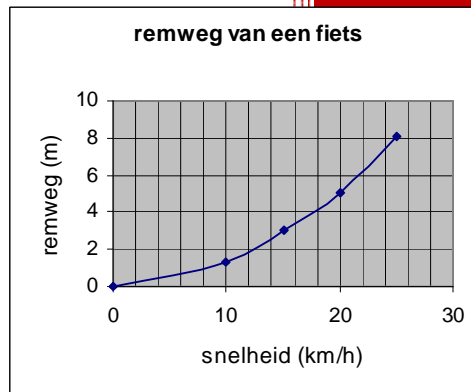


NAAM:

KLAS:

SaLVO!

12 Verbanden beschrijven



L1	L2	L3
10	1.3	.013
15	3	.01333
20	5.1	.01275
25	8.1	.01296
-----	-----	-----
L3 = L2 / L1 ²		

$$\frac{s_{rem}}{v_b^2} = c$$

NATUURKUNDE

KLAS 4 HAVO

SaLVO!

Dit lesmateriaal is een onderdeel van het samenwerkingsproject SaLVO! dat als doel heeft om meer samenhangend onderwijs te ontwikkelen in de bètavakken.

Overzicht projectmateriaal

De leerlijn SaLVO! rond verhoudingen, verbanden, formules en grafieken is opgebouwd uit een aantal delen bij verschillende vakken:

biologie = B, economie = E, informatiekunde = I, natuurkunde = N, scheikunde = S en wiskunde = W.

deel	titel	vak(ken)	leerjaar
1	Verhoudingen en evenredigheden	W	2 HV
2	Een verband tussen massa en volume	N	2 HV
3	Vergroten en verkleinen	N, W	2HV
4	Omgekeerd evenredig verband	W	2/3 HV
5	Planeten en Leven	B, N, S, W	2/3 HV
6	Economie en procenten	E, W	3 HV
7	Verhoudingen bij scheikundige reacties	S	3 HV
8	Formules en evenredigheden	N	3HV
9	Vergelijkingen in de economie	E, W	3 HV
10	Exponentiële verbanden	I, N, W	3 HV
11	Evenredigheden en machten	W	4 HV
12	Vebanden beschrijven	N	4 HV
13	Exponentiële functies	B, N, S, W	5 V
14	Periodieke functies	N, W	5 V

Colofon

Project SaLVO! (Samenhangend Leren Voortgezet Onderwijs)

Auteurs Kees Hooyman, Hans van Loon, Wim Sonneveld

Versie mei 2009

M.m.v. St. Bonifatiuscollege, Utrecht

Geref. Scholengemeenschap Randstad, Rotterdam

Freudenthal Inst. for Science and Mathematics Education, Univ. Utrecht

Copyright

Op de onderwijsmaterialen in deze reeks rust copyright. Het materiaal mag worden gebruikt voor niet-commerciële toepassingen. Het is niet toegestaan het materiaal, of delen daarvan, zonder toestemming op een of andere wijze openbaar te maken.

Voor zover wij gebruik maken van extern materiaal proberen wij toestemming te verkrijgen van eventuele rechthebbenden. Mocht u desondanks van mening zijn dat u rechten kunt laten gelden op materiaal dat in deze reeks is gebruikt dan verzoeken wij u contact met ons op te nemen: science.salvo@uu.nl

Voorwoord

Het deel 'Verbanden beschrijven' is gemaakt voor vierdeklas havo leerlingen en hoort bij het vak natuurkunde.

Als je eenmaal meetresultaten hebt, wil je ook weten of tussen de gemeten grootheden een bepaald verband bestaat. Je wilt immers graag voorspelingen doen over andere waarden van de grootheden of je wilt met je resultaten een beter inzicht krijgen in wat er aan de hand is, iets wat je theorievorming zou kunnen noemen. Dus is heel interessant hoe je het verband tussen twee grootheden kunt beschrijven. Hoe dat in zijn werk gaat wordt duidelijk gemaakt in dit deel.

Allereerst wordt het herkennen van een verband uit een grafiek behandeld. Vervolgens leer je met een aantal methoden hoe je verbanden met een formule kunt beschrijven, o.a. met behulp van de TI-83, een grafische rekenmachine.

Inhoudsopgave

1 Inleiding	5
2 Verbanden beschrijven en herkennen	8
3 Verbanden bepalen met de TI-83	14
Bijlage A: Stappenplan verbanden bepalen.....	19
Bijlage B: Verbanden bepalen met de TI-83	20
Overzicht standaard verbanden	22

1. Inleiding

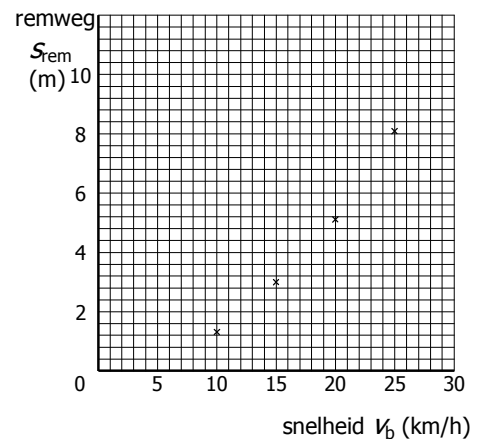
Je doet bij natuurkunde een onderzoek. Als je dan meetresultaten hebt, wil je ook weten of tussen de gemeten grootheden een bepaald verband bestaat. Je wilt immers graag voorspellingen doen over andere waarden van de grootheden of je wilt met je resultaten een beter inzicht krijgen in wat er aan de hand is, iets wat je theorievorming zou kunnen noemen. Dat herkennen en beschrijven van verbanden komt in dit werkboek ter sprake.

Paragraafvraag	Hoe vind je het verband tussen twee grootheden?
-----------------------	--

Instap Remweg van een fiets

Johan en Irene hebben de remmen van hun fiets getest. Dat hebben ze gedaan door bij verschillende snelheden de remweg van de fiets te meten. In de tabel zie je de resultaten van hun metingen. De meetpunten zijn ook getekend in de grafiek ernaast.

snelheid v_b (km/h)	remweg s_{rem} (m)	
10	1,3	
15	3,0	
20	5,1	
25	8,1	



- Teken de grafiek hierboven. Waarom moet de grafiek door de oorsprong?

