Statistiekonderwijs voor morgen

Werkgroep Wiskunde voor Morgen

Statistiekonderwijs voor Morgen

Werkgroep Wiskunde voor Morgen

Redactie:
Geeke Bruin-Muurling
Dolly van Eerde
Frans van Galen
Koeno Gravemeijer
Irene van Stiphout

Layout en omslag: Frans van Galen

Werkgroep Wiskunde voor Morgen, September 2018

NVORWO

Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

Vooraf

De leerlingen van nu moeten worden voorbereid op de maatschappij van morgen. Dat vraagt om aanpassingen van de huidige onderwijsdoelen. Dit geldt met name voor rekenen en wiskunde. Steeds meer mensen krijgen te maken met reken-wiskundige toepassingen en met op reken- en wiskundige argumenten gebaseerde redeneringen. Tegelijkertijd neemt de noodzaak om zelf berekeningen uit te voeren af. Berekeningen worden steeds vaker door apparaten uitgevoerd. De vraag, wat dit betekent voor het reken- en wiskundeonderwijs, is de vraag die centraal staat bij de werkgroep, Wiskunde voor Morgen – een gezamenlijke werkgroep van de Nederlandse Vereniging voor de Ontwikkeling van het Reken-Wiskunde Onderwijs (NVORWO) en van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW).

Naast het zoeken naar antwoorden op deze vraag, streeft de werkgroep ook naar bewustmaking. Daarbij gaat het om het besef dat er een kloof ontstaat tussen wat de leerlingen leren en wat de maatschappij vraagt. Het is de hoogste tijd voor een discussie over welke reken- en wiskundige vaardigheden je in de gedigitaliseerde maatschappij nodig hebt en wat dit betekent voor de doelen voor het reken- en wiskundeonderwijs. Dit is een kwestie die iedereen aangaat, leraren, ouders, ondernemers en politici. Maar het is lastig een discussie te voeren zonder concrete voorbeelden. De werkgroep Wiskunde voor Morgen heeft daarom een begin gemaakt met het onderwerp statistiek. In dit boekje wordt een aantal aspecten van 'statistiekonderwijs voor morgen', besproken. Uiteraard is dit een eerste verkenning, het gaat om artikelen die op persoonlijke titel zijn geschreven en wordt geen volledigheid nagestreefd. We hopen hiermee een impuls te geven aan de discussie over wiskunde voor morgen.

Koeno Gravemeijer
Voorzitter werkgroep Wiskunde voor Morgen

Inleiding

Koeno Gravemeijer

Computers en andere digitale apparatuur hebben de wereld diepgaand veranderd, en veranderen de wereld nog steeds. In het reken- en wiskundeonderwijs heeft dat tot aanpassingen geleid - leerlingen gebruiken rekenmachines, computer en tablet worden ingezet als onderwijshulpmiddelen - maar de doelen van het reken- en wiskundeonderwijs zijn grotendeels dezelfde gebleven. De werkgroep Wiskunde voor Morgen pleit voor een fundamentele bezinning op die doelen.

Omdat we denken dat de discussie gebaat is met concrete voorbeelden, hebben leden van de werkgroep op persoonlijke titel artikelen geschreven rond het thema 'Statistiek voor Morgen'. Statistiek wordt hier breed opgevat, ook de eerste verkenningen van basale begrippen en grafische representaties die in het PO plaats vinden, rekenen we hiertoe. De artikelen zijn niet bedoeld om een gebalanceerd overzicht te geven van wat er in toekomstgericht statistiekonderwijs moet worden nagestreefd. Het doel van de artikelen is om als katalysator te dienen voor een discussie over de doelen van het reken- en wiskundeonderwijs, in het licht van de eisen die de toekomst stelt. Dat zo'n discussie er komt achten we van groot belang. De formulering van nieuwe doelen voor het statistiekonderwijs moet gebeuren in een breed gedragen proces, waarin een analyse wordt gemaakt van het gebruik van statistiek buiten de school en in het vervolgonderwijs. En uiteraard met ruime mogelijkheden voor het daadwerkelijk ontwerpen en testen van onderwijs. Met dit boekje willen slechts ideeën en voorbeelden aandragen die als katalysator kunnen dienen voor het op gang brengen van zo'n proces.

Andere tijden, andere doelen

Bij wijze van kader schetsen we hieronder kort ontwikkelingen die wij zien en de mogelijke implicaties daarvan voor de doelen van het statistiekonderwijs. Het onderwijs zal de leerlingen van nu moeten voorbereiden op de grote en nog steeds groeiende rol van statistiek in de maatschappij; in beroep en dagelijks leven. We kunnen daarbij verschillend aspecten onderscheiden:

- de hoeveelheid statistische informatie
- de rol van apparaten en software
- de mogelijkheid om complexe problemen aan te pakken
- de mogelijkheid om grote databestanden te analyseren
- de rol van educatieve software

statistische informatie

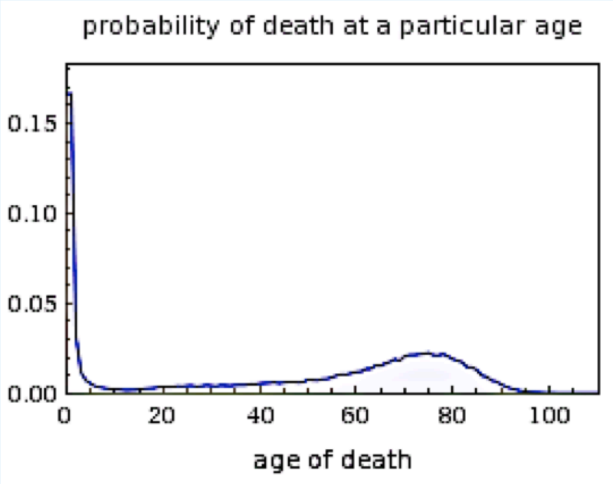
Een van de gevolgen van de toenemende computerisering is dat er steeds meer statistische informatie beschikbaar komt. Dit geldt zowel voor statistische informatie die we in krant, op TV en via andere media vinden, als voor resultaten van statistische bewerkingen die we in de beroepssituatie tegenkomen. Kenmerkend aan een statistische benadering is dat informatie wordt ingedikt. Enerzijds wordt daarmee informatie zichtbaar gemaakt die in de data verborgen zit, anderzijds gaat er altijd informatie verloren. Dit laatste wordt echter niet altijd opgemerkt, zoals het voorbeeld hieronder laat zien.

Statistische geletterdheid

Reclametekst in de NRC van 17 december 2016:

'Het is in 2016 nauwelijks te geloven: 120 jaar geleden was de gemiddelde leeftijd die Nederlanders bereikte 49 jaar. Als je de 50 haalde was je dus min of meer bejaard. Tegenwoordig vinden we het heel normaal dat we 80 worden.'

Zo'n tekst suggereert dat we in vergelijking met 1900 tegenwoordig veel ouder worden. Een gratis telefoon-app, WolframAlpha, laat echter zien dat de levensverwachting van 50-jarigen in 1900 helemaal niet zo slecht was. De lage gemiddelde leeftijd van toen was het gevolg van een hoge kindersterfte.



Je kunt een verzameling data met één getal weergeven, maar hoe die data zijn verdeeld is dan niet meer zichtbaar. Soms is één getal voldoende – bijvoorbeeld als je het gemiddelde gebruikt om uit te rekenen, hoeveel personen er door de bank genomen in een lift kunnen. Soms is de verdeling juist wel belangrijk, zoals in het voorbeeld van de levensverwachting. Het goed kunnen beoordelen wat het gemiddelde hier betekent, vraagt een breed inzicht in wat een gemiddelde is. Uitgaande van dit voorbeeld kunnen we in het algemeen stellen dat leerlingen inzicht moeten hebben in statistische begrippen en procedures, en in toepassingssituaties. En, naast specifieke kennis en vaardigheden vraagt dit uiteraard een kritische houding ten opzichte van statistische informatie.

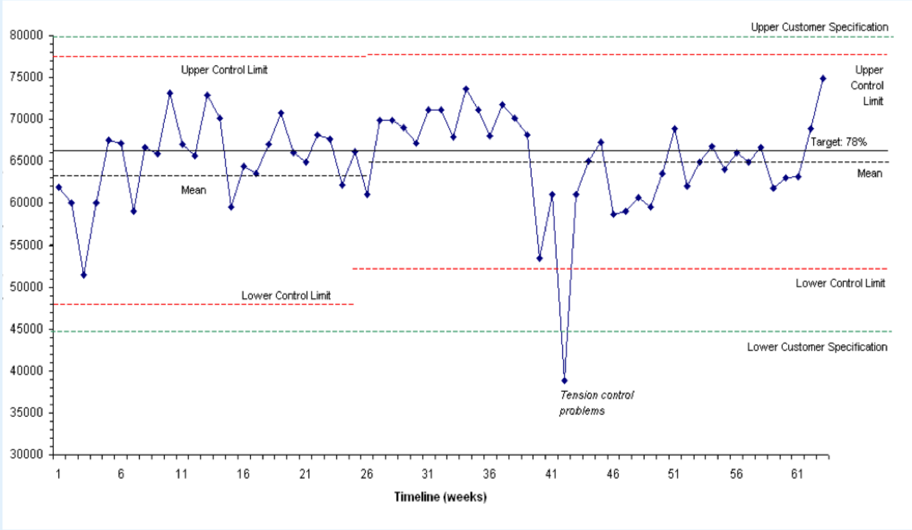
apparaten en software

Statistische analyses worden tegenwoordig door of met apparaten uitgevoerd. Enerzijds vraagt dit om inzicht wat deze apparaten doen, anderzijds vraagt dit om het kunnen beoordelen van (resultaten van) statistische analyses. Naast het begrijpen van de principes en concepten die ten grondslag liggen aan statistische procedures en werkwijzen, moeten we hier ook denken aan inzicht in de voorwaarden waaraan moet worden voldaan om bepaalde statistische procedures te kunnen toepassen.

Veel beroepen vereisen kennis van statistiek

Bij fabrieksmatige productie wordt tegenwoordig goed gekeken naar de variatie in productkenmerken, hoe kleiner de variatie, hoe efficiënter de productie. In een Engelse fabriek werden grafieken gebruikt om de output in de gaten te houden.

Veel werknemers bleken deze echter verkeerd te gebruiken, of helemaal niet. Zo kon het gebeuren dat trends niet werden opgemerkt en dat gereageerd werd op outliers die beter genegeerd hadden kunnen worden.



Ontleend aan Hoyles, C., Bakker, A., Kent, P., & Noss, R. (2007). Attributing meanings to representations of data: The case of statistical process control. Mathematical Thinking and Learning, 9(4), 331-360.

Sommige beroepen vragen niet zoveel meer kennis van statistiek, dan wat we kunnen verstaan onder statistisch geletterd zijn, maar andere beroepen vragen meer. Zoals kennis van statistische toetsen en waarschijnlijkheidsrekening, voor wie werkt met onderzoeksgegevens. Maar ook een productiemedewerker die in een fabriek gecompliceerde apparatuur bedient zal vaak ook statistische informatie moeten kunnen interpreteren. Zoals dat bijvoorbeeld het geval is in de praktijksituatie op de vorige bladzijde.

complexe problemen

Een specifiek aandachtspunt is ook, dat de toenemende computerkracht het mogelijk maakt om grotere databestanden en complexere problemen aan te pakken. Dit vraagt naast inzicht in hoe en wanneer je statistiek kunt toepassen ook vaardigheid in het modelleren van probleemsituaties.

grote databestanden

Het hiermee samenhangende fenomeen van het gebruik van "Big Data", vraagt om een kritische houding van daarop gebaseerde analyse en het gebruik daarvan. We kunnen hierbij denken aan de vertekening die big data analyses kunnen opleveren door de toevalligheden in de data set. Een ander aspect betreft het gevaar dat waarschijnlijkheden gehanteerd gaan worden als voorspellers, bijvoorbeeld bij verzekeringen.

educatieve software

Inmiddels wordt in het onderwijs van al dan niet in apparaten ingebouwde software gebruik gemaakt. Enerzijds gaat het daarbij om kant-en-klare software en statistische mogelijkheden van grafische rekenmachines. Anderzijds betreft het specifiek voor onderwijs ontwikkelde – software waarmee fundamentele statistische concepten toegankelijk gemaakt kunnen worden.

Algemeen gesteld kunnen we vaststellen, dat steeds meer statistiek zal moeten worden begrepen door steeds meer menen. Het ligt daarom voor de hand om vroeg te beginnen, op de basisschool. Daarnaast lijkt het aan te bevelen specifiek voor onderwijs software te ontwikkelen, waarmee fundamentele statistische concepten toegankelijk gemaakt kunnen worden.

Kort overzicht van de artikelen

Een aantal van de hierboven genoemde aspecten komen in de artikelen in dit boekje aan de orde, maar de verzameling is niet dekkend. Dat is zoals we hierboven aangaven ook niet de bedoeling. Het doel is om als katalysator te dienen voor een discussie over de doelen van het reken- en wiskundeonderwijs, in het licht van de eisen die de toekomst stelt.

In het artikel *Kritisch omgaan met informatie* bespreken Sonia Palha en Frans van Galen handvatten voor het kritisch kijken naar statistische informatie aan de hand van het boek, Field Guide to Lies and Statistics: A Neuroscientist on How to Make Sense of a Complex World, van David Livetin.

In *Statistiek in het basisonderwijs* presenteren Frans van Galen en Dolly van Eerde een onderwijs experiment rond statistiek op de basisschool.

In het artikel *De rol van leergang-specifieke software bij begripsvorming in aanvankelijk statistiekonderwijs* bespreekt Koeno Gravemeijer de rol die specifiek voor het onderwijs ontwikkelde software kan spelen bij het bereiken van conceptuele doelen.

Peter Kop beschrijft in het artikel S*tatistiekonderwijs in de onderbouw voor vandaag en morgen* hoe een nieuwe opzet voor statistiekonderwijs in de onderbouw havo/vwo eruit zou kunnen zien, uitgaande van het in 2015 ingevoerde statistiek programma voor de bovenbouw.

Het artikel *Wachtrijen* van Bert Zwaneveld en anderen bespreekt modelleren als centrale element in het toepassen van statistiek aan de hand van een concreet voorbeeld.

Geeke Bruin-Muurling en Irene van Stiphout gaan in het artikel *Het belang van onderliggende wiskundige ideeën* in op de verschillende niveaus waarop wiskundige ideeën kunnen worden geformuleerd, en hoe deze niveaus samenhangen. Ze laten zien hoe dat uitwerkt voor statistiekonderwijs.

Kritisch omgaan met informatie

Sonia Abrantes Garcez Palha
Frans van Galen

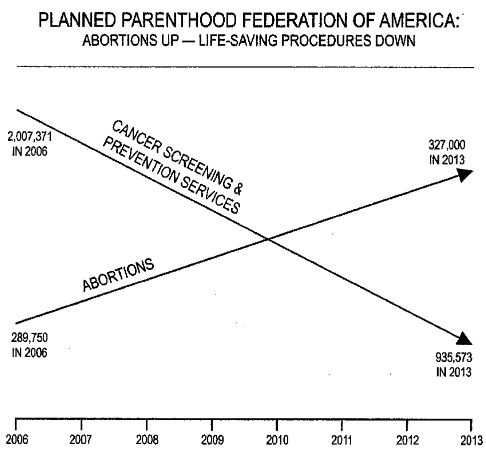
Introductie

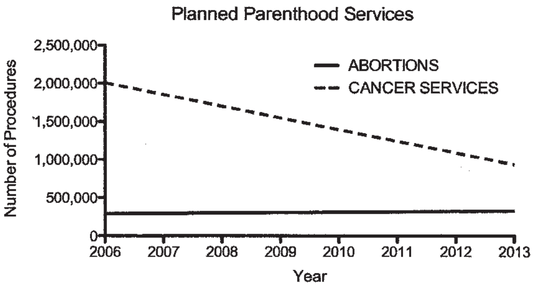
We worden van alle kanten overspoeld met informatie en het is essentieel dat leerlingen leren om kritisch om te gaan met die informatie. Welke berichten op Facebook, of meer algemeen, op internet moet je bijvoorbeeld serieus nemen? Zo'n kritische houding hebben leerlingen later nodig binnen hun werk, maar ook als mondig burger. Dat geldt ook voor het omgaan met informatie die verwijst naar getallen. Leerlingen moeten leren om getalsmatige gegevens correct te interpreteren; we kunnen zeggen dat ze een redelijke mate van statische geletterdheid moeten ontwikkelen. Het onderdeel statistisch redeneren binnen het nieuwe wiskunde A programma statistiek kan op dit punt een belangrijke rol gaan spelen, maar in de bovenbouw van het basisonderwijs en in de onderbouw vo moet al een basis worden gelegd. Een goed inzicht in begrippen als bijvoorbeeld gemiddelde, kans en steekproef is onmisbaar om de informatie die op ons afkomt te kunnen interpreteren.

Hoe kennis van statistiek kan helpen bij het kritisch omgaan met informatie wordt helder beschreven in een recent boek van David Livetin: Field Guide to Lies and Statistics: A Neuroscientist on How to Make Sense of a Complex World. In dit artikel bespreken we een aantal voorbeelden uit dat boek. Het zijn voorbeelden die ook in het onderwijs gebruikt zouden kunnen worden.

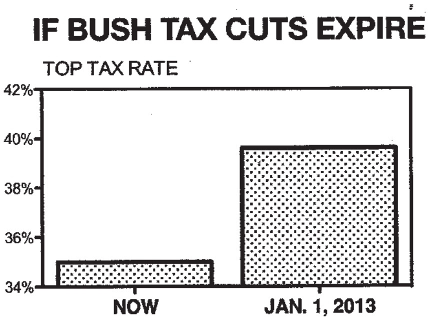
Grafieken

In 2015 gebruikte congreslid Jason Chaffetz dit plaatje bij zijn betoog dat 'Planned Parenthood' abortus propageerde. Het is een zeer tendentieus plaatje omdat het suggereert dat de organisatie een activiteit waar Chaffetz het niet mee eens is - uitvoeren van abortussen - laat prevaleren boven taken als preventie en screening op kanker. Wat natuurlijk opvalt - en wat leerlingen ook zouden moeten zien - is dat er geen vertikale as is. Niet alleen gaat het bij abortussen om heel andere



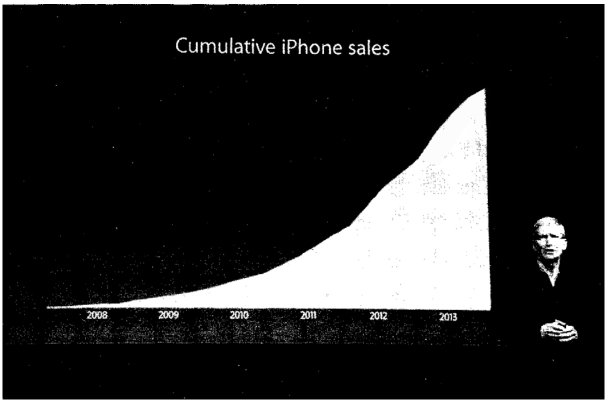


aantallen, maar ook geven bij beide pijlen de afstanden tot de horizontale as de verhoudingen niet correct weer: in 2013 is het aantal abortussen 1,13 maal zo hoog als in 2006, maar het plaatje suggereert dat het bijna 3 keer zo veel is. Het plaatje hiernaast is op deze punten wel correct.



Een grafiek is zinvol voor zover hij verhoudingen correct weergeeft. De grafiek hiernaast is een voorbeeld van een wat minder grove misleiding. Er is een keurige vertikale as, maar door deze bij 34% te laten beginnen wordt het verschil tussen ‘now’ en ‘jan 1, 2013’ fors aangedikt.

En wat te denken van het plaatje van de presentatie van topman Tim Cook van Apple? Op zich is het plaatje correct, maar Cook heeft niet voor niets gekozen voor een grafiek van de cumulatieve aantallen.



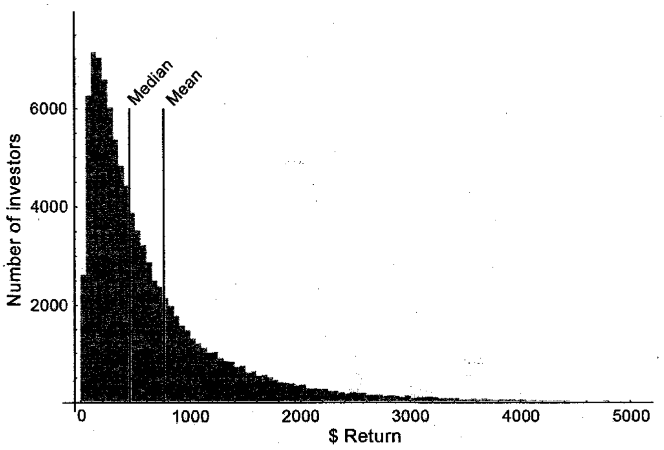
Het plaatje als geheel suggereert een steeds sterkere groei in de verkoop van iPhones, maar wie kijkt naar de punt bovenaan rechts ziet dat er een afvlakking is van de groei. De verkoop in het laatste kwartaal is dus lager dan die van de kwartalen ervoor! Een grafiek van de verkoop per kwartaal zou een dip laten zien en dat past niet goed in zo’n presentatie.

Een ander punt is dat in zo’n grafiek van de cumulatieve verkoop ook alle iPhones worden meegeteld die inmiddels zijn ingeruild voor een ander model. Of zou Apple willen suggereren dat alle iPhones uit eerdere jaren het nog steeds doen?

Gemiddelde

De levensverwachting is de afgelopen eeuw in de westerse landen sterk toegenomen. In de Verenigde Staten werd iemand die in 1850 werd geboren gemiddeld 38 (mannen) of 40 (vrouwen jaar. Het is een voor de hand liggende fout om te denken dat als je in de wereld van 1850 rond zou kunnen lopen, je nauwelijks oudere mensen tegen zou komen. In feite kon een vrouw van 50 in die tijd verwachten dat ze 73,5 jaar zou worden en een vrouw van 60 had een levensverwachting van 77 jaar. Wel was de kindersterfte in die tijd veel en veel hoger dan nu.

Bij een gemiddelde maakt het uit waarover je middelt. Dat lijkt nogal vanzelfsprekend, maar we maken vanuit onze intuïtie makkelijk fouten. Als we naar gezinsgrootte kijken bijvoorbeeld, komt een gemiddeld kind waarschijnlijk niet uit een gemiddeld gezin. Als we uitrekenen hoeveel broertjes of zusjes kinderen gemiddeld hebben dan levert een gezin met 10 kinderen 10 maal een score van 9, maar als we het gemiddeld aantal kinderen per gezin uitrekenen dan delen we door het aantal gezinnen. Dus als een gemiddeld gezin 3 kinderen zou hebben, dan wil dat niet zeggen dat kinderen gemiddeld 2 broertjes of zusjes hebben.



