Patrones y figuras

BRITANNICA
Las matemáticas en contexto

Álgebra

HOLT, RINEHART AND WINSTON

Las matemáticas en contexto es un currículo exhaustivo para los grados intermedios. Se desarrolló entre 1991 y 1997 en colaboración con el Wisconsin Center for Education Research (Centro de Investigación Educativa de Wisconsin), Facultad de Educación, de la Universidad de Wisconsin-Madison y el Freudenthal Institute (Instituto Freudenthal), de la Universidad de Utrecht, Países Bajos, con el apoyo del subsidio n.º 9054928 de la National Science Foundation (Fundación Nacional para las Ciencias).

La revisión curricular se realizó entre los años 2003 y 2005, con el apoyo del subsidio n.º ESI 0137414 de la National Science Foundation.

National Science Foundation

Las opiniones expresadas pertenecen a los autores
y no reflejan necesariamente las de la Fundación.

Kindt, M., Roodhardt, A., Dekker, T., Wijers, M., Spence, M. S., Simon, A. N., Pligge, M. A. y Burrill, G. (2006). *Patrones y figuras*. Wisconsin Center for Education Research & Freudenthal Institute (Eds.), *Las matemáticas en contexto*. Chicago: Encyclopædia Britannica, Inc.

ISBN 0-03-093061-8

1 2 3 4 5 6 073 09 08 07 06

Equipo de desarrollo de *Las matemáticas en contexto*

Desarrollo 1991–1997

Martin Kindt y Anton Roodhardt desarrollaron la primera versión de *Patrones y figuras*. La adaptación para su uso en las escuelas estadounidenses es de Mary S. Spence, Aaron N. Simon y Margaret A. Pligge.

Wisconsin Center for Education

Personal de investigación

Thomas A. Romberg
Director

Joan Daniels Pedro
Asistente del Director

Gail Burrill
Coordinadora editorial

Margaret R. Meyer
Coordinadora

Personal del proyecto

- Jonathan Brendefur
- Laura Brinker
- James Browne
- Jack Burrill
- Rose Byrd
- Peter Christiansen
- Barbara Clarke
- Doug Clarke
- Beth R. Cole
- Fae Dremock
- Mary Ann Fix
- Sherian Foster
- James A. Middleton
- Jasmina Milinkovic
- Margaret A. Pligge
- Mary C. Shafer
- Julia A. Shew
- Aaron N. Simon
- Marvin Smith
- Stephanie Z. Smith
- Mary S. Spence

Personal del Freudenthal Institute

Jan de Lange
Director

Els Feijs
Coordinadora

Martin van Reeuwijk
Coordinador

- Mieke Abels
- Nina Boswinkel
- Frans van Galen
- Koeno Gravemeijer
- Marja van den Heuvel-Panhuizen
- Jan Auke de Jong
- Vincent Jonker
- Ronald Keijzer
- Martin Kindt
- Jansie Niehaus
- Nanda Querelle
- Anton Roodhardt
- Leen Streefland
- Adri Treffers
- Monica Wijers
- Astrid de Wild

Revisión 2003–2005

Truus Dekker desarrolló la versión revisada de *Patrones y figuras*. La adaptación para su uso en las escuelas estadounidenses es de Gail Burrill.

Wisconsin Center for Education

Personal de investigación

Thomas A. Romberg
Director

David C. Webb
Coordinador

Gail Burrill
Coordinadora editorial

Margaret A. Pligge
Coordinadora editorial

Personal del proyecto

- Sarah Ailts
- Beth R. Cole
- Erin Hazlett
- Teri Hedges
- Karen Hoiberg
- Carrie Johnson
- Jean Krusi
- Elaine McGrath
- Margaret R. Meyer
- Anne Park
- Bryna Rappaport
- Kathleen A. Steele
- Ana C. Stephens
- Candace Ulmer
- Jill Vettrus

Personal del Freudenthal Institute

Jan de Lange
Director

Truus Dekker
Coordinadora

Mieke Abels
Coordinadora del contenido

Monica Wijers
Coordinadora del contenido

- Arthur Bakker
- Peter Boon
- Els Feijs
- Dédé de Haan
- Martin Kindt
- Nathalie Kuijpers
- Huub Nilwik
- Sonia Palha
- Nanda Querelle
- Martin van Reeuwijk

Créditos de las fotografías de la portada: (todas) © Corbis

Ilustraciones
7 Holly Cooper-Olds; **12** Steve Kapusta/© Encyclopædia Britannica, Inc.; **15, 17** James Alexander; **29** Holly Cooper-Olds; **34** James Alexander

Fotografías
1 (de izquierda a derecha) © Pixtal; Brand X Pictures/Alamy; © Corbis; **6** PhotoDisc/Getty Images; **20** Alvaro Ortiz/HRW Photo; **24** Victoria Smith/HRW; **35** BananaStock/Alamy

Contenido

Carta al alumno VI

Sección A **Patrones**

- Tiras de números 1
- Formaciones en V y W 5
- Resumen 8
- Verifica tu trabajo 8

Sección B **Progresiones**

- Aumento/disminución constante 10
- Sumar y restar tiras 12
- Pirámides 15
- Prismas 17
- Resumen 18
- Verifica tu trabajo 18

Sección C **Números cuadrados**

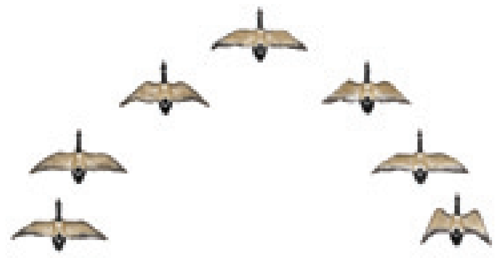
- Examinar cuadrados 20
- Trazar áreas 22
- Tiras cambiadas 23
- Resumen 26
- Verifica tu trabajo 27

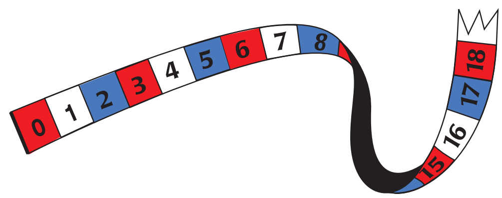
Sección D **Triángulos y números triangulares**

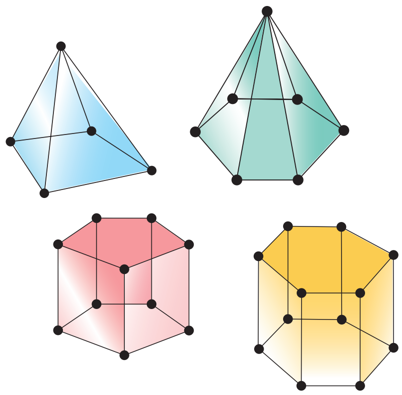
- Teselados y baldosas 28
- Patrones triangulares 30
- Números triangulares 32
- Números rectangulares 33
- Una pared de latas 34
- La competencia de *ping-pong* 35
- Resumen 36
- Verifica tu trabajo 36

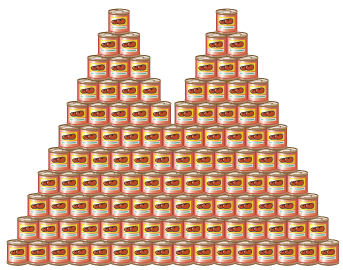
Práctica adicional 39

Respuestas para verificar tu trabajo 44







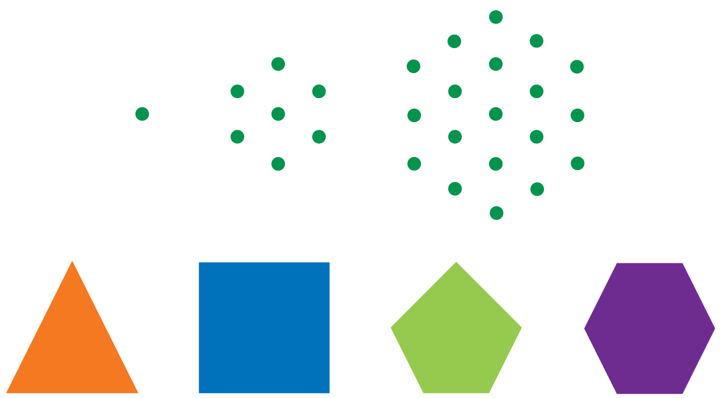


Querido alumno:

Bienvenido a la unidad *Patrones y figuras*. En esta unidad, identificarás patrones en los números y en las figuras, y describirás esos patrones usando palabras, diagramas y fórmulas.

Ya has visto muchos patrones en matemáticas. Para los patrones que guardan ciertas características, aprenderás reglas y fórmulas que te ayudarán a describirlos. Algunos patrones se describen usando figuras geométricas y otros se describen con una relación matemática.

Estos son dos patrones. Uno es un patrón de puntos y el otro es un patrón de figuras geométricas.



¿Puedes describir el patrón de puntos? ¿Dónde te parece que termina el patrón de las figuras?

A medida que investigues la unidad *Patrones y figuras*, recuerda que los patrones existen en muchos lugares, ¡prácticamente dondequiera que mires! Las destrezas que desarrolles para buscar y para describir patrones te ayudarán siempre, tanto dentro del salón de matemáticas como fuera de él.

Atentamente.

El equipo de desarrollo de Las matemáticas en contexto

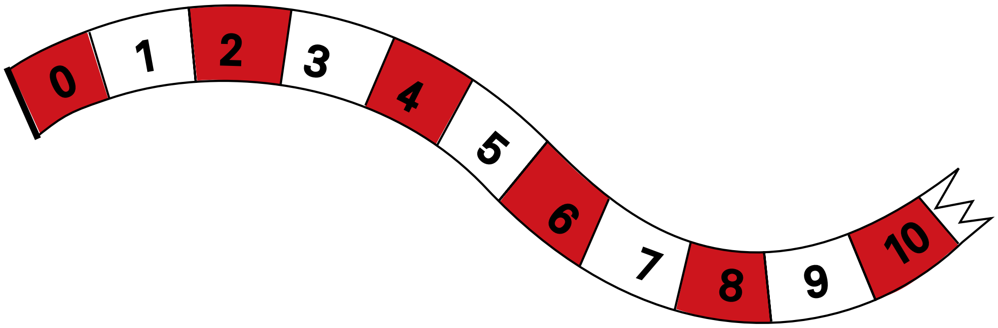
A Patrones

Tiras de números

Los patrones están en el corazón de las matemáticas y los puedes encontrar observando figuras, números y muchas otras cosas. En esta unidad, descubrirás y explorarás patrones y los describirás con números y fórmulas.

Abajo, se muestran números a partir del 0 en una tira de papel. La tira tiene los colores rojo y blanco en forma alternada.

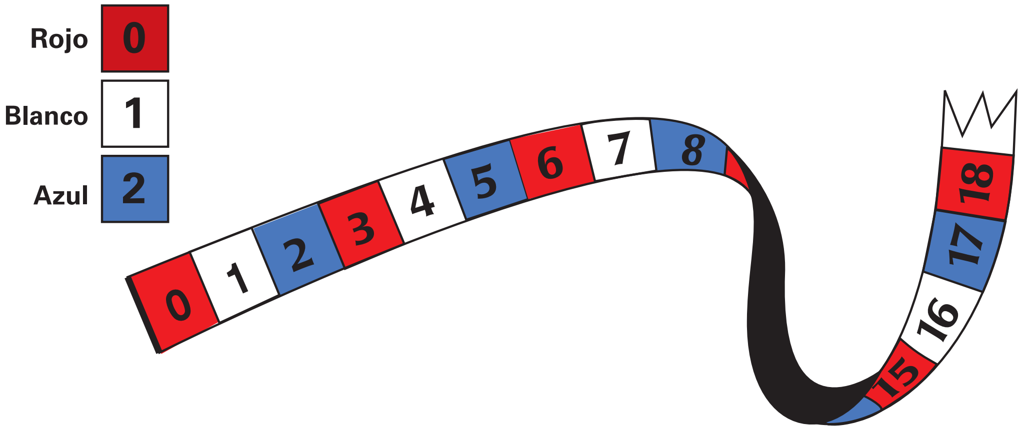
1. Observa que el extremo derecho de la tira es distinto del extremo izquierdo. ¿Qué te parece que indica eso?



2. a. ¿Qué tienen en común los números blancos?

   b. Piensa un número grande que no aparezca en la tira. ¿Cómo sabes el color de tu número?

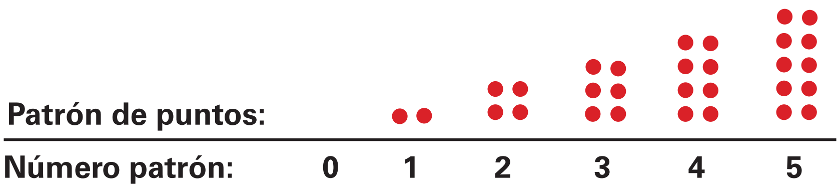
Esta es una tira distinta con el patrón repetitivo rojo, blanco, azul, rojo, blanco, azul.



Cualquier lista de números que continúe indefinidamente se llama **progresión**.

3. ¿Cómo puedes calcular el color de 253,679 en la progresión rojo, blanco, azul?

Una manera de “ver” un patrón es usando puntos que representen los números. Por ejemplo, los números rojos de la tira roja y blanca de la página 1 se pueden representar así:



Debajo de cada patrón de puntos hay un número. El número patrón te dice dónde te encuentras dentro de la progresión. (Observa que los números patrones empiezan con el 0 y para el número 0 no hay puntos.)

El número 1 tiene dos puntos, el número 2 tiene cuatro puntos y así sucesivamente, suponiendo que el patrón de puntos continúa formándose de la misma manera.

