januari 1991

W 12 16

Wel of niet

een voorschotje op wiskunde B

voor klas 3 havo

Publikatie van het team W12-16

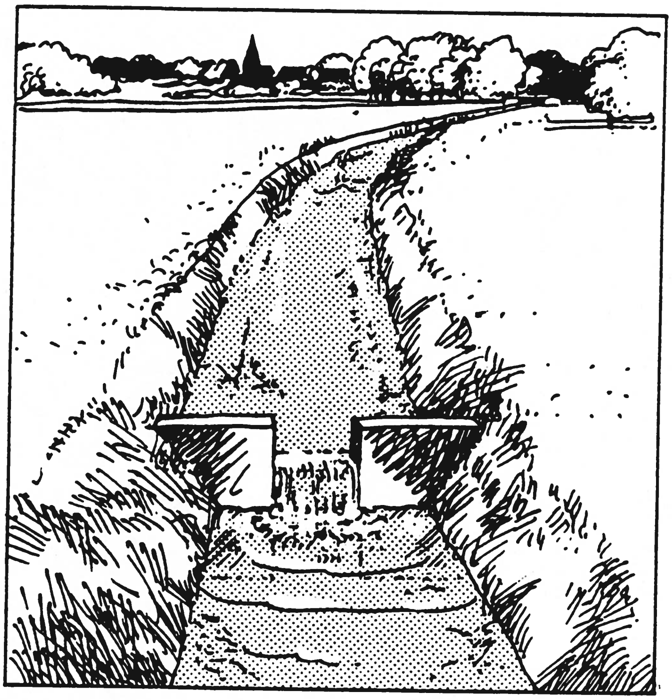
Ontwerp: Hadrie

Het gebruik van 'Wel of niet'

Het doel van dit werkstukje is de leerling enige steun te bieden bij de overweging wiskunde-B te kiezen.
Er is geprobeerd met behulp van deels bekende en deels onbekende stof iets te laten zien van de sfeer van het vak in de vierde klas.
Het is niet de bedoeling dit materiaal zonder meer als een toets te gebruiken. De leerling hoeft niet alles te kunnen en mag af en toe best eens geholpen worden.
Belangrijk is dat de leerling na afloop voor zichzelf deze vragen kan beantwoorden:
Zou ik zulke dingen redelijk kunnen leren?
Past het bij mijn interesse?

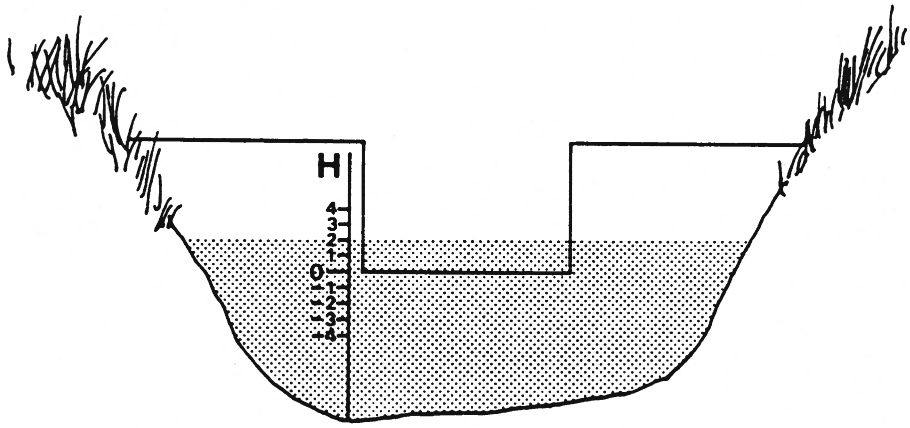
Wel of niet

aanloopje



In een sloot is een stuw met een doorlaatopening gemaakt. Zo kan men de waterhoogte in het verste deel van de sloot een beetje regelen.

We kijken even achter de stuw. We hebben daar een schaal tegenaan gezet, waarop we de hoogte h van het water kunnen aflezen.



Voor de duidelijkheid is het wat overdreven voorgesteld. Doordat de doorlaatopening niet zo snel een grote watertoevoer kan verwerken, kan de waterhoogte h ruim boven de nulstand komen.

Tijdens een regenperiode stijgt het water zeer regelmatig. Daardoor kun je voorspellen hoe hoog het water op een bepaald tijdstip staat. Voor de tijd die sinds het begin van de regen is verstreken, gebruiken we t (je kunt daarbij bijvoorbeeld aan dagen denken).