Meestal wordt met 'gemiddelde' het rekenkundig gemiddelde verstaan, maar het voorbeeld hierboven laat zien dat mediaan of modus soms een nuttiger maat zijn. Hoeveel levert een investering van $100 op na 30 jaar? Het gemiddelde ligt volgens deze grafiek ergens rond $800, te vergelijken met een rente op rente van iets meer dan 7% per jaar. Heel acceptabel. Het probleem is echter dat de gemiddelde investeerder niet de gemiddelde opbrengst krijgt. De verdeling is scheef; er zijn veel meer mensen met een opbrengst onder het gemiddelde. En dat is logisch, want er zijn mensen bij wie die oorspronkelijke $100 na 30 jaar $4000 is geworden, mensen die slimmer waren of simpelweg meer geluk hadden. Hun veel hogere opbrengst telt zwaarder mee in het gemiddelde. In dit geval lijkt de mediaan lijkt een beter gegeven: als 100 mensen $100 investeren, hoeveel zou nummer 50 dan hebben na 30 jaar?

Kans

Je bent op een feestje waar 70% van de mensen schrijver is van beroep en de andere 30% natuurkundige. Als je iemand spreekt met een tattoo van Shakespeare kun je gerust aannemen dat dat dat een schrijver is, en iemand met de vergelijkingen van Maxwell op zijn t-shirt zal wel een natuurkundige zijn. Maar als je aan het uiterlijk niets af kunt zien, hoe groot is dan de kans dat het een schrijver is? Het blijkt uit experimenten dat veel mensen geneigd zijn om op zo'n vraag 'fifty-fifty' te antwoorden. Ze verwarren de twee mogelijke uitkomsten met twee even waarschijnlijke uitkomsten, zoals de kans op kop of munt.

High-Risk Group

		YES	NO	
Actually Has Breast Cancer	**YES**	7	1	8
	NO	563	429	992
		570	430	1,000

Redeneren over kansen is lastig. Het vorige probleem was simpel, maar veel mensen struikelen waarschijnlijk als het gaat om voorwaardelijke kansen. Soms met ingrijpende gevolgen. Als het bij borstkanker in 93% van alle gevallen gaat om vrouwen van wie bekend is dat ze tot een groep met een hoog risico horen, wat moet je een vrouw dan aanraden die in zo'n risicogroep valt? Livetin bespreekt het geval van een dokter die een grote groep vrouwen overhaalde tot een preventieve operatie. De kans dat een vrouw in de hoog-risico groep ook werkelijk borstkanker krijgt is echter niet hetzelfde als de kans dat een vrouw met borstkanker uit de hoog-risico groep komt. Anders gezegd: P(borstkanker | hoog risico) is een andere kans dan P(hoog-risico | borstkanker). Livetin illustreert het met het volgende kwadrant. De getallen zijn gebaseerd op die 93% en op een totale kans van 0,8% op borstkanker. De kans op borstkanker voor iemand in de hoog-risico groep is niet 93%, maar 7/570, dus ongeveer 1%. (Verwarrend in dit voorbeeld is dat Levitin 93% van 8 - de kans dat van de 8 vrouwen die werkelijk kanker krijgen iemand tot de hoog-risico groep hoort - afrondt van 7,44 naar 7. Voor de kans op kanker in de hoog-risico groep maakt dat geen noemenswaardig verschil, maar terugrekenend is 7/8 niet hetzelfde als 93%.)

Er zijn veel van dergelijke voorbeelden te geven. Denk bijvoorbeeld aan de kans op een kind met het syndroom van Down. Een vrouw van 35 heeft een grotere kans dan een vrouw van 25, maar wat telt is niet hoeveel keer hoger het risico is, maar de totale kans op een kind met Down. Levitin pleit ervoor dat leerlingen leren zulke kans-kwadranten te maken. Zo'n kwadrant werkt heel verhelderend

Onderwijs

Tot zover een aantal sprekende voorbeelden uit het boek van Levitin. In het boek komen nog veel meer onderwerpen aan de orde, met steeds de boodschap dat we kritisch moeten kijken naar wat ons als statistische feiten wordt gepresenteerd. Want zoals Levitin zegt:

> 'Statistics are not facts. They are interpretations. And your interpretation may be just as good as, or better than, that of the person reporting them to you.' (p. 3, Levitin, 2016)

Statistiekonderwijs is een belangrijk middel om jongeren voor te bereiden op een leven in de informatiemaatschappij. Statistisch geletterdheid houdt onder andere in:

- Geneigd zijn om te controleren hoe aannemelijk een bepaalde uitspraak is,
- Een goed begrip van verdelingen en van de getallen waarmee je die kunt beschrijven, zoals het gemiddelde,
- Een goed begrip van kans,
- Kunnen redeneren over samenhang en over oorzaak en gevolg.

Het boek van Levitin biedt inspiratie voor lesontwerpers, al zijn veel voorbeelden natuurlijk nogal Amerikaans. Een deel van het boek gaat overigens niet direct over statistisch redeneren, maar over logisch redeneren in het algemeen. Onderwijs moet leerlingen helpen om kritisch te leren denken. Wat niet betekent dat ze niets meer willen geloven. In de woorden van Levitin:

> 'Critical thinking doesn't mean we disparage everything, it means that we try to distinguish between claims with evidence and those without.' (p.. x, Levitin, 2016)

Literatuur

Levitin, D. (2016). A Field Guide to Lies and Statistics: A Neuroscientist on How to Make Sense of a Complex World. Penguin UK.

Statistiek in het basisonderwijs

Frans van Galen
Dolly van Eerde

Inleiding[1]

We worden overspoeld met statistische uitspraken als: '52 procent van alle Nederlanders is van mening dat ...', 'SuperX tandpasta werkt vijftien procent beter tegen tandplak' en 'Oordeel van gasten over dit hotel: 8,2'. Een telefonisch onderzoekje waar vijftig mensen aan mee wilden werken zegt echter weinig over wat 'de Nederlanders' vinden en het verschil tussen een waardering van 7,7 en 8,2 zegt weinig als maar een paar mensen de moeite hebben genomen om een cijfer te geven.

Het is belangrijk dat leerlingen kritisch leren kijken naar uitspraken als de bovenstaande en wat ons betreft zou in het primair onderwijs daarvoor al een basis moeten worden gelegd. Dat gebeurt op dit moment echter niet. Leerlingen leren de procedure voor het berekenen van een rekenkundig gemiddelde, maar er wordt weinig aandacht besteed aan de vraag wanneer een gemiddelde nuttig is, of aan de vraag welke informatie je in feite niet meeneemt in zo'n gemiddelde. Andere centrummaten - mediaan en modus - komen niet aan bod in het basisonderwijs.

Het is duidelijk dat aanpassingen nodig zijn in het reken-wiskundecurriculum, want het huidige reken-wiskundeonderwijs past op veel punten niet bij de wereld van nu. We moeten er rekening mee houden dat computers en andere apparaten steeds meer wiskunde voor ons kunnen doen, en dat ze ook steeds meer wiskunde in ons dagelijks leven brengen. Kwantitatieve gegevens kunnen in een handomdraai worden vertaald in gemiddelden of percentages en worden weergegeven in allerlei grafieken. Wij denken dat in de discussie over gewenste aanpassingen een van de vragen zou moeten zijn hoeveel aandacht nodig is voor statistiek in het basisonderwijs. In het buitenland is veel onderzoek gedaan rond statistieklessen voor leerlingen in de basisschoolleeftijd. Een voorbeeld is het onderzoek van Lehrer, Kim & Jones (2011), waarin leerlingen in een serie lessen niet alleen zelf centrummaten ontwikkelden, maar ook kwantitatieve maten voor spreiding. Dergelijke onderzoeken maken duidelijk dat leerlingen al op jonge leeftijd statistisch inzicht kunnen ontwikkelen. In Nederland is onderzoek en ontwikkeling tot nu toe gericht geweest op het voortgezet onderwijs. Bakker (2004) deed onderzoek in de eerste en tweede klas. In dit hoofdstuk beschrijven we een aanzet tot onderzoek op de basisschool.

Wij beschrijven in dit hoofdstuk twee lessen waarin leerlingen onderzochten of de kinderen in hun klas groter zouden zijn dan ongeveer even oude kinderen op een school in Jakarta. Een eerste lesontwerp werd beproefd op een school in Utrecht en vervolgens bijgesteld. Wij beschrijven hier de ervaringen bij de tweede try-out in groep 7 van een school in Assendelft[2]. Het beperkte onderzoek rond deze lessen is slechts bedoeld als een eerste verkenning van het onderwerp statistiek in het basisonderwijs. We hopen met het beschrijven van de lessen de discussie te stimuleren. De eerste les begon met een gesprek over het feit dat Nederlanders veel langer zijn dan mensen in andere landen. Naar aanleiding daarvan stelde de leerkracht de vraag of dat ook te zien zou zijn bij het vergelijken van hun klas met de Indonesische klas. Wij hoopten dat deze vraag zou leiden tot discussies over het typeren van de twee groepen - de kinderen in onze klas zijn ongeveer 147 centimeter lang - en over de variatie binnen de groepen. Het (rekenkundig) gemiddelde was in deze groep wel eens aan de orde geweest, maar slechts vrij terloops. Grafieken waren de leerlingen vaker tegen gekomen. De twee lessen die we beschrijven werden op opeenvolgende dagen gegeven. Een paar dagen daarvoor hadden de leerlingen elkaars lengte al opgemeten.

Werken met kaartjes

De leerkracht vertelt dat volgens een krantenbericht Nederlandse mannen de langste mannen ter wereld zijn, en Nederlandse vrouwen bijna de langste vrouwen. Ze laat foto's zien van leerlingen van een Indonesische klas. Dan vraagt ze: Zouden jullie ook groter zijn dan deze even oude Indonesische kinderen? En hoe zou je uit kunnen zoeken of het klopt wat je denkt? Nadat hierover wat is doorgesproken verdeelt ze de leerlingen in groepjes van drie of vier. Elk groepje krijgt een set kaartjes waarop steeds de naam en de lengte van een leerling staat; 22 gele kaartjes voor de eigen klas en 23 blauwgroene kaartjes voor de Indonesische leerlingen. De groepjes werken iets meer dan tien minuten aan het probleem. Daarna presenteren ze wat ze gedaan hebben. Aan de hand van een foto op het digibord laten ze zien hoe zij de kaartjes hebben geordend en vertellen ze wat hun conclusie is.

Twee groepjes hebben de Nederlandse en Indonesische kaartjes in twee aparte rijen op volgorde gelegd van klein naar groot. Ze komen in hun uitleg echter niet ver. Een derde groepje heeft de twee klassen ook apart op volgorde gelegd, maar in twee slierten vlak onder elkaar (Afb. 1). Deze leerlingen concluderen dat de kinderen van de eigen klas inderdaad groter zijn, want het grootste Nederlandse kind is groter is dan het grootste Indonesische kind en hetzelfde geldt voor de kleinste kinderen. Mounir wijst ook op de kaartjes in het midden: de middelste zijn 1,51 meter en zij zijn dan 1,35 meter. Mounir had eerder al, in het overleg met zijn groepje, geconstateerd dat hij zelf bij de kinderen in het midden hoorde. Dylan legt uit dat je de kinderen in de slierten ook twee aan twee kunt vergelijken; je ziet dan dat de Nederlandse kinderen steeds groter zijn.

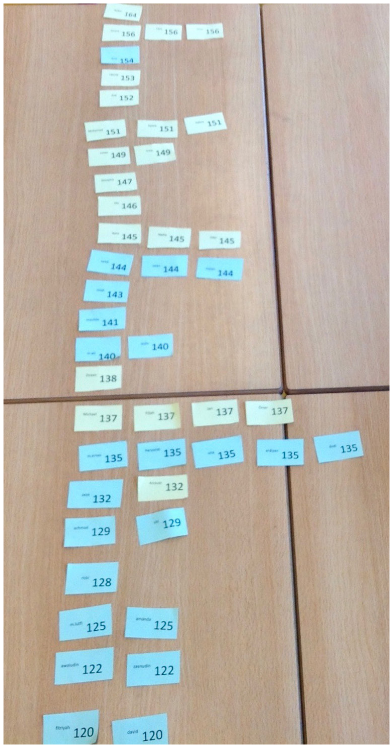
Afbeelding 1. Op volgorde vergeleken.

In drie andere groepjes hebben de leerlingen de kaartjes van beide klassen als één set op volgorde gelegd. Karin en Marieke hebben daarbij de kaartjes met hetzelfde getal (de lengte van leerlingen) steeds naast elkaar gelegd (Afb. 2). Ze vertellen dat je aan de kleuren kunt zien dat de Nederlandse kinderen groter zijn, want de meeste gele kaartjes liggen bovenaan en de meeste donkere kaartjes onderaan. Karin wijst ook aan waar je in de kaartjes-ordening de Indonesische meisjes vindt en waar de Indonesische jongens. Een ander groepje dat ook de kaartjes van beide klassen samen heeft genomen heeft grotere categorieën gemaakt (Afb. 3): een kolom 120 - 132, een kolom 135 - 138, een kolom 140 - 145, een kolom 146 - 147, enzovoort. Waarom de leerlingen precies die indeling kozen kunnen ze niet duidelijk maken. Wel zeggen ze dat je zo goed kunt zien dat de Indonesische kinderen onderaan 'blijven steken'.

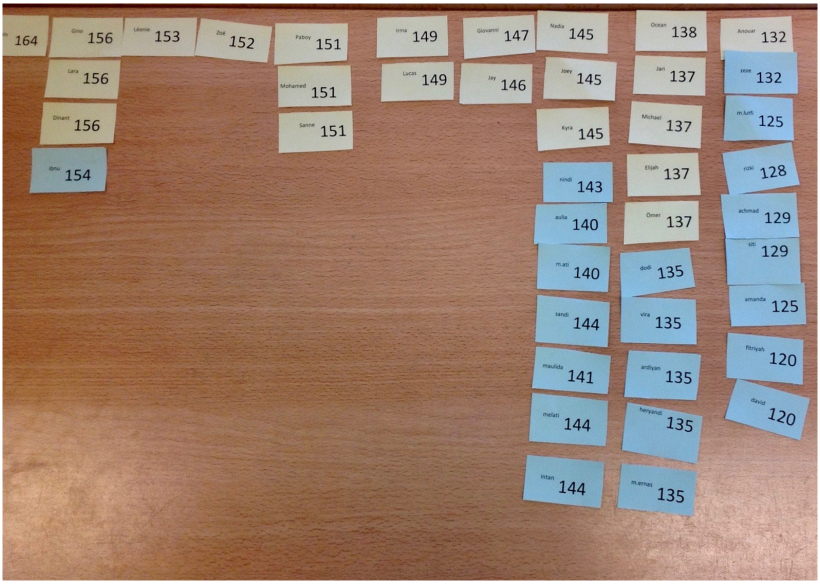
Een grafiek bedenken

De leerkracht vraagt na de bespreking welk 'rekenhulpmiddel' je bij dit probleem kunt gebruiken. Lonneke en Roos zeggen, apart van elkaar, dat je het gemiddelde zou kunnen uitrekenen. Als de leerkracht daarop doorvraagt blijkt dat ze allebei daarmee niet het rekenkundig gemiddelde bedoelen, maar dat je kunt kijken waar ongeveer het midden ligt.

Leerkracht: Dus wat voor rekenhulpmiddel zou je kunnen gebruiken?
Lonneke: Het gemiddelde uitrekenen.
Leerkracht: Dan kun je het gemiddelde uitrekenen. Wat is dat, het gemiddelde uitrekenen?
Lonneke: Dat je ongeveer een beetje in het midden zit van de lengtes.
Leerkracht: Ja. Dat is niet wat ik bedoel-



Afbeelding 2. Dezelfde lengtes naast elkaar.



Afbeelding 3. In categorieën vergeleken.

de, maar dat is een heel goede manier.
Roos: Wij hadden ook het gemiddelde uitgerekend, maar ... (onverstaanbaar)
Leerkracht: Dat gemiddelde uitrekenen, hoe hebben jullie dat dan aangepakt?
Roos:Ja, we deden gewoon, het gemiddelde was een beetje daar, het meeste was een beetje 1,35 en tussen de 1,43.

De leerkracht doelde met haar vraag op het maken van een grafiek als hulpmiddel. De leerlingen krijgen als opdracht om in tweetallen te bedenken hoe je de gegevens in een plaatje of een grafiek zou kunnen weergeven. Ze werken hier een minuut of tien aan. Vrij veel leerlingen snappen echter nog niet goed wat ze moeten doen. Dat is voor de leerkracht aanleiding om de opdracht in de tweede les aan te scherpen.

De leerkracht begint de tweede les - een dag later - met terughalen van de vorige les. Daarna bespreekt ze de opdracht waar de kinderen mee bezig waren en ze perkt hem in: bedenk een grafiek - nu alleen maar voor onze eigen klas - die laat zien dat de kinderen in onze klas niet allemaal even lang zijn.

Bij de bespreking - weer aan de hand van foto's van het leerlingenwerk op het digibord - blijken twee tweetallen niet veel verder te zijn gekomen dan het overschrijven van de getallen. Een derde tweetal heeft de lengtes slechts op volgorde gezet, wat als grafiek een weinig zeggende rechte lijn oplevert (Afb. 4). Van de overige groepjes hebben er drie een grafiek getekend met de lengte op een van de assen, zoals die van afbeelding 5; verticaal staan de lengtematen, horizontaal staan de kinderen op volgorde van groot naar klein.

Twee groepjes tekenden een frequentiegrafiek (Afb. 6 en 7). Verticaal staat hoe vaak een bepaalde lengte voorkomt. Tussen de grafieken in afbeelding 6 en 7 zit een interessant verschil. In die van afbeelding 6 staan alle voorkomende lengtes op de horizontale as, maar in afbeelding 7 zijn in elke kolom steeds vijf waarden samen genomen: lengte van 1,30 tot 1,35, van 1,35 tot 1,40, enzovoort. De categorieën 1,45 tot 1,50 en 1,65 tot 1,70 hadden de leerlingen blijkbaar eerst overgeslagen. Ze zijn er later - heel smal - tussengevoegd.

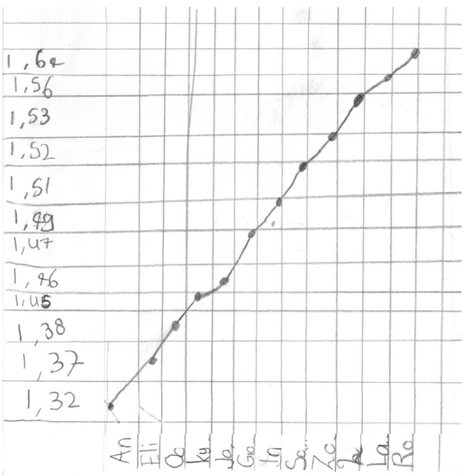
Hoeveel centimeter groter?

Na de presentaties zet de leerkracht de volgende vragen op het digibord:

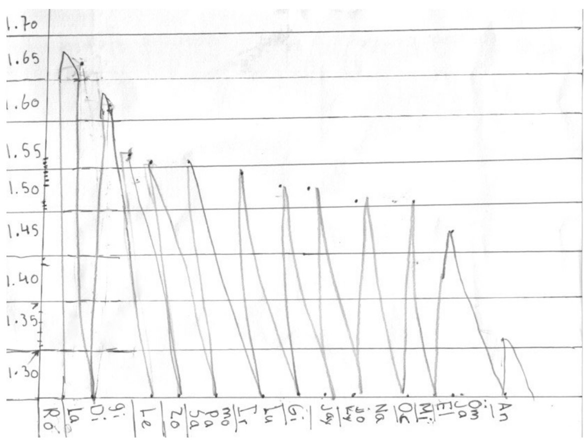
- Weten we nu of de Indonesische kinderen kleiner zijn? En hoeveel centimeter zijn ze kleiner?
- Zou je dat eigenlijk wel kunnen zeggen?
- En hoe bereken je het?

Ze geeft elk groepje een werkblad met de grafieken uit afbeelding 8. Daarbij krijgen de leerlingen een stukje doorzichtig plastic met een lijn erop dat ze kunnen gebruiken als een doorzichtige liniaal.

Terwijl de leerlingen bezig zijn blijkt een groepje van drie meisjes het verschil te willen bepalen aan de hand van de middelste kinderen van elke groep. Een van hen is Lonneke die de vorige dag al de term het gemiddelde had genoemd, maar dat omschreef als dat je ongeveer een beetje in het mid-

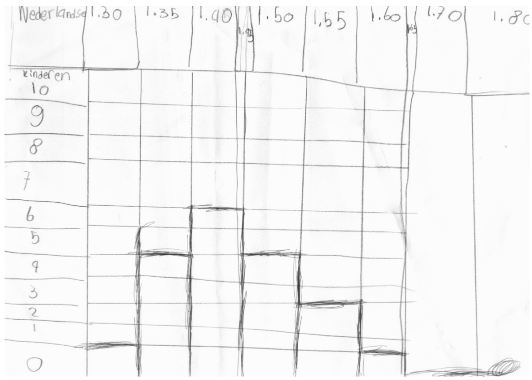


Afbeelding 4. De lengtes op volgorde.



Afbeelding 5. Verticaal een echte lengteschaal.

Afbeelding 6. Een frequentiegrafiek.



Afbeelding 7. Een frequentiegrafiek met categorieën.

den zit van de lengtes. De grafiek van de eigen klas leidt tot discussie, want daar zijn twee middelste kinderen, met een klein verschil in lengte.

In de nabespreking komen twee aanpakken aan de orde. De eerste is van Najib en Maarten die steeds het verschil zijn gaan berekenen tussen een Nederlands en een Indonesisch kind en uit die verzameling getallen concludeerden dat het verschil ongeveer tien tot vijftien centimeter is.

> Najib: Wij waren nog niet klaar, maar - we gingen het de hele tijd ongeveer uitrekenen, we waren de hele tijd bij twaalf, zeventien, vijftien, twaalf, dertien, zeventien, en als je dat samen bij elkaar doet heb je ongeveer tien centimeter en vijftien centimeter. Dus wij zijn ongeveer tien centimeter of vijftien centimeter per kind groter.

De andere aanpak wordt verwoord door Mounir die de twee middelste kinderen heeft vergeleken:

> Mounir: Ik heb net opgemeten hoeveel het bij de middelste is en daar heb je het .. daar bij de middelste, hou maar bij de 1,51. En dat heb je ook bij Jakarta, heb je ook de middelste en daar zit het ook, dus wij zijn eigenlijk 15 centimeter en zo groter.
> Leerkracht: Jij hebt de middelste opgemeten, mooi. Kun je ook uitleggen waarom?
> Mounir: Daar zie je echt de gewone kinderen, en van hun, want hier zie je de kleinste en de grootste, maar in de middelste zie je gewone kinderen en daar zitten, zaten eh ....
> Leerkracht: De meeste zitten in de buurt van het midden.
> Mounir: Ja.