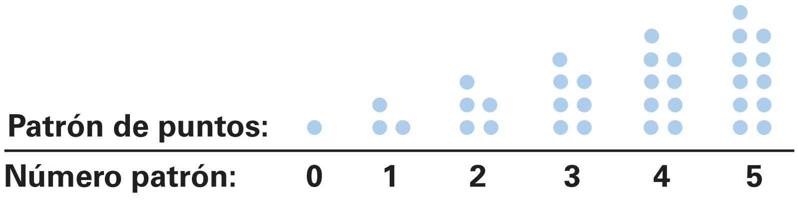
4. a. Observa el patrón de puntos de los números rojos. ¿Cuántos puntos habrá cuando el número patrón sea el 37?

b. A alguien se le ocurrió la fórmula $R = 2n$ para los números rojos. ¿Qué te parece que significan la R y la n?

c. ¿Funciona la fórmula? Explica tu respuesta.

Puedes representar los números blancos de la tira roja y blanca de la página 1 con su propio patrón: 1, 3, 5, …

Estos números se pueden representar con otro patrón de puntos como el siguiente.



5. **a.** Ahora observa el patrón de los números blancos. ¿Cuántos puntos habrá en el número 50 del patrón?

b. Escribe una fórmula para los números blancos.

Regla: ***"Si sumas dos números impares, el resultado es un número par"***.

6. **a.** Usa puntos para explicar la regla anterior.

b. Inventa otras reglas como la anterior y usa puntos para explicarlas.

La progresión de números pares {0, 2, 4, 6, 8…} se puede describir mediante la fórmula:

Número INICIAL = 0
PRÓXIMO número par = ÚLTIMO número par + 2

Posiblemente ya hayas visto fórmulas "PRÓXIMO-ÚLTIMO" en unidades anteriores de *Las matemáticas en contexto*. Más formalmente se las llama **fórmulas recurrentes**.

7. **a.** Escribe una fórmula PRÓXIMO-ÚLTIMO para la progresión de números impares:

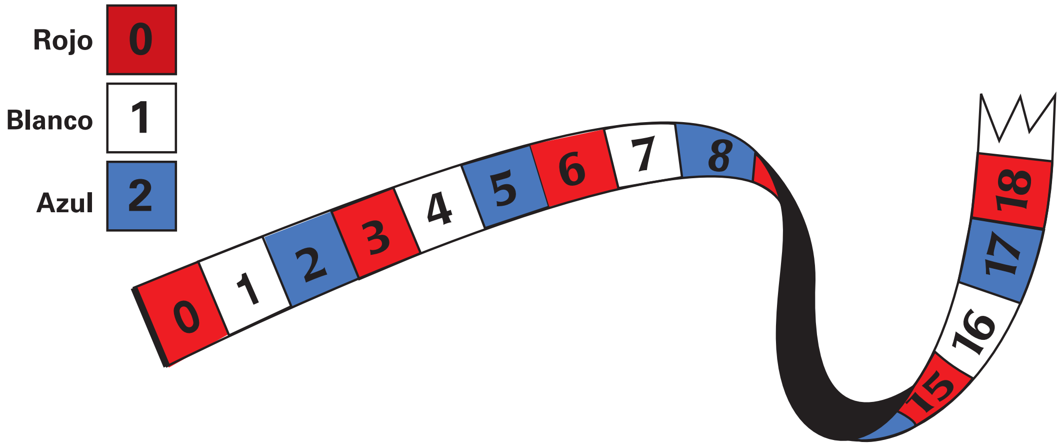
{1, 3, 5, 7}.

b. Compara la fórmula de los números pares con la de los números impares, suponiendo que el patrón de puntos continúa formándose de la misma manera. ¿En qué se parecen y en qué son diferentes?

Una fórmula como la que hallaste anteriormente para números pares e impares se llama **fórmula directa**.

8. ¿Por qué te parece que a estas se las llama fórmulas directas?

Mira de nuevo la progresión rojo, blanco, azul de la página 2.



9. **a.** Represente los números rojos, blancos y azules con patrones de puntos semejantes a los que aparecen en las páginas 2 y 3.

   b. Escribe una fórmula PRÓXIMO-ÚLTIMO y una fórmula directa para la progresión de los números rojos. Establece en ambos casos dónde empieza tu progresión.

   c. Haz lo mismo para la progresión de los números blancos y los números azules.

   d. Si sumas un número blanco a un número azul, ¿obtienes siempre un número rojo? Usa puntos para explicar tu respuesta.

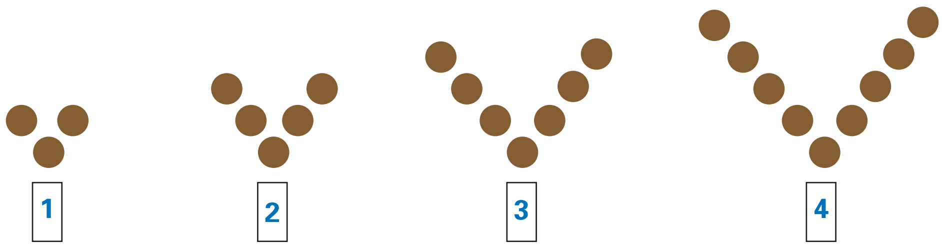
   e. Copia la tabla en tu cuaderno y complétala para todas las combinaciones de colores.

+	R	B	A
R			
B			
A			

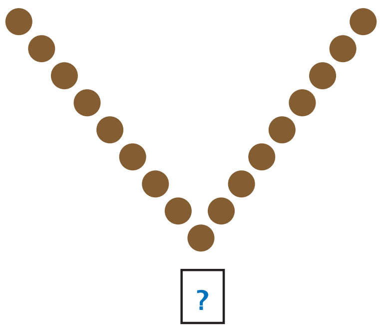
Formaciones en V y W

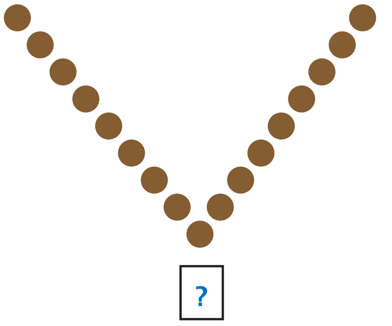
¿Alguna vez has visto volar a las aves en una formación en V?

Puedes hacer una progresión de patrones en V usando puntos. A continuación están los cuatro primeros.



Este es un número en V que tiene 17 puntos.





10. a. ¿Cuál es el número patrón de este dibujo?

b. ¿Cuántos puntos hay en el número patrón 85?

c. ¿Es posible hacer un patrón en V con 35,778 puntos? Explica, sí o no, ¿por qué?

d. Escribe una fórmula directa que describa el número de puntos de cualquier patrón en V. $V = ?$

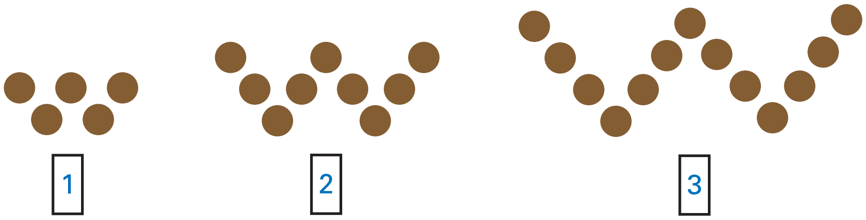
Generalmente, la letra *n* se usa en las fórmulas directas para indicar los números patrones.

En algunos patrones, la *n* empieza con 0 y otras veces con 1. También puede empezar con otros números.

11. Si todavía no lo has hecho, escribe tu fórmula para los patrones en V usando la letra *n*.

A veces, los escuadrones de aviones vuelan en una formación en W.

Observa la siguiente progresión de patrones en W.



12. a. Copia esta tabla para los patrones en W y complétala.

Número de puntos	5					
Número patrón	1	2	3	4	5	6

b. Escribe una fórmula PRÓXIMO-ÚLTIMO para el número de puntos de la progresión del patrón en W.

c. ¿Cuántos puntos hay en el número patrón 16?

d. Escribe una fórmula directa que describa el número de puntos de cualquier patrón en W. Luego usa tu fórmula para averiguar el número de puntos que tiene el número patrón 25.

Jessie comparó los patrones en W con los patrones en V, y dijo: "La W es el doble de la V menos uno".

13. a. ¿Qué quiso decir Jessie? Usa patrones de puntos para explicar su enunciado.

b. Explica el enunciado de Jessie con la fórmula directa de $W = \ldots$ y de $V = \ldots$

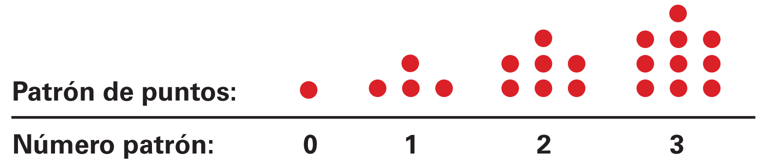
La fábrica de pasteles Williams quiere poner una gran "**W**" con bombillas anaranjadas en un cartel publicitario. Compra 200 bombillas.

14. Si ponen las bombillas en un patrón en W, ¿cuántas bombillas cabrán en la W más grande que puedan formar?

A Patrones

Resumen

Las tiras de números y los patrones de puntos pueden ilustrar progresiones de números. Para describir las progresiones y para calcular números posteriores de una progresión, puedes usar fórmulas. Este es un ejemplo donde el patrón de puntos continúa formándose de la misma manera.



Una fórmula PRÓXIMO-ÚLTIMO o fórmula *recurrente* tiene dos partes: un valor inicial y una regla para hallar cada "próximo" valor. Una fórmula recurrente para hallar el número de puntos del patrón de arriba es:

Número INICIAL = 1
PRÓXIMO número = ÚLTIMO número + 3

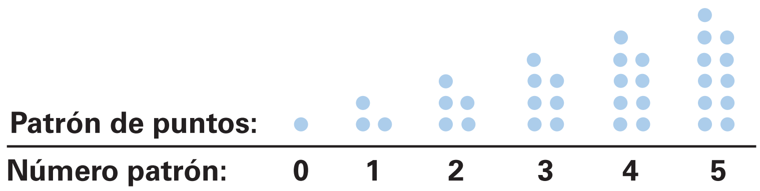
En una *fórmula directa*, la n indica el número patrón. Si P representa el número de puntos, una fórmula directa del patrón de arriba es:

$P = 3n + 1$, donde n empieza con 0.

Verifica tu trabajo

1. Jaime escribió la fórmula directa $P = 1 + n + n + n$ para el patrón de puntos del Resumen. Indica si la fórmula de Jaime es correcta o no.

Mira de nuevo el patrón de puntos de la página 3.



Para este patrón, a David se le ocurrió la fórmula $W = 2n + 1$.
Cintia halló la fórmula directa $W = 2(n + 1) - 1$.

2. **a.** ¿Son correctas las dos fórmulas? Sí o no, ¿por qué?

b. ¿En qué cambiaría la fórmula de David si el primer número patrón fuera 1 en vez de 0?

3. **a.** Construye una progresión de patrones de puntos para la fórmula directa $P = 5n + 2$, donde n empieza en 0.

b. Escribe una fórmula PRÓXIMO-ÚLTIMO para la progresión.

4. **a.** Crea tu propia progresión de patrones de puntos.

b. Escribe una fórmula directa y una fórmula PRÓXIMO-ÚLTIMO para tu progresión.

5. **Reflexiona** ¿Qué ventaja y qué desventaja tiene una fórmula recurrente comparada con una fórmula directa?

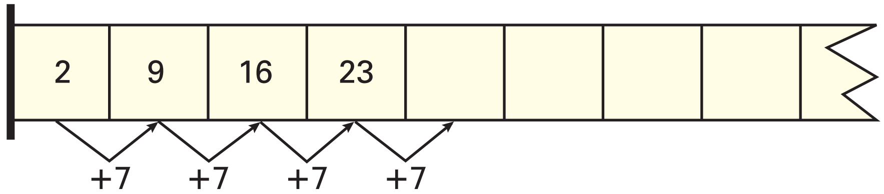
Para reflexionar más

¿Se pueden representar todas las progresiones de números con un patrón de puntos? Sí o no, ¿por qué?

B Progresiones

Aumento/disminución constante

Una progresión que tiene un aumento o una disminución constante se llama **progresión aritmética**. Este es un ejemplo de progresión aritmética. El extremo irregular derecho indica que la tira continúa indefinidamente.



1. **a.** Escribe los cuatro números que siguen en la tira.

b. ¿Estará en la tira el número 100? ¿Cómo lo sabes?

c. ¿Y el número 200?

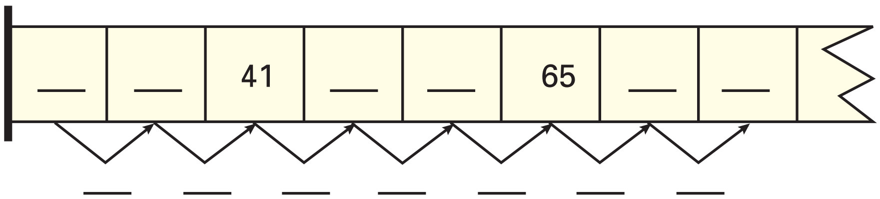
d. Escribe un número grande que nunca aparecerá en la tira. ¿Cómo tienes la certeza de que nunca aparecerá?

A Jorge se le ocurrió la expresión $2 + 7n$ para la tira de números de arriba.

2. **a.** ¿Dónde empieza n en la expresión de Jorge?

b. Usa la expresión para hallar los tres números que siguen en la tira.

Esta tira de números muestra una progresión aritmética diferente.



3. **a.** Halla los números que faltan en la tira.

b. Escribe una fórmula recurrente para esta tira de números.

c. Escribe una expresión para esta tira de números. Supón que n empieza en cero.

En vez de sumar un número en cada paso, algunas progresiones aritméticas restan un número en cada paso.

85	83	81	79	77	75	___	___
	___	___	___	___	___	___	

4. a. ¿Cuál es la disminución en esta progresión?

b. Escribe una expresión para esta tira de números. Supón que n empieza en 0.

c. Explica la diferencia entre una fórmula (directa) y una expresión.

d. ¿Cuántos pasos hacen falta para llegar al primer número negativo de esta tira?