Johan en Irene hadden van tevoren verwacht dat de remweg evenredig zou zijn met de snelheid, maar nu ze de grafiek getekend hebben trekken ze de conclusie dat hun idee niet klopt.

- Welke vorm zou de grafiek gekregen hebben als het een evenredig verband was geweest?

De buurman van Irene is politieagent. Hij beweert dat de remweg bij grote snelheden veel sterker toeneemt. "Een verdubbeling van de snelheid betekent dat de remweg vier keer zo groot wordt".

- Hoe wordt zo'n verband ook wel genoemd?

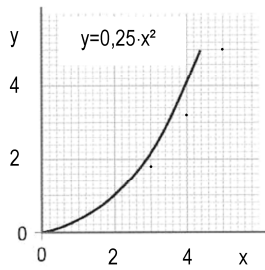
- De vorm van de grafiek bij zo'n verband heeft een wiskundige naam. Welke?

Je kunt je afvragen welke formule er bij deze metingen past. Bij wiskunde wordt de vergelijking voor een parabool met de top in de oorsprong geschreven als:

$$y = a \cdot x^2$$

waarbij a een constant getal is dat iets zegt over de vorm van de parabool.

In het voorbeeld hiernaast heeft de constante a de waarde 0,25.

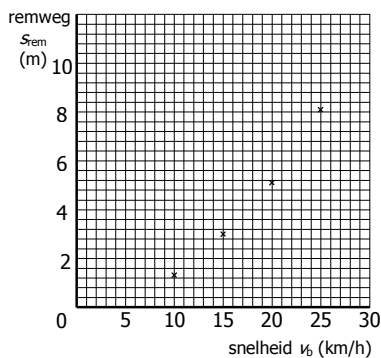


- Controleer met een berekening dat de waarde past bij de grafiek.

- In het diagram hiernaast staat ook een aantal meetpunten. Teken de grafiek door deze meetpunten en bepaal welke constante bij deze meetpunten past.

- Hoe luidt nu de formule van het verband tussen deze meetpunten?

- Teken in hetzelfde diagram de grafiek van $y = 0,5x^2$



Omdat in ons probleem s_{rem} langs de y -as staat, en v_b langs de x -as schrijven we de formule als:

$$s_{rem} = c \cdot v_b^2$$

waarbij c een constante is, die iets zegt over de remkracht en dus over de vorm van de grafiek.

De waarde van c bepaalt hoe de parabool loopt. Door voor c de juiste waarde te kiezen kunnen we de best passende parabool bij de metingen vinden.

- Welke waarde van c geeft een goed passende parabool? Schrijf je berekening ook op.

- Je hebt vast gemerkt dat het niet zo gemakkelijk is om de waarde van c nauwkeurig te bepalen. Weet je nu ook zeker dat het deze waarde de parabool oplevert die inderdaad het best bij de metingen past?

Je gaat nu het probleem opnieuw aanpakken met de **tabelmethode**, zoals beschreven op de volgende bladzijde.

► De tabelmethode

Bij bovenstaand probleem is de tabelmethode een snelle manier om twee dingen te bepalen:

- Gaat het inderdaad om een kwadratisch verband?
- Hoe groot is de constante in de formule?

De tabelmethode gaat als volgt: de formule van het verband wordt zo herschreven dat je er rechtstreeks de constante c mee kunt uitrekenen. Vervolgens wordt bij elke meting de waarde van de 'constante' berekend.

In ons voorbeeld is de formule: $s_{rem} = c \cdot v_b^2$

Deze kan geschreven worden als: $\frac{s_{rem}}{v_b^2} = c$

Dat betekent dat bij elke meting de waarde van s_{rem}/v_b^2 ongeveer hetzelfde zou moeten zijn, als het inderdaad om een kwadratisch verband gaat. Dat kunnen we eenvoudig controleren met een tabel. De constante is dan het **gemiddelde** van de waarden van s_{rem}/v_b^2

$$s_{rem} = c \cdot v_b^2$$

$$\frac{s_{rem}}{v_b^2} = c$$

- Vul in de tabel in de laatste kolom steeds de waarde van s_{rem}/v_b^2 in.

snelheid v_b (km/h)	remweg s_{rem} (m)	
10	1,3	
15	3,0	
20	5,1	
25	8,1	

- Welke twee conclusies kunnen we nu trekken?

- Welke formule beschrijft het verband tussen de remweg s_{rem} en de beginsnelheid v_b ?

In een brochure voor verkeersveiligheid lezen Johan en Irene dat de remmen moeten worden afgekeurd als de remweg bij een snelheid van 30 km/h groter is dan 12 m.

- Moeten de remmen afgekeurd worden? Geef een berekening.

2. Verbanden beschrijven en herkennen

In stap 1 Lees de theorie in **Newton Informatieboek 1 § 1.5** (3e druk) goed door.

Paragraafvragen	Hoe beschrijf je een verband met een formule, als machtsfunctie en in woorden? Hoe herken je een verband aan de grafiek?
------------------------	---

- Noteer bij de verbanden in de grote tabel hieronder de algemene **formule** in de 2^e kolom.
- Welke van deze verbanden zijn machtsfuncties?

Machtsfunctie

Een machtsfunctie is te schrijven met een formule:

$$y = c \cdot x^n$$

waarbij c een constante is en n een exponent, die positief, negatief en gebroken kan zijn.

Als de exponent positief is, gaat de grafiek van het verband netjes door de oorsprong.

Bij een negatief verband heb je te maken met bijv. omgekeerd evenredig of omgekeerd kwadratisch evenredig. Zie het al ingevulde voorbeeld.

NB In de TI83 wordt $y = c \cdot x^n$ geschreven als $y = a \cdot x^b$

- Schrijf bij die verbanden de formule als een **machtsfunctie** in de 3e kolom, zoals je dat bij wiskunde hebt geleerd (zie ook kader hiernaast).

soort verband	formule	geschreven als machtsfunctie	omschrijving in woorden
Recht evenredig	$y = c \cdot x$		
Lineair			
Omgekeerd evenredig			
Kwadratisch evenredig			Als x twee (of drie) maal zo groot wordt, dan wordt y vier (of negen) maal zo groot.
Omgekeerd kwadratisch evenredig	$y = c \cdot \frac{1}{x^2}$		
Evenredig met de wortel		$y = c \cdot x^{\frac{1}{2}}$	

In stap 2 Rekenen met factoren

De **omschrijving in woorden** is ook uit de getallen in de tabel te vinden. Dan maak je gebruik van factoren. Hiernaast staat een voorbeeld van twee grootheden die omgekeerd evenredig zijn.

x	y
1,0	1,74
1,5	1,19
2,0	0,87
3,0	0,60
5,0	0,35

$\left. \begin{array}{l} 1,5 \\ 2,0 \\ 3,0 \end{array} \right\} \times 2$
 $\left. \begin{array}{l} 1,19 \\ 0,87 \\ 0,60 \end{array} \right\} : 2$

Je ziet: als x twee maal zo groot wordt, dan wordt y twee maal zo klein.