Lonneke legt namens de groep van drie meisjes uit dat zij ook de middelsten hebben gemeten en het verschil is volgens hen acht centimeter.

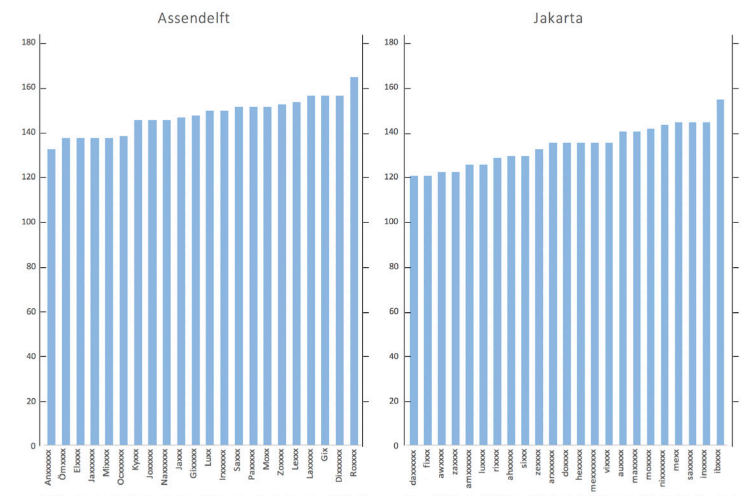
De leerkracht rondt hierna de les af en benadrukt daarbij dat het handig is om naar de getallen in het midden te kijken. Je kunt alle getallen bij elkaar optellen en dan delen door het aantal kinderen, maar je kunt ook alleen de middelste kinderen vergelijken.

Over de lessen

De lessen waren bedoeld om leerlingen de verdeling van lengtes te laten onderzoeken en om hen te laten nadenken over manieren om verschillen zichtbaar te maken, zowel de verschillen tussen de twee klassen als de variatie binnen een klas. Dat zichtbaar maken kan met een grafiek, maar ook door de verdeling met getallen te beschrijven. De lessen lijken op deze punten voor een groot deel van de leerlingen geslaagd:

- Alle kinderen legden de kaartjes op volgorde omdat ze beseften dat dat overzicht gaf. De groepjes die de kaartjes van beide klassen als een geheel ordenden, konden de vraag of de Nederlandse kinderen groter waren overtuigend beantwoorden, want de kleuren lieten zien dat de Indonesische kinderen vooral aan de 'lage' kant zaten.
- De leerlingen keken bij het vergelijken van de twee klassen niet alleen naar de grootste en kleinste kinderen, maar ook naar de kinderen in het middengedeelte.
- De kwaliteit van de getekende grafieken was wisselend; niet alle groepjes leerlingen kwamen met een grafiek die die de verschillen zichtbaar maakte. Er werden echter ook twee soorten grafieken getekend die dat wel doen, een grafiek met de lengtes op een van de assen en een grafiek van de frequentie van die lengtes.

Oorspronkelijk was het werken met de kaartjes vooral bedoeld als een introductie op het vergelijken van de grafieken. Bij de eerste try-out bleek echter



Afbeelding 8. De grafieken op het werkblad.

dat de taak op zich ook heel nuttig was, omdat deze de leerlingen dwong te zoeken naar manieren om de gegevens te ordenen. Ook bleek dat de vraag naar het verschil tussen de klassen in feite al vanuit de kaartjes te beantwoorden was.

Het tekenen van een grafiek was in eerste instantie behoorlijk lastig voor de leerlingen; ze hadden blijkbaar geen duidelijk beeld van wat een zinvolle grafiek zou kunnen zijn. Nadat de leerkracht het woord grafiek genoemd had, tekenden de leerlingen echter toch de twee soorten grafieken waarop we gehoopt hadden: een grafiek van de lengtes en een grafiek van de frequentie van die lengtes. In deze twee verkennende lessen is de leerkracht niet diep ingegaan op de getekende grafieken en op de verschillen ertussen. Ze zouden echter een goed uitgangspunt bieden voor vervolglessen. Een van de discussiepunten zou dan zijn of het belangrijk is hoe je de as met de lengtes indeelt. Je kunt de gevonden waarden simpelweg op volgorde zetten – zoals in afbeelding 4 en 6 – maar een grafiek zegt veel meer als de as de verhoudingen weergeeft. Dat kan door tussen bijvoorbeeld 132 en 137 ruimte over te laten voor de tussenliggende waarden, of door lengtes samen te nemen in even grote categorieën.

We hebben lang nagedacht over welke vraag het meest geschikt was om de behoefte op te roepen aan een, voor elke klas typerend getal. De opdracht om het verschil tussen de twee klassen te kwantificeren werkte goed, in ieder geval voor een deel van de leerlingen. Die leerlingen kozen als typerend getal een waarde in het midden van de verdeling, wat laat zien dat kinderen in zo'n situatie intuïtief in de richting van een mediaan denken. Het rekenkundig gemiddelde was in eerdere lessen wel eens aan de orde geweest, maar werd door geen van de leerlingen genoemd. Wij denken dat de mediaan als centrummaat minstens dezelfde plek verdient in het onderwijs als het rekenkundig gemiddelde. De mediaan is concreter, omdat leerlingen kunnen zoeken naar specifieke gevallen die als het ware de hele groep representeren. Het rekenkundig gemiddelde compenseert hoge waarden met lage waarden, maar dat doet de mediaan ook en wel zonder dat er gerekend hoeft te worden. In de praktijk liggen mediaan en gemiddelde doorgaans vlak bij elkaar.

In deze verkennende lessen bleef het redeneren van de leerlingen nog heel informeel en intuïtief en de conclusies van sommige groepjes werden zeker nog niet door alle leerlingen gedeeld. Vervolglessen zouden nodig zijn om het nut van een bepaalde aanpak duidelijker te krijgen en om dit informele denken en redeneren naar een meer formeel niveau van meer vaste procedures te begeleiden.

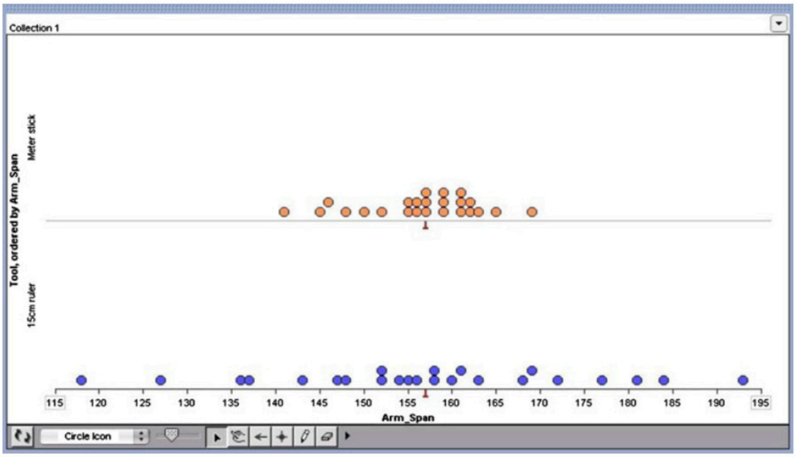
Herhaald meten als context

Wij kozen voor deze les over verdelingen voor de situatie van het vergelijken van twee groepen. Een andere ingang is herhaald meten (Petrosino, Lehrer, & Schauble, 2003; Lehrer, Kim en Jones, 2011). Metingen hebben altijd een bepaalde mate van onnauwkeurigheid; als een grote mate van precisie wordt gevraagd zal een tweede of derde meting een iets andere waarde geven. Wanneer veel metingen worden gedaan levert dat een verdeling op waarbij de meeste meetwaarden rond de werkelijke waarde liggen, terwijl een klein aantal er ver boven of onder ligt. Centrummaten kunnen binnen een meetcontext worden geïnterpreteerd als indicatoren voor de werkelijke waarde, en spreiding kan worden gezien als de ruis die het meetproces van nature met zich meebrengt.

Een concrete opdracht in de context van herhaald meten is om bij iemand die met gestrekte armen staat de afstand van vingertop tot vingertop te meten. Dat doen leerlingen bijvoorbeeld eerst met een liniaal die maar vijftien centimeter lang is en daarna met een bordliniaal van een meter. Het moeten verplaatsen van de liniaal zorgt voor ruis en de meetresultaten zullen dus nogal uiteenlopen. Als alle leerlingen een keer gemeten hebben worden de metingen geplot (Afb. 9). Lehrer, Kim en Jones (2011) gebruikten hier het programma Tinkerplots voor. De opdracht aan de leerlingen was om een procedure te bedenken die een zo goed mogelijke schatting op zou leveren voor de werkelijke spanwijdte. Ook werd hen gevraagd om een maat te bedenken voor spreiding. Binnen de context van het meten met die twee verschillende linialen was voor de leerlingen duidelijk dat het meten met het kleine liniaaltje een veel grotere spreiding opleverde.

Volgens Lehrer en Schauble (2004) is de ingang via herhaald meten voor leerlingen eenvoudiger dan de ingang via natuurlijke variatie. Dat is deels omdat centrummaten en spreidingsmaten geen duidelijke tegenhanger hebben in de concrete wereld (wat betekent het dat een plant gemiddeld is?) en deels omdat leerlingen moeten gaan redeneren over populaties in plaats van over organismen. In de geschiedenis van de statistiek kwamen centrummaten ook eerder naar voren in het redeneren over meetprocessen dan in het denken over natuurlijke variatie.

Bakker (2004) deed onderzoek naar statistiek in de eerste en tweede klas van het voortgezet onderwijs. Hij liet zien dat de context van de levensduur van batterijen - een context in de sfeer van natuurlijke variatie - een goede ingang is voor het leren redeneren over verdelingen. Onze context van lengtemetingen ligt dicht bij die context en leidde tot de redeneringen waarop we hoopten. Wij denken dat lessen rond herhaald meten en lessen rond de variatie binnen groepen elkaar goed kunnen aanvullen.



Afbeelding 9. De geplotte metingen.

Inzet van de computer

In ons verkennende onderzoek hebben we er bewust van afgezien om leerlingen zelf met een computerprogramma te laten werken. Bij vervolglessen zou daar echter niet aan te ontkomen zijn. Statistiek gaat altijd over grote aantallen gegevens en de computer is bij uitstek geschikt voor het ordenen en representeren daarvan. Bovendien biedt een computerprogramma in principe veel flexibiliteit; dezelfde dataset kan op verschillende manieren worden weergegeven.

Binnen het onderwijs is er behoefte aan computerprogramma's die aansluiten bij het niveau waarop leerlingen over verdelingen kunnen redeneren. Cobb, McClain en Gravemeijer (2003) en Bakker (2004) gebruikten de zgn. 'Minitools'. Dit zijn java-applets die inmiddels op veel computers niet meer gebruikt kunnen worden. Als we inderdaad aandacht willen besteden aan statistiek op de basisschool dan lijkt het gewenst dat er een nieuwe versie komt van deze programma's. Een alternatief is het Amerikaanse 'Tinkerplots' (Konold & Miller, 2005). Het bezwaar van dat programma is dat het ontworpen is voor leerlingen van basisschoolleeftijd tot en met studenten in het hoger onderwijs, wat betekent dat jonge leerlingen makkelijk verdwalen in alle opties die open staan.

Andere doelen

Als wij pleiten voor statistiek in het basisonderwijs bedoelen we niet dat een nieuw vak zou moeten worden ingevoerd. Het gemiddelde en grafieken horen immers al tot de basisschoolstof. Wel pleiten wij voor een andere benadering en voor andere doelen. Het gemiddelde zou niet een door de leerkracht ingebrachte rekenprocedure moeten zijn, maar voor de leerlingen moeten voortkomen uit het onderzoeken van verdelingen. Het is logisch dat dan ook de mediaan aan de orde zal komen, waarschijnlijk zelfs als voorloper van het rekenkundig gemiddelde. Het onderwijs over grafieken zou zich niet louter moeten richten op het leren aflezen van kant en klare grafieken, maar ook op het zelf bedenken en tekenen van grafieken, omdat dat pas maakt dat leerlingen de onderliggende principes gaan begrijpen.

De activiteiten die in dit hoofdstuk beschreven werden, blijken leerlingen te activeren tot een andere manier van denken en discussiëren over centrummaten en grafieken. In de beschreven lessen bleef het redeneren nog op een concreet, informeel niveau. Leerkrachten kunnen leerlingen helpen om hun informeel wiskundig denken, en de daarbij horende taal te ontwikkelen naar een meer formeel niveau.

In ons pleidooi voor statistiek op de basisschool gaat het ons niet om een betere voorbereiding op het vak statistiek in het voortgezet onderwijs, een vak dat niet alle leerlingen krijgen. Wij pleiten voor het zoeken naar een vorm van statistiek voor iedereen.

Literatuur

Bakker, A. (2004). Design research in statistics education: On symbolizing and computer tools. Utrecht: CD-ß Press.

Cobb, P., McClain, K., & Gravemeijer, K. (2003). Learning about statistical covariation. Cognition and instruction, 21(1), 1-78.

Konold, C., & Miller, C. D. (2005). TinkerPlots: Dynamic data exploration. [Computer software] Emeryville, CA: Key Curriculum Press.

Lehrer, R., Kim, M. J., & Jones, R. S. (2011). Developing conceptions of statistics by designing measures of distribution. The international journal on mathematics education, 43(5), 723-736.

Lehrer, R., & Schauble, L. (2004). Modeling natural variation through distribution. American Educational Research Journal, 41(3), 635-679.

Petrosino, A. J., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Structuring error and experimental variation as distribution in the fourth grade. Mathematical thinking and learning, 5(2-3), 131-156.

1 Dit artikel werd eerder gepubliceerd in: M. van Zanten (red.) (2017). Rekenen-wiskunde in de 21e eeuw. Ideeën en achtergronden voor primair onderwijs (pp. 43-52). Utrecht / Enschede: Panama, Universiteit Utrecht / NVORWO / SLO.

2 Met dank aan Joost Rothuis en Michelle Stolk, die de lessen gaven. De namen van de leerlingen zijn veranderd.

De rol van leergang-specifieke software bij begripsvorming in aanvankelijk statistiekonderwijs

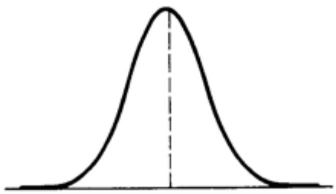
Koeno Gravemeijer

Wanneer apparaten statistische bewerkingen uitvoeren, is het van belang dat gebruikers de onderliggende statistiek goed begrijpen. Statistiek is echter een lastig onderwerp en we kunnen ons afvragen wat de leerlingen nu precies zouden moeten begrijpen en wat er op dit gebied haalbaar is. De gedachte die we in dit artikel willen uitwerken is dat computerprogramma's, die daar specifiek voor zijn ontworpen, hier een belangrijke rol kunnen spelen. We zien daarbij met name mogelijkheden in programma's die de leerlingen als gereedschap kunnen gebruiken bij het oplossen van statistische problemen en tegelijkertijd onderdeel zijn van een leergang en zo zijn ontworpen dat ze het leerproces ondersteunen. Kern hierbij is dat deze programma's startfunctionaliteiten bieden die direct aansluiten op wat de leerlingen al weten en kunnen. Door gerichte opdrachten kunnen de leerlingen, al werkend met de programma's, nieuwe inzichten ontwikkelen. Dan kunnen meer gesofisticeerde representaties en nieuwe opties worden aangeboden, die de leerlingen in de gelegenheid stellen deze inzichten verder uit te bouwen en op een hoger niveau te brengen. Wat weer mogelijkheden biedt voor nieuwe representaties etc. Door gebruik te maken van dergelijke programma's kunnen statistische inzichten eerder en effectiever worden aangeboden. Hoe specifiek op de leergang toegesneden programma's het leerproces kunnen ondersteunen lichten we hieronder toe aan de hand van ervaringen die zijn opgedaan met een experimentele leergang data analyse die gebruik maakt van speciaal daarvoor ontworpen computerprogramma's die bekend staan als de "Minitools" (Gravemeijer, 2002). Dit experiment heeft plaats gevonden in de Verenigde Staten, maar een vergelijkbare leergang was ook onderwerp van een onderwijsexperiment in Nederland (Bakker, 2004). De gebruikte Minitools zijn helaas niet meer beschikbaar, maar vergelijkbare activiteiten zijn mogelijk met op dit moment beschikbare programma's, zoals die te vinden zijn in de Digitale Wiskunde Omgeving (DWO) van het Freudenthal Instituut, of van het computerprogramma Tinkerplots (https://www.tinkerplots.com). Echter deze programma's zijn niet toegesneden op de hieronder beschreven leergang. Ze missen daarom specifieke kenmerken; we komen daar later op terug.

Het concept 'verdeling' als onderwijsdoel

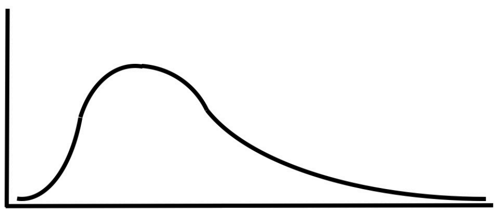
De Minitools zijn ontwikkeld in het kader van een onderwijsproject in Nashville dat zich richtte op Middle-School leerlingen (vergelijkbaar met het eerste en tweede leerjaar in het VO). Het statistiekonderwijs voor die leeftijdsgroep betreft grofweg de introductie van kengetallen als gemiddelde, mediaan, modus, kwartiel en spreiding, en het werken met representaties als histogram en box plot. In het gangbare onderwijs ligt het accent in het algemeen op procedures: berekenen, tekenen en aflezen. Het ontwikkelen van inzicht in betekenissen blijft daar vaak bij achter. Wanneer we op zoek gaan naar betekenissen kunnen we ons bijvoorbeeld afvragen, waar de bovengenoemde kengetallen, kengetallen van zijn? Wel, deze getallen hebben betrekking op verzamelingen van meetwaarden: data sets. De kengetallen en de visualiseringen beschrijven hoe de data/meetwaarden zijn verdeeld. Anders gezegd, het zijn hulpmiddelen om verdelingen te beschrijven. Wanneer we ons willen richten op de conceptuele kern van het aanvankelijke statistiek onderwijs, zullen we ons dus moeten richten op het begrip verdeling. Genoemde Minitools zijn ontworpen om de leerlingen te helpen dit concept, verdeling, te ontwikkelen.

Wat we onder een verdeling verstaan kunnen we toelichten aan de normale verdeling. Iedereen kent wel het plaatje van de klokvormige kromme (figuur 1).



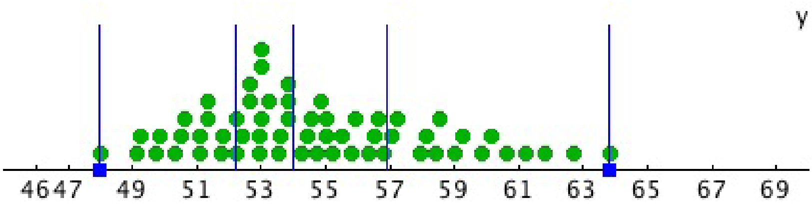
Figuur 1. Normale verdeling.

Kenmerkend aan de normale verdeling is de symmetrie en het feit dat de meeste data in het midden liggen en de aantallen afnemen als je verder van het midden (het gemiddelde) komt. Van belang is dus de vorm van de verdeling. Verder zijn uiteraard ook de meetwaarden waar het omgaat van belang; die worden bijvoorbeeld beschreven met het gemiddelde en de spreiding t.o.v. het gemiddelde. Daarbij is de normale verdeling symmetrisch, maar verdelingen kunnen ook scheef zijn (figuur 2).



Figuur 2. Scheve verdeling.

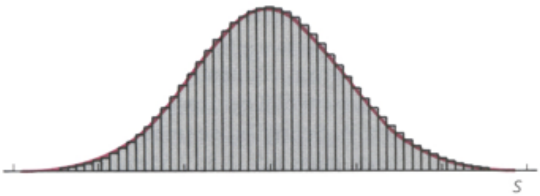
In die zin kunnen we verdeling opvatten als een object met bepaalde kenmerken; positie, scheefheid en spreiding. We kunnen deze kenmerken beschrijven met de mediaan, kwartielwaarden en extreme waarden (zie figuur 3). Die we weer kunnen samenvatten in een box plot (figuur 4).



Figuur 3. Dot plot met mediaan, kwartielwaarden en extreme waarden.

Figuur 4. Box plot

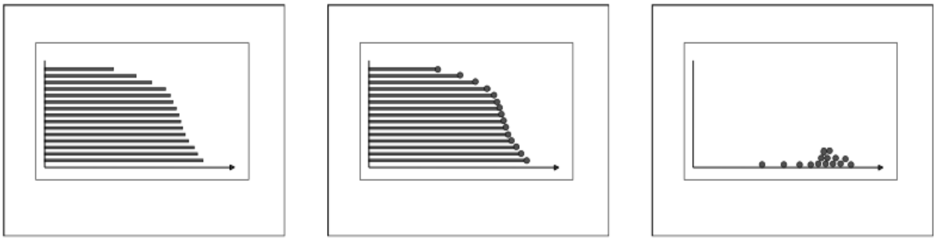
Het object 'verdeling' kunnen we zien als een kromme (een functie) die de dichtheid van datapunten beschrijft; hoe meer meetwaarden dicht bij elkaar liggen hoe hoger dat deel van de kromme (de functie waarde). Meer formeel geredeneerd beschrijft de kromme de limiet van het aantal datapunten per interval wanneer de intervalbreedte naar nul gaat (figuur 5).



Figuur 5. Histogram van het aantal datapunten per interval.

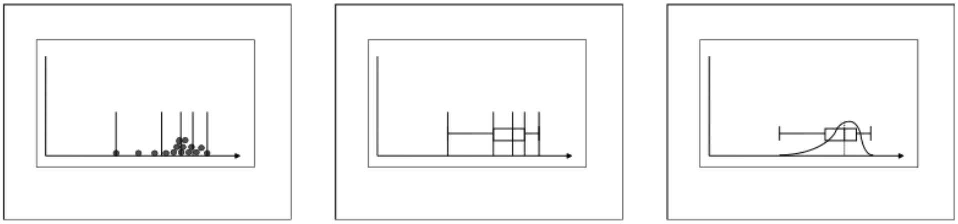
Grote lijn onderwijstraject

Op basis van deze analyse kunnen we concluderen dat een meer conceptuele invulling van aanvankelijke statistiek vraagt dat meer aandacht wordt besteed aan de notie van verdeling als object. De idee achter de leergang die we hier kort beschrijven is dat de leerlingen kengetallen niet kant-en-klaar krijgen aangeboden, maar deze samen met het concept verdeling ontwikkelen. Daarbij wordt de volgende opbouw gevolgd. Eerst worden meetwaarden voorgesteld met horizontale staven waarvan de lengte evenredig is met de meetwaarde (een soort gekantelde staafgrafiek). Wanneer leerlingen zo gerepresenteerde data sets vergelijken, gaan ze al snel zien dat het gaat om de positie van de eindpunten van de staven ten opzichte van de x-as. In een volgende representatie worden de staven daarom weggelaten en wordt volstaan met de verzameling eindpunten (figuur 6).