5. Halla una expresión para la progresión aritmética de la tira de números que aparece a continuación. Supón que en tu expresión n empieza en 0. Si lo deseas, puedes primero copiar la tira en tu cuaderno y completar los números que faltan.

$3\frac{3}{4}$	$3\frac{1}{2}$		3		$2\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{4}$	

6. Escribe los cinco primeros números de cada una de las progresiones que describen las siguientes expresiones. En cada progresión, n empieza en cero.

a. $4 - 3n$

b. $2\frac{1}{2} + \frac{1}{2}n$

c. $5n - 10$

d. $12n$

Muchas progresiones no son aritméticas. En algunas intervienen la multiplicación y la división.

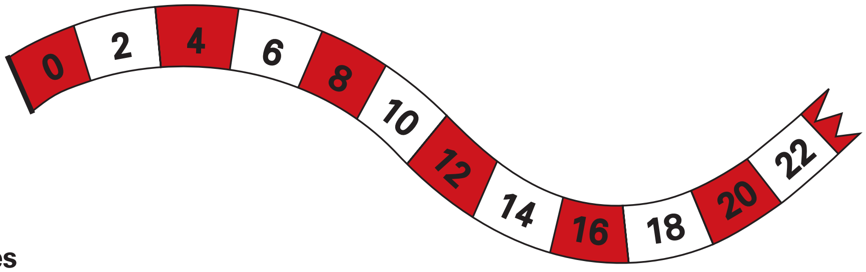
7. a. Diseña una progresión que tenga un patrón o una regularidad, pero que no sea una progresión aritmética.

b. Describe la regularidad de tu progresión.

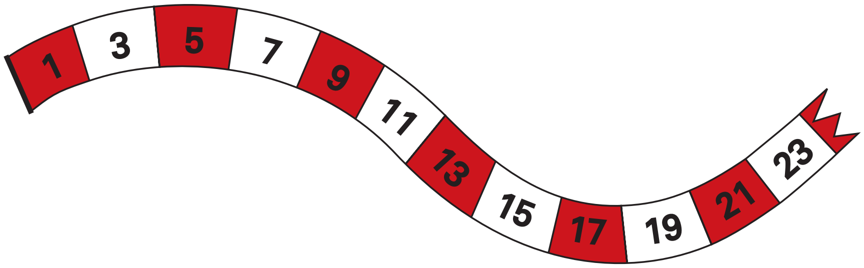
Sumar y restar tiras

La tira de números preferida de Larry es la progresión de números impares. Él decide sumar su tira de números impares a la tira de números pares.

Pares

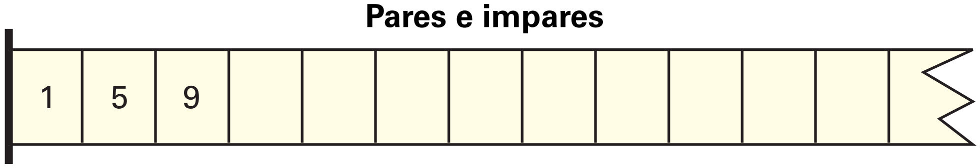


Impares



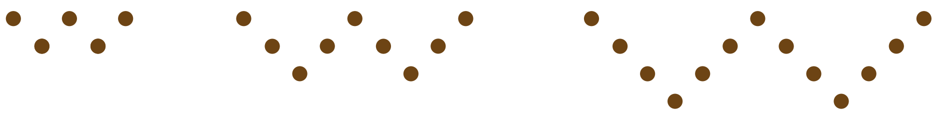
Estos son los tres primeros números de la progresión resultante:

Pares e impares



8. Copia la tira de números anterior y halla los nueve números que siguen en la nueva progresión.

Hay una relación entre la nueva tira de números y estos patrones en W.

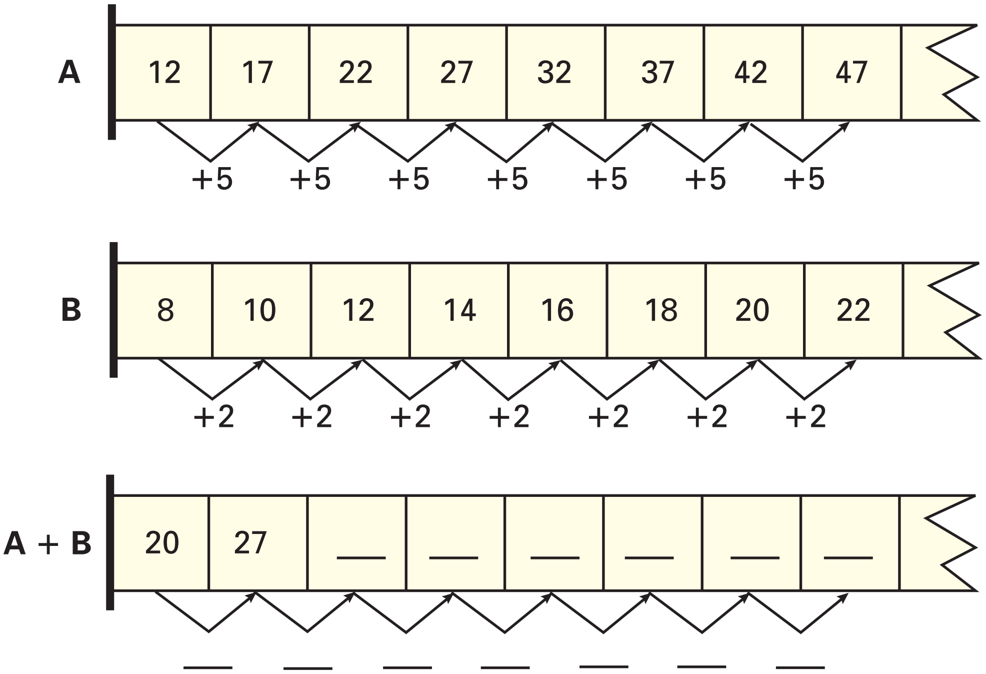


9. ¿Cuál es esa relación?

10. **a.** Escribe una expresión para cada una de las tres tiras de números del problema 8. Supón que *n* empieza en cero.

b. ¿Cómo puedes usar tu expresión para comprobar que la tercera progresión es la suma de las otras dos?

Compara estas tres tiras de números:



Las tiras de números A y B son progresiones aritméticas. Las entradas de la tercera tira, A + B, se forman sumando los números que aparecen en las mismas posiciones de las tiras A y B.

11. **a.** Sin completar los números de la tira A + B, puedes mostrar que debe ser una progresión aritmética. Explica cómo.

b. Escribe expresiones para las tiras de números A, B y A + B.

c. Haz una tira de números de A − B. ¿Forman los números una progresión aritmética? Explica, sí o no, ¿por qué?

d. ¿Qué expresión corresponde a la tira de números de A − B?

La C y la D son otras dos tiras de números. La expresión de la tira C es $6 + 3n$ y la expresión de la tira D es $4 + 5n$. En ambos casos, *n* empieza en cero.

Jim quiere hacer una expresión para la tira C + D. Primero hace las tiras C y D. Luego suma los números de las dos tiras para averiguar los números de la tira C + D.

Después hace la expresión de la tira C + D.

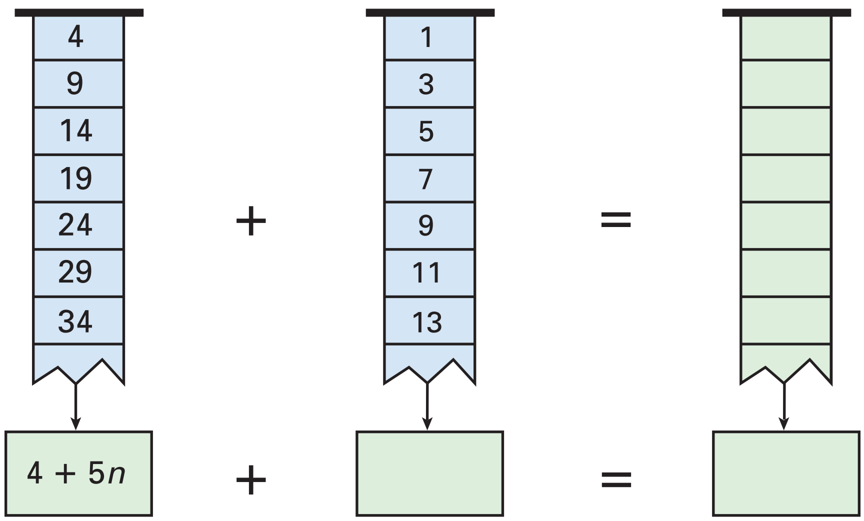
12. Muestra los tres pasos de la solución de Jim.

Gail opina que ella tiene una manera más corta de presentar la expresión.

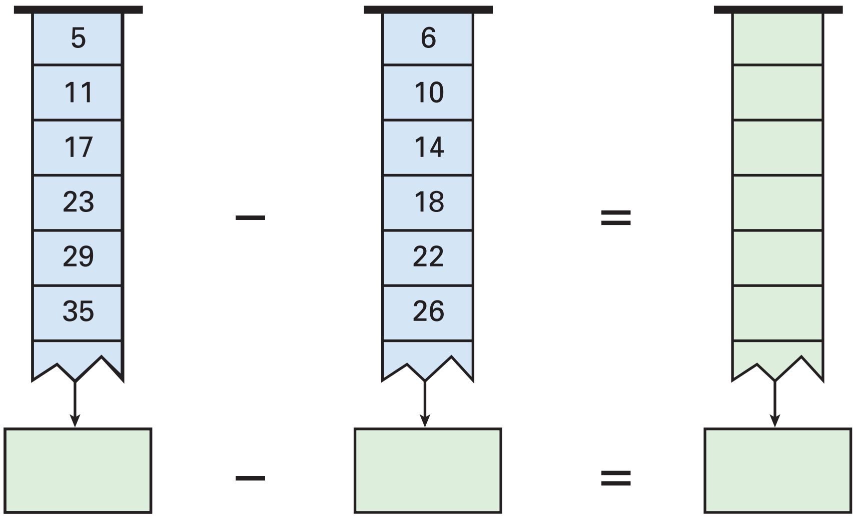
13. **a.** ¿Qué podría tener Gail en mente?

b. ¿Cuál es la expresión de la tira de números C − D?

14. Copia las tres tiras en tu cuaderno. Completa los números que faltan y escribe la expresión para cada progresión de números.



15. Copia las tres tiras que aparecen abajo. Completa los números que faltan y escribe una expresión para cada progresión de números.

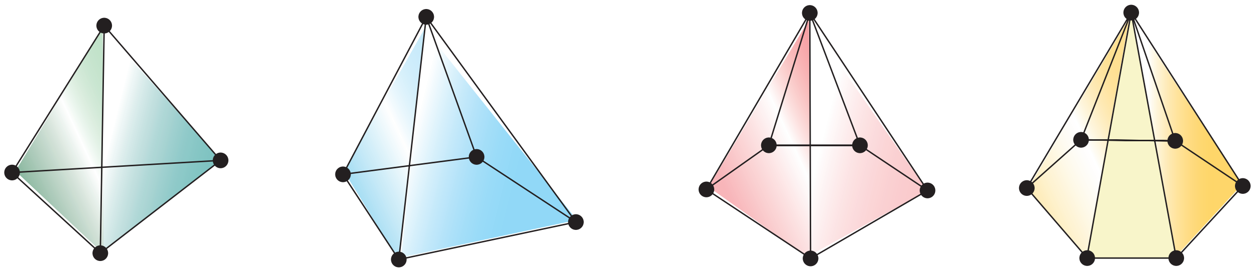


16. **a.** Escribe una expresión para la suma de $17 + 5n$ y $13 - 7n$.

b. Escribe una expresión para la diferencia de $17 + 5n$ y $13 - 7n$. Usa tiras de números para demostrar por qué es lógica tu respuesta.

Pirámides

Guille es un artista que hace figuras geométricas de vidrio. Esta es una progresión de sus pirámides.



3 4 5 6

17. Explica los números que se leen debajo de las pirámides.

Esta tira de números representa el número de vértices (V) de la progresión de pirámides. Un **vértice** es la intersección de las aristas de la pirámide.

V	4	5	6	7	___	___
	3	4	5	6	7	8

18. Halla una fórmula para la tira de números V, que relacione V (el número de vértices) con n (el número que se lee debajo de cada pirámide). ¿Dónde empieza n?

19. **a.** Haz tiras de números para los números de aristas (A) y los números de caras (C) de la progresión de pirámides.

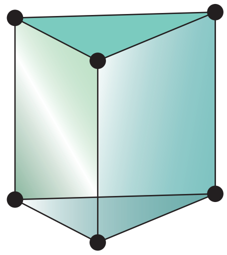
b. Escribe fórmulas para las tiras de números A y C.

c. Combina las tiras de números V, A y C en una nueva tira de números cuya fórmula muestre $V - A + C$.

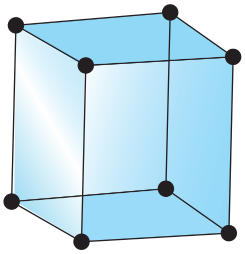
$V - A + C$	?	?	?	?	?	?
	3	4	5	6	7	8

d. ¿Qué tiene de especial la tira de números de la parte **c**? Explica esta propiedad especial usando las expresiones de V, A y C.

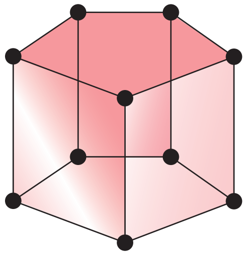
Prismas



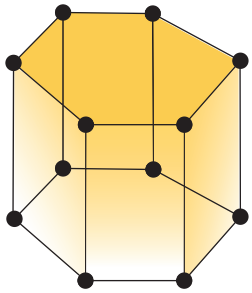
3



4



5



6

20. **a.** Haz las tiras de números *V*, *A* y *C* de la progresión de prismas de arriba.

b. Escribe expresiones para las tiras de números *V*, *A* y *C* (expresadas desde el punto de vista de *n*).