Overigens hoort de eerste grafiek op de volgende bladzijde hierbij.

- Schrijf in de grote tabel hierboven in de laatste kolom voor elk soort verband ook het verband in woorden.

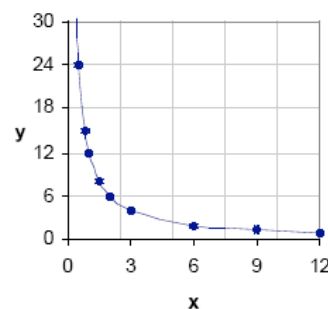
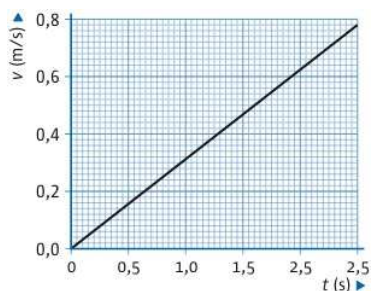
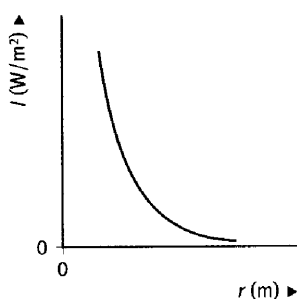
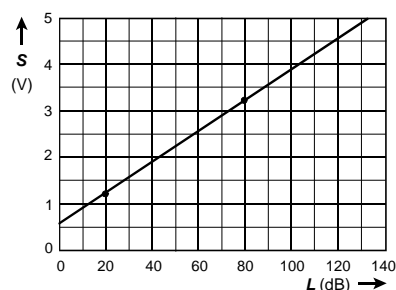
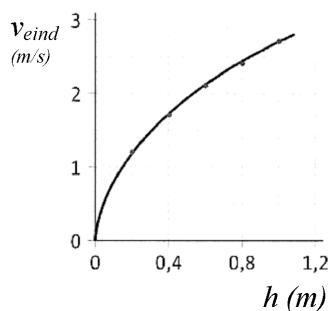
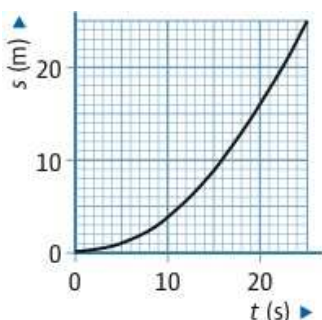
In stap 3 Herkennen van verbanden

Een rechte lijn of een parabool is duidelijk en zelfs een wortelverband kun je aan de grafiek herkennen. Bij een dalende lijn is het vaak lastiger.

Aan de vorm van de grafiek kun je vaak al zien welk verband het ongeveer is. Daarbij helpen de volgende vragen:

- Is de lijn krom of recht?
- Is de lijn stijgend of dalend?
- Gaat de lijn door de oorsprong?
- Snijdt de grafiek de assen?

Tip bij een dalende lijn: Een omgekeerd evenredig verband geeft een grafiek die *symmetrisch* is in een lijn onder 45° met de x -as. Bij een omgekeerd kwadratisch evenredig verband is de grafiek niet symmetrisch.



Opdracht

- Welk soort verband hoort bij welke grafiek? Noteer in elke grafiek welk soort verband het is. (dus: recht evenredig, lineair, omgekeerd evenredig, ...enz.)
- Bij elke grafiek hoort ook een formule zoals $y = c \cdot x^2$ of $p = c \cdot \frac{1}{V}$. Noteer in elke grafiek de formule die bij het verband hoort. De constante hoef je niet te bepalen.
- De formules zijn ook te schrijven als machtsfunctie zoals $y = c \cdot x^2$ of $p = c \cdot V^{-1}$. Noteer dit ook in elke grafiek die daar voor in aanmerking komt.

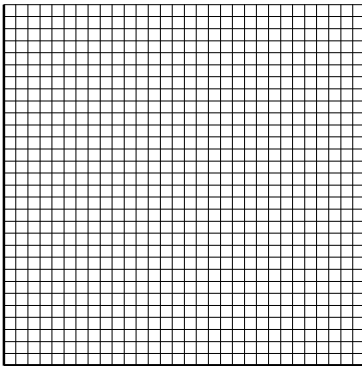
Op de laatste bladzijde van dit deel staat een overzicht van de zes verschillende verbanden die je moet kennen.

Opgave 1

Dichtheid

Van een aantal voorwerpen met verschillend volume V van een bepaald metaal heeft Jorinde de massa m gemeten. De meetresultaten staan in de tabel. De dichtheid ρ van het materiaal is hiermee te bepalen.

V (cm^3)	m (g)	
2,1	16,1	
5,9	48,3	
3,8	31,8	
8,3	64,4	
10,8	88,5	



- a. Wat voor verband verwacht je om een natuurkundige reden? Leg uit.

- b. Teken de grafiek. Waarom moet de lijn door de oorsprong?

- c. Noteer in woorden wat voor soort verband je denkt dat het is.

- d. Welke formule beschrijft het verband?

- e. Bepaal de constante c met de tabelmethode.

- f. Bepaal de eenheid van de constante c . Welke grootte stelt de c voor?

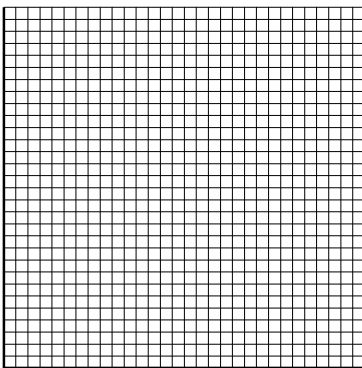
- g. Zoek in BINAS (tabel 8 en 9) op welk metaal Jorinde heeft onderzocht.

