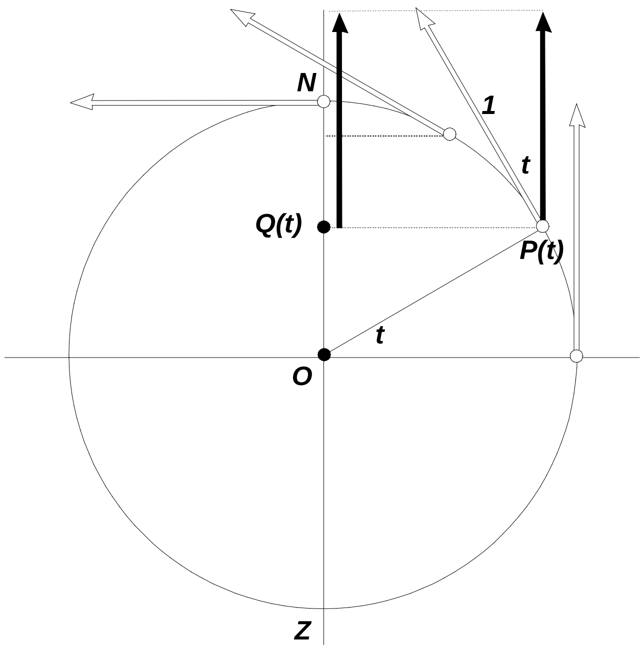
Differentiaal-
en
Integraalrekening

deel 4

cirkelbewegingen



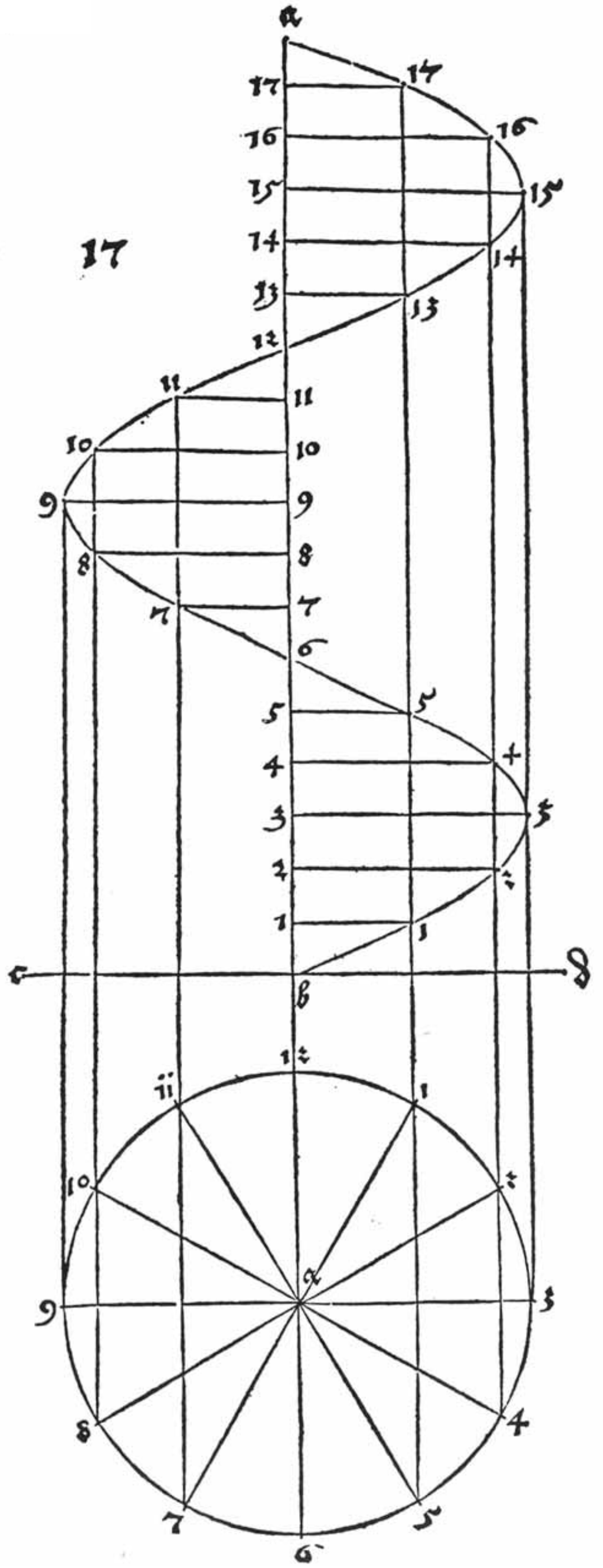
Nieuwe wiskunde tweede fase
Profiel N&G en N&T
Freudenthal instituut