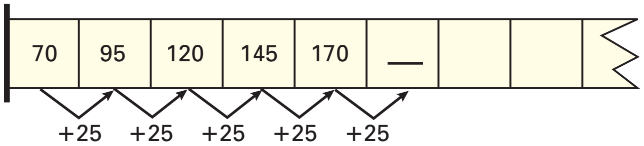
c. Usa las tiras de números o las expresiones para comprobar que para los prismas $V - A + C = 2$.

La fórmula $V - A + C = 2$ se llama fórmula de Euler. Ya has visto esta fórmula en la unidad *Paquetes y polígonos*. La fórmula funciona para muchos poliedros. Por ejemplo, un **icosaedro** tiene 20 caras. Para cualquier icosaedro, $V = 12$, $A = 30$ y $C = 20$. Con estos valores da $12 - 30 + 20 = 2$.

B Progresiones

Resumen

Una progresión se llama aritmética si tiene un aumento o una disminución constante en cada paso.



A n pasos del número inicial 70, obtienes el número $70 + 25n$. Esta expresión representa la progresión. Observa que n empieza en cero.

Puedes combinar progresiones de números sumándolas o restándolas. La suma o la resta de las progresiones de números se puede hacer con tiras de números o con expresiones.

Para cualquier poliedro, la fórmula de Euler $V - A + C = 2$ da una relación entre el número de vértices, el número de aristas y el número de caras.

Muchas otras progresiones no son aritméticas, por ejemplo la progresión que se forma al multiplicar cada próximo término por $\frac{1}{2}$:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}.$$

Una fórmula recurrente para esta progresión es PRÓXIMO = ÚLTIMO $\times \frac{1}{2}$

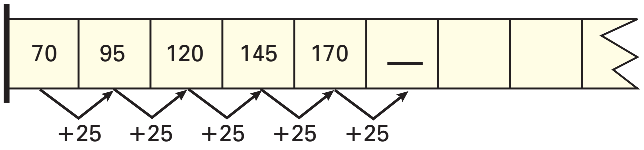
Verifica tu trabajo

Belinda y Carmen están ahorrando dinero de trabajos de tiempo parcial que hacen después de la escuela.

1. **a.** Actualmente, Belinda tiene \$75. Ella decide sumar a sus ahorros \$5 por semana. Haz una tira de números que empiece con 75 y que muestre el total de los ahorros de Belinda durante todas las semanas. ¿Cuáles son sus ahorros al cabo de n semanas?

b. Actualmente, Carmen tiene \$125. Todas las semanas, ella suma el doble de lo que suma Belinda. ¿Cuáles son sus ahorros al cabo de n semanas?

Vuelve a mirar la progresión.



2. a. ¿Cuál es el 15.º número de esta progresión?

b. ¿Cuándo excede a 1,000 el valor por primera vez?

3. a. Haz tu propia progresión aritmética de fracciones.

b. Escribe una expresión que represente tu progresión.

4. **Reflexiona** Si sumas dos progresiones aritméticas, ¿obtienes siempre una progresión aritmética? Explica, sí o no, ¿por qué?

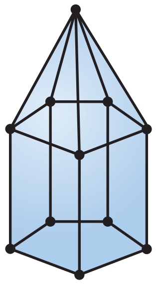
Una torre de cinco lados se hace colocando una pirámide de cinco lados encima de un prisma de cinco lados, como se ve a continuación.

Para esta torre:

$V = 11$

$A = 20$

$C = 11$



5. a. ¿Funciona la fórmula de Euler para una torre de cinco lados? Explica tu respuesta.

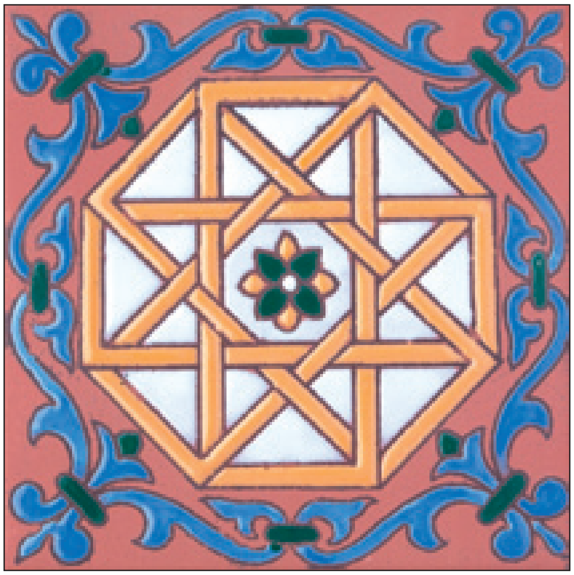
b. Comprueba si la fórmula de Euler funciona para una torre de *n* lados?

Para reflexionar más

¿Puedes hallar un sólido para el que no funcione la fórmula de Euler? Si puedes, da un ejemplo.

C Números cuadrados

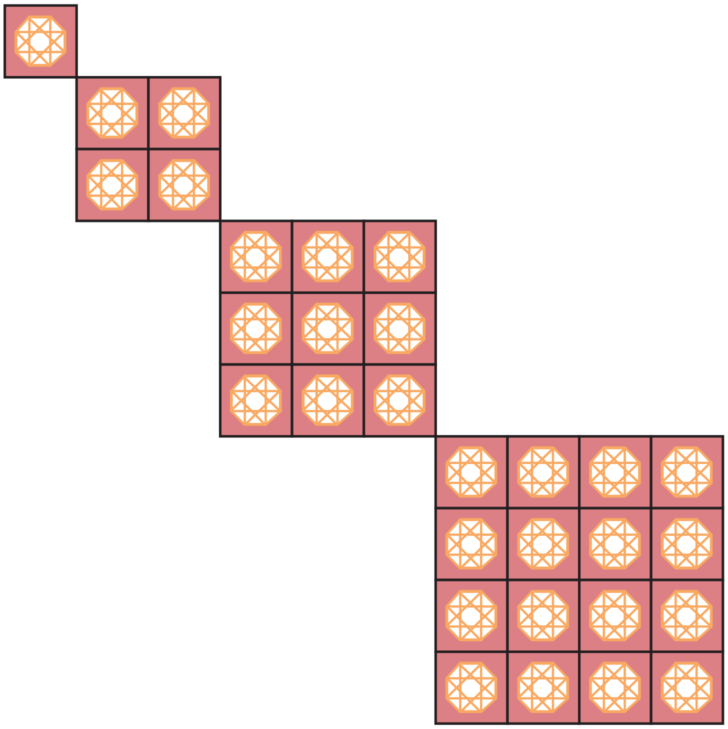
Examinar cuadrados



Los Jackson quieren embaldosar un patio trasero que es cuadrado. Compraron 200 baldosas; cada baldosa mide 30 cm por 30 cm.

1. ¿Cuáles son las dimensiones del patio cuadrado más grande que pueden hacer?

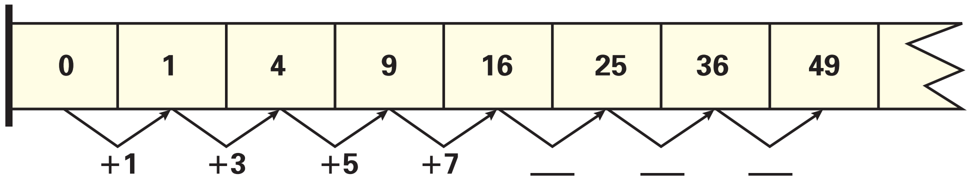
Después de mirar varios esquemas, decidieron acomodar las baldosas de una manera más imaginativa. El siguiente esquema muestra cuatro cuadrados embaldosados.



etc.

2. ¿Cuál es el cuadrado más grande que pueden hacer los Jackson usando este esquema con las 200 baldosas que tienen?

Para resolver el problema 2, puedes usar la progresión de **números cuadrados**.

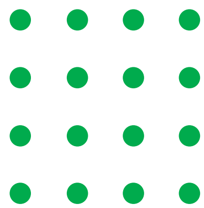


3. a. ¿Por qué se considera que el 0 es un número cuadrado?

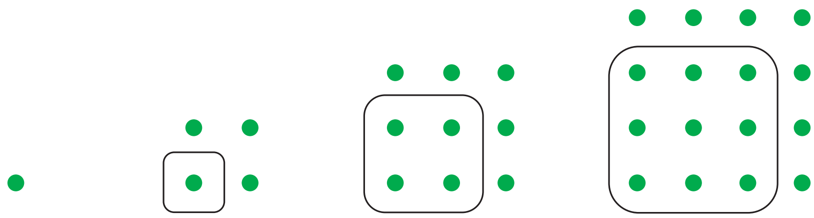
b. Describe el aumento de la progresión de los cuadrados.

c. ¿Es esta una progresión aritmética? Sí o no, ¿por qué?

El término "cuadrado perfecto" se aclara si observas patrones de puntos. Puedes representar el 16 en forma de patrón de puntos con 4 filas de 4 puntos.

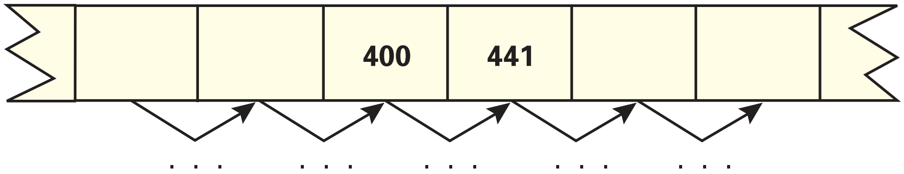


4. Usa los patrones de puntos anteriores para describir el aumento de la progresión de los números cuadrados perfectos.



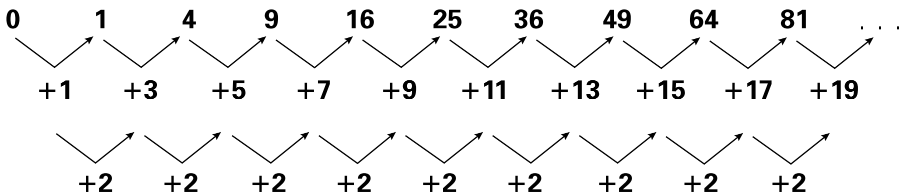
1 2 3 4

El cuadrado de 20 y el de 21 son 400 y 441, respectivamente. Esto se puede escribir como $20^2 = 400$ y $21^2 = 441$.



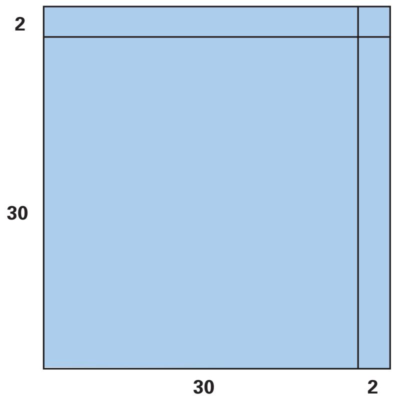
5. **a.** Sin multiplicar, halla el cuadrado de 22.
   b. Haz lo mismo para el cuadrado de 18.

La progresión de los números cuadrados forma varios patrones.



6. **a.** Describe con tus propias palabras los patrones de la progresión de los números cuadrados.
   b. Continúa la progresión de los cuadrados con seis números más.

Trazar áreas



Otra manera de calcular el cuadrado de un número es con un diagrama como este.

7. Explica cómo se halla 32^2 con este diagrama.

8. **a.** Haz un dibujo, como el que se ve aquí, que te ayude a calcular 43^2.
   b. Haz lo mismo para 57^2.

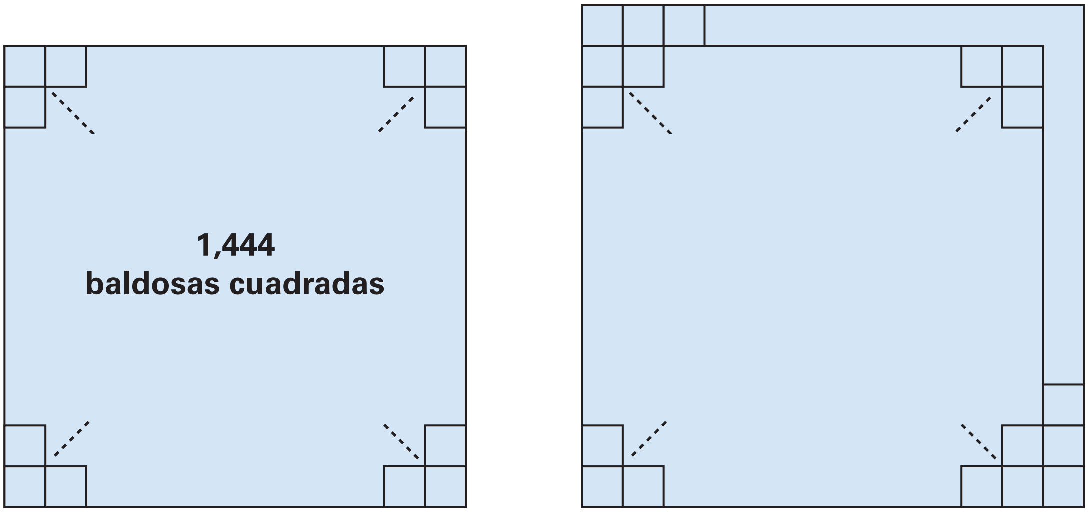
Donald escribió estos cálculos:

$$\begin{array}{rr} & 200^2 = 40{,}000 \\ + & 1^2 = \phantom{40{,}00}1 \\ \hline & 201^2 = 40{,}001 \end{array}$$

9. ¿Estás de acuerdo con los cálculos de arriba? Explica, sí o no, ¿por qué?

