VISSEN EN ERWTEN

ONDERBOUWWISKUNDEDAG 2015

Monica Wijers

De OnderbouwWiskundeDag (OWD) is een wedstrijd waarbij teams van derdeklassers de hele dag aan een uitdagende wiskundeopdracht werken. Het open karakter van de opdracht maakt dat de teams een complete weg afleggen van probleemstelling via strategiebepaling, oplossing en argumentatie naar presentatie van de gevonden oplossing. Monica Wijers bespreekt de resultaten van de OWD van 2015.

De opdracht

In 2015 ging de opdracht over het schatten van de omvang van een populatie vissen in een vijver met behulp van de zogenaamde vangst – terugvangstmethode. Bij deze methode wordt eerst een aantal vissen gevangen en gemerkt. Deze vissen worden teruggezet in de vijver. Na enige tijd wordt opnieuw een aantal vissen gevangen. Op basis van het percentage gemerkte vissen in deze tweede vangst wordt de populatie-omvang geschat. In het eerste deel van de OWD-opdracht bedenken en krijgen de leerlingen een aantal verschillende manieren om de populatie-omvang van vissen in een vijver te schatten en ze vergelijken de resultaten van het gebruik van verschillende rekenvoorschriften en formules. Ze werken daarbij zowel met gegevens uit een enkele vangst-terugvangstmeting als met gegevens van meerdere metingen uit dezelfde populatie. Niet alle teams herkennen in het eerste deel van de opdracht dat verschillende rekenmethodes en formules 'hetzelfde' zijn. Ze merken wel op dat verschillende formules bij een concreet rekenvoorbeeld hetzelfde resultaat geven, maar zetten niet de stap naar een formele redenering. Dit wijst op beperkt aanwezige *symbol sense*. In kader 1 is de eerste formule afkomstig uit de opdracht, de tweede heeft het team zelf bedacht. De meeste teams zijn in staat dit eerste deel van de opdracht met een voldoende resultaat af te ronden.

Systematisch opzetten en uitvoeren van een simulatie

Bij al deze schatmethoden is er onzekerheid over de mate van nauwkeurigheid van de schattingen, omdat er geen informatie bekend is over de werkelijke populatie-omvang. Het is niet meteen duidelijk of en in welke mate de steekproefomvang van de eerste en de tweede vangst van invloed zijn op de nauwkeurigheid van de schattingen. Om de leerlingen hierover te laten nadenken, gaan ze in het tweede deel van de opdracht met concreet materiaal (spliterwten) een simulatie-experiment opzetten en uitvoeren voor een vangst-terugvangstprocedure. De leerlingen weten dan van tevoren hoeveel vissen (erwten) er in totaal zijn. Door nu de vangst-hervangstprocedure toe te passen om de populatie te schatten en de schattingen te vergelijken met de werkelijke aantallen, kunnen ze verstandige dingen zeggen over de betrouwbaarheid van de procedure. Het is hierbij de bedoeling om systematisch te werk te gaan en de verschillende variabelen, zoals bijvoorbeeld de populatiegrootte, de omvang van de eerste, tweede en eventueel derde vangst, systematisch te variëren. Idealiter wordt deze variatie onderbouwd vanuit aannames en veronderstellingen. Ook het systematisch noteren van aanpak en meetresultaten hierbij is belangrijk om goed conclusies te kunnen trekken.

De resultaten

Uit de resultaten van dit tweede deel komt een gevarieerd beeld naar voren. Veel teams hebben moeite met het opzetten van een systematisch experiment met onderbouwing en conclusies. Dit resultaat verbaasde ons enerzijds, anderzijds gaf het ons een bruikbaar criterium voor de beoordeling: op welke wijze, met welke onderbouwing is het experiment opgezet en uitgevoerd en welke conclusies zijn er getrokken? Bij het nakijken van het werk van de 26 teams bleek dat het doel van de experimenten vaak niet expliciet wordt vermeld. Er is slechts een klein

Kader 1

Bij deze formule wordt het aantal vissen wat gemerkt is vermenigvuldigd met het aantal gevangen vissen op dag 2. Dit antwoord wordt weer gedeeld door het aantal vissen op dag 2 wat al gemerkt was: $N = (K \cdot n) : k$.
Ook hadden we zelfs nog een formule bedacht, maar het antwoord kwam wel op hetzelfde uit als het antwoord uit de eerste formule:
$N = n(K : k)$
N = schatting
n = het totaal aantal gevangen vissen van dag 2 (of dag 3, 4, ...)
K = aantal gevangen en gemerkte vissen op dag 1
k = het aantal gemerkte vissen, gevangen op dag 2 (of dag 3, 4, ...)