Die regelmaat kun je vastleggen in een formule. Dit is er een:

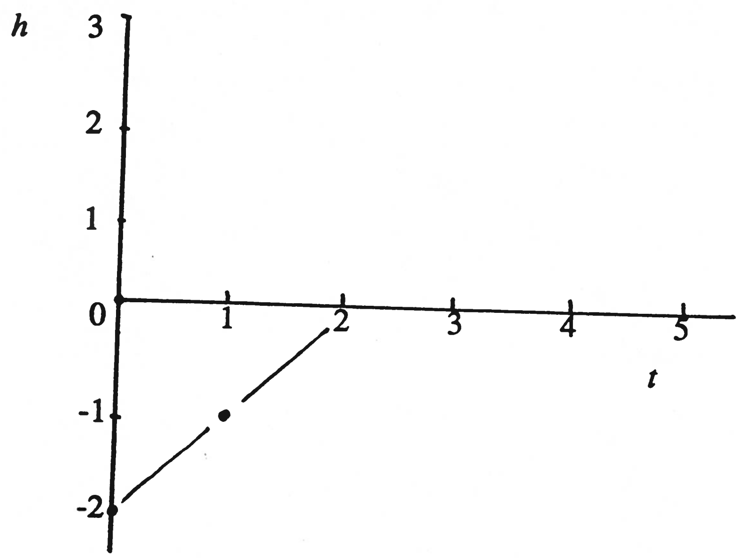
$$h = t - 2.$$

1>Maak deze tabel af:

t	0	1	2	3	4	5
h	-2					

Er kan ook een grafiek van dit verschijnsel worden gemaakt.

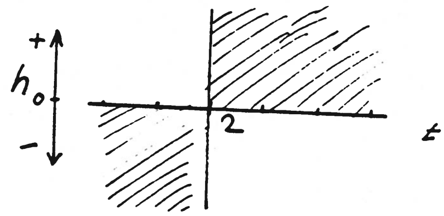
2>Maak de grafiek af:



Veronderstel dat je alleen maar wilt weten op welke dagen het water wel en op welke dagen het water niet door de stuw stroomt.

Dan geven de tabel en de grafiek meer informatie dan je nodig hebt. Dit zou genoeg zijn.

t	0	1	2	3	4	5
h	-	-	0	+	+	+



3>Ga na hoe deze tabel en deze vreemde grafiek gemaakt zijn.

4>We laten het harder regenen, zodat de formule $h = 2t - 2$ wordt (t loopt weer van 0 tot en met 5).

a Hoe kun je aan de formule zien dat het harder regent?

b Teken de vereenvoudigde tabel en de vereenvoudigde grafiek voor deze situatie.

c Bedenk eens een formule voor een zachter regentje.

We hebben in het voorgaande een verschijnsel dat in werkelijkheid kan optreden, proberen te vangen in een wiskundige beschrijving. Men zegt dan: we hebben een model van de werkelijkheid gemaakt. Meestal wordt de werkelijkheid in een model sterk vereenvoudigd voorgesteld. Het is dan ook geen wonder dat de resultaten van het model wel eens afwijken van de werkelijkheid. Denk maar eens aan het weerbericht dat met behulp van computermodellen wordt gemaakt. Modellen zijn benaderingen die voor verbetering vatbaar zijn.
Ons stuwmodel komt hierop neer:

t: tijd   h: hoogte (in geschikte eenheden uitgedrukt)

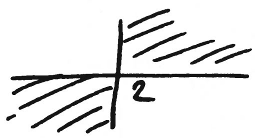
$h = t - 2$

$$\text{als} \begin{cases} h > 0 & \text{dan is er doorstroming} \\ h = 0 & \text{(grensgeval)} \\ h < 0 & \text{dan is er geen doorstroming.} \end{cases}$$

5>Noem eens enkele tekortkomingen van het stuwmodel.
Weet je verbeteringen?

Afspraak: de vereenvoudigde grafiek maken we nog eenvoudiger:

h	-	0	+
t		2	



Dit noemen we een *tekenoverzicht* van h.

Bij de volgende opgaven hoef je niet beslist aan de stuw te denken. Het is dan ook helemaal niet raar dat t bijvoorbeeld de waarde -8 krijgt.

6>Maak in onderstaande gevallen tekenoverzichten van h:

a	$h = t - 4$	d	$h = t + 2$
b	$h = 2t - 6$	e	$h = -t + 3$
c	$h = \frac{1}{2} t$	f	$h = -t - 2$

7>Bedenk bij elk van de tekenoverzichten *twee* formules voor h.

a

h	+	0	-
t		3	

b

h	-	0	+
t		5	

c

h	+	0	-
t		-7	

d
$$\begin{array}{c|ccc} h & - & 0 & + \\ \hline t & & -6 & \end{array}$$

e
$$\begin{array}{c|ccc} h & + & 0 & - \\ \hline t & & 0 & \end{array}$$

f
$$\begin{array}{c|ccc} h & - & 0 & + \\ \hline & & 0 & \end{array}$$

de sprong

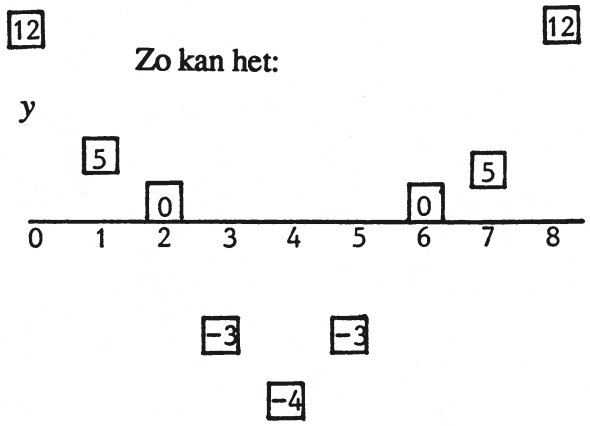
In het aanloopje zijn we met een praktisch probleem begonnen en hebben daar enige wiskunde bij bedacht.

