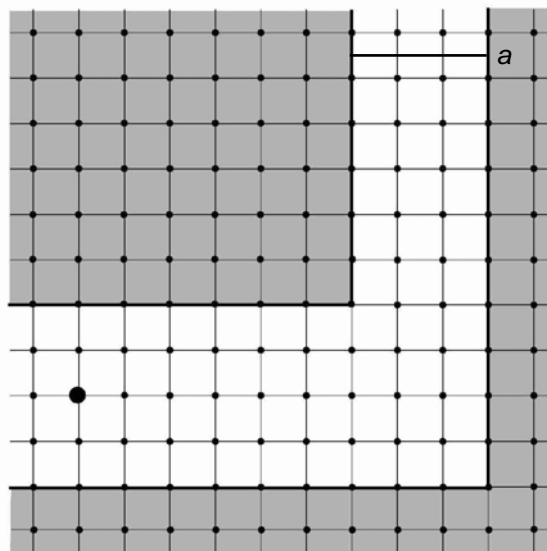
Construeer een route met zo min mogelijk zetten.



Het racen wordt wat spannender als er onderweg obstakels zijn die je moet ontwijken. In de volgende plaatjes zie je wat niet en wat wel mag als je met de stip in de buurt van een obstakel (de grijze gebieden) komt.



De grijze delen in onderstaande figuur zijn verboden gebied voor de bewegende stip.



Opgave 8

Je start, vanuit stilstand, bij de getekende stip. Je moet de finishlijn a passeren. Vind de snelste route.

De ontbindingsstelling

De knoppenreeks OPNOZO brengt je van (0,0) naar (10,2).

Je kunt van deze knoppenreeks een één-dimensionale horizontale beweging maken door iedere keer als er op N of Z wordt gedrukt, dit te vervangen door P:

OPNOZO \rightarrow OPPOPO

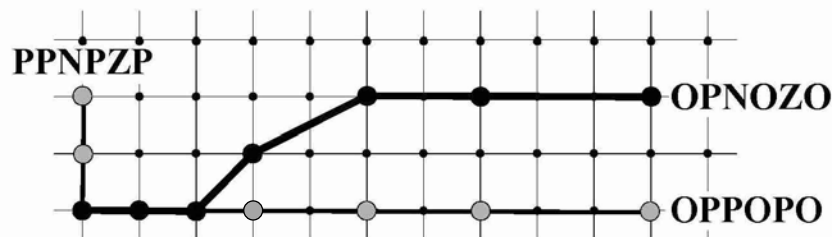
Deze één-dimensionale knoppenreeks brengt je in (10,0).

Op een vergelijkbare manier kun je er ook een één-dimensionale verticale beweging van maken:

OPNOZO \rightarrow PPNPZP

Deze knoppenreeks brengt je in (0,2).

Deze 'ontbinding' in een horizontale en een verticale component ziet er in een plaatje zo uit:



Dit gegeven kan in een stelling worden uitgedrukt.

Stelling

Een knoppenreeks bestaat uit n zetten. Bij elke zet wordt op één van de knoppen N, O, Z, W of P gedrukt. Stel dat deze reeks je vanuit de startpositie (0,0) naar (x,y) brengt. Er geldt dan:

- als je in deze knoppenreeks iedere N en iedere Z door P vervangt, dan brengt deze nieuwe knoppenreeks van n zetten je langs de x -as van (0,0) naar (x,0);
- als je in deze knoppenreeks iedere O en iedere W door P vervangt, dan brengt deze nieuwe knoppenreeks van n zetten je langs de y -as van (0,0) naar (0,y).

Opgave 9

Een twee-dimensionale route van veertien zetten, die start in (0,0), wordt ontbonden in een horizontale en in een verticale component.

De horizontale component is: OPPWWPPPPPOOPWP

De verticale component is: PNNPPZZZPPPPZ

a. Reconstrueer de twee-dimensionale route vanuit deze twee componenten.

Bekijk voor elk van de veertien zetten de drie snelheden in de horizontale component, in de verticale component en in de twee-dimensionale route.

b. Wat is het verband tussen deze drie snelheden?

c. Aan welke voorwaarden moet een knoppenreeks voor een twee-dimensionale route voldoen om een eindsnelheid nul te bereiken?

Opgave 10

Gegeven is een punt (x,y) met x en y geheel. Veronderstel dat je in n zetten vanuit de oorsprong in (x,0) kunt komen en dat je ook in n (andere) zetten vanuit de oorsprong in (0,y) kunt komen.