Opgave 2

Afremmende auto

Van een afremmende auto is op verschillende tijdstippen de snelheid gemeten. De meetresultaten staan in de tabel.

t (s)	v (km/h)
0,0	95
0,6	86
1,5	73
2,3	62
3,1	50
5,4	17



- a. Wat voor verband verwacht je om een natuurkundige reden? Leg uit.

- b. Teken de grafiek.

- c. Noteer in woorden wat voor soort verband je denkt dat het is.

- d. Welke algemene formule beschrijft het verband?

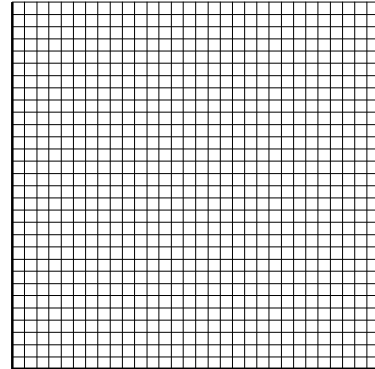
- e. Wat is dan de formule voor de snelheid van een afremmende auto?

- f. Bepaal de remtijd van de auto.

Opgave 3 Snelheid

Jan heeft een fietscomputer gekregen en gaat met Carla onderzoeken of deze goed werkt. Daarom gaat hij proberen tussen twee lantaarnpalen met een constante snelheid te fietsen en Carla meet dan de tijd dat hij over die afstand doet. Dat herhaalt hij bij verschillende snelheden. De lantaarnpalen staan 50 m van elkaar. De meetresultaten staan in de tabel.

v (km/h)	v (m/s)	t (s)	
6,0		29,7	
13,2		14,3	
17,5		10,1	
22,3		7,9	
28,6		6,5	



- a. Reken de snelheid om in m/s. Zet dat in de 2^e kolom.
- b. Gebruik de methode van hoofdstuk 2 (Instap 2), **rekenen met factoren**, en leg daarmee uit welk verband je denkt dat het is.

- c. Teken de grafiek. Neem de snelheid in m/s !
- d. Noteer in woorden wat voor soort verband je denkt dat het is.

- e. Welke algemene formule beschrijft het verband?

- f. Bepaal de constante c met de tabelmethode.

- g. Kun je de conclusie trekken dat de fietscomputer het (bij deze test) goed doet? Leg je antwoord uit.

► Het stappenplan

Uit de voorgaande aanpak is een algemene manier af te leiden om het verband tussen twee grootheden te bepalen, we noemen dit het stappenplan:

1. Teken een grafiek
2. Haal uit de vorm van de grafiek welk verband het beste past
3. Controleer de waarschijnlijke formule met de tabelmethode en bepaal de constante.

Het stappenplan staat uitgebreid beschreven in de **bijlage A** achterin. Twee andere methoden om een verband te bepalen zijn de functiefit en de coördinatentransformatie. Deze komen later aan de orde maar zijn in de **bijlage A** al opgenomen.

Opgave 4

Massa-veer-systeem

Een gewichtje met massa m aan een veer kan op-en-neer trillen. De trillingstijd T van zo'n massa-veer-systeem is de tijd die nodig is om vanuit een van de twee uiterste standen één volledige beweging op-en-neer te maken.

m (kg)	T (s)	
0,025	0,24	
0,050	0,34	
0,075	0,42	
0,100	0,48	

a. Onderzoek het verband tussen T en m volgens het stappenplan:

1 Teken de grafiek.

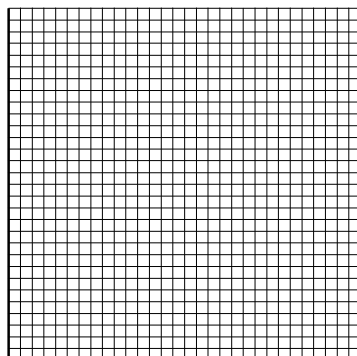
2 Noteer in woorden wat voor soort verband je hebt gevonden.

3 Bepaal met de tabelmethode de formule die het verband beschrijft.

Volgens de theorie wordt de trillingstijd T van dit massa-veer-systeem gegeven door de formule: $T = 1,6 \cdot \sqrt{m}$, met T is de trillingstijd (in s), m de massa (in kg).

b. Klopt deze formule met het soort verband dat je in a2 gevonden hebt?

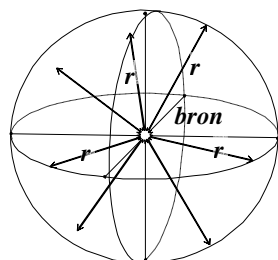
c. Misschien dacht je in eerste instantie dat het verband lineair was. Welke meting zou je willen doen om dit uit te sluiten?



Opgave 5

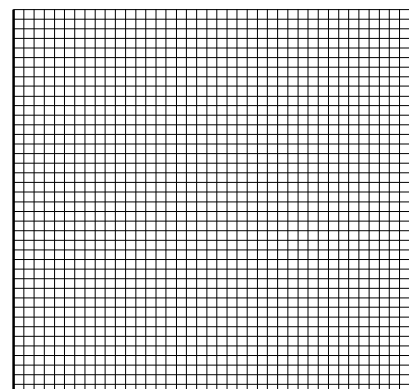
Geluidsintensiteit

Bij een experiment wordt de geluidsintensiteit I gemeten (in W/m^2) als functie van de afstand r tot de geluidsbron (in m). Wat is nu het best passende verband bij deze metingen?



bron en verspreiding

r (m)	I (W/m^2)	
0,50	31,8	
0,80	12,4	
1,10	6,6	
1,40	4,1	



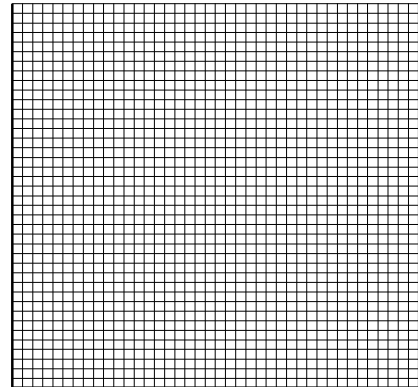
a. Onderzoek het verband tussen I en r volgens het stappenplan.

b. Geef de formule die het verband beschrijft.