10. Usa el diagrama de áreas para demostrar que $(2\frac{1}{2})^2 = 6\frac{1}{4}$.

11. Jackie tiene un patio cuadrado hecho de 1,444 baldosas cuadradas. Quiere extender dos de los lados del patio, como se ve a continuación. ¿Cuántas baldosas más necesita?



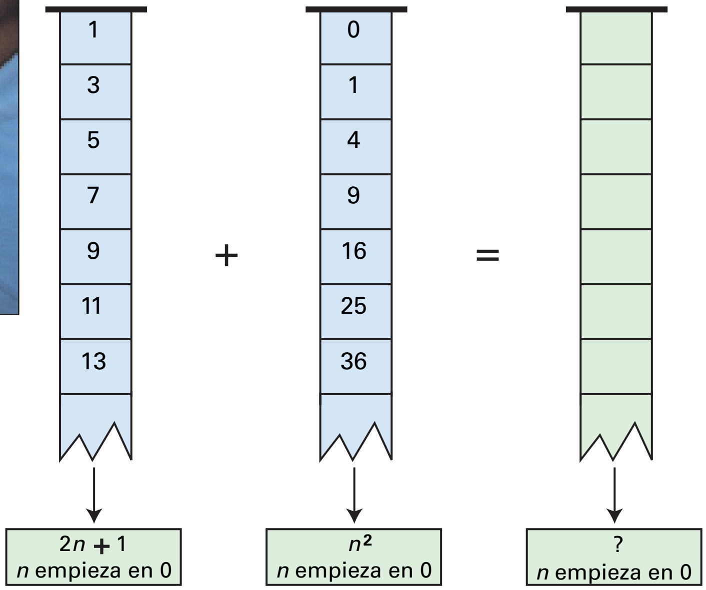
Tiras cambiadas

El cuadrado de un número n se puede expresar como $n \cdot n$ o como n^2. El número que sigue a n se puede expresar como $n + 1$, por lo tanto, el cuadrado de $n + 1$ es $(n + 1) \cdot (n + 1)$ o $(n + 1)^2$.

12. ¿Cómo puedes expresar el número que sigue a $n + 1$? ¿Cómo puedes expresar el cuadrado de ese número?

C Números cuadrados

Larry (el muchacho que estaba investigando los números impares) decide sumar su progresión de números impares a la progresión de n^2 (donde n empieza en 0).



13. Copia en tu cuaderno las tres tiras de arriba.

a. Halla los números que faltan y la expresión para la tercera tira.

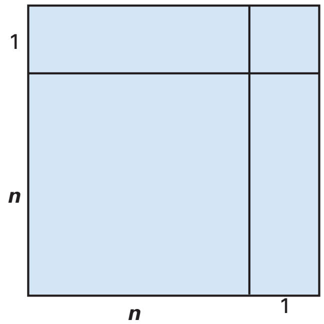
b. ¿Qué observas acerca de la progresión de los números de la tercera tira?

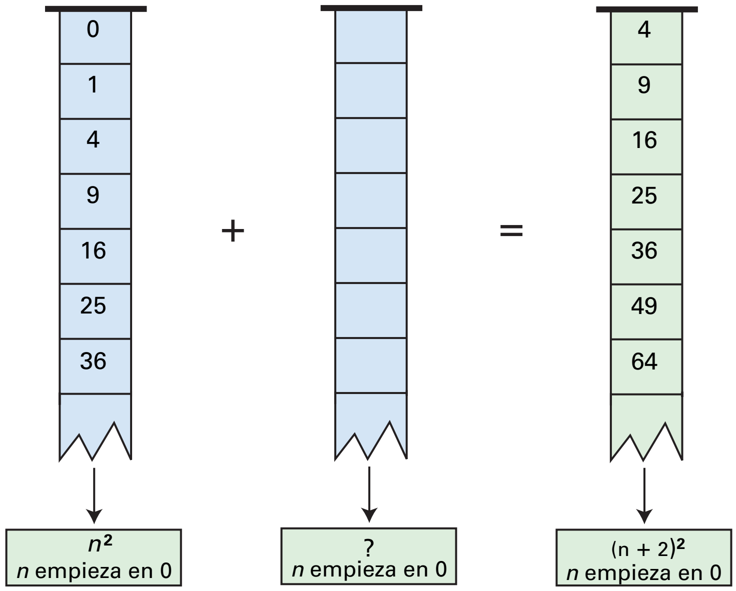
14. Para la tercera tira, Larry escribió la expresión $(n + 1)^2$. ¿Es correcta? Explica, sí o no, ¿por qué?

15. ¿Cuál es la respuesta si sumas las expresiones de la primera y de la segunda tira de números?

Larry dice: "Tengo dos expresiones para la misma tira de números: $(n + 1)^2$ y $n^2 + 2n + 1$. Las dos expresiones deben ser equivalentes".

16. Copia y usa el diagrama para explicar el enunciado de Larry, $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$, de una manera diferente.





La progresión de $(n + 1)^2$ empieza un paso después que la progresión de n^2. Larry se pregunta cómo se obtiene una progresión que empiece dos pasos después.

17. **a.** Copia la tira de números del medio y complétala. Supón que, en cada tira, n empieza en 0.

b. ¿Qué expresión describe la segunda tira? (Asegúrate de que, en tu expresión, n empiece en 0).

c. Usa las expresiones de las dos primeras tiras para escribir una expresión equivalente para $(n + 2)^2$.

d. Con un diagrama de áreas, explica tu respuesta a la parte **c**.

Puedes seguir empezando la progresión más adelante, si cada vez sumas uno más a n, como se muestra a continuación.

Progresión	**Fórmula, donde *n* empieza en 0 en cada caso**
0, 1, 4, 9, 16,	$n^2 = n^2$
1, 4, 9, 16,	$(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$
4, 9, 16,	$(n + 2)^2 = n^2 + 4n + 4$
9, 16,	$(n + 3)^2 = n^2 + 6n + 9$

18. Observando los patrones, predice cuál sería la expresión equivalente para $(n + 4)^2$. ¿Dónde empieza la progresión?

19. Halla una expresión equivalente para $(2n + 1)^2$. Explica tu método y cómo sabes que es correcto.

C Números cuadrados

Resumen

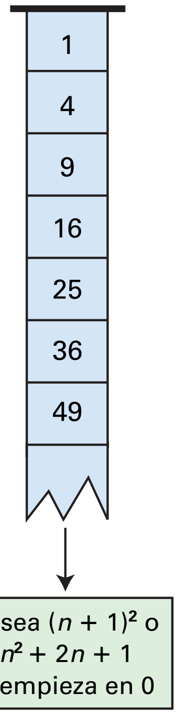
El cuadrado de un número es ese número multiplicado por sí mismo. Por ejemplo:

- El cuadrado de 4 es $4 \times 4 = 4^2 = 16$.
- El cuadrado de $3\frac{1}{2}$ es $3\frac{1}{2} \times 3\frac{1}{2} = (3\frac{1}{2})^2 = 12\frac{1}{4}$.
- El cuadrado de n es $n \cdot n = n^2$.

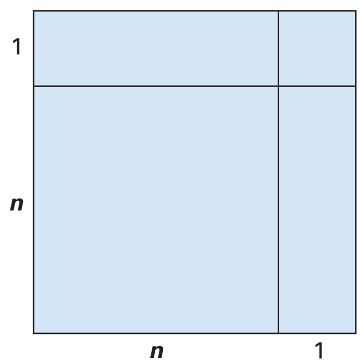
Los números como 4, 9, $12\frac{1}{4}$, 36, 10,000 se llaman números cuadrados y los números como 4, 9, 36, 10,000 son cuadrados perfectos.

La misma tira de números puede representar expresiones equivalentes.

Tanto $(n + 1)^2$ como $n^2 + 2n + 1$ están representadas por 1, 4, 9, 16, 25, ..., donde n empieza en cero.



También se puede usar un diagrama de áreas para demostrar que $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$.



Verifica tu trabajo

1. ¿Cuál es el patio cuadrado más grande que puedes hacer con 68 baldosas cuadradas? Sólo puedes usar baldosas enteras.

2. Escribe dos números cuadrados entre 30 y 40.

Si empiezas la progresión de n^2 tres pasos más adelante, obtienes la progresión de $(n + 3)^2$.

3. Con un diagrama de áreas, demuestra que $(n + 3)^2$ es igual a la expresión $n^2 + 6n + 9$.

4. Escribe una expresión que sea equivalente a $(n + 10)^2$.

Esta es una progresión de cuadrados que se puede extender hasta donde desees.

0	4	16	36	64	100	144	....

5. Usa las regularidades del patrón para hallar los tres números siguientes de la progresión. (Pista: vuelve a mirar el problema 6.)

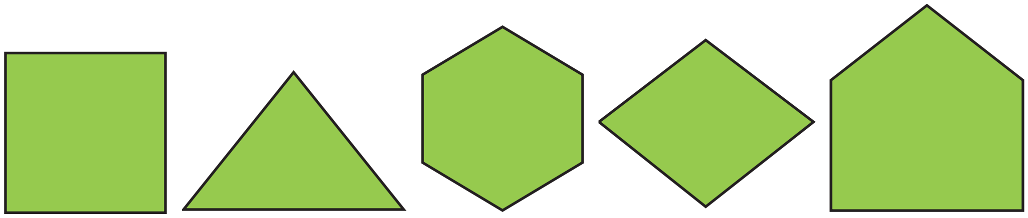
Para reflexionar más

Sully dice que el cuadrado de un número es igual a ese número multiplicado por dos. ¿Tiene razón en algún caso? Explica, sí o no, ¿por qué?

Triángulos y números triangulares

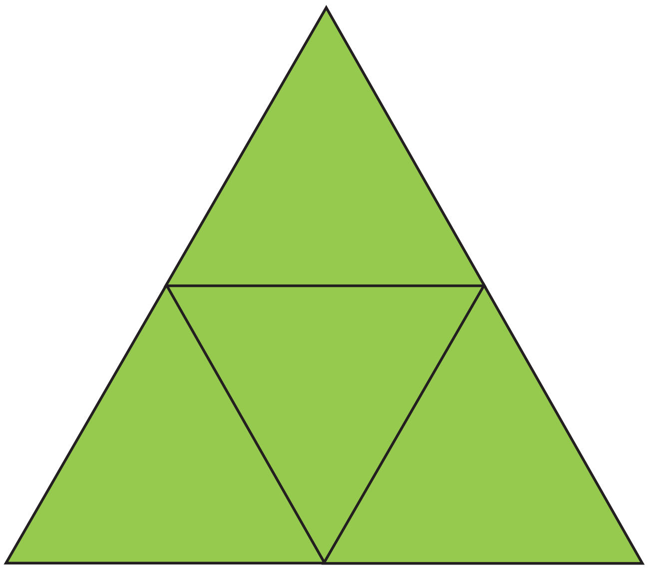
Teselados y baldosas

Aquí se ve una colección de baldosas. Ya debes de haber visto estas figuras en la unidad *Paquetes y polígonos*.

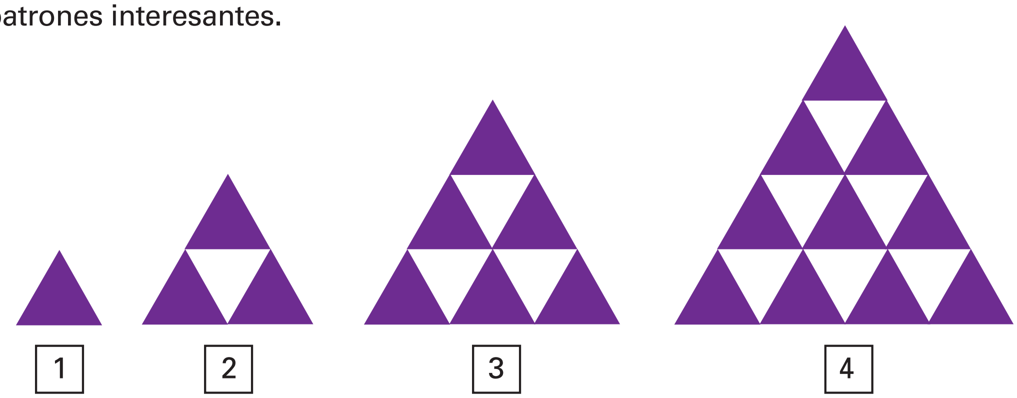


1. Nombra la figura de cada una de estas baldosas.

En la unidad *Todo es semejante*, viste que se puede formar un teselado en o cubrir el plano con cualquier triángulo. Con una baldosa triangular, también se puede formar un teselado en un triángulo que tenga exactamente la misma forma que la baldosa básica. Abajo, un triángulo equilátero forma un teselado en un triángulo equilátero más grande.



Si alternas baldosas moradas y blancas, puedes crear triángulos con patrones interesantes.

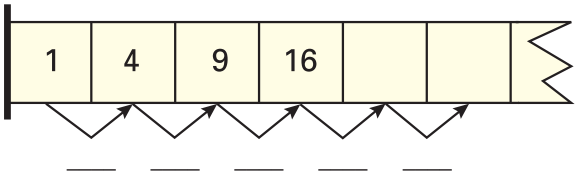


2. **a.** Halla el número total de baldosas usadas en cada triángulo.

b. ¿Cuántas baldosas tienes que añadir a la fila de la base del cuarto triángulo para obtener el quinto patrón?