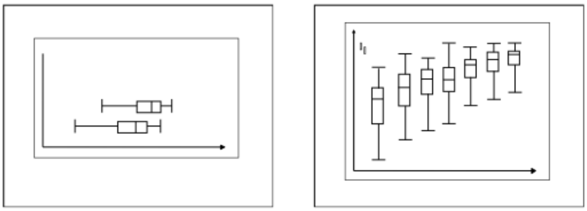
Figuur 6. Van staven (value bars) naar punten (dot plot).[1]

Deze dot plots kunnen met behulp van de computertools op verschillende gestructureerd worden. Bijvoorbeeld door de datapunten in te delen in vier gelijke groepen. Deze representatie kan weer worden vervangen door een box plot, waarin de leerlingen idealiter de vorm van de verdeling nog kunnen zien (figuur 7).



Figuur 7. Indelen in vier gelijke groepen als verbinding tussen de vorm van de verdeling en de box plot.[1]

Met behulp van deze representaties kunnen twee of meer (uni-variate) verdelingen worden vergeleken, waarmee een begin kan worden gemaakt van het onderzoeken van data die afhangen van twee variabelen (bi-variate verdelingen) (Figuur 8).



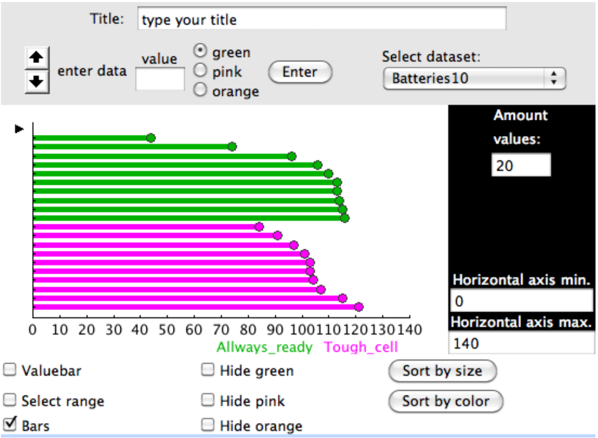
Figuur 8. Van uni-variate verdelingen naar een verkenning van bi-variate verdelingen.[1]

1.Reprinted by permission from Springer, D. Ben-Zvi, J. Garfield, and K. Makar (Eds.) The first handbook of research on statistics teaching and learning (pp. 473-502). Chapter 11: Design of Statistics Learning Environments, Ben-Zvi, D., Gravemeijer, K., Ainley, J. (2018).

Ervaringen met de Minitools

1. meetwaarden als stroken

De beschreven representaties zijn onderdeel van de eerder genoemde Minitools, die de leerlingen opties bieden om de data sets te structureren (Figuur 9).



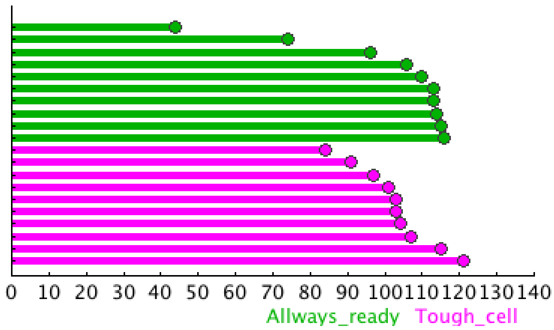
Figuur 9. Levensduur van verschillende merken batterijen.

Minitool 1 biedt een valuebar en een range tool, waarmee de leerlingen een specifieke waarde in de grafiek kunnen markeren, respectievelijk de grenzen van een interval kunnen markeren. Het idee was dat de leerlingen de value bar zouden gebruiken om visueel het gemiddelde te bepalen en de range tool zouden gebruiken om de modus te bepalen. Dit deden ze niet, maar deze hulpmiddelen vervulden wel een nuttige functie, zoals uit het volgende voorbeeld blijkt.

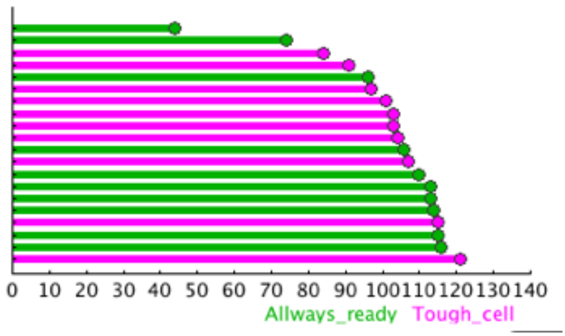
De Middle School leerlingen uit Nasville werd gevraagd om een commentaar te bedenken voor een consumentenrapport dat handelde over verschillende merken batterijen. In dit geval ging het om batterijen van het merk Always Ready en batterijen van het merk Tough Cell. Metingen van de levensduur van 10 batterijen van beide merken waren uitgezet in Minitool 1. Daarbij konden de leerlingen de data splitsen in twee groepen (zie figuur 10) of doorelkaar in volgorde plaatsen (Figuur 11).

In een klassengesprek gebruikten ze de tweede representatie. Een van de leerlingen gebruikt de range tool om de tien staven met de hoogste waarde te selecteren (Figuur 10). Verwijzend naar het resulterende beeld, hield ze de volgende redenering:

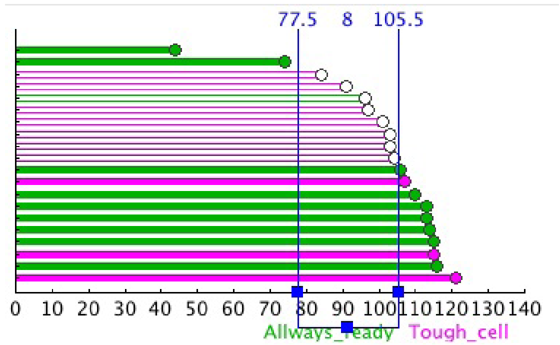
> ‘And I was saying, see like there’s seven green that last longer.’



Figuur 10. Minitool 1, data in twee groepen gesplitst.



Figuur 11. Minitool 1, data geordend naar grootte.



Figuur 12. Minitool 1, tien staven met hoogste waarde geselecteerd, value bar op 80.1.

Een medeleerling licht toe:

> 'She's saying that out of ten of the batteries that lasted the longest, seven of them are green, and that's the most number, so the Always Ready batteries are better because more of those batteries lasted longer.'

Een andere leerling was het hier niet mee eens en plaatste de value bar op 80. Hij redeneerde als volgt:

> 'See, there's still green ones [Always Ready] behind 80, but all of the Tough Cell is above 80. I would rather have a consistent battery

that I know will get me over 80 hours than one that you just try to guess.'

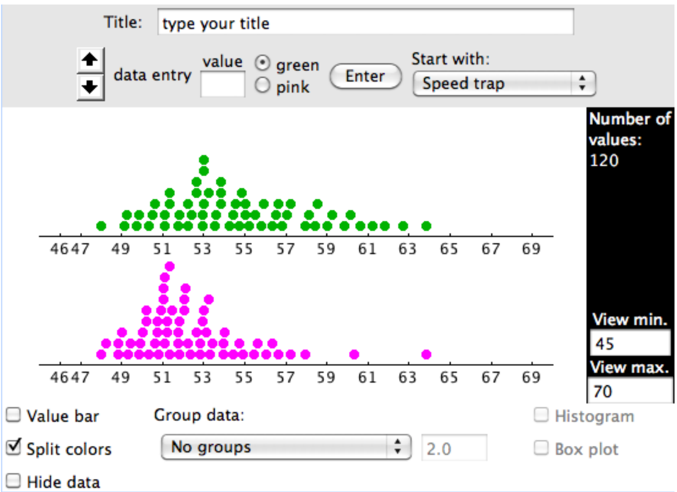
Een derde leerling ging hierop in door op te merken, dat het van belang was te weten waar je de batterijen voor gebruikt.

'Like, if you're using them for something real important and you're only going to have like one or two batteries, then I think you need to go with the most constant thing. But if you're going like, "Oh well, I just have a lot of batteries here to use," then you need to have most of the highest.'

Interessant is hier dat de leerlingen in samenhang met het oplossen van dit type problemen een informele spreidingsmaat uitvonden, die ze aanduidden met het woord, 'consistent'.

2. dichtheid en vorm

Bij Minitool 2 konden de leerlingen de data structureren door verticale markeerlijntjes aan te brengen. Dit kon op verschillende manieren (a) zelf naar eigen inzicht aanbrengen, (b) de computer de data set te laten structureren, door deze in twee, of vier, gelijke delen te laten splitsen, of (c) aan door de computer op te geven hoe groot de intervallen moesten worden. De tweede manier werd onder meer gebruikt bij een opgave over de snelheid van auto's voor en na een veilig verkeer-actie (figuur 13).



Figuur 13. Gemeten snelheden voor en na een veilig-verkeer actie.

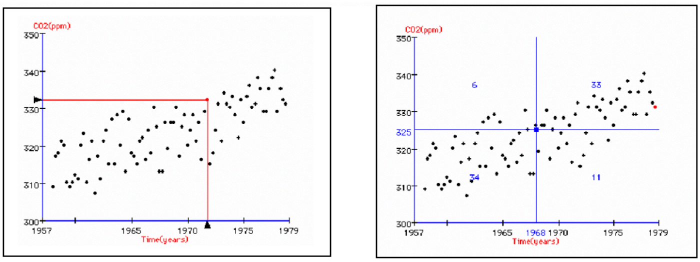
De leerlingen merkten op dat na de campagne nog maar ¼ van de auto's sneller dan 54 mijl/uur ging, terwijl het daarvoor de helft was. een andere beschrijving kwam van een leerling die opmerkte dat, "the hill has shifted". Ze legde uit dat top van de heuvel naar voren was verschoven en dat dit betekende dat de auto's langzamer waren gaan rijden. Belangrijk is hier om ons te realiseren dat de vorm van de verdeling betekenis voor haar had.

Een betekenis die de leerlingen zelf hadden moeten construeren, omdat er geen verticale as gegeven was. De vorm van de verdeling krijgt via dit soort opdrachten geleidelijk aan het karakter van een dichtheidsfunctie. Wanneer met een unimodale verdeling wordt gewerkt is de mediaan een goede indicator van de top of the hill en de mate waarin twee staafjes dicht op elkaar zitten een maat voor in hoeverre 'the data are buched up', ofwel voor de dichtheid.

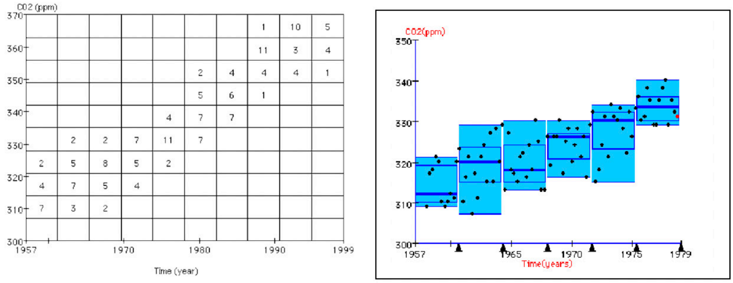
Het idee is dat wanneer de vier-gelijke-groepen-representatie wordt vervangen door een box plot (zie figuur 7), de leerlingen de vorm van de verdeling in de box plot blijven zien. De zo opgedane inzichten kunnen vervolgens worden gebruikt om de samenhang tussen twee variabelen te onderzoeken.

3. bi-variate data

In het vervolg van de leergang worden data die twee variabelen bevatten onderzocht met behulp van Minitool 3. Dan worden bijvoorbeeld gekeken naar het CO2-gehalte in opeenvolgende jaren. In Minitool 3 worden de data geplot in een vlak, in dit geval met op de verticale as het CO2-gehalte en op de horizontale as de jaren (figuur 14a). Een manier om de data te structureren is dan door middel van vier segmenten (figuur 14b).



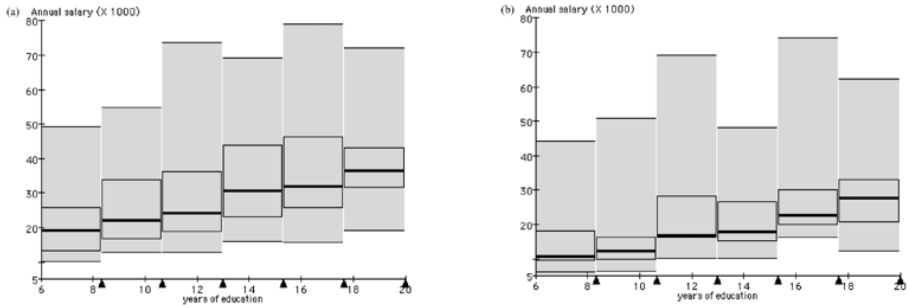
Figuur 14 a en b. CO2-gehalte uitgezet tegen kalenderjaren.



Figuur 15 a en b. Structureringen van CO2-gehalte uitgezet tegen kalenderjaren.

Een derde manier om data te structureren is door middel van een grid met aantallen data punten (figuur 15a) en een vierde manier is door middel van verticale box plots (figuur 15b).

Zo’n box plot representatie kan ook worden gebruikt om twee data sets te vergelijken. Bijvoorbeeld wanneer we trends de salarisontwikkeling van vrouwelijke en manlijke leraren in een bepaald schooldistrict willen beschrijven (figuur 16).



Figuur 16 a en b. Salarisontwikkeling van leraren. (Gefingeerde data.)

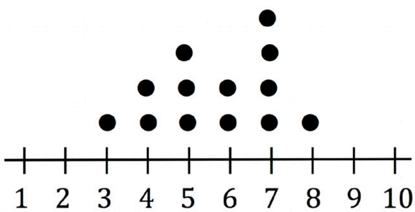
Reflectie

Het voorbeeld van de Minitools laat zien hoe passende software kan worden ingezet om wiskunde, of in dit geval, statistiek, te gaan begrijpen. Dit laatste achten we van belang in de 21e eeuw. Wanneer apparaten het wiskundewerk doen, dan wel allerlei statistische bewerkingen uitvoeren, dan moeten de gebruikers goed begrijpen wat de computer doet. Dit geldt enerzijds als je zelf bepaalde software gebruikt, maar ook als je de resultaten moet beoordelen van berekeningen die een ander door een computer heeft laten uitvoeren. Met bovenstaande leergang willen we laten zien dat specifiek voor dit doel ontworpen computersoftware kan helpen om dit inzicht te ontwikkelen. Daarbij gaat het om de kerninzichten die de basis voor de bewerkingen vormen. Precies bij dit type inzicht kan dynamische, interactieve software een belangrijke rol spelen om deze inzichten op een efficiënte wijze te ontwikkelen.

Uitgangspunt is hier dat het accent in het onderwijs niet moet liggen op het berekenen van kengetallen als gemiddelde, mediaan, modus, kwartielen en spreiding, of het tekenen en aflezen van statistische representaties als histogram en box plot. In plaats daarvan zullen we ons moeten richten op het begrip verdeling. Waarbij de verdeling wordt gezien als een object met bepaalde kenmerken. De Minitools zijn ontworpen om de leerlingen te helpen het concept verdeling en de daarbij passende kengetallen en representaties op een inzichtelijke manier te ontwikkelen.

De leerlingen ervaren de stroken in Minitool 1 als vanzelfsprekende visualiseringen van meetwaarden, ze zijn stroken namelijk eerder in een dergelijke rol tegen gekomen: bij de schaal van een kaart. De opties van de Minitool, als de valuebar en de range tool kunnen de leerlingen gebruiken om structuur aan te brengen en om over de data sets te redeneren. Met name door het gebruik van deze opties ontdekken leerlingen dan dat het gaat om de posities van de eindpunten van de staven. Wat vervolgens een meer compacte representatie mogelijk maakt. Bij de dot plot van Minitool 2 richten de opdrachten zich op de manier waarop deze punten (de data) verdeeld zijn; hoe de dichtheid van de datapunten varieert over de x-as. Met name de optie, de data in te delen in vier gelijke groepen richt de aandacht op de dichtheid; hoe dichter de verticale begrenzingen bij elkaar liggen, des te hoger de dichtheid. Aldoende wordt de basis gelegd voor de notie van verdeling als dichtheidsfunctie. Door de opties van Minitool 2 te gebruiken, kunnen de leerlingen statistische maten ontwikkelen als mediaan, kwartielen, en extreme waarden, en representaties ontwikkelen als box plot (of het hier niet besproken histogram) als manieren om kenmerken van verdelingen te beschrijven. De verdeling krijgt dan het karakter van een object met specifieke kenmerken, zoals symmetrie of scheefheid, spreiding en positie op de x-as. Daarmee wordt tevens de basis gelegd voor het redeneren met verdelingen in de context van covariantie. De Minitools helpen de leerlingen zo op een efficiënte manier met het begrijpen van de kernideeën achter het gebruik van statistische gereedschappen als mediaan, modus, kwartielen, spreiding, histogram, box plot en correlatie.

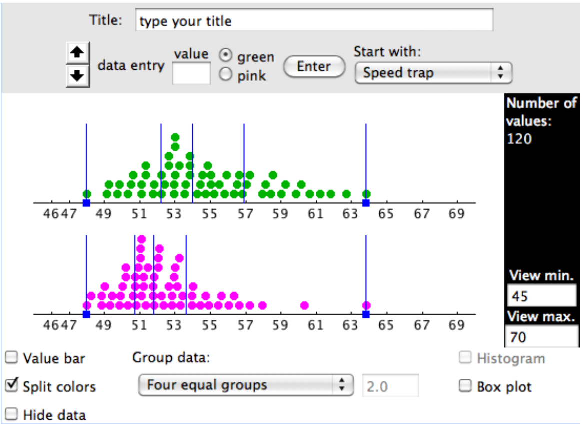
Zoals eerder opgemerkt verschillen de Mintools op bepaalde punten van de gangbare statistiek programma's. Zo zijn de eindpunten van de staven van Minitool 1 voorzien van bolletjes. Hiermee wordt geanticipeerd op de overgang naar Minitool 2. Deze bolletjes kunnen als het ware neerdalen op de x-as. Daarom ziet de dot plot van Minitool 2 er ook anders uit dan de gangbare dot plots, waar de bolletjes in rechte stapeltjes zijn ondergebracht (zie figuur 17). In de wat rommelige dot plots van Minitool 2 hebben de bolletjes hun exacte positie ten opzichte van de x-as behouden.



Figuur 17. Gangbare vorm van een dot plot.

Uniek zijn ook de range tool en de value bar van minitool 1. Met de range tool kunnen de leerlingen een groep datapunten markeren en we zagen hoe de leerlingen hier gebruik van maken om hun redeneringen te ondersteunen. Redeneringen die leiden tot het idee van 'consistentie', dat gezien kan worden als een informele versie van het concept spreiding. De value bar wordt op een vergelijkbare manier gebruikt.

Een specifiek kenmerk van Minitool 2 is dat de leerlingen de data kunnen structureren door verticale markeerlijntjes aan te brengen. Dit kan op verschillende manieren. De eerste manier, zelf naar eigen inzicht aanbrengen, sluit aan bij werkwijzen waarvan bekend is dat sommige leerlingen die spontaan kiezen als ze een structurering op papier willen aanbrengen. Van belang is hier dat de leerlingen de voor en nadelen van verschillende manieren van structureren tegen elkaar kunnen afwegen. De optie om de computer de data set in twee of vier gelijke delen te laten splitsen, biedt de mogelijkheid om relatieve vergelijkingen te maken. Bij de data over de snelheidscampagne bijvoorbeeld, ontdekken de leerlingen door gebruik te maken van de vier-gelijke-groepen optie dat eerst de helft van de auto's harder dan 54 km/u ging en later minder dan de helft (zie figuur 18).



Figuur 18. Snelheidsdata ingedeeld in vier gelijke groepen.

Doordat leerlingen verschillende opties kunnen kiezen bij het oplossen van dezelfde opgave, kunnen er klassendiscussies ontstaan, waarin dezelfde verdelingen op verschillende manieren met elkaar worden vergeleken. Op deze manier kunnen ideeën over dichtheid, vorm en indeling met elkaar worden verbonden. Zo kunnen, bijvoorbeeld, noties over vorm gekoppeld worden aan dichtheid, mediaan en kwartielen.

Een kernprincipe in de leergang is dat nieuwe symbolische representaties niet uit de lucht komen vallen, maar een geschiedenis hebben voor de leerlingen. Zo is het idee, bijvoorbeeld, dat de leerlingen de bolletjes in de dot plot van Minitool 2 zien als representanten van staafjes waar deze bolletjes het eindpunt van vormden. De positie van het bolletje vertegenwoordigt daarmee de oorspronkelijke meetwaarde. Op eenzelfde manier ontlenen de vier-groepen-indeling en de box plot hun betekenis aan ervaringen met het structureren van verzamelingen van datapunten en het geleidelijk opkomende idee van verdeling als object.

Tot slot willen we nog opmerken dat de opgaven voorbeelden bieden van het type toepassingssituaties waar we de leerlingen op willen voorbereiden. Bij de batterijen bijvoorbeeld gaat het erom te bedenken dat de bruikbaarheid van het gemiddelde afhangt van de vraag waar je die batterijen voor gebruikt en dat soms de spreiding een betere maat is. Bij de snelheden gaat het om het inzicht dat een box plot een heel efficiënte weergave van de data kan zijn, wanneer je althans goed begrijpt waar een box plot voor staat. De CO2 data en de leraar-salarissen laten tenslotte zien dat bij covariantie niet alleen het verband zelf belangrijk is, maar ook hoe de data rond de centrale trend zijn verdeeld.

Afsluitend kunnen we concluderen dat wanneer we het statistiekonderwijs zo willen inrichten dat het de leerlingen goed voorbereid op de maatschappij van de 21e eeuw, tailormade software daar een belangrijke rol bij kan spelen. Dit pleit voor investeren in het ontwikkelen van dit type software en vraagt ons bij het doordenken van een curriculum voor de toekomst om rekening te houden met de mogelijkheden die software biedt.

literatuur

Gravemeijer, K. (2002). Developmental research, a course in elementary data analysis as an example. In: F. Lin (Ed.) Common Sense in Mathematics Education, (p.p. 43-68). Taipei, Taiwan: National Taiwan Normal Uninversity. |

Bakker, A. (2004). Design research in statistics education: On symbolizing and computer tools. Utrecht: CD-β Press.