Opgave 6 Het doorbuigen van een balk

In de bouw wordt vaak een ijzeren balk gebruikt om bij een aanbouw het ontstane gat in de muur te overbruggen en de bovenverdieping te stutten. De balk moet dan wel stevig genoeg zijn en niet te ver doorzakken. Metingen aan de doorbuiging van een balk van 6,0 m lengte bij belasting staan in de tabel.

belasting (kg)	doorbuiging (cm)	
$1,0 \cdot 10^4$	0,51	
$2,0 \cdot 10^4$	0,98	
$3,0 \cdot 10^4$	1,55	
$5,0 \cdot 10^4$	2,53	
$8,0 \cdot 10^4$	4,08	



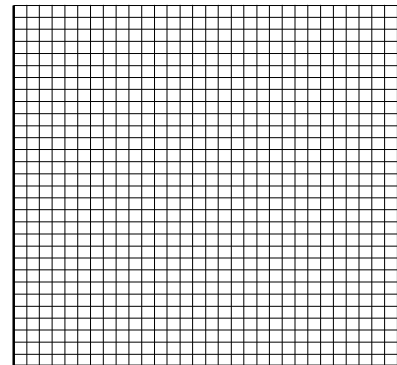
- a. Onderzoek het verband tussen de belasting en de doorbuiging volgens het stappenplan en geef de formule die het verband beschrijft.

- b. Als de norm bij een bepaald gebouw maximaal 2 mm doorbuiging is, bepaal dan de maximale belasting op deze balk.

Opgave 7 Luchtwrijving

De luchtwrijvingskracht $F_{w,l}$ op een voertuig wordt gemeten in een windtunnel als functie van de snelheid v . De meetwaarden staan in de tabel.

snelheid v (m/s)	$F_{w,l}$ (N)	
10,6	60	
16,7	150	
22,1	260	
27,8	410	
33,2	590	



- a. Onderzoek het verband tussen $F_{w,l}$ en v volgens het stappenplan en geef de formule die het verband beschrijft.

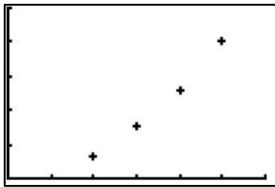
- b. Leg uit wat er met de constante gebeurt als je de stroomlijn van het voertuig verbetert.

- c. Noem nog twee andere grootheden die mede de waarde van de constante bepalen. Geef ook aan hoe.

3. Verbanden bepalen met de TI-83

Op de TI-83 kun je eenvoudig en snel een verband tussen twee grootheden bepalen. In **Bijlage B** staat stap voor stap uitgelegd hoe je dat aan kunt pakken.

snelheid v_b (km/h)	remweg s_{rem} (m)
10	1,3
15	3,0
20	5,1
25	8,1



We nemen hier kort het voorbeeld (probleem uit Inleiding) door.

Stap 1: Teken een grafiek

- Voer de punten in een tabel in en zet ze in een assenstelsel. Zie bijlage B.

Stap 2: Het verband zoeken m.b.v. de vorm van de grafiek

- Met wat voor verband hebben we hier te maken?

Stap 3: Controleer de formule en bepaal de constante

1. De tabelmethode

Met de GR is het maken van een tabel relatief eenvoudig. Bedenk eerst welke uitdrukking er in de 3^e kolom hoort te staan.

In dit voorbeeld geldt: $s_{rem} = c \cdot v_b^2$ of $y = c \cdot x^2$

Voor de tabel wordt dat: $L_2 = c \cdot L_1^2$ of $\frac{L_2}{L_1^2} = c$

- Controleer bij het gegeven voorbeeld met $\frac{L_2}{L_1^2} = L_3$ dat de waarde van L_3 voldoende constant is. Noteer de gemiddelde waarde van L_3 .

Stel je voor dat je gekozen had voor een evenredig verband, dan zou

$\frac{L_2}{L_1} = L_3$ een constante moeten opleveren.

- Controleer dat bij dit voorbeeld $\frac{L_2}{L_1} = L_3$ de waarde van L_3 niet constant is.

Kijk nog even in **Bijlage B** hoe je nu een grafiek moet tekenen.

- Vul voor $[Y_1]$ de formule in die je gevonden hebt en controleer of de grafiek netjes door de punten loopt.

2. MachtFit

Een nadeel van de tabelmethode is dat het nogal wat werk op de GR vraagt voordat je de goede formule hebt. Om dit nadeel te omzeilen is een apart functiefit-programma voor de TI-83 geschreven.

Het programma werkt als volgt:

- X moet in L1 staan, Y moet in L2 staan
- X en Y hebben alleen positieve waarden (niet nul)
- Een grafiek met oorsprong en het goede domein wordt automatisch getekend

PROGRAM MACHTFIT

```

:ClrHome
:Clear Entries
:Disp "MACHTSFUNCTIE"
:Disp " "
:Disp "Y=A*X^N"
:Disp " "
:Disp "X IN L1"
:Disp "Y IN L2"
:Pause
:max(L1)*1.05>Xmax
:max(L2)*1.05>Ymax
:0>Xmin
:0>Ymin
:DispGraph
:Pause
:Lbl 99
:Disp "GEEF SCHATTING"
:Prompt N
:sum(L2^(1/N)*L1)/sum(L1^2)>C
:C^N>A
:"A*X^N">Y1
:DispGraph
:Pause
:ClrHome
:Disp "Y=A*X^N"
:Disp "N=",N
:Disp "A=(ZIE L3)",A
:L2/L1^N>L3
:Goto 99

```

- Een schatting voor de exponent N moet gegeven worden door naar de vorm van de grafiek te kijken
- De waarde van A en N komen op het scherm, de functie in Y1
- De tabelmethode komt in L3
- Er wordt opnieuw een waarde voor N gevraagd (stoppen met [QUIT])

Het programma is hiernaast geschreven. Het is handig om het met TI-LINK te kopiëren. Het is ook te downloaden van

<http://www1.phys.uu.nl/wwwcdb/salvo/materiaal/MACHTFIT.8xp>

Oefenopgaven met de TI-83

Opgave 8

Massa-veer-systeem

In opgave 4 is het verband onderzocht tussen de trillingstijd en de massa van een massa/veersysteem.

m (kg)	T (s)
0,025	0,24
0,050	0,34
0,075	0,42
0,100	0,48

- a. Herhaal het onderzoek met de TI-83. Onderzoek het verband tussen T en m volgens het stappenplan. Gebruik de tabelmethode én MachtFit. Welke formule beschrijft het verband?

tabelmethode: $T =$ (zie ook opg 4)

MachtFit: $T =$

- b. Aan welke methode geef jij hier de voorkeur? Waarom?