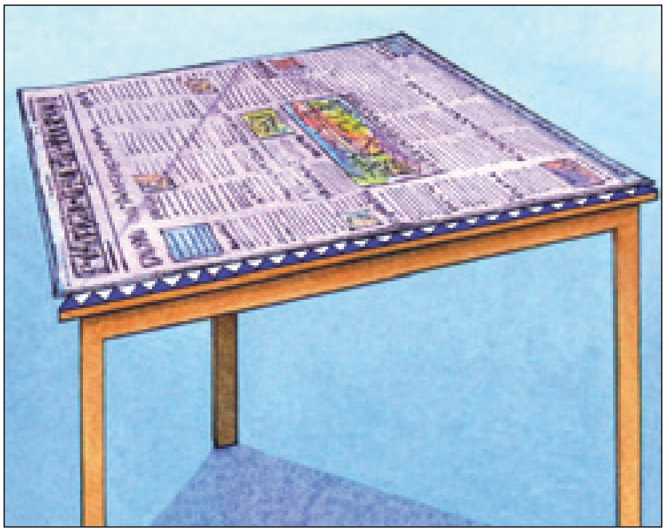
3. Halla el número total de baldosas necesarias para hacer el décimo triángulo de la progresión.

El número de baldosas de cada triángulo de la progresión aparece en la tira de números.



4. **a.** ¿Cuál es el 30.º número de esta progresión?

b. Escribe una expresión con *n* para esta tira de números. ¿Dónde empieza *n*?



Janet está construyendo una mesa triangular. Quiere cubrir toda la mesa con baldosas triangulares. Un periódico tapa casi toda la mesa, de modo que se puede ver sólo una fila de triángulos.

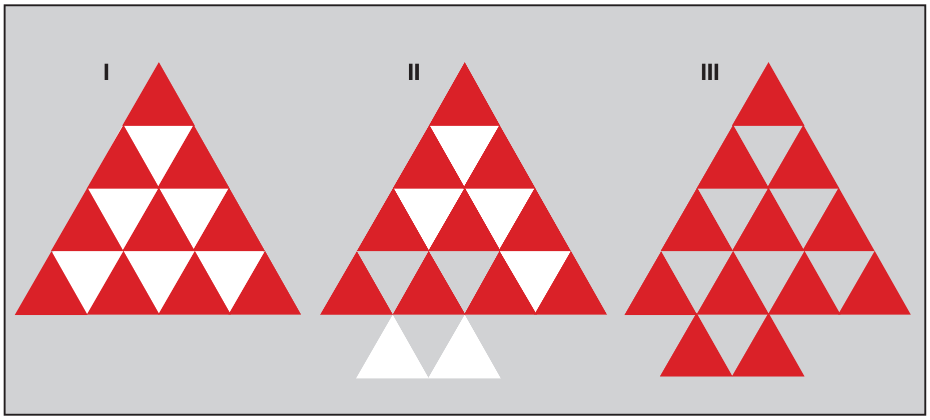
5. **a.** ¿Cuántas filas de triángulos cubren la mesa?

b. Halla el número total de baldosas que oculta el periódico.

Patrones triangulares

Tal como averiguaste en la página anterior, puedes usar una regla sencilla para calcular el número de baldosas de un **teselado** triangular. Si en la base del teselado hay n baldosas, el número total de baldosas es igual a n^2.

Estudia los teselados triangulares para ver una explicación de por qué funciona la regla enunciada arriba.



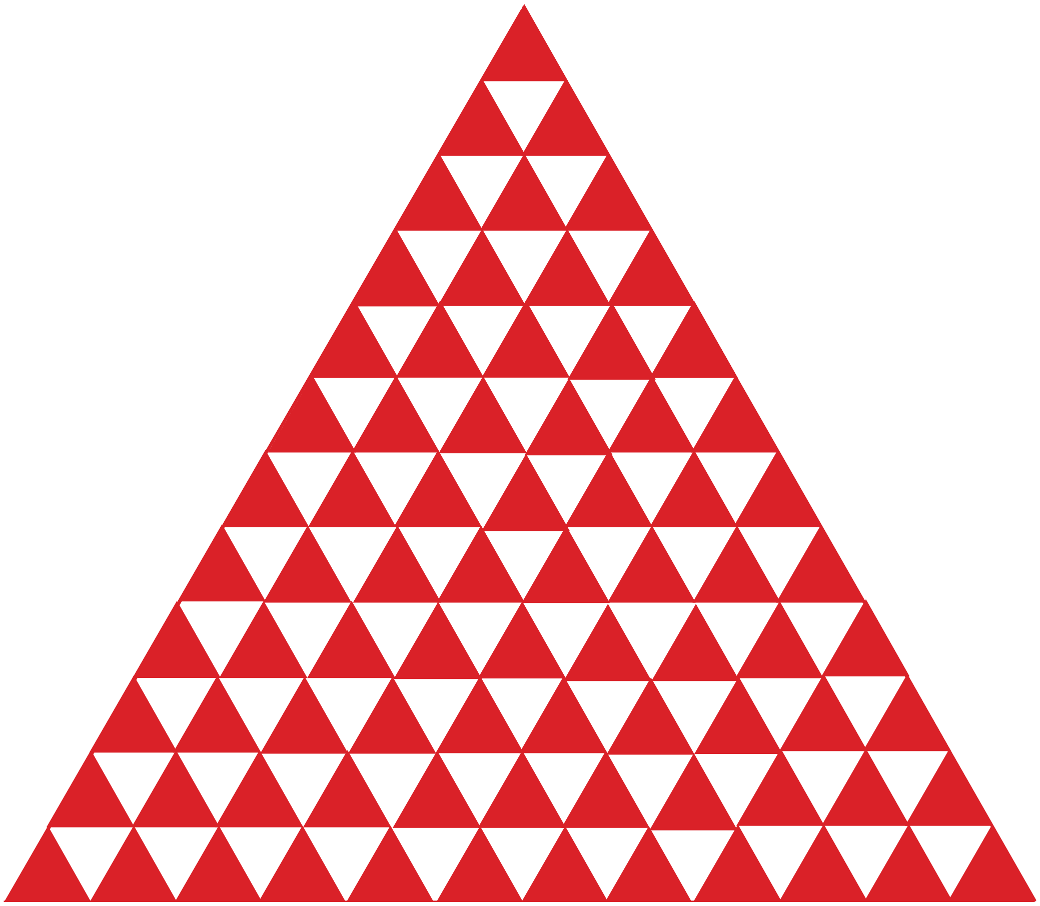
Usa la **Hoja de actividad del estudiante 2** para responder al problema 6.

6. a. Empezando con la Figura I, refleja todos los triángulos blancos que hay en la base del triángulo (Figura II). Colorea de rojo cada triángulo reflejado (Figura III).

b. Explica por qué el número total de baldosas de la Figura I es igual al número de baldosas rojas de la versión terminada de la Figura III.

c. La regla establece que el número total de baldosas de la Figura I es igual a 4^2. Explica esto usando la versión terminada de la Figura III.

d. Verifica la regla con un triángulo que tenga cinco filas ($n = 5$).

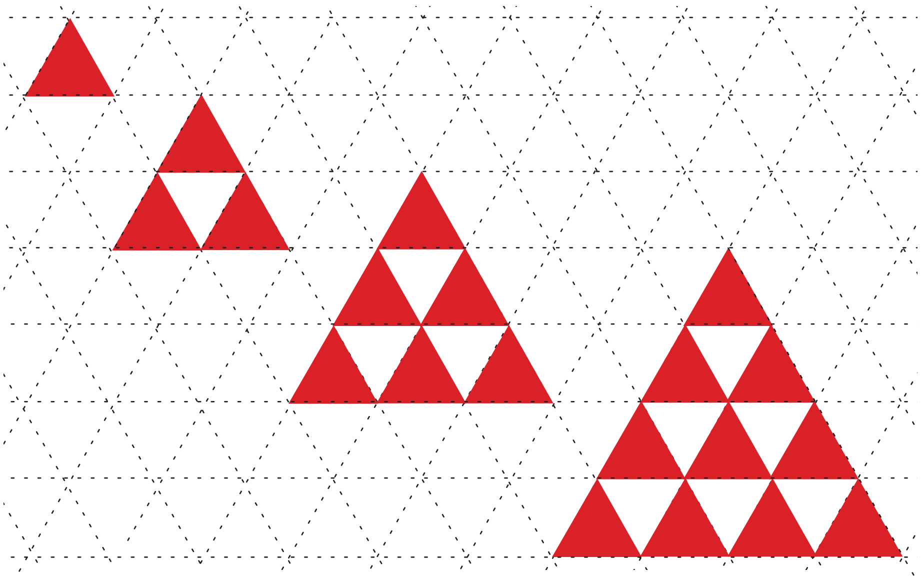


7. a. Determina cuántos triángulos blancos hay en este teselado sin contarlos uno por uno. Explica tu método.

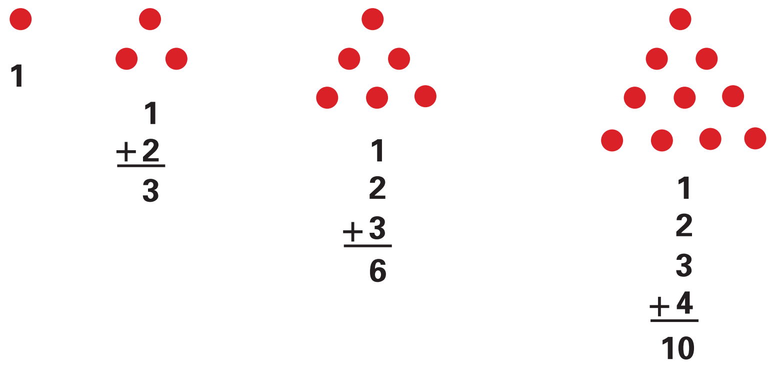
   b. ¿Cuántos triángulos rojos hay?

Números triangulares

En las páginas anteriores, estudiaste patrones con triángulos (como los de la ilustración siguiente).



El matemático griego Nicómaco, que vivió hacia el año 100 d. de C., estudió los patrones de puntos triangulares. Los números 1, 3, 6, 10,… se llaman **números triangulares**.



8. **a.** Describe todas las relaciones que veas entre los teselados triangulares, los patrones de puntos y los números triangulares.

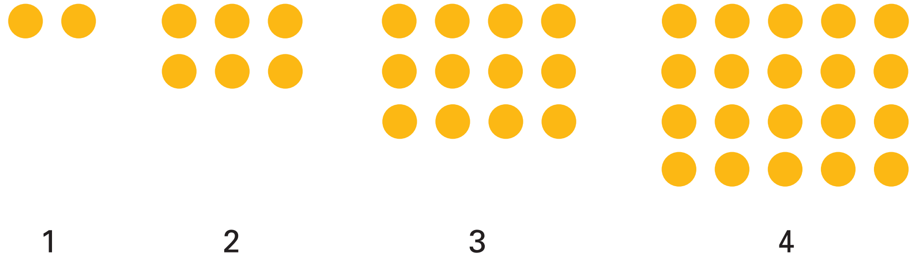
b. ¿Qué regularidades ves en cada uno de los patrones anteriores?

9. El 30.º número triangular es el 465. Según este dato, ¿cuál es el 31.º número triangular? ¿Y el 29.º?

Números rectangulares

Nicómaco estaba interesado en hallar una fórmula directa para los números triangulares.

Como parte de su investigación, usó un patrón al que llamó **números rectangulares**.



Los números rectangulares son: 2, 6, 12, 20 y así sucesivamente.

10. **a.** Halla los tres números rectangulares siguientes.

b. ¿Es el 132 un número rectangular? Explica, sí o no, ¿por qué?

11. Ana escribió la fórmula $R = n(n + 1)$ para los números rectangulares. Bárbara escribió otra fórmula diferente: $R = n^2 + n$. Usa patrones de puntos para explicar la fórmula de Ana y la fórmula de Bárbara.

12. **a.** Haz un dibujo para demostrar que cada número rectangular es el doble de un número triangular.

b. Nicómaco halló una fórmula directa para los números triangulares:

el *n*.º número triangular $= \frac{1}{2}n(n + 1)$,

donde n empieza en 1.

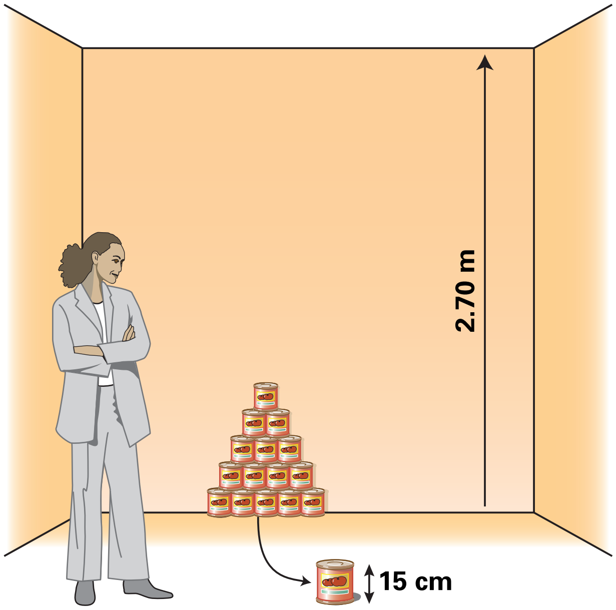
Explica esta fórmula.

13. En el problema 9, hallaste el 29.º, el 30.º y el 31.º número triangular. Comprueba esos valores con la fórmula de Nicómaco.

Actividad

Una pared de latas

14. ¿Cuántas latas cabrán dispuestas en forma de triángulo contra esta pared?



La gerente de una tienda quiere probar una forma nueva de apilar las latas. Ella opina que una figura con forma de camello sería más atractiva visualmente, pero no está segura de cuántas latas harían falta para construir esa figura.

Usa la **Hoja de actividad del estudiante 3** como ayuda para resolver el problema 15.

15. a. Si la pila tuviera 16 latas de ancho y 17 niveles, estudia el dibujo y halla el número de latas necesarias para formarla.

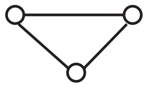
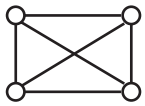
b. Escribe los pasos de tu cálculo. Explica qué tendrías que cambiar para que pudieras seguir esos mismos pasos con un número diferente de latas en la hilera inferior y un número diferente de niveles.

c. Diseña otra forma de exhibición. Dibuja la figura de tu propia manera de disponer las latas. Coloca las medidas importantes y predice cuántas latas harán falta.