In het komende deel springen we meteen naar de wiskunde, zonder ons te bekommeren om de betekenis voor het gewone leven (die is er wel degelijk!).

Ons probleem: hoe maak je handig het tekenoverzicht van $y = x^2 - 8x + 12$.

Eerste poging: vul een aantal waarden voor x in, bereken y en noteer het resultaat overzichtelijk.

Zo kan het:



Het waarschijnlijke tekenoverzicht:

$$\begin{array}{c|ccccc} y & + & 0 & - & 0 & + \\ \hline x & & 2 & & 6 & \end{array}$$

Misschien vind je het vreemd dat dit het *waarschijnlijke* tekenoverzicht wordt genoemd. Maar bedenk dat een tekenoverzicht iets zegt voor alle x-waarden, terwijl je slechts voor enkele iets weet.

y zou 0 kunnen worden voor bijvoorbeeld x tussen 4 en 5 of voor een x-waarde boven de 1000.

Illustratie: $y = x^3 - 36x$. Voor $x = 0$ en $x = 6$ is $y = 0$.

Dus
$$\begin{array}{c|ccccc} y & + & 0 & - & 0 & + \\ \hline x & & 0 & & 6 & \end{array}$$

Maar het is:
$$\begin{array}{c|ccccccc} y & - & 0 & + & 0 & - & 0 & + \\ \hline x & & -6 & & 0 & & 6 & \end{array}$$

Het lijkt nuttig een methode uit te vinden die meer zekerheid geeft.

tweede poging

De (wiskundige) ervaring heeft geleerd dat het anders opschrijven van een formule nieuwe ideeën kan oproepen.

Voor $y = x^2 - 8x + 12$ schrijven we $y = (x - 2)(x - 6)$.

Van de twee onderdelen $x - 2$ en $x - 6$ kunnen we betrouwbare tekenoverzichten maken. Voor het gemak geven we namen: $a = x - 2$ en $b = x - 6$

We moeten hieruit de tekens van $y = a \cdot b$ zien te vinden. De tekenregels voor vermenigvuldigen zijn al lang bekend. Zo komen we tot het gevraagde tekenoverzicht, dat we er netjes onder zetten.

a -   0   +
x 2

b -   0   +
x 6

ab $(= y)$ +   0   -   0   +
x 2   6

8>Controleer het resultaat. Waarom is deze methode wel zeker?

9>Enkele oefeningen in het combineren van tekenoverzichten:

a
a +   0   -
x 10
b +   -
x -5
ab ______________
x

b
a +   0   -
x 0
b -   0   +
x 4
ab ______________
x

c
a -   0   +
x 6
b -   0   +
x 4
ab ______________
x

d
a -   0   +
x
b -   0   +
x
ab ______________
x

e
a +   0   -
x 3
b +   -
x 3
ab ______________
x

f
a +   0   -
x -7
b -   0   +
x -7
ab ______________
x

10> Bij opgave 9a is gebruikt $a = -x + 10$ en $b = -x - 5$.
Bij ab hoort dan de formule $ab = (-x + 10)(-x - 5)$ of $y = (-x + 10)(-x - 5)$.
Bedenk ook formules voor y bij de overige tekenoverzichten.

11> Maak in één figuur de tekenoverzichten van $x + 1, x - 3$ en $y = (x + 1)(x - 3)$.
Doe hetzelfde voor:

b $y = (x - 2)(-x + 5)$

c $y = (-x - 4)(-x + 1)$

d $y = x(x + 10)$

e $y = (x - 6)(x - 6)$

f $y = (3x + 1)(2x - 7)$.

12> Aan de vorige formules zie je meteen wat de beginformules zijn. Je kunt ze verstoppen door de vermenigvuldiging uit te voeren.

$y = (x + 1)(x - 3)$ wordt $y = x^2 - 3x + x - 3$

Of, fraaier:

$y = x^2 - 2x - 3$.

Maak dezelfde herleidingen voor 11b tot en met 11f.

13> Maak het tekenoverzicht van:

a $y = x^2 - 4x + 3$.

b $y = x^2 - 9$.

14> Bij $y = x^2 + 4x - 12$ hoort dit tekenoverzicht:

+	0	-	0	+
	-6		2	

Schrijf in één keer een formule op voor het tekenoverzicht:

-	0	+	0	-
	-6		2	

15> Bedenk een formule voor dit tekenoverzicht:

-	0	+	0	-	0	+
	1		2		3	

16> Nog even terug naar de stuw. Voor de periode $0 \leq t \leq 10$ is de waterhoogte gegeven door
$h = t^2 - 9t + 18$.
Onderzoek de doorstroming.

archief FI 02.01.37

Wel of niet

een voorschotje op wiskunde B voor klas 3

Hadrie