Opgave 9

Geluidsintensiteit I en afstand r

In opgave 5 is het verband onderzocht tussen de geluidsintensiteit I (in W/m^2) en de afstand r tot de geluidsbron (in m).

r (m)	I (W/m^2)
0,50	31,8
0,80	12,4
1,10	6,6
1,40	4,1

- a. Herhaal het onderzoek met de TI-83. Onderzoek het verband volgens het stappenplan. Gebruik de tabelmethode én MachtFit. Welke formule beschrijft het verband?

tabelmethode: $I =$ (zie ook opg 5)

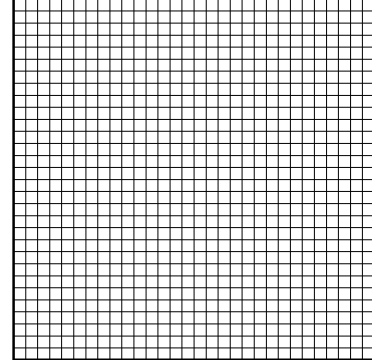
MachtFit: $I =$

- b. Aan welke methode geef jij hier de voorkeur? Waarom?

Opgave 10 Geiser

Een geiser zorgt voor een temperatuurstijging van het water dat erdoorheen stroomt. De temperatuur T_u van het uitstromende water hangt af van de hoeveelheid water m_d die per minuut door de geiser stroomt: hoe meer water er doorheen stroomt, hoe lager de temperatuur ervan is. Bij onderstaande metingen is de temperatuur T_i van het instromende water 17°C .

m_d (kg/min)	T_u ($^\circ\text{C}$)	$\Delta T = T_u - T_i$ ($^\circ\text{C}$)	
3,0	71		
4,5	54		
6,0	46		
7,5	39		
9,0	35		



- a. Een eerste vermoeden is dat er een omgekeerd evenredig verband tussen T_u en m_d bestaat. Laat m.b.v. rekenen met factoren zien dat tussen T_u en m_d géén omgekeerd evenredig verband bestaat.

- b. Uit de metingen is de temperatuurstijging ΔT van het water te berekenen: $\Delta T = T_u - T_i$. Waarom is het zinvol om naar de temperatuurstijging te kijken?

- c. Bereken voor elke meting de waarde van de temperatuurstijging ΔT en zet die in de 3^e kolom.

- d. Teken de grafiek van ΔT tegen m_d .

- e. Bepaal het verband tussen de grootheden ΔT en m_d met de tabelmethode. Gebruik daarvoor ook de 4^e kolom hierboven.

- f. Bepaal het verband tussen de grootheden ΔT en m_d met MachtFit.

- g. Bepaal de temperatuur T_u van het uitstromende water als er 5,0 kg water per minuut door de geiser stroomt.

- h. Doe hetzelfde bij een doorstroming van 12 kg/min.

Opgave 11

Vloeistofthermometer

Bij een vloeistofthermometer neemt de vloeistofhoogte h toe als de temperatuur T stijgt. In de tabel zie je gemeten waarden van h en T .

T (°C)	h (cm)	
10,0	4,0	
23,0	4,5	
35,0	5,8	
45,0	6,6	
55,0	6,9	
65,0	7,8	
75,0	8,2	
88,0	9,2	

- a. Laat met de meetresultaten uit de tabel zien dat het verband tussen de grootheden h en T niet recht evenredig is. (**tip**: rekenen met factoren)

- b. Als je de grafiek tekent (met de TI83 !), hoe kun je dan zien dat de grootheden h en T niet recht evenredig zijn?

Het verband tussen de vloeistofhoogte h en de temperatuur T is wél *lineair*: het verband tussen deze grootheden wordt weergegeven door een rechte lijn in het diagram, maar die lijn gaat *niet* door de oorsprong.

Voor dit lineaire verband geldt de formule: $h = a \cdot T + b$

In deze formule is a de steilheid van de lijn (het geeft aan hoe de vloeistofhoogte stijgt in cm/°C, dat noemen we de gevoeligheid van de thermometer). Verder is b de afsnijding van de verticale as.

- c. Leg uit dat het logisch is dat het verband lineair is. Verklaar dus zowel de afsnijding (b) van de verticale as als het feit dat de gevoeligheid (a) constant is.

- d. Bepaal de waarde van de getallen a en b met functiefit LinReg op je TI-83 en geef de formule die daarbij hoort.



Opgave 12

Luchtwrijving

In opgave 7 is het verband onderzocht tussen de luchtwrijvingskracht $F_{w,l}$ op en de snelheid v van een voertuig.

- a. Herhaal het onderzoek met de TI-83. Onderzoek het verband tussen $F_{w,l}$ en v volgens het stappenplan. Gebruik de tabelmethode én MachtFit. Welke formule beschrijft het verband?

tabelmethode: $F_{w,l} =$ (zie opg 7)

MachtFit: $F_{w,l} =$

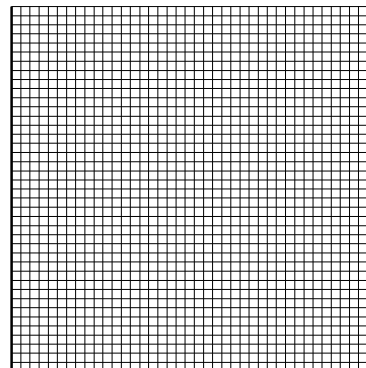
- b. Aan welke methode geef jij hier de voorkeur? Waarom?

v (m/s)	$F_{w,l}$ (N)
10,6	60
16,7	150
22,1	260
27,8	410
33,2	590

Opgave 13 Warmteontwikkeling

Op een transformator wordt beurtelings een aantal weerstanden aangesloten. De energie die in 10 s wordt afgegeven wordt gemeten. De resultaten van de metingen zijn:

R (Ω)	energie Q (J)	
6,0	240	
10	144	
15	96	
24	60	



- a. Bepaal het verband tussen R en Q op twee manieren

tabelmethode (teken de grafiek hierboven) $Q =$

MachtFit (met de TI-83) $Q =$

- b. Geef het eindresultaat als een formule met ingevulde constante.