Statistiekonderwijs in de onderbouw voor vandaag en morgen[1]

Peter Kop

Vernieuwd statistiek onderwijs

Met ingang van 2015 is er een nieuw statistiek programma gestart voor de bovenbouw havo/vwo van het voortgezet onderwijs. De Commissie Toekomst wiskunde onderwijs (cTWO) was van mening dat het oude programma een te kunstmatig beeld van statistiek gaf. In dat oude programma stonden de data vaak al klaar, er werd door leerlingen vooral gerekend - bijvoorbeeld aan het gemiddelde en de standaardafwijking - er werd weinig geredeneerd met concepten als gemiddelde, standaardafwijking en verdeling, en er werd nauwelijks onderscheid gemaakt tussen populatie en steekproef. Het nieuwe programma zou tegemoet moeten komen aan deze bezwaren met de wens dat dit nieuwe programma een realistischer beeld zou geven van het gebruik van statistiek in de praktijk, in het vervolgonderwijs en in het beroep (Van Streun & Van de Giessen, 2007a, 2007b). Daarnaast zou het statistiekonderwijs leerlingen ook moeten vormen tot kritische burgers, die resultaten van statistiek kunnen begrijpen en interpreteren. Deze ontwikkelingen van het statistiek onderwijs zijn ook internationaal zichtbaar. Het Gaise project benadrukt het ontwikkelen van statistical literacy, door gebruik van echte data en van ICT voor het analyseren van deze data, en benadrukt het belang van conceptuele kennis en het gebruik van ICT om deze kennis te ontwikkelen (Franklin et al., 2005, 2007; Garfield & Ben-Zvi, 2009; Lee & Stangl, 2015; Shaughnessy, 2007; Ziefller et al., 2008).

Vernieuwing in de bovenbouw

CTWO formuleerde de wens dat de empirische cyclus als leidraad voor het onderwijs zou fungeren (Drijvers et al., 2012). Hoewel men inschatte dat er onvoldoende tijd beschikbaar was om leerlingen voldoende vaak deze empirische cyclus zelf te laten doorlopen, zouden de leeractiviteiten moeten passen in deze cyclus. Daarnaast werden een aantal big ideas geformuleerd: onderzoek begint met een onderzoeksvraag, er wordt onderscheid gemaakt tussen populatie en steekproef, er wordt gebruik gemaakt van ICT om realistische datasets te representeren en te exploreren, er is aandacht voor zowel kwalitatief als kwantitatief redeneren, en er is aandacht voor variabiliteit, simulaties kunnen gebruikt worden ter ondersteuning van het kansbegrip. Er is een beperking van het aantal soorten problemen dat be-

1 Een langere versie van dit artikel, met meer voorbeelden, is te vinden op www.rekenenwiskunde21.nl

studeerd wordt: er worden uitspraken gedaan over een populatieproportie of populatiegemiddelde op basis van steekproefresultaten, er wordt gekeken naar verschillen tussen twee groepen, en er wordt gekeken naar de samenhang tussen twee variabelen (deze laatste enkel kwalitatief). Bij deze problemen wordt gestart met kwalitatief redeneren, d.w.z. er wordt globaal gekeken naar representaties van data, zonder berekeningen. Na deze eerste inspectie van de data kunnen kwantitatieve uitspraken gedaan worden aan de hand van vuistregels. Voor de havo staat een aantal vuistregels op het formuleblad dat bij het eindexamen beschikbaar is. Op de havo werd statistiek opgenomen in het centraal schriftelijk eindexamen, maar op het vwo is er enkel een schoolexamen. Dit had als gevolg dat voor de havo het programma gedetailleerder beschreven moest worden (syllabus) en dat er aandacht besteed werd aan een herziening van het pilotmateriaal dat onder cTWO ontwikkeld was (cTWO, 2012a).

Voorgestelde vernieuwing voor onderbouw

Deze bijdrage gaat over de onderbouw. In de schoolboeken is nog weinig werk gemaakt van de hierboven beschreven vernieuwing. Traditioneel laten de schoolboeken in de onderbouw bij een beperkte dataset representaties als staafdiagram en boxplot met de hand maken waarna ook centrummaten en spreidingsmaten berekend moeten worden (Van Streun & Van de Giessen, 2007a, 2007b). Als voorbereiding op het bovenbouwprogramma zou er, ons inziens, ook in de onderbouw gestart kunnen worden met de big ideas van het vernieuwde statistiekprogramma, waarbij de empirische cyclus als basis voor het onderwijs gekozen wordt. Een leerlijn zou er dan, bij benadering, als volgt uit kunnen zien: Er wordt gestart met aandacht voor een onderzoeksvraag over een populatie. Hierna wordt of zijn door middel van een steekproef data verzameld. Er wordt nagedacht over problemen die daarbij kunnen optreden. De data worden actief geordend en gerepresenteerd in diagrammen, tabellen en kentallen. Op basis hiervan worden via kwalitatief redeneren en/of via beslisregels conclusies getrokken over de populatie. Deze conclusies kunnen vaak niet met wiskundige zekerheid getrokken worden. Dit komt door de onzekerheid ten gevolge van het trekken van een steekproef uit een populatie en het feit dat beslissingsregels vaak arbitrair gekozen lijken te zijn. Hierbij moeten leerlingen wennen aan deze onzekerheid, en enig gevoel ontwikkelen voor statistisch redeneren. Om de variabiliteit die optreedt bij het trekken van steekproeven uit populaties te bestuderen kan gebruik gemaakt worden van simulaties. Door middel van ICT kan zicht gekregen worden op verdelingen van steekproefuitkomsten.

De nadruk zal liggen op statistisch redeneren en niet zo zeer op berekeningen van bijvoorbeeld gemiddelden, medianen en kwartielen; op het interpreteren van representaties als staafdiagrammen, frequentiepolygonen en boxplots in plaats van het met de hand maken van deze representaties bij kleine datasets; op het leggen van verbanden tussen de verschillende representaties en welke informatie uit de verschillende representaties afgelezen kunnen worden. We gaan steeds uit van gegeven realistische datasets. Daarnaast kan aandacht besteed worden aan zelfstandig onderzoek door leerlingen waarbij zelf data verzameld worden (Van Streun & Van de Gissen, 2007a, 2007b).

De rol van kansrekening in de onderbouw kan, net als in de bovenbouw van de havo, beperkt blijven. Wel is een intuïtief begrip van onzekerheid nodig. Dit kan met behulp van simulaties aangeleerd worden. Voor de onderbouw van het VWO kan gestart worden met beperkte formele kansrekening.

De beschreven leerlijn is niet in tegenspraak met de tussendoelen die door cTWO (cTWO, 2012b) voor de onderbouw beschreven zijn:

> Domein F: Informatieverwerking en onzekerheid
> 17. Data verzamelen, ordenen, interpreteren en vergelijken en grafische representaties van data maken, ook met behulp van technologie.
> De leerling kan:
> 17.1 Grafische weergaven van data (tabel, diagram) aflezen en interpreteren.
> 17.2 Data verzamelen ordenen, samenvatten en vergelijken met behulp van gemiddelde, modus, mediaan en spreiding (spreidingsbreedte en kwartielafstand) en conclusies trekken.
> 17.3 Bij datasets (van eenvoudige, praktische contexten) uitspraken over kansen beoordelen en voorspellingen doen.
> 17.4 Passende vaktaal herkennen en gebruiken bij het verwerken, aflezen, representeren en vergelijken van dataverzamelingen.

De hiervoor geschetste globale leerlijn voor de onderbouw proberen we verder te concretiseren door middel van voorbeeldopdrachten.

Naar leerlijnen statistiek voor de onderbouw van het voortgezet onderwijs die aansluiten bij de vernieuwingen in de bovenbouw.

Statistiek komen leerlingen overal tegen: buiten school en in school in verschillende vakken (zoals aardrijkskunde (Bosatlas), geschiedenis, biologie). In plaats van een formele start en/of vele berekeningen, lijkt het verstandig een leerlijn te kiezen waar gestart wordt met concrete probleemstellingen, die met gezond verstand en intuïtief aangepak kunnen worden. In deze fase volstaan kwalitatieve redeneringen. Pas nadat een noodzaak om preciezer te gaan werken is gevoeld, kan het rekenen aan statistische grootheden gestart worden. Veel onderwerpen kunnen gestart worden met bijvoorbeeld het vergelijken van groepen op basis van diagrammen of tabellen.

Statistisch redeneren in het kader van de empirische cyclus is een voorbeeld van een wiskundige denkactiviteit. Om hierin succesvol te zijn, zijn verschillende soorten kennis en vaardigheden nodig: parate kennis/vaardigheden van basis concepten, het kunnen herkennen wanneer deze ingezet kunnen worden in eenvoudige toepassingsproblemen, en (zowel algemene als specifieke) heuristieken en zelfvertrouwen om complexere problemen te kunnen aanpakken (Van Streun & Kop, 2017; Verschut & Bakker, 2012) . Leerlingen zullen ondersteund moeten worden als zij niet op eigen kracht een opdracht tot een goed einde kunnen brengen. Essentieel is dan wel dat die hulp niet de complexiteit of de uitdaging van de opdracht reduceert door het bijvoorbeeld geheel te verknippen in ministapjes. Daarnaast zullen de leerlingen gestimuleerd moeten worden om zichzelf vragen te stellen als 'Hoe staat het met de voortgang van mijn oplossen?'.

In de publicatie 'Uitdagend gedifferentieerd vakonderwijs' (Janssen et al., 2016) wordt het uitgangspunt 'hele taak eerst' voor alle schoolvakken gekoppeld aan een meer uitgewerkte beschrijving van gefaseerde hulp, met tal van voorbeelden voor het vak wiskunde.

Hoewel bij complexe opdrachten vaak verschillende soorten kennis en vaardigheden een rol spelen, proberen we in deze bijdrage juist onderscheid te maken tussen verschillende doelen. We maken onderscheid tussen de leerdoelen: het ontwikkelen van een samenhangende kennisbasis van statistische kernconcepten, het leren oplossen van problemen, en het leren redeneren en abstraheren (Van Streun & Kop, 2017).

Op basis van deze redenering komen we tot de volgende categorieën opdrachten:

- *Van exploreren naar structuur*
  Denkopgaven die worden ingezet voor de start van een nieuw deelgebied, met als doel de ontwikkeling van een samenhangend netwerk van concepten.
- *Van kennis naar probleemoplossen*
  Denkopgaven om basiskennis te leren gebruiken in niet-standaard situaties.
- *Van exploreren naar redeneren/abstraheren*
  Verdiepende denkopgaven in het logisch redeneren en/of abstraheren. Hier passen ook opdrachten die het vertikaal mathematiseren beogen.

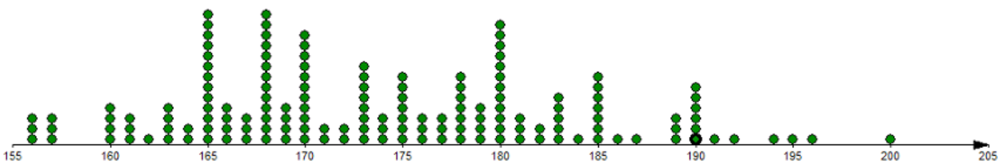
We lichten de verschillende categorieën steeds met een enkel voorbeeld toe. Meer voorbeelden kunnen gevonden worden in de langere versie van dit artikel op www.rekenenwiskunde21.nl.

Van exploreren naar structuur.

De focus van de opdrachten is de ontwikkeling van statistisch denkgereedschap. Dat denkgereedschap is vaak nog kwalitatief van karakter, maar in enkele situaties ook kwantitatief. Er wordt aandacht besteed aan beschrijvende statistiek met centrummaten en bekende diagrammen. Hierbij komen onder andere aan bod: gemiddelde, mediaan, spreidingsbreedte en kwartielafstand, en - als standaard 'plaatjes'- de frequentietabel met klassen, staafdiagram, boxplot, cirkeldiagram, lijndiagram, 2x2 tabel, kruistabel en puntenwolk. Dit wordt aangeleerd met behulp van realistische databestanden en ICT. Het berekenen van statistische maten en/of het maken van statistische diagrammen met de hand staan in dienst van het kunnen interpreteren van resultaten die gemaakt zijn met behulp van ICT. Na deze exploratie wordt vastgelegd welk denkgereedschap tot de parate kennis en vaardigheden (weten dat) behoren, die ingezet kunnen worden bij complexer statistisch probleemoplossen.

Voorbeeld

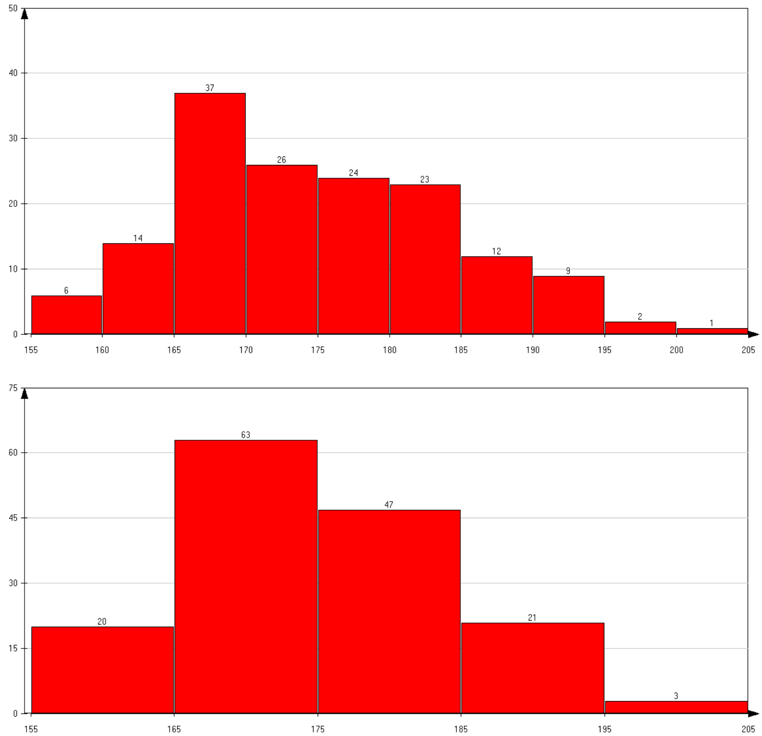
Leerlingen moeten leren hoe ze staafdiagrammen en boxplots kunnen aflezen. Dit kan geleerd worden via het zelf structureren van een data set. We kiezen voor een data set van 154 leerlingen van havo 4. We weten verschillende 'dingen' van deze leerlingen, waaronder de lengte. In eerste instantie geven we de lengte van iedere leerling aan op een getallenlijn: we maken een dotplot. In een dotplot zie je de lengte van iedere leerling aangegeven.



Figuur 1. Dotplot van de lengte van havo-4 leerlingen

Vaak is het echter niet nodig om zulke gedetailleerde informatie te hebben. Als men geinteresseerd is in vragen als 'vanaf welke lengte hoort een havo 4 leerling tot de de 25% langste havo 4 leerlingen?' of 'hoeveel procent van de havo 4 leerlingen heeft een lengte tussen de 160 cm en 180 cm?', dan kan volstaan worden met andere diagrammen. De centrale vraag aan leerlingen is nu: Hoe kun je deze data groeperen en nieuwe diagrammen bedenken om de gegevens uit de dotplot weer te geven?

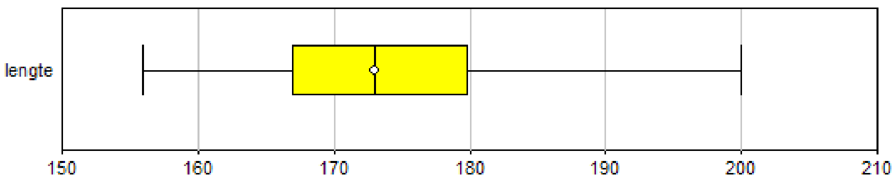
Dit kan bijvoorbeeld door te kijken hoeveel leerlingen een lengte hebben tussen 155 cm en 160 cm, tussen 160 cm en 165 cm, enz. Dus steeds kijken hoeveel leerlingen in een klasse zitten van 5 cm breed. Ook andere klassenbreedten kunnen gekozen worden. Ook de vraag welke klassenbreedten zinvol zijn in deze situatie moet aan bod komen. Dit resulteert in diagrammen als die van figuur 2.



Figuur 2 a en b. Diagrammen van de lengte van havo-4 leerlingen, met verschillende klassenbreedten.

Belangrijk is dat het verband tussen de dotplot en de twee staafdiagrammen uitgebreid bestudeerd wordt door leerlingen. Dit bijvoorbeeld door vragen als: 'Hoe volgt de hoogte van de staaf/staven tussen bijvoorbeeld 155 cm en 165 cm uit de gevens van de dotplot?'

Een heel andere manier om de data van de dotplot te groeperen is om groepen met eenzelfde omvang te maken, bijvoorbeeld vier groepen van 154/4 = (ongeveer) 38 leerlingen. Hieruit ontstaat een zogenaamd boxplot: vier gelijke groepen leerlingen met ieder 25% van de leerlingen (fig.3). Maar ook andere keuzes kunnen gemaakt worden, zoals bijvoorbeeld 10 groepen van (ongeveer) 15 leerlingen gemaakt worden.



Figuur 3. Boxplot van de lengte van havo-4 leerlingen.

Ook nu weer moeten leerlingen het verband tussen de data van de dotplot en die van de boxplot bestuderen: ‘Hoe volgen de grenzen in de boxplot uit het dotplot?’

Van kennis naar probleemoplossen

De focus bij deze opdrachten is op het probleem oplossen. Ook in niet standaard situaties zullen leerlingen het hoofd boven water moeten houden. Bij deze opdrachten wordt aandacht besteed aan bijvoorbeeld data exploratie, waarbij bij een gegeven data bestand door leerlingen zelf met ICT representaties gemaakt moeten worden, of kentallen berekend. Vervolgens zullen ze hiermee de onderzoeksvraag moeten beantwoorden. De focus ligt op het zelfstandig kiezen van een strategie: Welke representatie of kentallen heb ik nodig? Hoe kan ik die maken?

Voorbeeld

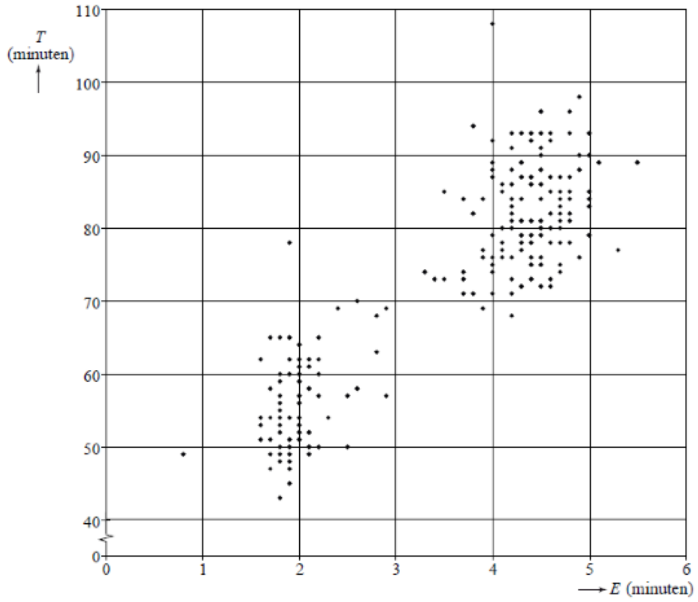
Op wikipedia staat:

> Old Faithful is de beroemdste geiser in het Amerikaanse Yellowstone National Park in het Upper Geyser Basin. Van de vele geisers is deze de meest actieve; hij blaast om de 60 tot 80 minuten hete dampen in de lucht. Old Faithful geldt als de grootste attractie van het park. Een uitbarsting kan tot 32.000 liter kokend water zo’n 56 m hoog spuiten. Reeds meer dan 137.000 uitbarstingen werden genoteerd, die anderhalve tot 6 minuten duren, met tussen iedere uitbarsting een half uur tot twee uur.

In figuur 4 zie je echte gegevens over Old Faithful. In de figuur zijn de eruptietijden en de tussentijden aangegeven. Zo is bijvoorbeeld het meest linkse punt in de figuur (0,8;49). Dit wil zeggen: de eruptie duurde 0,8 minuten en daarna was het 49 minuten rustig (de tussentijd was 49 minuten, d.w.z. het duurde 49 minuten voordat de volgende eruptie kwam).

Hoe kun je deze figuur gebruiken om voor toeristen te voorspellen hoe lang ze moeten wachten tot een volgende eruptie? Anders gezegd: Stel je bent parkopzichter bij deze geiser. Er komt een toerist bij Old Faithful aan en die wil de volgende eruptie zien. Wat is je werkwijze om te voorspellen hoe lang de toerist moet wachten?

Bij deze opdracht kan ook een databestand met de variabelen eruptietijd en tussentijd gegeven worden, waarna leerlingen zelf diagrammen en kentallen moeten maken met behulp van ICT.