Differentiaal- en Integraalrekening (deel 4: Cirkelbewegingen)

Project: Wiskunde voor de tweede fase
Profiel: N&T en N&G
Klas: vwo 5
Staat: Tweede herziene versie
Ontwerp: Martin Kindt

Freudenthal instituut, januari 1998

inhoud



Diß ist der vorbe schryben schneck vnd seyn grund.

B iiij

Vooraf

Een proces of verschijnsel dat zich met de regelmaat van een klok herhaalt, wordt een *periodiek* proces of verschijnsel genoemd.
Veel periodieke verschijnselen staan in verband met een ronddraaiende beweging. Denk maar aan verschijnselen als ‘dag en nacht’, ‘volle maan’, ‘jaargetijden’, ‘eb en vloed’ die alle te maken hebben met de draaibeweging van aarde of maan.
In dit boek worden enkele modellen van periodieke bewegingen bekeken. Bij deze modellen spelen de begrippen ***hoek*** en ***sinus*** (***cosinus***) van een hoek, een fundamentele rol.
Het begrip sinus ben je in vorige klassen op twee manieren tegengekomen.

(co)sinus van scherpe hoek

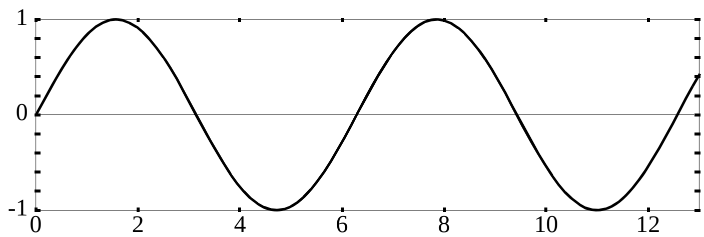
De eerste manier stamt uit de meetkunde. Daar wordt om te beginnen de sinus (cosinus) van een hoek tussen 0 en 90 ingevoerd. We frissen dat even op.
Neem een rechthoekige driehoek en beschouw een van de benen van de rechte hoek als *basis* (= *b*), de ander als *hoogte* (= *h*). De langste zijde in de driehoek (ook wel *schuine zijde* genoemd) stellen we hier voor door *r*.
Als a de scherpe hoek aan de basis is, geldt:

$$\sin a = \frac{h}{r} \qquad \text{en} \qquad \cos a = \frac{b}{r}$$

Voorbeeld:

Merk op dat je basis en hoogte van rol kunt laten verwisselen. Er volgt dan onmiddellijk dat: cos a = sin (90 -a). Daar vandaan komt het voorvoegsel **co** bij cosinus: de hoek 90 -a wordt wel het **co**mplement van a genoemd. De cosinus van een hoek is dus hetzelfde als de sinus van het complement.