$Q =$

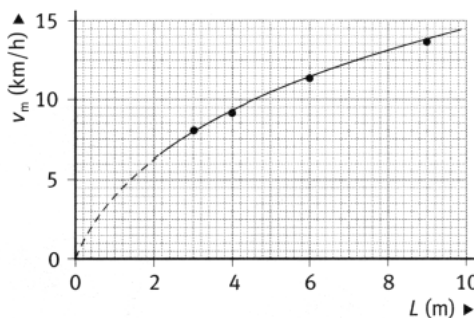
Opgave 14 Boten en snelheden



Een zeilboot die snel vaart, maakt grote golven. Bij een bepaalde snelheid zijn deze golven zo groot, dat de boeg (de voorkant) te hoog en de achterkant te diep komen te liggen. De boot loopt vol water, en zinkt. Uit onderzoek blijkt dat deze topsnelheid v_m van een zeilboot afhangt van de waterlijn lengte L , zoals weergegeven in de grafiek.

Men vermoedt dat het verband tussen snelheid en waterlijn lengte een wortelverband is, waarvoor als formule geldt: $v_m = c \cdot \sqrt{L}$

L (m)	v_m (km/h)



- a. Lees de meetpunten in de grafiek nauwkeurig af en zet ze in de tabel hierboven. Maak vervolgens een tabel en een grafiek met de TI-83.
- b. Onderzoek vervolgens het verband en stel een formule op. Gebruik zowel de tabelmethode als machtFit.

eindresultaat: $v_m =$

Bijlage A. Stappenplan verbanden bepalen

Stap 1 Teken een grafiek

Bij een serie metingen hoort bijna altijd een grafiek, zeker als je een verband wilt onderzoeken.

Stap 2 Welk verband past het best? Welke formule hoort daarbij?

Aan de vorm van de grafiek kun je vaak zien welk verband het ongeveer is. Is de lijn krom of recht? Is de lijn stijgend of dalend? Gaat de lijn door de oorsprong? Snijdt de grafiek de assen? (zie het 'Overzicht standaard verbanden' hierna)

Stap 3 Controleer de formule en bepaal de constante

Om te onderzoeken of je het juiste verband gekozen hebt en om de waarde van de constante in de formule te bepalen staan twee methoden tot je beschikking. Deze methoden worden hieronder achtereenvolgens besproken:

1. Tabelmethode

afstand r (m)	intensiteit I (W/m ²)	$I \cdot r^2$
0,10	81	
0,20	20	
0,30	8,7	
0,40	5,0	
0,50	3,2	

- Noteer bovenaan de kolom ook de uitdrukking die bij de berekening hoort met bijbehorende eenheid.
- Kijk goed of de waarde in de kolom ongeveer constant is. Soms schommelt de waarde een beetje, neem dan het *gemiddelde*. Bij een uitschieter (bijvoorbeeld bij de eerste meetpunten) is het soms zinnig één of meer meetpunten weg te laten.
- Als de rij "constanten" niet gelijk blijft maar duidelijk oploopt of afloopt, mag je zeker niet de conclusie trekken dat je het verband gevonden hebt.

De tabelmethode werkt meestal goed, maar het werkt niet in alle omstandigheden.

- Als je een verkeerd verband hebt gekozen krijg je een oplopende of aflopende rij getallen.
- Als (bij stijgende functies) de grafiek niet door de oorsprong gaat is de methode onbetrouwbaar, met name voor de eerste meetpunten. Ook dan krijg je een oplopende of aflopende rij getallen.
- Als de waarde van de constante grote verschillen vertoont is het raadzaam een andere methode te hanteren.

2. MachtFit

Met de grafische rekenmachine kun je met het programma MachtFit snel bepalen wat de beste machtsfunctie is die past bij je meetwaarden. Je moet dan wel weten welk verband er theoretisch bij het experiment hoort. Het voordeel van MachtFit is dat je bij een machtsfunctie zelf de exponent kunt bepalen. (zie Bijlage B)

Bijlage B.

Verbanden bepalen met de TI-83

Tabelmethode en MachtFit

Op de TI-83 kun je eenvoudig en snel een verband bepalen. Het tekenen van een grafiek van de meetpunten, het toepassen van de tabelmethode en de functiefit zijn met de TI-83 goed uit te voeren. Als voorbeeld nemen we de remweg van de fiets van Johan en Irene. We volgen daarbij het stappenplan.

Zorg wel dat je rekenmachine ingesteld staat op zelf afronden ([MODE] dan bovenaan [NORMAL] en op de tweede rij [FLOAT]) of op de wetenschappelijke notatie ([MODE], dan bovenaan [SCI] en bijvoorbeeld op de tweede rij 2 om totaal drie significante cijfers te krijgen)

Stap 1: Teken een grafiek

Om een diagram te maken moeten we de metingen in een tabel plaatsen, en daarna met [STAT PLOT] de punten in een grafiek tekenen.

L1	L2	L3	Z
10	1.3	-----	
15	3		
20	5.1		
25	8.1		

L2(5) =			

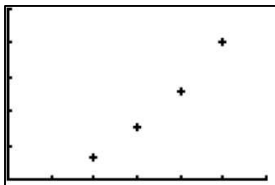
a. Punten invoeren in een tabel

- Gebruik [STAT] – [EDIT] om de lijsten L1 en L2 te vullen (schoonmaken met [2ND] [MEM] – [CLRALLLISTS]).

b. Punten in een assenstelsel zetten

- Kies in [STAT PLOT] voor bijvoorbeeld [PLOT1]
- Instellingen voor [PLOT1]:
 - zet de grafiek [ON]
 - Type: kies het eerste type (een grafiek met losse punten)
 - voor [XLIST] kies je [L1]
 - voor [YLIST] kies je [L2]
 - markering een plusteken.
- Kies in [WINDOW] de maximale en minimale waarden voor X en Y. Met [GRAPH] krijg je de punten in beeld. Zorg dat de oorsprong in beeld is.

WINDOW
Xmin=0
Xmax=30
Xscl=5
Ymin=0
Ymax=10
Yscl=2
Xres=1



Stap 2: Het verband zoeken

Voordat je gaat rekenen is het belangrijk te onderzoeken welk verband het zou kunnen zijn, op basis van de metingen in de grafiek.

- In dit voorbeeld lijkt de grafiek op een parabool, en daarbij hoort een *kwadratisch* verband.