Onderzoek onder welke voorwaarden het mogelijk is om dan ook in n zetten in (x,y) te komen.

Palindroom routes

Een *palindroom* is een omkeerwoord, een woord dat gelezen van links naar rechts hetzelfde is als gelezen van rechts naar links. Voorbeelden zijn 'kok', 'parterretrap' en 'koortsmeetsysteemstrook'. Ook in knoppentaal kun je palindromen maken. Een voorbeeld is NONZZWPWZZNON.

Dit noemen we een *palindroom route*.

Als je de genoemde zetten uitvoert eindig je waar je bent begonnen, met eindsnelheid nul.

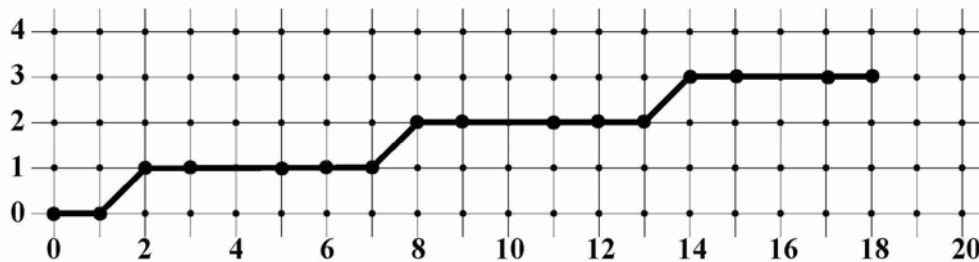
Opgave 11

Onderzoek of het altijd waar is dat bij een palindroom route het eindpunt samenvalt met het beginpunt met eindsnelheid nul, of dat er aanvullende eisen aan het palindroom moeten worden gesteld om dit te bereiken. Geef goede argumenten voor je uitspraken.

Periodiciteit

In dit onderdeel kijk je naar herhalingen (periodiciteit). We gaan uit van een reeks zetten. De volgende verschijnselen kunnen optreden:

- De *knoppenreeks is periodiek*. Dat betekent dat de totale reeks bestaat uit twee of meer kopieën van een kleinere knoppenreeks. Zo is de knoppenreeks ONZOWWONZOWWONZOWW periodiek, want je krijgt dit door het deel ONZOWW drie keer te herhalen.
- De *route is periodiek*: het plaatje van lijnen en stippen op het speelveld kun je opdelen in twee of meer gelijke stukken. Bijvoorbeeld:



- De knoppenreeks heeft een *periodieke verplaatsing*. Dat gebeurt als er herhaling optreedt in de snelheden. Een tabelletje verheldert dit wellicht:

<i>positie</i>	<i>snelheid</i>	<i>positie</i>	<i>snelheid</i>	<i>positie</i>	<i>snelheid</i>
(0,0)	(0,0)	(6,1)	(0,0)	(12,2)	(0,0)
(1,0)	(1,0)	(7,1)	(1,0)	(13,2)	(1,0)
(2,1)	(1,1)	(8,2)	(1,1)	(14,3)	(1,1)
(3,1)	(1,0)	(9,2)	(1,0)	(15,3)	(1,0)
(5,1)	(2,0)	(11,2)	(2,0)	(17,3)	(2,0)
(6,1)	(1,0)	(12,2)	(1,0)	(18,3)	(1,0)
				(18,3)	X

Opgave 12

Onderzoek de verbanden tussen bovenstaande verschijnselen. Geeft een periodieke knoppenreeks bijvoorbeeld altijd een periodieke route? En zo nee, zijn er voorwaarden waaronder dit wel gebeurt?

Deel 4 De slotopdrachten

De inzichten die je in de vorige delen hebt opgedaan kun je nu inzetten bij de drie circuits die hier worden aangeboden.

Natuurlijk mag je beslissen om ze alle drie te doen, maar bedenk dat in de beoordeling er vooral gelet zal worden op de grondigheid waarmee je één, twee of zelfs alle drie circuits beschrijft en jouw keuzes weet te verantwoorden!

Op de volgende drie bladzijden vind je de circuits. Hier worden de opdrachten bij de circuits geformuleerd.

Circuit 1 Baan van constante breedte

De opdracht is eenvoudig:

Start vanuit stilstand op de startstip. Zorg dat je zo snel mogelijk (dus in zo min mogelijk zetten) over de finishlijn komt.

Circuit 2 Racen om Oval Lake

Start stilstaand in A.