aantal teams dat aangeeft dat ze op deze manier willen testen welke van de formules de beste schatting geeft.
In totaal gebruikt ongeveer de helft van de teams ten minste twee verschillende formules bij het maken van de populatieschattingen in het experiment. Ongeveer een kwart van de teams voert alleen losse experimenten uit, waarbij in elk experiment bijna alles wordt veranderd: de populatieomvang, het aantal gemerkte vissen, het aantal vissen in tweede vangst en het aantal herhalingen. Deze teams maken vervolgens per experiment een schatting van de populatie-omvang, waarbij ze vaak maar een van de formules gebruiken. Een deel van de teams trekt expliciet een conclusie op basis van deze tamelijk willekeurige resultaten. Ze concluderen dan bijvoorbeeld dat de vangst-terugvangstmethode niet goed werkt als de schattingen ver af liggen van het getelde aantal. Zie bijvoorbeeld kader 2, werk van leerlingen van een tto-school. Komen de schattingen meer in de buurt van de getelde populatie dan zijn ze wel tevreden over de methode. Hierbij wordt geen verband gelegd met variabelen als de grootte van de populatie, het aantal en aandeel gemerkte exemplaren, het aantal terug gevangen vissen en het aantal 'metingen'.

Kader 2

We simulated the counting of fish with split peas. We marked a random number of peas and picked a number of peas out of the box and wrote down how many marked peas were in there. We do this to prove if this method of counting objects works or not.

1. Total number of peas: 91
   Total number of marked peas: 18
   Picked 9 peas; marked 1
   Picked 14 peas; marked 4
2. Total number of peas: 109
   Total number of marked peas: 11
   Picked 16 peas; marked 3
   Picked 12 peas; marked 1
3. Total number of peas: 100
   Total number of marked peas: 10
   Picked 11 peas; marked 2
   Picked 15 peas; marked 2

Calculations:

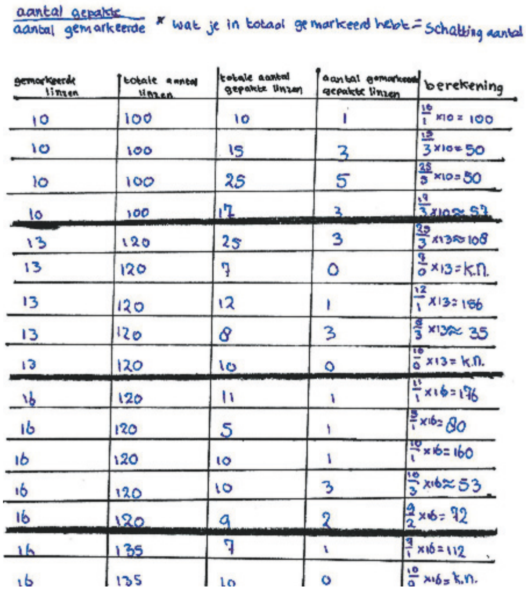
1. $\frac{1}{9} = \frac{19}{x}; x = \frac{171}{1} = 171$
   $\frac{4}{14} = \frac{19}{x}; x = \frac{266}{4} = 66,5$
2. $\frac{3}{16} = \frac{11}{x}; x = \frac{176}{3} = 58,6$
   $\frac{1}{12} = \frac{11}{x}; x = \frac{132}{1} = 132$
3. $\frac{2}{11} = \frac{10}{x}; x = \frac{110}{2} = 55$
   $\frac{2}{15} = \frac{10}{x}; x = \frac{150}{2} = 75$

The answers we got from our calculations are not the same as the total number of peas. This shows this is not a reliable method to work with.

Er zijn ook teams die weliswaar enigszins systematisch variëren, maar die niet aangeven waarom ze de betreffende aantallen kiezen en daar ook in de conclusie - als die er al is - niet naar verwijzen. Zo is er een team dat - zonder toelichting - de volgende vijf situaties onderzoekt:

totaal	waarvan gemerkt
100	10
120	13
120	16
135	16
135	27

Per situatie voeren ze vier, vijf of zes keer een terugvangst uit, op grond waarvan ze de populatie schatten met een van de in de opdracht gegeven formules, zie figuur 1. Dit experimenteerwerk leidt niet tot een conclusie en ook in het advies wordt niet verwezen naar deze resultaten.



$\frac{\text{aantal gepakte}}{\text{aantal gemarkeerde}}$ * wat je in totaal gemarkeerd hebt = Schatting aantal

gemarkeerde linzen	totale aantal linzen	totale aantal gepakte linzen	aantal gemarkeerd gepakte linzen	berekening
10	100	10	1	$\frac{10}{1} \times 10 = 100$
10	100	15	3	$\frac{15}{3} \times 10 = 50$
10	100	25	5	$\frac{25}{5} \times 10 = 50$
10	100	17	3	$\frac{17}{3} \times 10 \approx 57$
13	120	25	3	$\frac{25}{3} \times 13 \approx 108$
13	120	7	0	$\frac{7}{0} \times 13 =$ k.n.
13	120	12	1	$\frac{12}{1} \times 13 = 156$
13	120	8	3	$\frac{8}{3} \times 13 \approx 35$
13	120	10	0	$\frac{10}{0} \times 13 =$ k.n.
16	120	11	1	$\frac{11}{1} \times 16 = 176$
16	120	5	1	$\frac{5}{1} \times 16 = 80$
16	120	10	1	$\frac{10}{1} \times 16 = 160$
16	120	10	3	$\frac{10}{3} \times 16 \approx 53$
16	120	9	2	$\frac{9}{2} \times 16 = 72$
16	135	7	1	$\frac{7}{1} \times 16 = 112$
16	135	10	0	$\frac{10}{0} \times 16 =$ k.n.