La competencia de *ping-pong*

El Consejo de Estudiantes de la Escuela Intermedia Jefferson quiere organizar una competencia de *ping-pong*. Todos los participantes jugarán contra todos los demás.

El Consejo de Estudiantes quiere saber cuántos partidos se jugarán. Puedes usar patrones para hallar la respuesta por ellos.

Número de jugadores	Gráfica	Número de partidos
2		1
3		3
4		6

16. Copia la tabla en tu cuaderno. Continúa la tabla para cinco y para seis jugadores.

17. ¿Cuántas rectas se trazan desde cada vértice para seis jugadores?

18. Observa la tabla para hallar un patrón. Usa tu patrón para predecir el número de partidos que jugarán siete jugadores y ocho jugadores. Comprueba tus respuestas extendiendo la tabla de tu cuaderno.

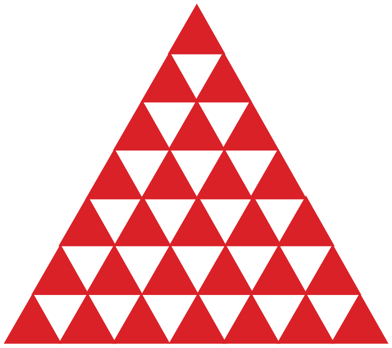
19. ¿Cuántos participantes pueden competir si la cantidad máxima de partidos que se pueden jugar son 50?

20. Escribe una fórmula que puedas usar para calcular el número de partidos correspondiente a cualquier número de jugadores.

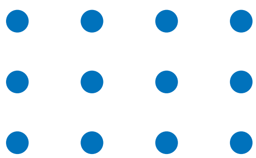
D Triángulos y números triangulares

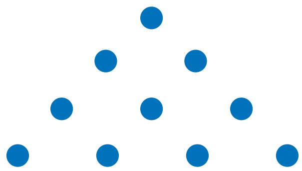
Resumen

En esta sección, hallaste una regla sencilla: el número total de triángulos pequeños que forman un teselado en un triángulo más grande con n filas es igual a n^2.



Estudiaste también dos tipos de patrones de puntos.





Los números rectangulares son: 2, 6, 12, 20 y así sucesivamente. El n.º número rectangular es $n(n + 1)$, donde n empieza en 1.

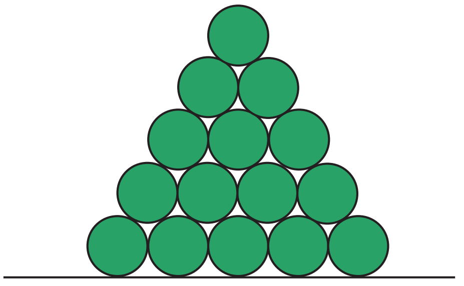
Los números triangulares son: 1, 3, 6, 10 y así sucesivamente. Cuando observas los patrones de puntos, ves que cada patrón rectangular puede dividirse en dos patrones triangulares, por lo tanto, el n.º número triangular es $\frac{1}{2}n(n + 1)$.

Verifica tu trabajo

1. **a.** Describe el patrón que forman las baldosas del teselado que aparece en el Resumen.

   b. Explica cómo puedes hallar el número total de baldosas rojas y de baldosas blancas sin contarlas.

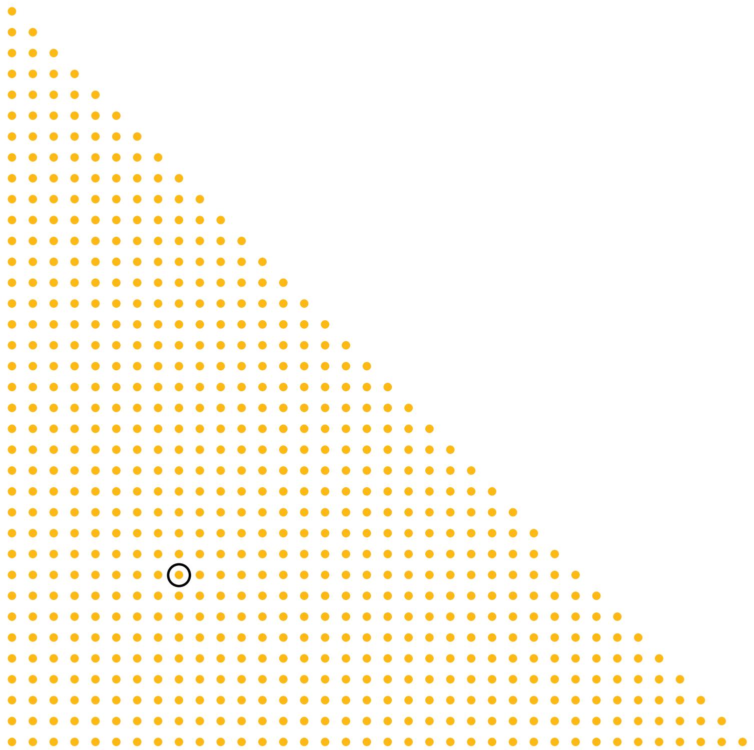
2. a. Supón que tienes una pila de tubos, como la que se muestra a continuación, con 5 tubos en la base y 1 tubo en la parte superior. Calcula el número de tubos que hay en la pila. Usa algún otro método que no sea contarlos uno por uno.



b. Calcula el número de tubos de una pila que tiene 25 tubos en la base y 1 tubo en la parte superior. Usa algún otro método que no sea contarlos uno por uno.

c. Diseña tu propio problema de tubos y resuélvelo.

3. Si empezaras a contar los puntos desde el vértice superior del triángulo, yendo hacia abajo por filas, ¿cuántos puntos en total habrás contado cuando llegues al punto encerrado en el círculo? Usa tus conocimientos sobre números triangulares para resolver este problema.



D Triángulos y números triangulares

En el Torneo de Tenis *Mec*, todos los participantes jugarán contra todos los demás. Supón que de la Escuela Intermedia Rydell participarán 12 jugadores.

4. ¿Cuántos partidos jugarán en total los 12 jugadores?

Antes de que empiece el torneo, cada participante se da la mano con todos los competidores.

5. ¿Cuántos apretones de manos habrá en total?

Para reflexionar más

Halla una situación que tenga el mismo contenido matemático que el torneo de *ping-pong* y el problema de los apretones de manos.

Práctica adicional

Sección A Patrones

1. Escribe los cinco primeros números de cada una de las progresiones que describen las siguientes expresiones. En cada expresión, *n* empieza en cero.

a. $2n + 3$

b. $15n - 10$

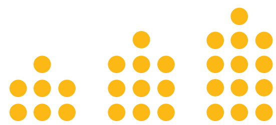
c. $\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}$

2. Haz tu propia expresión y escribe los cinco primeros números de la progresión que tu expresión representa. Asegúrate de que *n* empiece en cero.

3. a. Escribe una fórmula PRÓXIMO-ÚLTIMO para el patrón de puntos que aparece más abajo.

b. Describe el patrón de puntos con una fórmula directa $D =$ ....

Patrón de puntos:



Número patrón: **2** **3** **4**

4. a. Haz una tira de números para la fórmula

PRÓXIMO número = ÚLTIMO número + 4, se empieza con el número 17

b. Escribe una expresión que represente la progresión.

Sección B Progresiones

Joey y Alicia juntan revistas viejas para su escuela. Hasta ahora, Joey ha juntado 24 revistas. Cada semana, consigue tres revistas viejas más.

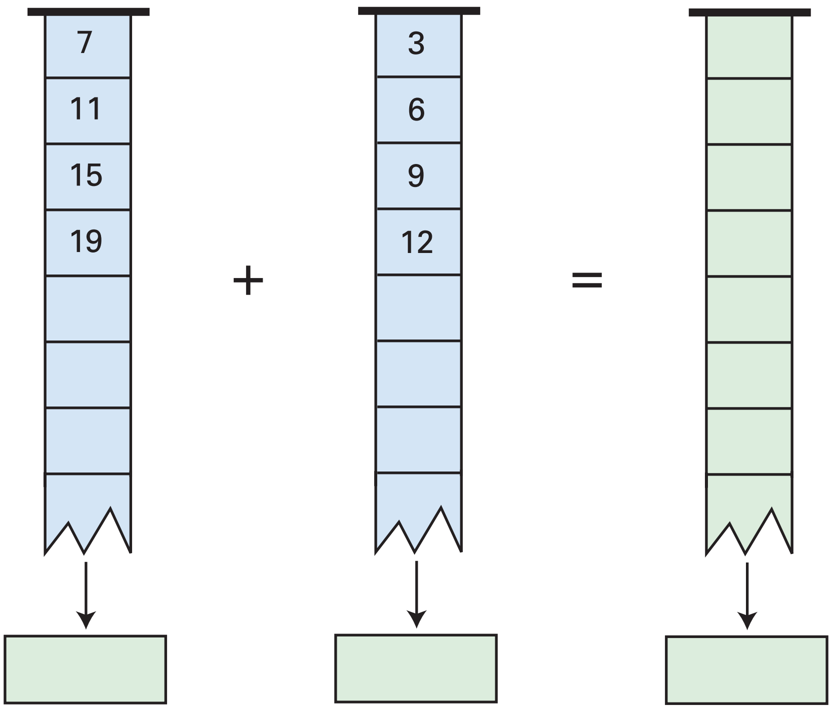
1. Haz una tira de números que empiece con 24 y que dé el número de revistas que Joey tiene al final de cada semana.

2. ¿Cuántas revistas tendrá Joey al cabo de *n* semanas?

Actualmente, Alicia tiene 39 revistas. Ella junta dos revistas por semana.

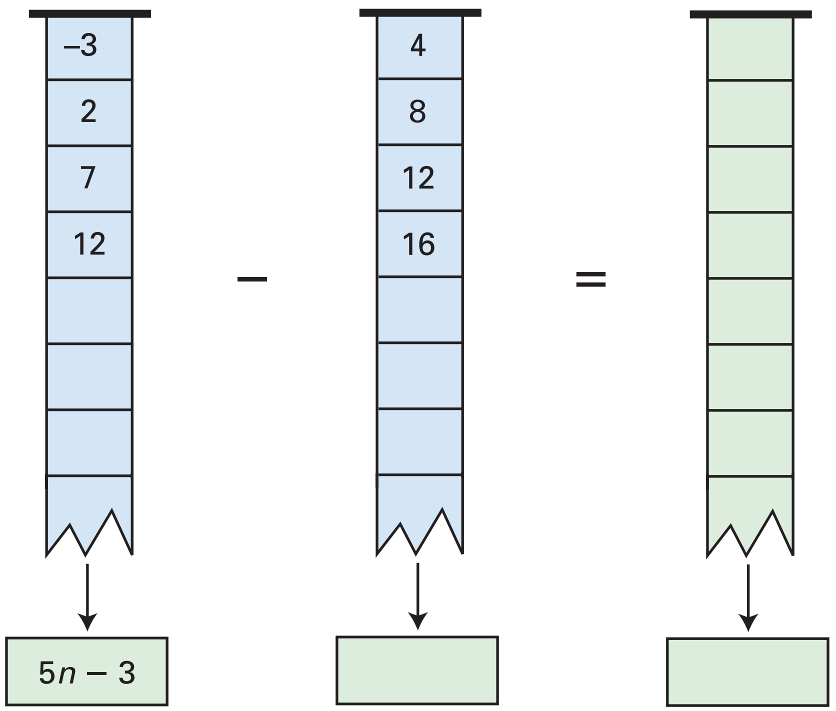
3. ¿Cuántas revistas tendrá Alicia al cabo de *n* semanas?

4. ¿Cuántas revistas habrán reunido Joey y Alicia juntos al cabo de *n* semanas?



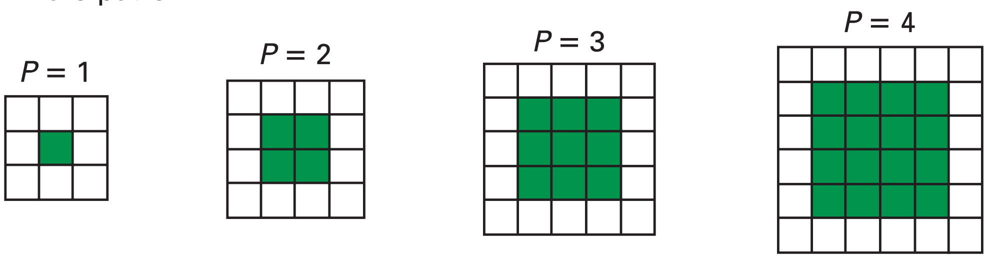
5. Copia las tres tiras de números de arriba y completa las partes faltantes. Supón que *n* empieza en cero en las tres tiras de números.

6. Copia la siguiente resta de tiras de números y completa las partes faltantes. Supón que n empieza en cero en las tres tiras de números.



Sección C Números cuadrados

Esta es una progresión de cuatro patrones de baldosas. P representa el número patrón.



1. Escribe una fórmula directa para calcular el número de baldosas verdes necesarias para cada número patrón (P). ¡Observa que en este problema P empieza en uno!

2. Explica, con los patrones de baldosas de arriba, que la fórmula para el número de baldosas blancas del número patrón P es

$$\textbf{número de baldosas blancas} = 4 \times (P + 1)$$

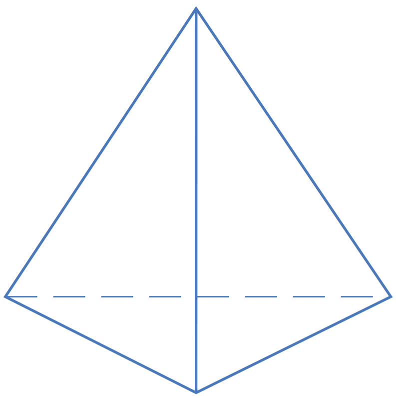
3. ¿Cuál es la fórmula para el número total de baldosas?