Race, met de klok mee, om het meer en eindig in B. De eindsnelheid in B hoeft niet nul te zijn.

En weer: vind de snelste route.

Circuit 3 Een oneindige slalom

Een circuit waarbij je de obstakels 1, 2, 3, 4, 1, 2, ... niet mag raken, maar je moet er wel verplicht tussendoor. De plaatsing van de obstakels herhaalt zich oneindig.

Je maakt een route in de volgorde:

- eerst tussen 1 en 2 door, in de richting die wordt aangeduid met het pijtje
- dan tussen 2 en 3 door in de gegeven richting
- dan tussen 3 en 4 door
- dan tussen 4 en 1 door

Vanaf hier herhaling van de gegeven eerdere stappen.

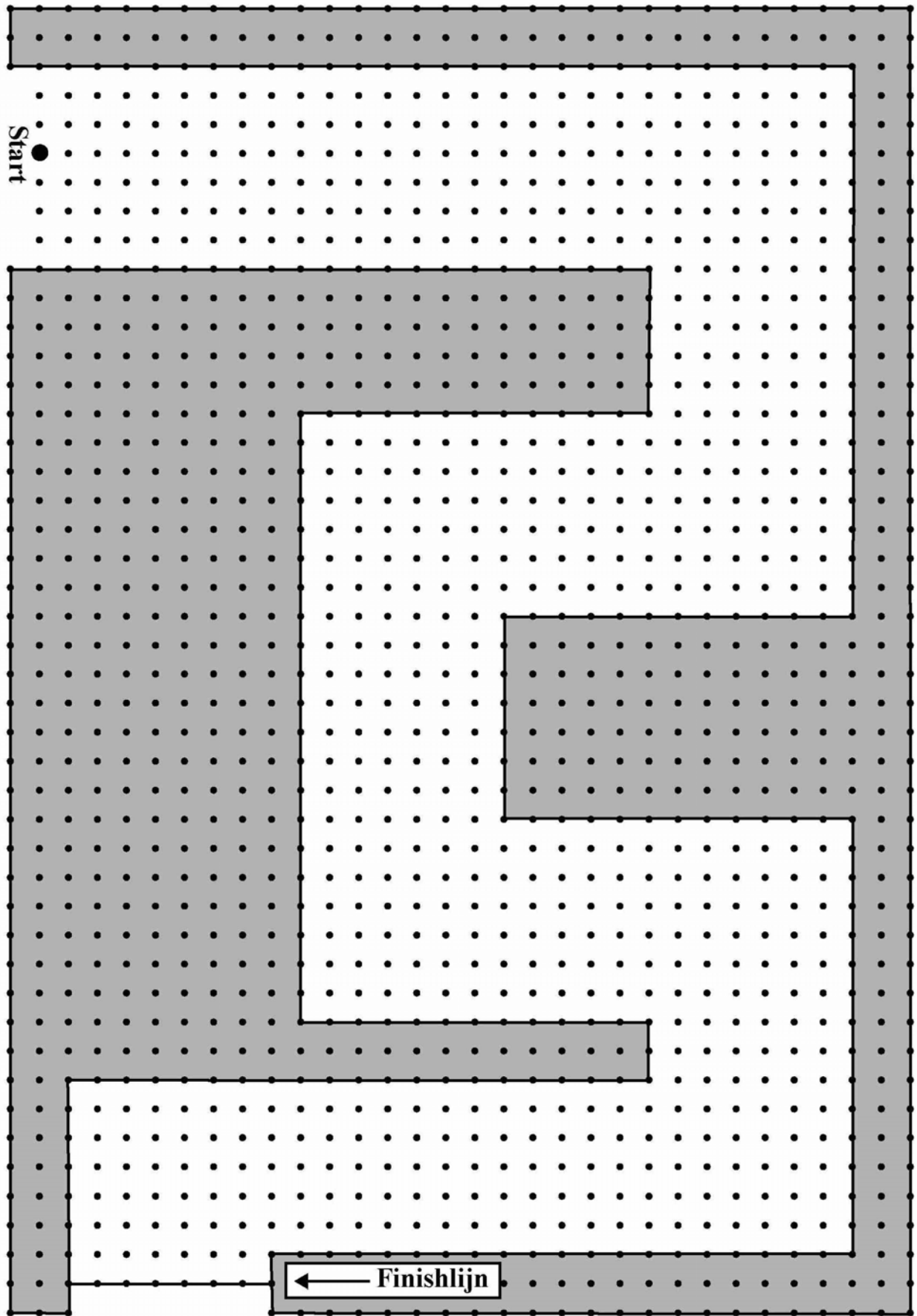
Bedenk een patroon voor je route dat zich oneindig laat herhalen.