figuur 1

Ten slotte is er een zeer klein aantal teams dat duidelijk bewust varieert. In het citaat in kader 3 is te zien hoe de winnaars, een team van het Scala College uit Alphen aan den Rijn, hun manier van variëren onderbouwen. Ze voeren het aantal gemerkte erwten in vijf stappen op van 15 van de 100 naar 59 van de 100, en bij elk aantal voeren ze drie terugvangsten uit. Vervolgens doen ze hetzelfde met een totaal van 20 erwten waarvan er achtereenvolgens 3, 5, 8, 10 en 12 gemerkt zijn. De conclusie blijft weliswaar enigszins impliciet, maar in hun advies geeft het team wel aan dat het van het aantal vissen in de populatie afhangt (boven of onder de 50) welke formule de beste schatting geeft.

Kader 3

We put a total of 100 peas into a little cup. We started marking 15 peas. We took out different amounts to calculate the average. We carefully wrote down our results. Than we repeated the assignment with different numbers that are marked, to make it more accurate and precise. We did the same experiment another time, but instead of using 100 peas, we used 20 to see if the results would be different when a smaller amount of peas is used.

Conclusies

Het systematisch opzetten en uitvoeren van een reeks experimenten om uitspraken te doen over de betrouwbaarheid van verschillende manieren van schatten, is lastig. De derde klas leerlingen die hebben meegedaan aan de OWD 2015 doen pogingen hiertoe, maar de meerderheid komt daarbij niet tot een overtuigende aanpak. Daar zijn natuurlijk allerlei oorzaken voor aan te wijzen. Het kan liggen aan de formulering van de opdracht, die misschien te open of niet duidelijk genoeg was. Het kan ook zijn dat de teams veel meer hebben gedaan dan uiteindelijk in het werkstuk is opgenomen. Het lijkt erop dat de teams geen goed beeld hebben van de te variëren grootheden en van de te verwachten effecten daarvan. De meeste teams lijken de simulaties/experimenten niet te herkennen als middel om uitspraken over de betrouwbaarheid van bepaalde methodes en condities te doen. Dit is ook geen onderbouwstof. Toch zien we dat de leerlingen wel in staat zijn een aanzet te maken. Het lijkt ons een belangrijke vorm van wiskundig denken en een bruikbare vaardigheid zeker in het licht van het toenemend gebruik van grote datasets.

Bronnen

De Haan, D., Doorman, L. M., Jonker, V. en Wijers, M. (2012). De OnderbouwWiskundeDag. *Nieuwe Wiskrant*, *32*(1), 12-16.

De Haan, D., Jonker, V., Wijers, M. en Doorman, M. (2013). Pauzes op school. *Euclides*, *89*(3), 7-9.

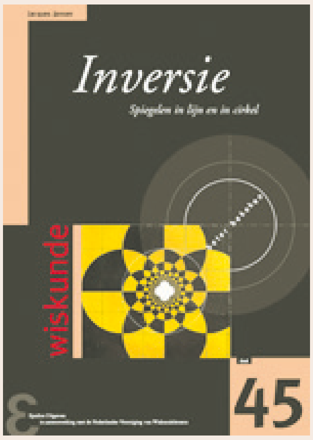
www.uu.nl/onderzoek/freudenthal-instituut/onderwijs/voortgezet-onderwijs/onderbouw-wiskunde-dag (hier zijn de opdrachten van alle OWD's te downloaden)

Over de auteur

Monica Wijers is werkzaam bij het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht. E-mailadres: *M.Wijers@uu.nl*

VERSCHENEN

INVERSIE



Ondertitel: Spiegelen in lijn en in cirkel
Auteur: Jacques Jansen
Uitgever: Epsilon Uitgaven, Amsterdam (2015), Zebrareeks deel 45
ISBN: 978-90-5041-149-3
Prijs: € 10,00 (72 pagina's; paperback)

Van de achterkaft

In dit Zebraboekje leer je spiegelen, niet alleen in een lijn maar vooral in een cirkel. Je gaat na hoe je een schaakbord binnenstebuiten kunt keren. Je zult ontdekken dat oude meetkundige problemen van ver voor de geboorte van Christus met inversie fraai op te lossen zijn. Ook kom je het Raakprobleem van de Griekse meetkundige en astronoom Apollonius van Perga (262 – 190 v.Chr.) tegen: 'Hoe construeer je cirkels die drie gegeven cirkels raken?' Je leert hoe je een apparaat kunt ontwikkelen dat een cirkelbeweging kan omzetten in een rechtlijnige beweging. Door het maken van veel opgaven, vaak met het inzetten van het computerprogramma *GeoGebra*, maak je kennis met de eigenschappen van inversie.