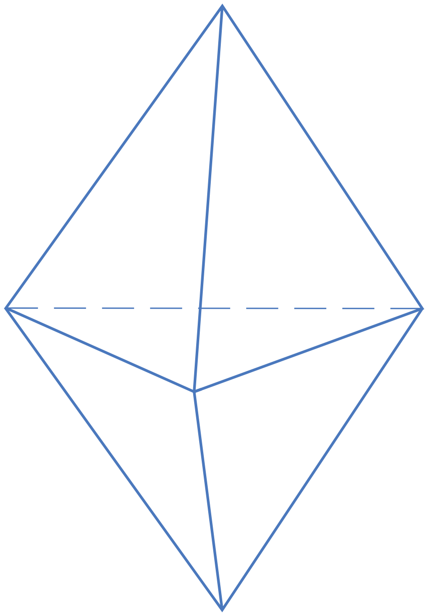
4. Explica cómo se relacionan las fórmulas que hallaste en los problemas 1, 2 y 3.

5. Con un diagrama de áreas, demuestra que las expresiones $n^2 + 4n + 4$ y $(n + 2)^2$ son equivalentes.

Sección D Triángulos y números triangulares

Un tetraedro es una figura tridimensional regular de cuatro caras iguales. Cada una de las caras tiene forma de triángulo equilátero. Esta es la ilustración de un tetraedro.





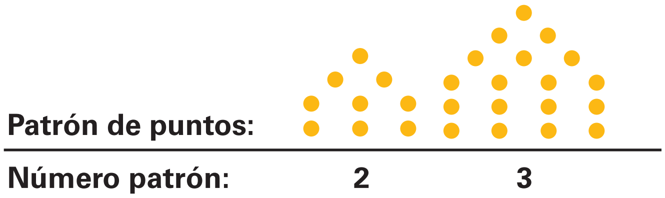
Anton ha empezado a cubrir cada cara con baldosas triangulares azules y blancas.

A lo largo de cada arista, puede colocar 11 baldosas azules.

1. ¿Cuántas baldosas (azules y blancas) necesita Anton para cubrir el tetraedro por completo?

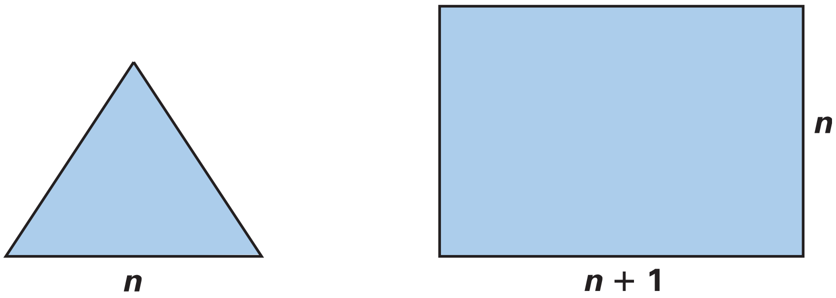
Puedes pegar dos tetraedros como muestra la figura.

2. ¿Cuántas baldosas se necesitan para cubrir esta nueva figura por completo?



3. Estudia el patrón de puntos y traza el patrón de $n = 4$.

Puedes dividir cada patrón en un triángulo y un rectángulo, de modo que la base del triángulo tenga la misma cantidad de puntos que el lado derecho del rectángulo. El siguiente es un esquema de cómo se puede dividir la figura en un triángulo y un rectángulo.



4. **a.** Traza el triángulo del patrón $n = 5$.

b. Traza el rectángulo del patrón $n = 5$.

c. ¿Cuántos puntos hacen falta para el patrón $n = 5$?

5. Escribe una expresión para el número de puntos del patrón n. Usa el esquema de arriba.

Respuestas para verificar tu trabajo

Sección A Patrones

1. La fórmula de Jaime es correcta. Una manera de demostrarlo es señalar que cada patrón tiene *n* filas de tres puntos, más uno en la parte superior: $3n + 1$.

2. **a.** Sí, las dos fórmulas son correctas. Tu explicación puede diferir de las que se presentan aquí. Si ese es el caso, coméntala con un compañero. Ejemplos de explicación:

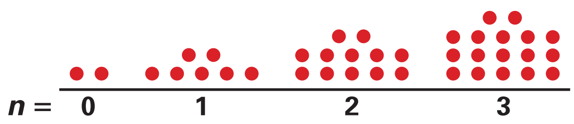
   - Si pones los números 0, 1, 2, 3, etc. en las dos fórmulas, obtienes el mismo patrón de puntos.
   - $2(n + 1) - 1 = 2n + 2 - 1 = 2n + 1$.

   b. Una tabla te puede ayudar a hallar la respuesta a este problema.

Número patrón	Número de puntos
1	1
2	3
3	5
4	7
5	9
6	11

La fórmula de David sería $W = 2n - 1$ o $W = 2(n+1)-3$.

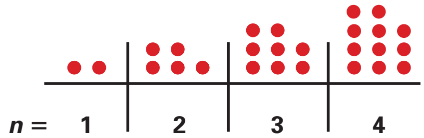
3. **a.** Puedes tener distintos patrones. Ejemplo de patrón de puntos:



   Esta es una buena manera de anotar el patrón y el número patrón.

   b. NÚMERO INICIAL = 2
   PRÓXIMO = ÚLTIMO + 5

4. **a.** Existen muchos patrones posibles. Comenta tu patrón con un compañero. Este es un ejemplo de patrón.



b. Asegúrate de que tu fórmula directa y tu fórmula PRÓXIMO-ÚLTIMO se correspondan con tu progresión. Coloca $n = 3, 4, 5$, etc. para comprobarlo.

Una fórmula directa para el ejemplo de progresión de 4a es: $P = 3n - 1$; n empieza en 1. (P representa el número de puntos.)

Una fórmula PRÓXIMO-ÚLTIMO es:

PRÓXIMO = ÚLTIMO + 3; el número INICIAL es 2.

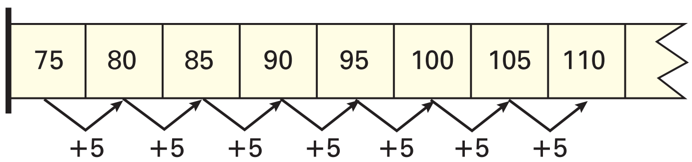
5. Una ventaja de las fórmulas PRÓXIMO-ÚLTIMO es que a menudo son más fáciles de hacer. Sólo tienes que mirar el número inicial y el aumento o la disminución.

Una desventaja de las fórmulas PRÓXIMO-ÚLTIMO es que no te dan inmediatamente el número de puntos de cualquier número patrón de la progresión. Para conocer el valor del elemento que te interesa, tienes que generar primero todos los anteriores.

Si encontraste otras ventajas o desventajas, coméntalas en clase.

Sección B Progresiones

1. **a.** Al cabo de n semanas, Belinda tiene $75 + 5n$.



b. $125 + 10n$. Podrías razonar de una de las siguientes maneras:

- Puedo hacer una expresión viendo que 10 es el doble de 5 y que n sigue representando el número de semanas.
- Primero hice una tira y luego hallé una expresión para esa tira.

2. **a.** El 15.º número es el 420. El primer número es el 70, con $n = 0$. El 15.º número será $n = 14$, por lo tanto, $70 + 25 \times 14 = 420$.

b. El valor excede a 1,000 en el 39.º número (cuando n es 38 o mayor). Las estrategias variarán. Ejemplos de estrategia:

- Si el valor de $70 + 25n$ debe exceder a 1,000, $25n$ debe exceder a 930. Por lo tanto, n debe ser 38.
- $930 \div 25 = 37.2$, que se puede redondear a 38.
- Multiplica 25 por distintos números hasta que la respuesta exceda a 930 (teniendo en cuenta los 70 adicionales).

Sigue completando la tabla hasta que la respuesta exceda a 930.

3. **a.** Compara tu progresión con la de un compañero. Pídele que compruebe si tu expresión es adecuada. Un ejemplo de progresión aritmética de fracciones es: 10, $7\frac{1}{2}$, 5, $2\frac{1}{2}$, 0, $-2\frac{1}{2}$, -5, $-7\frac{1}{2}$, etc. La *disminución* constante de este ejemplo de progresión es $2\frac{1}{2}$.

b. Una expresión que represente el ejemplo de progresión de 3a es $10 - 2\frac{1}{2}n$, n empieza en cero.

4. Sí, cuando sumas dos progresiones aritméticas, sumas los puntos de inicio y los dos cambios. Quiere decir que la nueva progresión empezará en la suma de los dos inicios y se modificará según la suma de los dos cambios.

5. **a.** Sí, la fórmula de Euler es $V - A + C = 2$; sustituyendo los valores dados, obtienes $11 - 20 + 11 = 2$.

b. Sí, para una torre de n lados,

$V = 2n + 1$

$A = 4n$

$C = 2n + 1$

$$\begin{aligned} V - A + C &= (2n + 1) - 4n + (2n + 1) \\ &= 2n + 2n - 4n + 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Sección C Números cuadrados

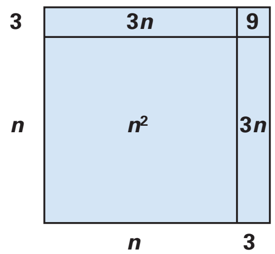
1. Un patio cuadrado de 8 × 8 = 64 baldosas, por lo tanto, sobran 4 baldosas. Si contestaste que puedes hacer un patio cuadrado de 17 baldosas de largo y 17 de ancho, sólo colocaste tus cuadrados en el perímetro del patio y el patio propiamente dicho está lleno de arena.

2. 36 es un número cuadrado, porque 6 × 6 = 36. Es el único cuadrado perfecto entre 30 y 40.

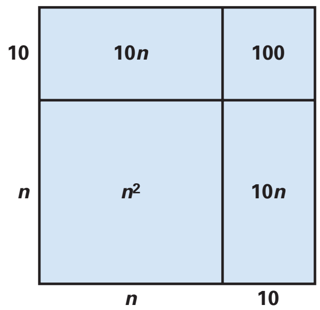
$30\frac{1}{4}$ es un número cuadrado porque $5\frac{1}{2} \times 5\frac{1}{2} = 30\frac{1}{4}$.

¡Observa que los números cuadrados no son necesariamente números enteros!

3.



4. $n^2 + 20n + 100$. Puedes hallar esta expresión observando tiras de números, trazando un diagrama de áreas como el que aparece abajo o, posiblemente, haciendo una manipulación de símbolos.



5. Los tres números siguientes de la progresión son 196, 256 y 324. Observa las regularidades de la siguiente progresión.

0 4 16 36 64 100 144 49 196 256

+4 +12 +20 +28 +36 +44 +52 +60 +68

+8 +8 +8 +8 +8 +8 +8 +8

Sección D Triángulos y números triangulares

1. a. El número de baldosas rojas y el número de baldosas blancas de cada fila aumenta de acuerdo con el patrón de los números triangulares. El patrón de las baldosas rojas empieza con el número 1 y el patrón del número de baldosas blancas empieza con el número 0. Eso lo sabes, porque:

- hay una regla que dice que, si en la base de un teselado triangular hay *n* baldosas, el número total de baldosas es igual a n^2. El número total de baldosas rojas y de baldosas blancas es 49.

b. Podrías hallar el número total de baldosas de diferentes maneras. Por ejemplo, observa el patrón de las baldosas blancas:

Número de fila desde la base	1	2	3	4	5	6	7
Número de baldosas blancas	6	5	4	3	2	1	0

El número total de baldosas blancas es 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21.

El número total de baldosas rojas es 49 − 21 = 28.

- Puedes observar el patrón del número total de triángulos rojos después de cada fila.

Número de fila desde la parte superior	1	2	3	4	5	6	7
Total de baldosas rojas	1	3	6	10	15	21	28

+2 +3 +4 +5 +6 +7

+1 +1 +1 +1 +1

- El número total de baldosas rojas es 28, por lo tanto, el número de baldosas blancas sería 49 − 28 = 21.

2. a. 15 tubos.

b. 325 tubos. Ejemplos de estrategia:

Usando la fórmula de Nicómaco para hallar el 25.º número triangular:

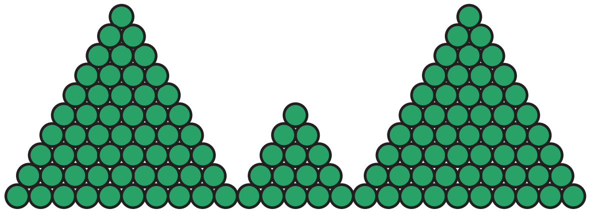
$= \frac{1}{2} \times 25 \times (25 + 1)$

$= \frac{1}{2} \times 25 \times 26$

$= 325$

Sumando la primera fila y la última, luego la segunda y la que sigue a la última, y así sucesivamente, obtienes 12 grupos de 26 más los 13 del medio: $12 \times 26 + 13 = 325$.

c. Los problemas variarán. Ejemplo de problema:



Los triángulos de la izquierda y de la derecha son idénticos y tienen 10 tubos en la base; el triángulo del medio tiene una base de 5 tubos.

Con la fórmula de Nicómaco:

$2 \times \frac{1}{2}(10 \times 11) + \frac{1}{2}(5 \times 6)$

$= 110 + 15$

$= 125.$

3. 387. Ejemplo de estrategia:

Puedes pensar en este problema de diferentes maneras. Una de ellas es contar el número de puntos de la fila que está encima del punto encerrado en el círculo, que es 27. El 27.º número triangular es $\frac{1}{2}(27 \times 28) = 378$. Al sumar los nueve puntos que hay en la fila del punto encerrado en el círculo, obtienes $378 + 9 = 387$.

4. Si necesitas ayuda con este problema, mira la competencia de *ping-pong*.

El número de partidos es $\frac{1}{2} \times 12 \times 11 = 66$.

5. El número de apretones de manos es igual al número de partidos, 66.