Stap 3: Controleer de formule en bepaal de constanten

1. De tabelmethode

Met de GR is het maken van een tabel relatief eenvoudig. Bedenk eerst welke uitdrukking er in de 3^e kolom hoort te staan.

In dit voorbeeld geldt: $s_{rem} = c \cdot v_b^2$ of $y = c \cdot x^2$

Voor de tabel wordt dat: $L_2 = c \cdot L_1^2$ of $\frac{L_2}{L_1^2} = c$

L1	L2	L3	Z
10	1.3	.013	
15	3	.01333	
20	5.1	.01275	
25	8.1	.01296	
-----		-----	
L3 = L2 / L1^2			

- Ga boven in kolom [L3] staan, druk op [ENTER] en vul de formule onderin het venster in.
- Is de waarde van [L3] voldoende constant? Wat is de gemiddelde waarde van [L3]? (TIP: de TI-83 berekent het gemiddelde met: mean(L3); gebruik [CATALOG] of [2ND], [STAT], [MATH])
- Kies bovenop je GR voor [Y=]. Vul voor [Y1] de formule in die je gevonden hebt en controleer of de grafiek netjes door de punten loopt.

```

PROGRAM MACHTFIT
:ClrHome
:Clear Entries
:Disp "MACHTSFUNCTIE"
:Disp " "
:Disp "Y=A*X^N"
:Disp " "
:Disp "X IN L1"
:Disp "Y IN L2"
:Pause
:max(L1)*1.05→Xmax
:max(L2)*1.05→Ymax
:0→Xmin
:0→Ymin
:DispGraph
:Pause
:Lbl 99
:Disp "GEEF SCHATTING"
:Prompt N
:sum(L2^(1/N)*L1)/sum(L1^2)→C
:C^N→A
:"A*X^N"→Y1
:DispGraph
:Pause
:ClrHome
:Disp "Y=A*X^N"
:Disp "N=",N
:Disp "A=(ZIE L3)",A
:L2/L1^N→L3
:Goto 99

```

2. MachtFit

Een nadeel van de tabelmethode is dat het nogal wat werk op de GR vraagt voordat je de goede formule hebt. Om dit nadeel te omzeilen is een apart functiefit-programma voor de TI-83 geschreven.

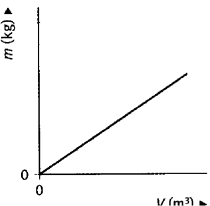
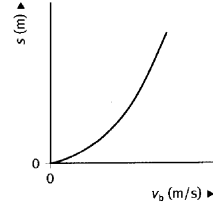
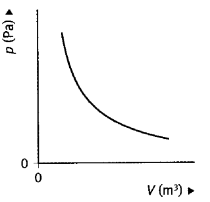
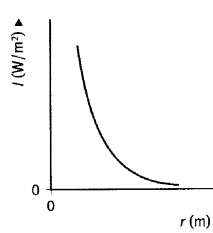
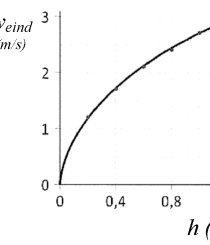
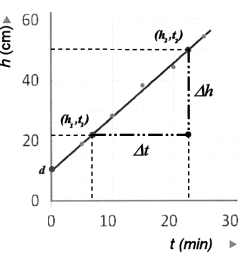
Het programma werkt als volgt:

- X moet in L1 staan, Y moet in L2 staan
- X en Y hebben alleen positieve waarden (niet nul)
- Een grafiek met oorsprong en het goede domein wordt automatisch getekend
- Een schatting voor de exponent N moet gegeven worden door naar de vorm van de grafiek te kijken
- De waarde van A en N komen op het scherm, de functie in Y1
- De tabelmethode komt in L3
- Er wordt opnieuw een waarde voor N gevraagd (stoppen met [QUIT])

Het programma is hiernaast geschreven. Het is handig om het met TI-LINK te kopiëren. Het is ook te downloaden van

<http://www1.phys.uu.nl/wwwcdb/salvo/materiaal/MACHTFIT.8xp>

Overzicht standaard verbanden

<p>Evenredig verband</p>  <p>De grafiek is een rechte lijn door de oorsprong. De formule: $y = c \cdot x$ Bij deze grafiek: $m = \text{constante} \cdot V$</p> <p>Omgeschreven wordt dat:</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> $\frac{m}{V} = \text{constante}$ </div>	<p>Kwadratisch verband:</p>  <p>De grafiek is een (halve) parabool, met de top in de oorsprong. De formule: $y = c \cdot x^2$ Bij deze grafiek: $S = \text{constante} \cdot v_b^2$</p> <p>Omgeschreven wordt dat:</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> $\frac{S}{v_b^2} = \text{constante}$ </div>
<p>Omgekeerd evenredig verband:</p>  <p>De grafiek loopt naar de assen toe, en is symmetrisch, een hyperbool. De formule: $y = c \cdot \frac{1}{x}$ Bij deze grafiek: $p = \text{constante} \cdot \frac{1}{V}$</p> <p>Omgeschreven wordt dat:</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> $p \cdot V = \text{constante}$ </div>	<p>Omgekeerd kwadratisch verband:</p>  <p>De grafiek lijkt op die van het omgekeerd evenredig verband, is <i>niet</i> symmetrisch. De formule: $y = c \cdot \frac{1}{x^2}$ Bij deze grafiek: $I = \text{constante} \cdot \frac{1}{r^2}$</p> <p>Omgeschreven wordt dat:</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> $I \cdot r^2 = \text{constante}$ </div>
<p>Wortel verband</p>  <p>Met de top in de oorsprong. De formule: $y = c \cdot \sqrt{x}$ Bij deze grafiek: $v_{\text{eind}} = \text{constante} \cdot \sqrt{h}$</p> <p>Omgeschreven wordt dat:</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> $\frac{v_{\text{eind}}}{\sqrt{h}} = \text{constante}$ </div>	<p>Lineair verband:</p>  <p>De grafiek is wel een rechte lijn maar niet door de oorsprong. De formule: $y = c \cdot x + d$ Bij deze grafiek: $h = c \cdot t + d$ De tabelmethode werkt niet maar: c kun je bepalen met: $c = \frac{(h_2 - h_1)}{(t_2 - t_1)} = \frac{\Delta h}{\Delta t}$ d kun je aflezen bij de verticale as</p>