Figuur 4. Eruptietijden en tussentijden van Old Faithful

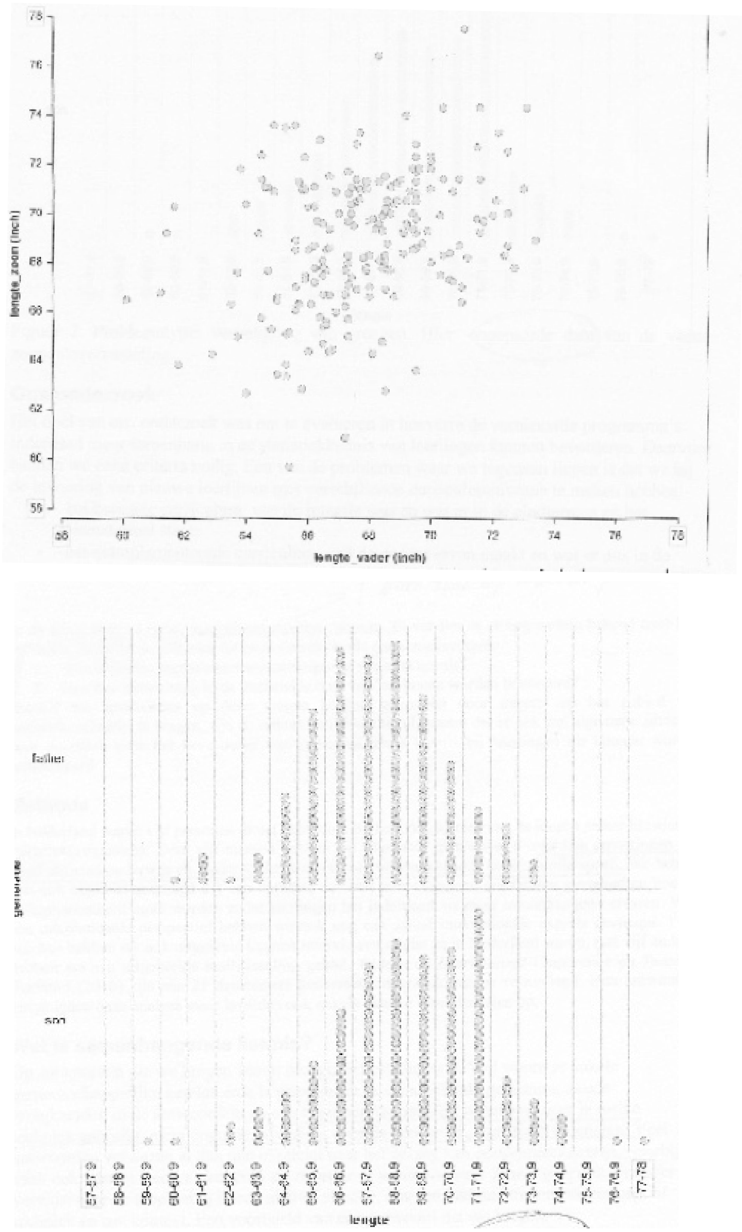
Van exploreren naar redeneren/abstraheren

In deze fase zal aan onderzoeksopdrachten gewerkt worden, waarin de empirische cyclus als leidraad fungeert. De onderzoeksvraag zal hier nadrukkelijk aandacht verdienen. In eerste instantie zal de gehele populatie in beeld gebracht moeten worden; later zal met een steekproef gewerkt worden, waarna op basis van een steekproef een uitspraak over een (kleine) populatie gedaan moeten worden, waarbij een onzekerheid in acht genomen moet worden.

In deze opdrachten zal 'kritisch kijken' naar statistische resultaten en methoden aan bod moeten komen en zullen leerlingen zich bewust moeten worden van de keuzes die gemaakt zijn bij het beantwoorden van de onderzoeksvraag. We moeten daarbij rekening houden met het feit dat voor sommige leerlingen, op dit moment, dit statistiekonderwijs tegelijkertijd eindonderwijs in het voortgezet onderwijs is.

Voorbeeld

Hier zie je twee bronnen van lengten van vaders en hun zonen: een puntenwolk en twee staafdiagrammen (figuur 5).
Bedenk voorbeelden van onderzoeksvragen die beter met de ene bron en die beter met de andere bron beantwoord kunnen worden.



Figuur 5. Lengten van vaders en zonen; puntenwolk en staafdiagrammen.

Afsluiting

Statistiek is overal in onze wereld aanwezig. Iedereen heeft te maken met statistisch onderzoek en statistische uitspraken en de gevolgen daarvan. Enige 'statistical literacy' is onmisbaar om in deze wereld te kunnen functioneren. De ontwikkeling van deze literacy kan beginnen in de onderbouw van het voortgezet onderwijs. Daarbij zal in ieder geval aan bod moeten komen hoe je met diagrammen en kentallen omgaat, hoe op basis van steekproeven uitspraken gedaan kunnen worden over populaties, hoe je grip kunt krijgen op variabiliteit, en hoe je kritisch kunt kijken naar conclusies uit onderzoek-gegevens. Om te zorgen dat leerlingen dit alles leren is het nodig dat er een zorgvuldige leerlijn ontwikkeld wordt, waarin, uitgaande van concrete en betekenisvolle contexten, leerlingen een statistisch gereedschapskistje ontwikkelen. Voor de ontwikkeling van een dergelijk gereedschapskistje zijn opdrachten nodig met verschillende doelstellingen, zoals opdrachten om te komen tot de ontwikkeling van een samenhangend netwerk van statistische concepten, opdrachten die oefenen om deze basiskennis te gebruiken in niet-standaard situaties, en opdrachten die oefenen in het redeneren en abstraheren. We betogen dat al deze aspecten aanbod moeten komen om leerlingen de eerste stappen te laten zetten in de richting van statistical literacy.

Referenties

Commissie Toekomst Wiskundeonderwijs (2012a). Denken & doen, wiskunde op havo en vwo per 2015. Utrecht: cTWO. http://www.fi.uu.nl/cTWO/publicaties/docs/CTWO-Eindrapport.pdf

Commissie Toekomst Wiskundeonderwijs (2012b). Overzicht tussendoelen wiskunde havo en vwo. Utrecht: cTWO http://www.fisme.science.uu.nl/cTWO/publicaties/docs/onderbouw/overzicht-tussendoelen-wiskunde-havo-en-vwo.pdf

Drijvers, P. H. M., Streun, A., & Zwaneveld, G. (Eds.). (2012). Handboek wiskundedidactiek. Utrecht: Epsilon Uitgaven. https://drive.google.com/file/d/0B4fDkw62lmbDaHJaTXR0YjVfdkk/view

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Scheaffer, R. (2007). Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report. Alexandria: American Statistical Association. http://www.amstat.org/education/gaise.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D. S., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Holmes, P. (2005). A curriculum framework for preK-12 statistics education. American Statistical Association Board of Directors for Endorsement. http://it.stlawu.edu/~rlock/gaise/GAISEPreK-12.pdf

Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2009). Helping students develop statistical reasoning: Implementing a statistical reasoning learning environment. Teaching Statistics, 31(3), 72-77. https://www.causeweb.org/workshop/aims/Statistical%20Reasoning%20Learning%20Environment.pdf

Janssen, F., Hulshof, H., & Veen, K. van. (2016). Uitdagend gedifferentieerd vakonderwijs: Praktisch gereedschap om je onderwijsrepertoire te blijven uitbreiden. Leiden: Universiteit Leiden. http://www.conferentietoptalenten.nl/downloads/UitdagendGedifferentieerdVakonderwijs.pdf

Lee, H., & Stangl, D. (2015). Taking a Chance in the Classroom: Professional Development MOOCs for Teachers of Statistics in K-12. CHANCE, 28(3), 56-63.

Shaughnessy, J. M. (2007). Research on statistics learning. Second handbook

of research on mathematics teaching and learning (pp. 957-1009).
Streun, A. van, & Giessen, C. van de (2007a). Een vernieuwd statistiekprogramma deel 1: Statistiek leren met data-analyse. Euclides, 82(5), 176-179.
Streun, A. van, & Giessen, C. van de (2007b). Een vernieuwd statistiekprogramma deel 2: Data-analyse, een mogelijke opzet. Euclides, 82(6), 217-221. http://www.platformwiskunde.nl/files/Examenprogrammas/Statistiek/Statistiek_1_euclides_82-5.pdf.
http://www.platformwiskunde.nl/files/Examenprogrammas/Statistiek/Statistiek_2_euclides_82-6.pdf
Streun, A. van, & Kop, P. (2017). Ontwerpen van wiskundige denkactiviteiten onderbouw havo/vwo. SLO. http://www.slo.nl/organisatie/recentepublicaties/00155/
Verschut, A., & Bakker, A. (2012). Samenhangende kennis: Hoe bevorder je die bij statistiek en kansrekening?. Nieuwe Wiskrant, 31(3), 32-38.
Zieffler, A., Garfield, J., Alt, S., Dupuis, D., Holleque, K., & Chang, B. (2008). What does research suggest about the teaching and learning of introductory statistics at the college level? A review of the literature. Journal of Statistics Education, 16(2), 1-23.

Materialen

Syllabus voor Havo Wiskunde A met bijlage (voorbeeldopgaven)
https://www.examenblad.nl/vak/wiskunde/2017
Voorbeeldopgaven havo https://www.hetcvte.nl/item/voorbeeldexamenopgaven_havo_a_2
VU-Stat en VUStat bestanden
http://www.vusoft.be/vustat.html; http://www.rustroest.eu/slodwo
Lesmateriaal SLO (boekjes 1 tm 4) op http://www.betanova.nl/downloads/lesmateriaalWiskundeAHavo/
Boekje 2 van SLO materiaal in DWO: http://app.dwo.nl/leerling/

Wachtrijen; statistiek voor de onderbouw havo/vwo en vmbo

Bert Zwaneveld [1]

Inleiding

We spreken in het onderwijs over ‘statistiek’, maar misschien is ‘statistisch modelleren’ een betere benaming. Bij modelleren in het algemeen gaat het erom een probleemsituatie uit de werkelijkheid, de ‘niet-wiskundige wereld’, te vertalen naar de ‘wiskundige wereld’. Die vertaling heet een wiskundig model, meestal kortweg model genoemd. Met dat model kan een probleem uit die niet-wiskundige wereld worden opgelost. Zo’n model kan meetkundig, grafisch, algebraïsch, analytisch, statistisch, kanstheoretisch zijn of een combinatie van deze. Het onderwerp ‘statistisch modelleren’ is belangrijk voor de toekomst. De redenen zijn: het toenemend belang van modelleren in het algemeen, de beschikbaarheid en het veelvuldige gebruik van ready-made statistische hulpmiddelen, simulaties, en het feit dat in de informatiemaatschappij veel informatie statistisch van aard is. Bij een statistisch model van een situatie in de werkelijkheid speelt het variëren van een of meer van de grootheden die bepalend zijn voor de situatie een belangrijke rol.

In deze bijdrage wordt in een ontwerp voor een tweetal lessen een voorbeeld van dit statistisch modelleren beschreven. Het is bedoeld voor leerlingen van rond de 15 jaar. Zij maken kennis met het modelleren van een proces waarbij variatie in twee grootheden optreedt en met de manier waarop de wiskunde dat variëren beschrijft. Concreet: het proces is dat van een wachtrij voor een loket of in een winkel met één persoon die de klanten bedient. De twee variërende grootheden zijn het moment waarop een klant zich meldt – preciezer: de tijdsduur die verstrijkt tussen de aankomst van twee opeenvolgende klanten - en de tijdsduur van het bedienen van een klant. Uiteraard varieert ten gevolge van deze twee grootheden ook een derde grootheid, namelijk de wachttijd van een klant. Een andere en vergelijkbare probleemsituatie is die van een file op een tweebaansweg weg. Het wiskundige begrip dat greep geeft op het variatiekarakter is het begrip ‘verdeling’ van een variërende grootheid. In deze bijdrage komen de verdeling van de tijdsduur die verstrijkt tussen de aankomst van twee opeenvolgende klanten en de tijdsduur van de behandeling van een klant tot stand voor middel van simulatie.

1 Met dank aan Geeke Bruin-Muurling, Irene van Stiphout, Frans van Galen en Koeno Gravemeijer

Het wiskundige 'procesdoel' van deze twee lessen is het doorgronden en wiskundig beschrijven van wat er bij het ontstaan van een wachtrij gebeurt. Wiskundig ligt de nadruk op het begrip verdeling, en dan met name van de tijdsduur tussen twee opeenvolgende aankomsten en van de tijdsduur van de behandeling van een klant. Deze twee grootheden bepalen de grootheid die een klant betreft: diens wachttijd.

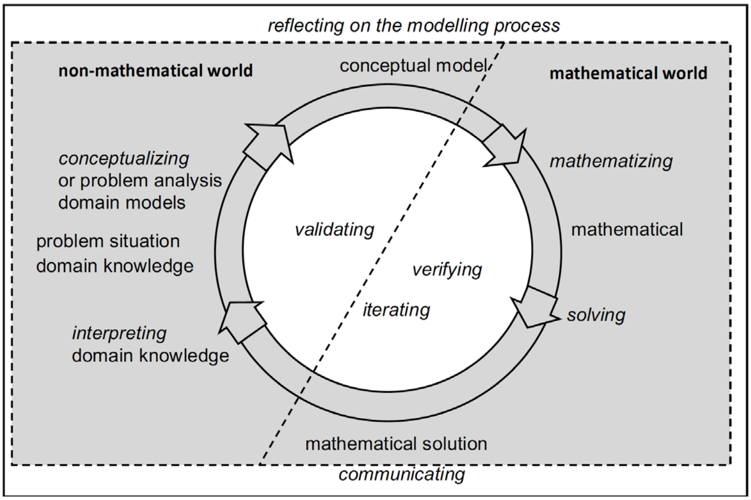
Beperkingen

We beschrijven een mogelijke verloop van het onderwijsleerproces. Dat betekent dat het geen leerlingentekst is. De lerares of leraar die het in de klas uitvoert moet het onderwijsleerproces zelf nader uitwerken. Daarbij kunnen eigen voorkeuren tot eigen, of andere keuzen leiden. Ook is het niet zo dat alles wat beschreven wordt, in de klas gedaan moet worden. Het mogelijke verloop is dus in feite niet meer, maar ook niet minder, dan een door ons doordachte lessensuggestie.

Het gaat in deze lessen over statistisch modelleren en over het begrip verdeling. Wij gebruiken in deze bijdrage de term verdeling voor de frequenties van de verschillende mogelijke uitkomsten van een proces waarin variatie optreedt. We hebben ervoor gekozen het begrip kans, dat ook een wiskundig modelbegrip is, niet te gebruiken, omdat dit naar ons idee voor deze leerlingen net iets teveel van het wiskundig goede voor dit stukje wiskundeonderwijs zou zijn.

Achtergrond

Veel onderzoekers van het onderwijs in wiskundig modelleren hebben het modelleerproces beschreven door middel van de modelleercyclus waarin altijd de elementen probleemsituatie in de werkelijkheid, wiskundige beschrijving en oplossing, en interpretatie van de wiskundige oplossing in de werkelijkheid voorkomen. Perrenet en Zwaneveld (2012) hebben op basis van de in de literatuur voorkomende modelleercycli en op basis van onderzoek onder studenten van de Bacheloropleiding Toegepaste Wiskunde van de Technische Universiteit Eindhoven de activiteiten die leerlingen/studenten uitvoeren bij wiskundig modelleren in kaart gebracht. In figuur 1 is dat schematisch weergegeven We lichten een paar van de daar genoemde activiteiten toe: conceptualiseren, mathematiseren, communiceren, itereren, verifiëren en valideren. Met conceptualiseren bedoelen we het doorgronden van de probleemsituatie, het onderkennen van de hoofdzaken: de aspecten of grootheden/variabelen, die een rol spelen en eventueel hoe die samenhangen. Ook van belang is het expliciteren van de aannames die gemaakt worden, zeker bij statistisch modelleren. Mathematiseren is vervolgens het conceptuele model in wiskundige termen expliciteren, bijvoorbeeld in vergelijkingen, maar het kan bijvoorbeeld ook grafisch. Met communiceren bedoelen we het maken van een verslag waaruit blijkt dat het model voldoet aan de eisen die de eventueel virtuele opdrachtgever heeft gesteld. In het voortgezet onderwijs is dit minder belangrijk dan in het hoger onderwijs. Itereren is het nogmaals doorlopen van de modelleercyclus, bijvoorbeeld omdat het resultaat niet bevredigend (genoeg) is of om zaken die aanvankelijk om wat voor reden dan ook niet zijn meegenomen, alsnog mee te nemen. Verifiëren betekent dat nagegaan wordt of het wiskundig oplossen correct verlopen is. Valideren betekent dat de modelleerder probeert via andere wegen of bronnen na te gaan of het model (voldoende) geldig (valide) is. We nemen aan dat de overige activiteiten voldoende duidelijk zijn.



Figuur 1. Modelleercyclus volgens Perrenet en Zwaneveld (2012)

Opzet

Het beoogde onderwijsleerproces is gericht op (1) het minstens conceptueel, maar liefst wiskundig beschrijven van wat er gebeurt bij een wachtrij met één persoon die de klanten afhandelt, en (2) op het greep krijgen op het optreden van de variatie in de tijdsduur tussen twee opeenvolgende aankomsten door middel van het wiskundige begrip verdeling. Dit betekent dat veel energie in het conceptualiseren van wat er gebeurt bij het ontstaan van een wachtrij gestoken wordt, en dat daarbij variatie nadrukkelijk aan de orde komt om alvast te oriënteren op het begrip verdeling.

De globale opzet is dat er één les besteed wordt aan het conceptualiseren van wat er gebeurt bij het ontstaan van een wachtrij, en één les aan het greep krijgen op variatie door middel van het begrip verdeling. De globale startvraag waarmee de leerlingen de twee lessen beginnen is de volgende.

De data

De in het vervolg voorkomende data zijn geen waargenomen data, maar in Excel gesimuleerde data. Ze staan op www.rekenenwiskunde21.nl vanwaar ze zijn te downloaden. Ze staan daar in drie vormen:

- als tabellen en grafieken in Word
- als tabellen en grafieken met dezelfde getallen in Excel
- als voorgeprogrammeerde rekenbladen in Excel waarmee de leerlingen zelf kunnen experimenteren.

Tevens staat daar uitleg over de voorgeprogrammeerde rekenbladen opgenomen.

De tabellen en grafieken in Word of eventueel Excel kunnen als werkbladen aan de leerlingen beschikbaar worden gesteld. Ze kunnen van dienst zijn bij klassikale besprekingen.

Wat ook van belang is om vooraf te weten is dat alle data in gehele minuten zijn. We hebben dit vooral gedaan om de verwarring te vermijden die 2,50 (2 minuut 30 seconde en 2 minuut 50 seconde) kan oproepen.

Les 1. Het conceptualiseren en mathematiseren van een wachtrij met behulp van een tabel

De les begint met de volgende startvraag.

> Stel je een winkel voor met één persoon die de binnenkomende klanten behandelt. Het is niet erg als mensen even moeten wachten, maar klanten accepteren het waarschijnlijk niet als ze 20 of 30 minuten moeten wachten, om dan zelf in 3 minuten geholpen te worden. Op een gegeven moment zal de winkel er echt een tweede verkoper naast moeten zetten. Om te weten wat wel en niet acceptabel is moet je de wachttijden onderzoeken. Wat bepaalt die wachttijd, en hoe kun je bepalen dat die wachttijd soms zo lang wordt dat een tweede verkoper in de zaak nodig is?

In deze fase bespreken de leerlingen, bijvoorbeeld in groepjes, het verloop van een wachtrij onderling. Het volgende kan aan de orde komen. Stel dat klanten precies om de 2 minuten komen en in 2 minuten geholpen worden, dan is er geen probleem. Als de tussentijd korter wordt en de verkooptijd gelijk blijft loopt het fout. Andersom ook, als de verkooptijd langer wordt dan 2 minuten. Maar klanten komen natuurlijk niet precies om de zoveel minuten en de verkooptijd is natuurlijk niet altijd hetzelfde. Soms zal de winkel leeg zijn, soms staan er mensen op elkaar te wachten.

De conclusie is dat het echte probleem in feite zit in de variatie van tussentijd en verkooptijd. Die zorgen er voor dat klanten soms moeten wachten, en misschien soms heel erg lang.

In het klassengesprek na het werken in groepjes kunnen de volgende variabelen aan de orde komen:

- aankomsttijdstippen van klanten en de tijd tussen twee aankomsten (tussentijd),
- de verkooptijd, de tijd die de verkoper met een klant bezig is,
- de wachttijden van de klanten.

Vervolgens kan worden gemeld dat iemand deze gegevens verzameld heeft. Zie tabel 1. De eerste klant komt twee minuten na opening binnen.

klantnummer	*aankomsttijdstip*	*verkooptijd*	*wachttijd*
1	2	4	0
2	25	5	0
3	29	1	1
4	32	3	0
5	42	2	0
6	45	5	0
7	53	6	0
8	55	3	4
9	64	3	0
10	66	3	1
11	74	6	0
12	78	3	2
13	80	2	3
14	87	1	0
15	97	4	0
16	100	2	1
17	105	2	0
18	108	4	0
19	114	3	0
20	118	6	0
21	121	4	3
22	123	4	5
23	125	5	7
24	130	1	7
25	134	2	4
26	138	4	2
27	146	2	0

Tabel 1. Het verloop van een wachtrij; de tijdstippen en tijdsduren zijn in gehele minuten

Deze tabel roept de volgende vragen op.

- Dit is een sterk vereenvoudigde weergave van de werkelijkheid. Dat is niet erg, want je moet de situatie eerst versimpelen om het probleem te kunnen bestuderen. Welk aannamen zijn er allemaal gemaakt?
- Hoe kan het dat de wachttijd soms 7 minuten is, terwijl de verkooptijd maximaal 6 minuten is?
- Waardoor ontstaat die wachttijd eigenlijk?

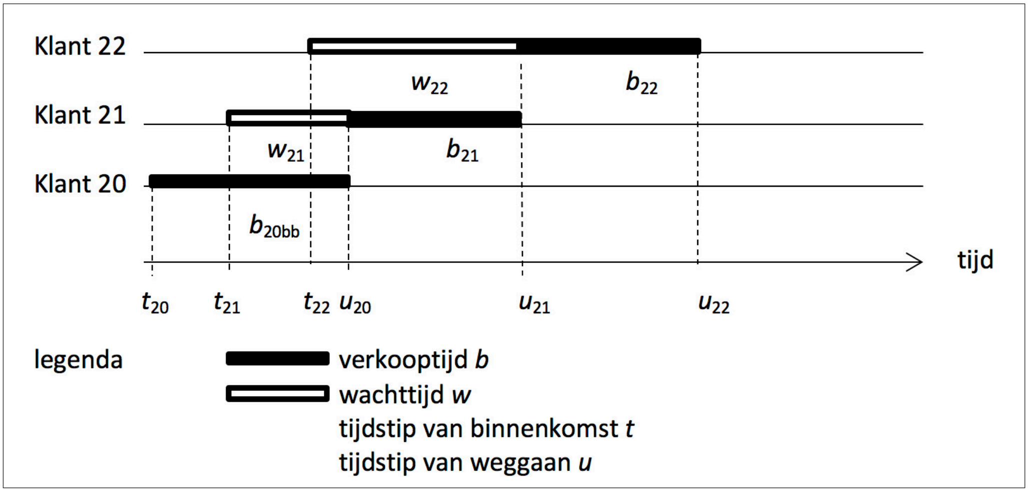
Een van de veronderstellingen is dat op het moment dat een klant klaar is, een aanwezige volgende klant meteen wordt geholpen. Een andere is dat een binnenkomende klant, terwijl er verder niemand aanwezig is, onmiddellijk geholpen wordt. En ook dat klanten nooit tegelijk binnenkomen. Wat ter voorbereiding op de tweede les zeker van belang is, is dat de leerlingen doorhebben dat de tijdsduur tussen twee opeenvolgende binnenkomsten varieert. Dat zelfde geldt voor de duur van een behandeling van een klant. Het zou mooi zijn als de leerlingen zouden zien dat de tijdsduren tussen twee opeenvolgende aankomsten weliswaar variëren, maar dat de aankomsten redelijk gelijkmatig verdeeld zijn over de anderhalf uur die is beschreven in tabel 1. Misschien zien ze ook, dat er gemiddeld ongeveer elke vijf en halve minuut een klant aankomt. Als dat niet gebeurt, geen probleem. Dan komt dat in de tweede les wel aan de orde.