De startpositie en de startsnelheid van de stip moet je zelf verstandig kiezen.

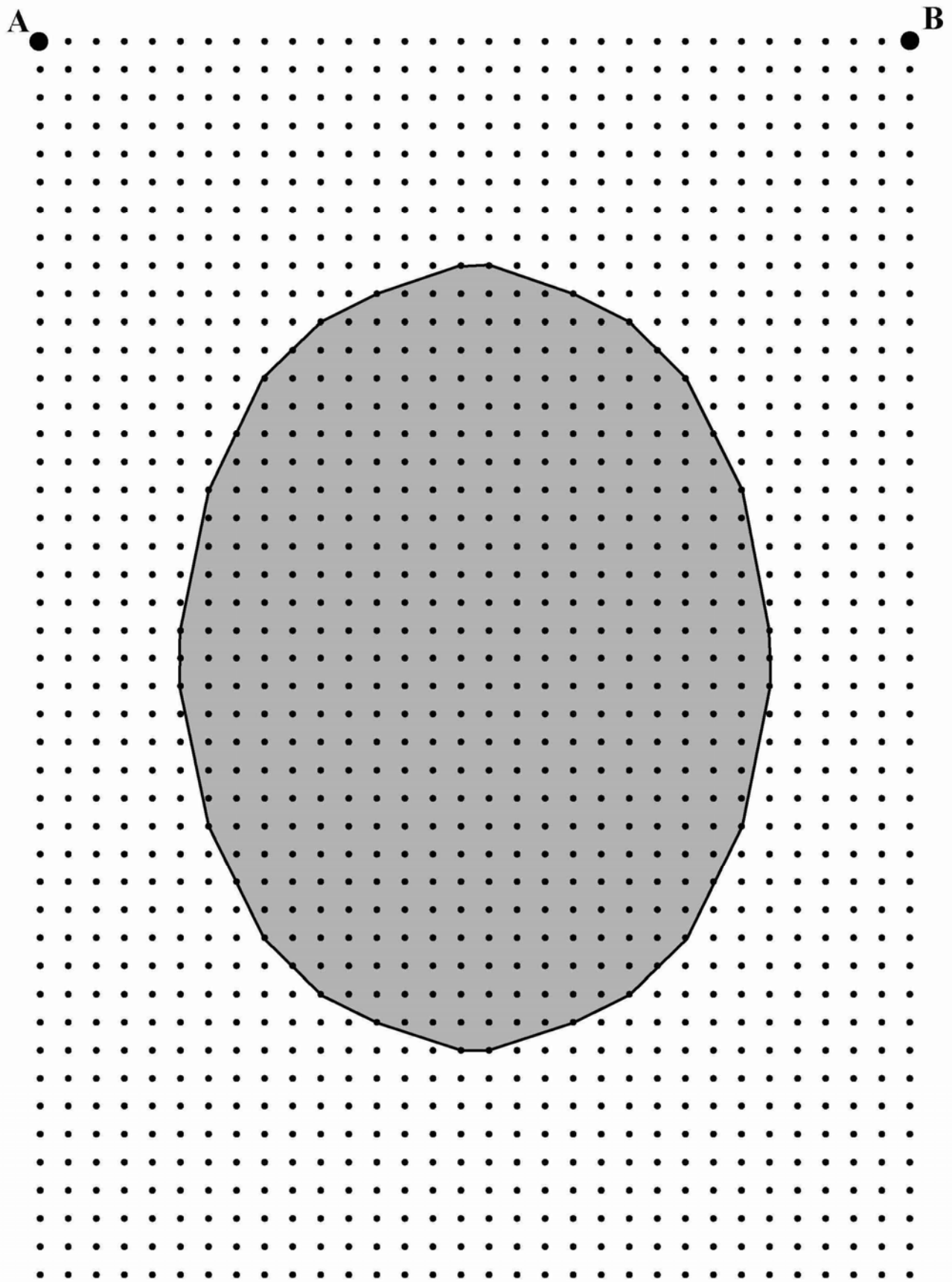
Dit is dus het enige geval waarbij je niet vanuit stilstand hoeft te starten!

Succes!

Circuit 1 Baan van constante breedte



Circuit 2 Racen om Oval lake



Circuit 3 Een oneindige slalom