De vraag naar de oorzaak van de wachttijden is de kernvraag. Nadenken daarover kan een aanleiding zijn om over de aannames na te denken, bijvoorbeeld: ‘gek eigenlijk, er komen nooit twee mensen tegelijk binnen’.

Om de situatie voor de leerlingen te vereenvoudigen kan in de les met vaste verkooptijden van 3 minuten worden gewerkt. Alle bijbehorende tabellen en grafieken staan op www.rekenenwiskunde21.nl.

De les kan worden afgesloten met de opdracht om het verloop van de wachtrij van de tabel 1 grafisch in beeld te brengen. Grafiek 1 is een mogelijke grafische weergave voor de klanten met de klantnummers 20, 21 en 22. In zekere zin is deze grafiek het grafische model van de wachtrij. In grafiek 1 moet klant 21 eerst in zijn eentje wachten, daarna krijgt deze klant gezelschap van klant 22. En die moet dan weer een tijdje alleen wachten.

De kern van de nabespreking moet zijn dat het draait om de momenten dat iemand staat te wachten en er een derde klant binnenkomt, zoals klant 22 in grafiek 1: diens wachttijd is een deel van de wachttijd van klant 21, plus de hele verkooptijd van die klant. Is er gedurende het afhandelen van een klant slechts één wachtende dan is er niet echt veel aan de hand: die wachtende klant wordt meteen behandeld, zodra de zojuist afgehandelde klant klaar is, zie klant 21 in grafiek 1: diens wachttijd loopt alleen gedurende de ver-



Grafiek 1. Grafische weergave van het verloop van een wachtrij. Toelichting:
t_{20} = 118: tijdstip van aankomst van klant 20;
u_{20} = 124: tijdstip waarop klant 20 klaar is;
$b_{20} = u_{20} - t_{20}$ = 6, tijdsduur behandeling klant 20;
w_{20} = 0 (er werd geen klant behandeld op het moment dat klant 20 binnenkomt);
w_{21} = 3, wachttijd klant 21, enzovoorts.

kooptijd van klant 20. Is de winkel leeg dan is de file opgelost en de situatie als het ware weer gelijk aan het begin: de volgende binnenkomende klant wordt meteen geholpen.

Samenvatting les 1

De cursieve werkwoorden geven de activiteiten van de leerlingen waarop de leraar of lerares didactisch kan sturen

- *Oriënteren* op het verloop van een wachtrij
- *Reflecteren* op dat verloop en expliciteren van de basisaannames: (1) klanten komen op toevallige tijdstippen één voor één aan, nooit twee tegelijk; (2) als er geen klanten zijn wordt de aankomende klant meteen geholpen, anders sluit deze achteraan bij de wachtrij – ook als er een klant wordt geholpen en er verder geen wachtenden zijn; (3) de tijdsduur tussen twee opeenvolgende binnenkomsten varieert; (4) de tijdsduur van het afhandelen van een klant varieert; (5) als een klant klaar is gaat deze meteen weg en een eventueel wachtende klant wordt meteen geholpen.
- *Consolideren* en *verwerken* gebeurt door het lezen en interpreteren van grafiek 1, of eventueel door zelf zo'n grafiek te maken.

Anderen didactische fasen als integreren, terugblikken en afsluitende toetsing zijn niet of nauwelijks aan de orde. De les staat bijna geheel in het teken van het *conceptualiseren* van wat bij het verloop van een wachtrij gebeurt. Het maken van grafiek 1 is een vorm van *mathematiseren*, het lezen en begrijpen ervan is een vorm van *interpreteren*. De modelleeractiviteiten oplossen, itereren, verifiëren, valideren, reflecteren en communiceren zijn niet aan de orde.

Les 2. Conceptualiseren en mathematiseren van de tijdsduur tussen opeenvolgende aankomsttijden

In de tweede les wordt de aandacht gericht op de variatie in de tijdsduur tussen twee opeenvolgende aankomsten en op de variatie in de tijdsduur van de afhandeling van een klant. Het oriënteren hierop vindt plaats door middel van tabel 1. De variatie in de verkooptijd is te zien in grafiek 2 met de frequenties van de verschillende verkooptijden. Ook de variatie in de wachttijden is zichtbaar gemaakt, en wel in grafiek 4 met de frequenties van de verschillende wachttijden. Hoe kunnen we nu de variatie in de tijden tussen de twee opeenvolgende aankomsten zichtbaar maken, waar we in tabel 1 alleen over de aankomsttijdstippen beschikken?

Laat de leerlingen even bekijken hoe de grafieken 2 en 4 uit tabel 1 volgen. Laat ze vervolgens proberen het probleem van de tussentijden te tackelen door ze een frequentiegrafiek van de tussentijden te laten maken. Het resultaat is grafiek 3. Mogelijke tussenstappen zijn:

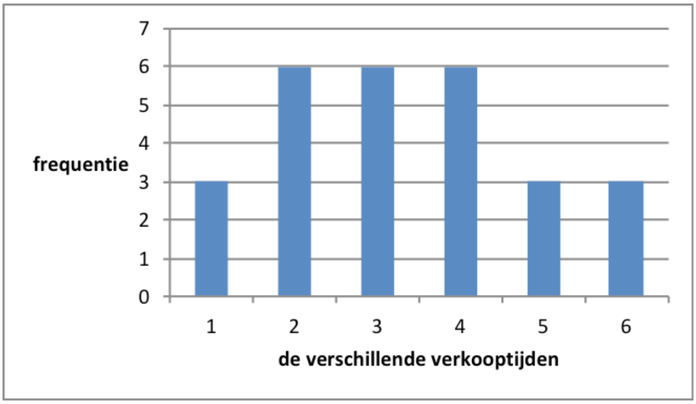
- per klant in de volgorde waarin deze zijn binnengekomen
- in volgorde van kort naar lang

Grafiek 3 en grafieken van de tussenstappen staan ook op www.rekenen-wiskunde21.nl.

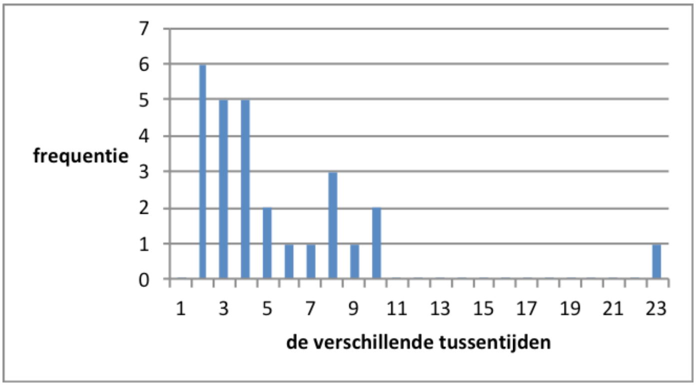
Wellicht is het nuttig met de leerlingen de gelijkwaardigheid van de volgende twee uitspraken te bespreken: ‘gemiddeld komt eens per twee minuten een klant aan’ en ‘de gemiddelde tijdsduur tussen twee opeenvolgende aankomsten is twee minuten’. Uiteraard kan het getal twee in een concrete situatie anders zijn. Het hoeft zelfs geen geheel getal te zijn. In tabel 1 is de gemiddelde tussentijd 5,41 minuut, dus 5 minuut en ruim 24 seconde.

De tussentijden zien er misschien wat chaotisch uit, maar het lijkt er toch wel op dat relatief langdurige tussentijden relatief weinig voorkomen, terwijl relatief korte tussentijden vaker voorkomen.

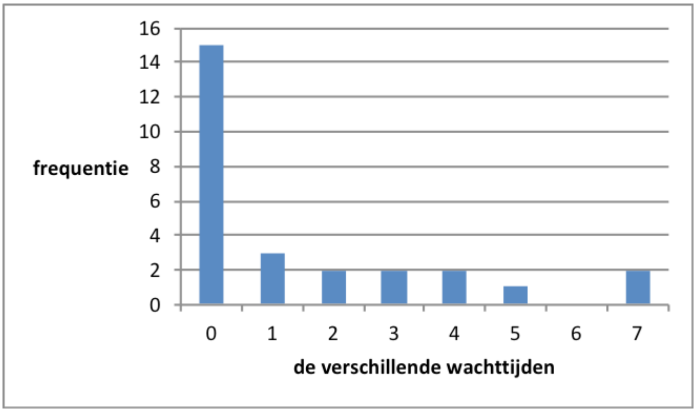
Vervolgens gaat de aandacht naar de verkooptijden, zie grafiek 2. Het is verstandig eerst met de leerlingen te discussiëren over de vorm van de frequentieverdeling. Wellicht zullen ze weer veel korte en weinig lange tijdsduren verwachten, maar hier ligt een verdeling rond een gemiddelde meer voor de hand. Dat blijkt dan ook uit het resultaat, zie grafiek 2. De gemiddelde verkooptijd is hier 3,33 (dat is 3 minuut en bijna 20 seconde).



Grafiek 2.Verdeling van de 27 verkooptijden met de bijbehorende frequenties



Grafiek 3. Verdeling van de 27 tussentijden en de bijbehorende frequenties



Grafiek 4. Verdeling van de 27 wachttijden met de bijbehorende frequenties

We hebben nu de verdeling van twee tijdsduren: de verkooptijd waarvan de verdeling is weergegeven in grafiek 2, en de tussentijd met de verdeling in grafiek 3. Het verschil tussen beide verdelingen is belangrijk. Globaal gesproken nemen de frequenties bij toenemende tussenaankomsttijdsduren af: Immers, als de aankomsten min-of-meer gelijkmatig over de tijd zijn verdeeld, zal het redelijk zeldzaam zijn dat het lang duurt voor na binnenkomst van een klant weer een volgende klant binnenkomt. De frequenties van de verkooptijdsduren die – weer globaal gesproken – min of meer symmetrisch ten opzichte van het gemiddelde liggen: tegenover bijna elke klant met een verkooptijd korter dan de gemiddelde verkooptijd staat een klant met een verkooptijd evenveel langer dan de gemiddelde verkooptijd.

Nu kunnen de leerlingen discussiëren over het volgende. In de situatie van tabel 1 met bijna 30 klanten en een totaal bekeken tijdsduur van bijna 150 minuten zijn er maar weinig klanten die lang moeten wachten. De vraag hierbij is vervolgens wat de invloed van de (gemiddelde) tussentijd en de (gemiddelde) verkooptijd op de wachttijd is. De som van alle 27 tussentijden vullen de tijd tot klant 27 binnenkomt volledig op. De som van alle 27 verkooptijden is 90 minuten, dus ruim minder dan het tijdstip 148, het eindtijdstip van klant 27. De leerlingen kunnen vermoeden dat kortere gemiddelde tussentijd, bijvoorbeeld 3 minuten zodat het tijdsverloop tussen de binnenkomst van de eerste en de laatste klant ongeveer 90 minuten is, tot grotere wachttijden zal leiden. Met andere woorden: als de gemiddelde tussentijd ongeveer gelijk is aan de gemiddelde verkooptijd zullen de wachttijden toenemen.

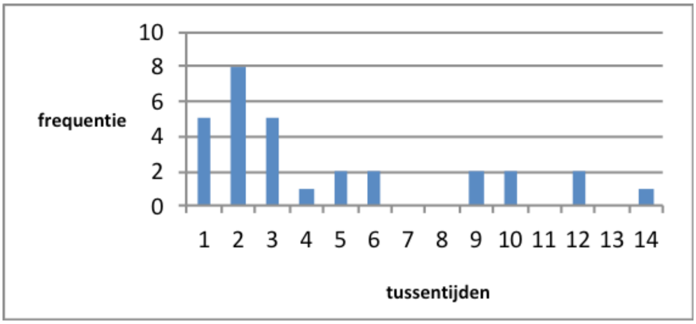
Dit kan bijvoorbeeld op de volgende manier onderzocht worden. Leerlingen kunnen vragen wat er gebeurt als er vaker dan in de situatie van tabel 1 klanten binnenkomen. In tabel 1 komt er gemiddeld een klant binnen per iets meer dan vijf en halve minuut. In de nieuw gesimuleerde situatie is de gemiddelde tussentijd 3 minuten. De gemiddelde verkooptijd is vrijwel gelijk gebleven, ook 3 minuten. Er is nu een simulatie met 30 klanten gemaakt.

Op www.rekenenwiskunde21.nl staan voorgeprogrammeerde Excel-bladen waarmee dit gesimuleerd kan worden. Ook zijn daar de grafieken beschikbaar met de resultaten van een simulatie met een kortere gemiddelde tussentijd. In grafiek 5a staat de verdeling van de tussentijden bij een gemiddelde tussentijd van 3 minuten. In grafiek 5b staat de verdeling van de wachttijden. De verdeling van de verkooptijden is iets veranderd: gemiddelde verkooptijd is ook 3 minuut.

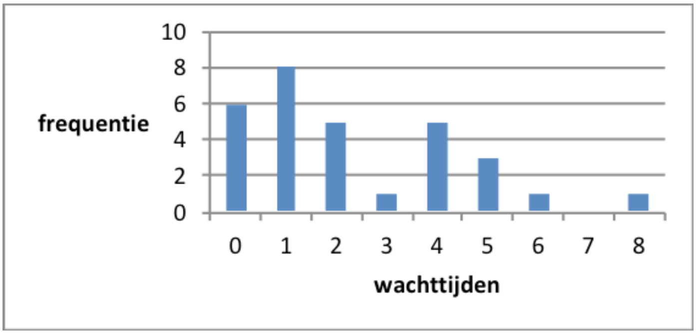
De leerlingen kunnen de gemiddelde wachttijd uitrekenen. Die is hier iets meer dan 2 minuurt en 6 seconde, terwijl die bij de gegevens van tabel 1 bijna anderhalve minuut is. De conclusie moge duidelijk zijn: hoe korter de gemiddelde tussentijd, des langer de wachttijden.

In deze discussie kunnen ook de volgende punten aan de orde komen.

1 Zowel bij tabel 1 als bij grafiek 5b is de spreiding 1,5 minuut. Wat is de invloed als die kleiner is, dus vrijwel alle klanten een ongeveer even lange verkooptijd hebben?



Grafiek 5a. Verdeling van 30 tussentijden met gemiddelde tussentijd 3 minuten



Grafiek 5b. Verdeling van de 30 wachttijden met gemiddelde tussentijd van 3 minuten en gemiddelde verkooptijd van 3 minuten

2 We zijn voor de verkooptijd uitgegaan van min of meer symmetrische verdeling. Maar het is zeker niet uit te sluiten dat er twee soorten klanten zijn: zij de snel afgehandeld worden en zij die een echt langere verkooptijd nodig hebben. Wat voor invloed heeft dat?

Samenvatting les 2

Conceptualiseren en *mathematiseren* van de verdeling van de tussenaankomsttijdsduren

- *Oriënteren* op variatie door de leerlingen de kolommen met de tijdsduur tussen aankomsttijden en de verkooptijd van tabel 1 te laten bestuderen.
- *Reflecteren* en expliciteren gebeurt door leerlingen te laten uitleggen hoe zij de variatie in de tijdsduur tussen aankomsttijden kunnen vangen met het staafdiagram van de frequentieverdeling van die tijdsduur. Daarbij kunnen zij het verschil tussen de verdeling van de tijdsduur tussen aankomsttijden en van de verkooptijdsduren verwoorden: de eerste loopt ruwweg af, de tweede is min of meer symmetrisch.
- *Consoliderend* en *verwerkend* concluderen de leerlingen, aan de hand van de frequentieverdelingen van de tijdsduur tussen aankomsttijden, de verkooptijdsduren en de wachttijden, dat een langere gemiddelde ver-

kooptijd bij dezelfde gemiddelde tussenaankomsttijdsduren tot behoorlijk oplopende wachttijden kan leiden.

Tot slot het antwoord op de globale startvraag. Er ontstaat een 'eindeloze' wachtrij als de gemiddelde verkooptijd gelijk is aan of groter is dan de gemiddelde aankomsttijdsduur.

Bronnen

Drijvers, P., Van Streun, A. & Zwaneveld, B. (red.). (2012). Handboek wiskundedidactiek. Utrecht: Epsilon Uitgaven.

Perrenet, J.C., & Zwaneveld, B. (2012). The Many Faces of the Modelling Cycle. Journal of Mathematical Modelling and Application, 1(6), 3-21.

Van Streun, A. (2012). Leren en onderwijzen van wiskunde. In P. Drijvers, A. Van Streun & B. Zwaneveld (red.), Handboek wiskundedidactiek (pp. 3–52). Utrecht: Epsilon Uitgaven.

Tabellen, grafieken, Excelbladen

Op de website www.rekenenwiskunde21.nl staan bestanden die bij de lessen gebruikt kunnen worden. De Word-bestanden kunnen als werkbladen worden uitgedeeld. De Excel-bestanden kunnen gebruikt worden om leerlingen berekeningen of simulaties te laten uitvoeren.

Het belang van onderliggende wiskundige ideeën Een uitwerking voor onderwijs in statistiek

Geeke Bruin-Muurling
Irene van Stiphout

Technologische vooruitgang en globalisering veranderen onze maatschappij snel en hebben onder andere invloed op onze manier van werken, communiceren en samenleven. Deze veranderingen vragen om aanpassingen van het onderwijs om kinderen goed te blijven voorbereiden op hun toekomst. Hoe die toekomst eruit gaat zien weet niemand, wel is duidelijk dat wiskunde hierin een andere rol zal spelen. In dit stuk verkennen we wat dit betekent voor het wiskundeonderwijs in het algemeen en vervolgens verkennen we wat deze focus voor het statistiekonderwijs zou kunnen betekenen.

Inleiding

De laatste decennia zijn er veel ontwikkelingen geweest op het gebied van technologie en digitalisering. Wiskunde speelt daarin een bijzondere rol als vakgebied dat nauw verbonden is met die ontwikkelingen. Bovendien zorgt de ontwikkeling van geavanceerde rekenapparaten en wiskundige software ervoor dat de computer een deel van het wiskundig werk van ons overneemt, en daarmee ook ruimte biedt aan geavanceerdere technieken. Dit gaat verder dan de intrede van de gewone rekenmachines die ook op telefoons beschikbaar zijn met steeds meer functies. Computeralgebra wordt al steeds meer mainstream, inclusief de mogelijkheid een foto te maken van een handgeschreven formule waar vervolgens een oplossing van wordt gegeven of een grafiek getekend. Maar ook numerieke wiskunde en spreadsheetprogramma's hebben wiskundige mogelijkheden breder toegankelijk gemaakt. Dit betekent dat leerlingen meer conceptueel begrip nodig hebben van onderliggende wiskundige ideeën. In het bijzonder geldt deze ontwikkeling door de opkomst van gebruikersvriendelijke statistische software ook voor de statistiek. De groei van het gebruik van dergelijke software en de daarmee verbonden grotere beschikbaarheid van data hebben een aanzienlijke invloed gehad op het gebruik van statistiek in onze maatschappij. Dat betekent dat er in het dagelijks leven steeds meer een beroep wordt gedaan op het aannemen van een kritische houding ten opzichte van statistiek: zowel voor het beoordelen van argumenten gebaseerd op statistische analyses als bij het zelf uitvoeren van statistiek.

Wij zijn van mening dat die veranderde rol van de wiskunde, naast de aandacht voor meer algemene vaardigheden die vaak gevangen worden onder de term 21st century skills, vraagt om een vakinhoudelijke perspectiefwissel. We betogen dat het voor het wiskundeonderwijs in het algemeen, en voor het statistiekonderwijs in het bijzonder, van belang is om meer aandacht te besteden aan de onderliggende en verbindende wiskundige ideeën.

Onderliggende ideeën

De snelle veranderingen vragen om onderwijs dat leerlingen handvatten biedt om 1) met die veranderingen mee te gaan (een leven lang leren) en om 2) zich staande te houden in een steeds complexere maatschappij. Meer dan ooit wordt van burgers gevraagd om een leven lang nieuwe kennis en vaardigheden op te doen en te ontwikkelen. Daarnaast is en blijft het van belang om de steeds complexer en minder overzichtelijk wordende maatschappij te begrijpen en daarin een weg te vinden. Wat betekenen deze veranderingen voor de keuze in kennis en vaardigheden die het onderwijs aan leerlingen mee wil geven?

Wat betreft de eerste ontwikkeling, een leven lang leren, zien we in het gebruik van wiskundige software twee componenten: het gebruiken van een specifiek softwarepakket of rekenapparaat én het gebruik van wiskundige hulpmiddelen in meer algemene zin.

Het volgende voorbeeld uit het programmeeronderwijs illustreert dit verschil. Bij het leren programmeren kunnen twee perspectieven worden ingenomen. De eerste richt zich voornamelijk op het eigen maken van de commando's die horen bij de specifiek aan te leren taal. De tweede richt zich veel meer op de typen bouwblokken waaruit een programmeertaal bestaat. Je zou daarbij kunnen denken aan 'het herhalen van instructies op basis van bepaalde voorwaarden'. Dit idee van een conditionele loop komt in veel programmeertalen voor, maar kent wel telkens een andere schrijfwijze. Scratch, een programmeertaal ontwikkeld om kinderen te leren programmeren, heeft precies dit als uitgangspunt genomen. Zij hebben de programmeerprincipes of bouwblokken een visuele vertaling gegeven die de nadruk legt op het conceptueel begrip van de opbouw van een programmeertaal. Het voordeel van het tweede perspectief is dat het kapstokken biedt om een tweede taal veel sneller te doorgronden en daarin vaardig te worden. Vanuit het perspectief van een leven lang leren, een belangrijk aspect.

Ook voor wiskundige hulpmiddelen geldt dat leerlingen deze moeten leren bedienen, maar dat daarbij een focus op de onderliggende ideeën belangrijk is om juist het leren gebruiken van andere software pakketten in de toekomst makkelijker te maken. Deze aanpak van focus op structuren en ideeën heeft een tweede effect. Het zorgt er namelijk ook voor dat leerlingen zich bewust worden van een dergelijke manier om tegen leren aan te kijken. Ze leren dat het er niet alleen om gaat om een bepaald softwarepakket vaardig te worden, het gaat juist ook om de generieke structuur. Die andere manier van tegen leren aankijken zorgt ervoor dat ook andere nieuwe dingen efficiënter doorgrond kunnen worden.

Bij het toekomstgericht opleiden van leerlingen in het gebruik van digitale hulpmiddelen zijn tijdloze en toepassingsonafhankelijke mechanismen, structuren en ideeën dus belangrijk. Voor zowel het snel eigen kunnen maken van nieuwe softwarepakketten als om wiskundige problemen te vertalen naar de inzet van die software is dus conceptueel begrip van onderliggende ideeën belangrijk. Dit is een uitbreiding op het idee van een feitennetwerk als kapstok voor het leren dat we al kennen, bijvoorbeeld in de discussie over de geschiedenis canon. Juist begrip van onderliggende ideeën biedt een rode draad in kennisverwerving en het zoeken naar zulke rode draden is een uiterst efficiënte manier van verwerving van kennis en vaardigheden.

Met betrekking tot de tweede ontwikkeling, de complexer wordende maatschappij, zien we twee perspectieven op de noodzaak de maatschappij te blijven begrijpen. Voor de individuele burger is er een persoonlijk belang in het begrijpen van de maatschappij. Bijvoorbeeld bij het kunnen volgen van het nieuws, het kunnen omgaan met geld, het relativeren van reclame en het nemen van beslissingen zoals de keuze voor een zorgverzekering of hypotheek. Voor de maatschappij als geheel is er het belang van eenheid. Wanneer groepen mensen de snelheid en de complexiteit van de maatschappij niet aankunnen, daardoor afhaken en zich slachtoffer voelen, ontstaat een segregatie die onwenselijk is. Dat begrijpen van de maatschappij, dat zowel vanuit individueel perspectief als vanuit maatschappelijke perspectief nodig is, begint bij het hebben van een kritische houding.

Samengevat stellen we dat meer dan ooit het verwerven van overkoepelende ideeën en kerninzichten, als kapstokken voor verder leren en als basis van kritisch denken, het doel zou moeten zijn van het onderwijs. Wat dat concreet kan betekenen in een gebied als het statistiekonderwijs wordt hieronder uitgewerkt.

Ontwikkelingen in de statistiek

Statistiek heeft een bijzondere positie in de digitalisering. De toegankelijkheid van vrij beschikbare geavanceerde statistische technieken is enorm toegenomen. Softwarepakketten als Microsoft Excel, SPSS en open source pakketten als R zijn vaker, voor meer mensen én eenvoudiger toegankelijk. In een maatschappij waarin veel belang wordt gehecht aan cijfers (Blauw, 2016) is het daarom van belang om leerlingen zorgvuldig voor te bereiden op de rol die cijfers spelen. Want, zoals de Amerikaanse journalist Gregg Easterbrook ooit zei:

> ‘Torture numbers, and they’ll confess to anything.’

In het uitvoeren van statistische analyses is de afgelopen eeuw een enorme ontwikkeling geweest. Zo ging het CBS in 1916 over op mechanisatie bij de verwerking van statistische gegevens om in de jaren ‘60 over te gaan op automatisering (Erwich & Van Maarseveen, 1999, p. 12).

Sinds die tijd is statistiek krachtiger geworden en is de toegankelijkheid toegenomen. We bedoelen daarmee dat waar de uitvoering van statistische analyses aanvankelijk werd gedaan door experts in gespecialiseerde afdelingen, statistische software nu voor iedereen beschikbaar is. Dat betekent dat waar de meeste mensen vroeger vooral de consument van statistiek waren en het analysewerk aan experts (statistici, wiskundigen) overlieten, nu een generatie is opgestaan voor wie het zelf uitvoeren van statistische analyses steeds gebruikelijker is. Zo wordt op universiteiten en hogescholen onderzoek in de opleiding ondersteund met statistische analyses in programma’s als MS Excel of SPSS. Statistiek is daarmee niet alleen meer voor statistici weggelegd. Statistische technieken hebben hun weg gevonden naar vele verschillende vakgebieden in alle richtingen (alpha, bèta en gamma). Dat heeft verschillende consequenties.

De eerste is dat statistiek niet alleen meer door wiskundige specialisten wordt uitgevoerd, terwijl statistiek zeker niet minder complex geworden is. Waar wiskundigen statistiek beschouwen als een ingewikkeld vakgebied, waar je makkelijk redeneer- en denkfouten maakt, zien we in andere vakgebieden soms een onderschatting van de moeilijkheid van statistiek (Ioannidis, 2005). Die onderschatting is er zeker wanneer het bedrijven van statistiek gericht is op de beheersing van de statistische software en het uitvoeren van procedures die in het betreffende vakgebied gemeengoed lijken te zijn geworden. Onder dergelijke statistische praktijken lijkt niet altijd meer een stevige basis van begrip te liggen. Software biedt de mogelijkheid om statistische analyses uit te voeren zonder dat gecheckt wordt of de data geschikt zijn voor die analyse. In dit licht kan het onderzoek worden geplaatst naar de statistische fouten die in veel sociaalwetenschappelijk onderzoek worden gemaakt (Hoekstra, 2009). De gebruiksvriendelijkheid van statistische software lijkt bij te dragen aan een onderschatting van de moeilijkheid van de onderliggende wiskunde en een overschatting van het eigen kunnen. Het gevolg is dat er een grotere spreiding lijkt in de kwaliteit van statistische analyses is dan voorheen.

Een tweede consequentie is dat mensen vaker worden geconfronteerd met de resultaten van statistisch onderzoek en dat die resultaten een steeds grotere rol spelen in beslissingen. De impact die statistiek daarmee heeft, ook op het individu, wordt groter (Blauw, 2016). Statistiek speelt bijvoorbeeld een rol in de politiek (Levels, 2016), rechtspraak (Derksen & Eymers, 2006) en in de behoefte aan evidence based aanpakken in het onderwijs (Hattie, 2008, 2012) en de zorg (Cox et al., 2012).

Voor het omgaan met de wisselende kwaliteit van statistische analyses en de maatschappelijke impact van cijfers zien we een duidelijke rol voor het onderwijs. Voor een burger is het belangrijk dat hij zich een beeld kan vormen van de kwaliteit van voorliggend onderzoek. Dat vraagt om een kritische houding en een oog voor punten waaraan je kwaliteit of juist slechte kwaliteit kunt herkennen. Diezelfde kritische houding is tevens nodig voor degenen die zelf statistische analyses uitvoeren om meer kwaliteit te leveren in het werk.

Samengevat zien we ook op het gebied van de statistiek het belang van het leren van onderliggende ideeën als kern van een efficiënte kennis- en vaardighedenbasis en als grondslag voor een kritische houding. In dit geval is dat nodig om zowel de kwaliteit van statistische analyses die door steeds meer mensen worden uitgevoerd omhoog te trekken als om op een verstandige manier om te gaan met de resultaten van op statistiek gebaseerd onderzoek.

Doelbeschrijvingen

In het voorgaande hebben we geconcludeerd dat een focus op onderliggende principes en ideeën essentieel is in toekomstbestendig onderwijs. De vraag is vervolgens hoe dergelijke doelen het beste in het onderwijs meegenomen kunnen worden. Ook in het huidige onderwijs is er immers al aandacht voor conceptuele kennis en begrip. Daarvoor kijken we eerst naar de huidige beschrijving van dit soort meer overkoepelende doelen. Zie de voorbeelden in Figuur 1 en Figuur 2.

De manier waarop deze doelen in het huidige onderwijs zijn geformuleerd, bieden echter om twee redenen niet de basis die we zoeken voor onze genoemde focus op onderliggende principes en ideeën. De begrippen die worden gehanteerd zijn hiervoor nog te breed, zoals passende vaktaal voor wiskunde herkennen en gebruiken voor het ordenen van het eigen denken in het voorbeeld. Bovendien richten deze doelbeschrijvingen zich meer op het niveau van de metacognitieve vaardigheden. Hierin is ook de verandering van focus te herkennen die wij voorstaan. Wij doelen met onze onderliggende principes en ideeën op een meer inhoudelijke reflectie en niveauverhoging (Sfard, 1991). Dat wil zeggen dat het begrijpen van onderliggende structuren en meer algemene ideeën, en daarmee niveauverhoging, door

Domein A: Inzicht en handelen

Subdomein A1:	Vaktaal wiskunde

De leerling kan

1. passende vaktaal voor wiskunde herkennen en gebruiken voor het ordenen van het eigen denken en voor uitleg aan anderen en wiskundetaal van anderen herkennen en beoordelen, evenals vaktaal omzetten naar taal die nodig is bij ondersteunende apparatuur (zoals de rekenmachine).

Subdomein A2:	Herkennen en gebruiken wiskunde

De leerling kan

2. verbindingen leggen tussen enerzijds probleemsituaties die al dan niet in een wiskundige context zijn gesteld en anderzijds wiskundige begrippen, verbanden, structuren en oplossingsprocedures.

De leerling kan

2.1 bij het oplossen van problemen de situatie vertalen naar een wiskundig model en daarbinnen zoeken naar geschikte oplossingsprocedures en deze toepassen en terugvertalen;

2.2 in verschillende situaties wiskundig gerelateerde informatie herkennen, interpreteren, gebruiken en toepassen in andere contexten.

Subdomein A3:	Wiskundig redeneren

De leerling kan

3. reflecteren op eigen wiskundige activiteiten, die activiteiten beschrijven en die van anderen kritisch beoordelen.
4. het verschil benoemen tussen vermoeden, stelling, definitie en bewijs en een eenvoudig bewijs leveren vanuit basisdefinities.

Figuur 1: Deel van de beschrijving van domein A Inzicht en handelen in de tussendoelen (SLO).

Domein F: Informatieverwerking en onzekerheid

De leerling kan		
18.	h/v	data verzamelen, ordenen, interpreteren en vergelijken en grafische representaties van data maken, ook met behulp van technologie.

De leerling kan		
18.1	h/v	grafische weergaven van data (tabel, diagram) aflezen en interpreteren;
18.2	h/v	data verzamelen, ordenen, samenvatten en vergelijken met behulp van centrummaten en spreidingsmaten en daaruit conclusies trekken;
18.3	h/v	bij datasets (van eenvoudige, praktische contexten) uitspraken over kansen beoordelen en voorspellingen doen;
18.4	h/v	passende vaktaal herkennen en gebruiken bij het verwerken, aflezen, representeren en vergelijken van dataverzamelingen.

Figuur 2: Deel van de beschrijving van domein F Informatieverwerking en onzekerheid in de tussendoelen (SLO).

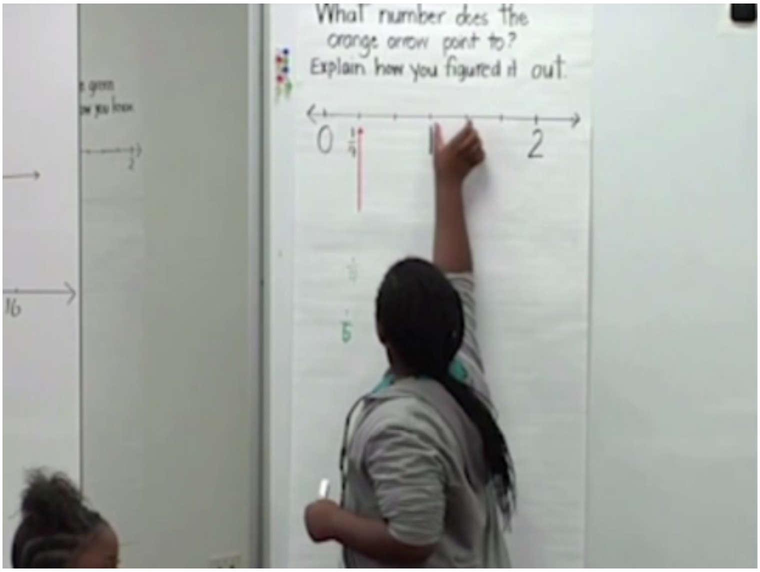
leerlingen en docenten als expliciete uitkomst van het leerproces wordt gezien. Dit vraagt om een inhoudelijke reflectie op de stof en op de opgaven die aan de orde zijn geweest, met als doel om tot diepere inzichten te komen over het onderwerp zelf en tot inzichten die verder reiken dan het onderwerp. Op die manier kunnen die ideeën verbindende elementen vormen tussen onderwerpen in de wiskunde.

De rol van concrete conceptuele doelen in het onderwijs

Het formuleren van onderliggende concepten als doel van onderwijs heeft een belangrijke rol in de praktijk van het lesgeven. In haar lezing tijdens de International Conference on Mathematics Education 2016 liet Deborah Ball een mooi voorbeeld zien van hoe een les anders kan verlopen wanneer de docent naast vaardigheidsdoelen ook de onderliggende concepten als doel in zijn hoofd heeft. In de les die ze toonde, moeten leerlingen de breuk $1/3$ benoemen op een getallenlijn van 0 tot 2. Een van de leerlingen, Aniyah, legt uit hoe ze op haar antwoord van $1/7$ is uitgekomen. Zie Figuur 3. Ball heeft deze video aan vele docenten laten zien en zag een predominantie van de constatering dat $1/7$ een fout antwoord is. De docenten in haar onderzoek zagen in het algemeen niet welke conceptuele kennis Aniyah al wel heeft: het kunnen kiezen van een geheel, het kennen van het belang van intervallen van gelijke grootte, het tellen van de intervallen in plaats van de markeringen, en het kunnen noteren van een breuk.

Het onjuiste antwoord is logischerwijze het eerste dat opvalt. Zeker in onderwijs dat sterk antwoord gericht is (Gravemeijer, Bruin-Muurling, Kraemer & Van Stiphout, 2016). Vanuit de traditie is het wiskundeonderwijs nog sterk gericht op eigen beheersing van algoritmen en technieken; kortom het beheersen van een bepaalde vaardigheid. In het genoemde voorbeeld zou zo'n vaardigheidsdoel het correct benoemen van een positie op de getallenlijn kunnen zijn. Daarvoor moet een 'procedure' tot het goede antwoord worden gevolgd: het tellen van het aantal gelijke intervallen tussen 0 en 1 en dit als noemer van de breuk te nemen. In een traditionele didactiek zou deze procedure voorgedaan kunnen worden. In een meer sociaal-constructivistische aanpak zou deze procedure met de leerlingen kunnen worden herontdekt.

Nu de rekenmachine en wiskundige software zijn intrede heeft gedaan gaat het niet alleen meer om het conceptueel begrip van dergelijke procedures. Het gaat ook om het conceptueel begrip van onderliggende wiskundige ideeën en structuren. Er is immers een verschuiving een hoofdfocus op het zelf uitvoeren van procedures naar het hele wiskundige proces van probleem oplossen, waarbij de rekenmachine het eerste van ons overneemt (Wolfram, 2010). Daarmee verschuift ook de aard van het conceptueel begrip. In het genoemde voorbeeld zou dan zelfs een nog andere richting in de uitleg gekozen kunnen worden. Aniyah lijkt immers één concept nog niet volledig begrepen te hebben. Ze weet wel dat het belangrijk is om een 'hele' te kiezen, maar begrijpt de impact daarvan nog niet. De docent zou hier met de leerlingen kunnen bespreken wat je nu precies als `hele' kiest en waarom. Hij of zij kan bespreken wat de invloed is van die keuze en waar dat nog meer een rol speelt. De leerlingen kennen dan waarschijnlijk al de situatie van 1/3 deel van 30 kinderen, waar de hele de groep van 30 kinderen is. Terwijl in een andere situatie de `hele' alle leerlingen van de school zijn. Het hangt van de context af wat als geheel wordt beschouwd. Dit is een voorbeeld van het concept eenheid dat later bijvoorbeeld een rol speelt bij het metriek stelsel en het rekenen met procenten.



Figuur 3: Uitleg van leerling Aniyah over de plaats van 1/7 op de getallenlijn: "Yeah, because there's seven equal parts, like one, two, three, four, five, six, seven and these..."

Ball liet zien dat een focus op andere doelen een ander verloop kan hebben op een les. We lieten daarnaast zien dat gezien de ontwikkeling van digitale hulpmiddelen zelfs nog een verdere focusverschuiving nodig is als het gaat om conceptuele doelen. We leren hieruit dat de formulering van conceptuele doelen docenten houvast geeft om de les te sturen naar een meer conceptuele invulling. Het is daarbij cruciaal dat de doelen zich richten op het inhoudelijke niveau van tijdloze en toepassingsonafhankelijke ideeën. In het volgende geven we voorbeelden van dergelijke doelen in het domein van de statistiek.

Een voorbeeld in statistiek

In de beschrijvende statistiek gaat het onder meer om het verkrijgen van overzicht in een grote hoeveelheid data (McClave et al., 2003). Zonder tussenkomst van technieken is het immers moeilijk om patronen te herkennen in grote hoeveelheden data. Door data te reduceren tot bijvoorbeeld enkele getallen of een grafische weergave, worden patronen zichtbaar. In dat reductieproces worden keuzes gemaakt. Die keuzes zijn soms gedreven door kennis van de situatie die onderzocht wordt, soms door wiskundige technieken.

Een van de algemene ideeën die hieronder ligt, is dat van de wisselwerking tussen complexiteit en precisie of detail in modelleerprocessen. De reductie van de informatie, het versimpelen, heeft een prijs, namelijk het verlies van detail van de data. Ditzelfde principe, van het betalen van een prijs voor versimpeling, is op veel plekken in de wiskunde terug te vinden. Een voorbeeld is het kiezen van de graad van een polynoom bij 'curvefitting'. Hier zien we het rekenwerk als de complexiteitsfactor: hoe hoger de graad, hoe nauwkeuriger de fit en hoe ingewikkelder het polynoom en dus het rekenwerk.

Dit principe betekent dat het nodig is precies in beeld te hebben wat er precies verloren is gegaan, zeker bij het trekken van conclusies. Wordt bijvoorbeeld in een onderzoek uitgegaan van een gemiddelde en de standaarddeviatie, dan gaat informatie over de symmetrie en de eentoppigheid van de data verloren. Onlangs publiceerden Matejka & Fitzmaurice (2017) nieuwe visueel aantrekkelijke datasets gebaseerd op het werk van Anscombe's Quartet. Deze datasets verschillen enorm van vorm, van een puntenwolk in de vorm van een donut tot de vorm van een dinosaurus, maar hebben wel dezelfde kentallen als gemiddelde, standaardafwijking en correlatie. Dit soort datasets laten zien dat waar deze kentallen een normale verdeling helemaal vastleggen, ze slechts een deel van het verhaal zijn bij andersoortige verdelingen. Dan is juist de informatie die buiten de kentallen ligt van belang.

Wanneer je zelf onderzoek doet kan dit reden zijn om de eigenschappen van de verdeling buiten de kentallen op voorhand te onderzoeken, voordat er gekozen wordt om met alleen gemiddelde en standaarddeviatie te werken. Wanneer je daarentegen een conclusie van een statistisch onderzoek moet beoordelen, is dit een indicatie van de kwaliteit van die conclusie: als er is uitgegaan van een normale verdeling zonder dat daar een goede aanleiding of 'bewijs' voor is, dan is dat een goede reden om nog een keer extra goed naar de conclusie van het onderzoek te kijken.

Hetzelfde principe speelt ook in de verklarende statistiek. Meer variabelen maken een model in het algemeen ingewikkelder. De selectie van variabelen heeft te maken met kennis van de context. Het beslissen of dit een verstandige selectie was bij het interpreteren van de resultaten heeft zowel betrekking op contextuele kennis als op wiskundig inzicht. Hier hebben we dan bijvoorbeeld te maken met principes als signaal-ruis verhouding en de aard van betrouwbaarheidsintervallen.

De voorbeelden die we hier hebben besproken betreffen onderwerpen die in het huidige statistiekcurriculum terug te vinden zijn. Toch zien we hier een hele nieuwe conceptuele laag als het gaat om de toekomst. Deze conceptuele laag heeft betrekking op het met begrip kunnen gebruiken van statistische software. Begrip dat er voor zorgt dat de software niet slechts een black-box wordt. Je zou het kunnen zien als het ontwikkelen van ‘red flags’ die leerlingen helpt kritisch te staan tegenover eigen onderzoek en dat van anderen.

Conclusie

We begonnen dit artikel met de noodzaak van conceptuele doelen om leerlingen weerbaar te maken zodat ze zich staande kunnen houden in de maatschappij van de toekomst. Dit lag zowel op het gebied van een leven lang leren als op de noodzaak van het hebben van een kritische houding om de maatschappij te kunnen begrijpen. We hebben ditzelfde meer concreet uitgewerkt voor het onderwerp statistiek. Daar is conceptuele kennis van belang zowel in het zelf uitvoeren van statistiek als in het op waarde kunnen schatten van statistiek die je in het dagelijks leven tegenkomt.

We hebben laten zien dat het hier gaat om ideeën die onder het onderwerp zelf liggen, maar ook de ideeën en structuren die verder reiken en daarmee verschillende onderwerpen verbinden. We pleiten daarom voor meer expliciete aandacht voor algemene ideeën die tijdloos en toepassingsonafhankelijk zijn. Deze zorgen immers voor een netwerk van ideeën dat een kapstok kan bieden voor later leren. De focus op onderliggend begrip is bovendien een zeer efficiënte manier om nieuwe kennis en vaardigheden te benaderen. Daarnaast bieden de onderliggende concepten de basis voor een kritisch wiskundige houding. We hebben laten zien dat een dergelijke andere focus het onderwijs een andere richting kan geven en daarmee toekomstbestendig maakt zonder verlies van de beheersing van kennis en vaardigheden zoals we die in het huidige onderwijs kennen.

Referenties

Blauw, S. (2016). Hoe precieze cijfers ons misleiden en de geschiedenis bepalen. De Correspondent.

Cox, K., de Louw, D., Verhoef, J., & Kuiper, C. (2012). Evidence-based practice voor verpleegkundigen, Methodiek en toepassing. Den Haag: Boom Lemma Uitgevers.

Derksen, A. A. & Eymers, H. (2006). Lucia de B.: reconstructie van een gerechtelijke dwaling. Veen Magazines.

Erwich, B. & Van Maarseveen, J. (1999). Een eeuw statistieken. Historisch-methodologische schetsen van de Nederlandse officiële statistieken in de twintigste eeuw. CBS, Voorburg.

Hattie, J. (2008). Visible learning: A synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement. Routledge.

Hattie, J. (2012). Visible learning for teachers: Maximizing impact on learning. Routledge.

Hoekstra, R. (2009). The use and usability of inferential techniques. PhD thesis, Rijksuniversiteit Groningen.

Ioannidis, J. (2005). Why most published research findings are false. PLoS Med, 2(8), 696–701.

Levels, M. (18 augustus 2016). Nee meneer de politicus, mijn statistieken zijn niet links. NRC Handelsblad. Geraadpleegd van https://www.nrc.nl/nieuws/2016/08/18/neemeneer-de-politicus-mijn-statistieken-zijn-nietlinks-3838884-a1516993.

Matejka, J. & Fitzmaurice, G. (2017). Same stats, different graphs: Generating datasets with varied appearance and identical statistics through simulated annealing. In Proceedings of the 2017 CHI Conference on Human Factors in Computing Systems (pp. 1290–1294).: ACM.

McClave, J., Benson, P., Sincich, T., Smitt, P., & Geilenkirchen, J. (2003). Statistiek: een inleiding voor het hoger onderwijs. Prentice Hall.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics, 22(1), 1–36.