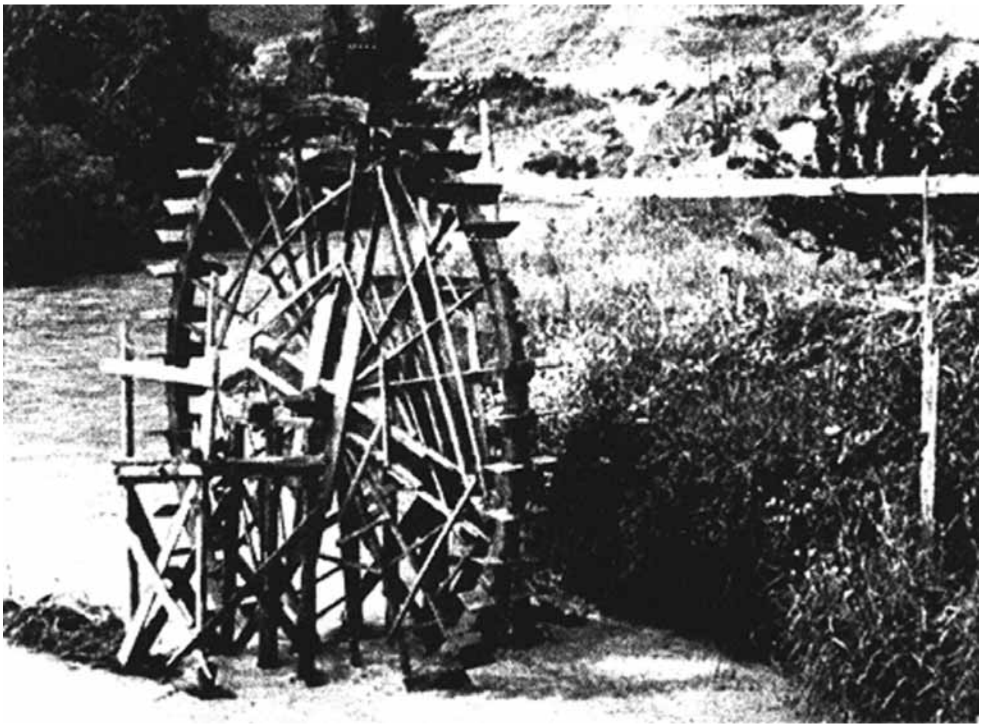
De tweede gedaante waarin je de sinus bent tegengekomen is als grafiek.



Zo’n sinusgrafiek wordt ook wel *sinusoïde* genoemd. De prent op de bladzijde hiernaast, gemaakt door Albrecht Dürer in het jaar 1525, toont misschien wel de eerste sinusoïde die ooit is getekend. Op die prent komen we terug in hoofdstuk 8. Dürer heeft er niet van kunnen dromen dat je zo’n figuur in een handomdraai te voorschijn kunt toveren op de GR. Maar allereerst is het belangrijk dat je het verband tussen de ‘twee’ sinussen goed snapt. De verbindende schakel daarbij is de beweging over een cirkel, en dat is ook al in Dürer’s tekening te zien.

1 (Water-) rad en sinus

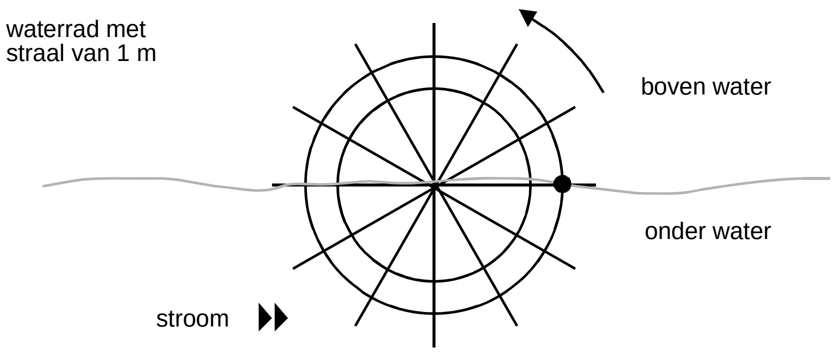
Als voorbeeld van een ronddraaiende beweging bekijken we in dit hoofdstuk de beweging van een waterrad.



Het waterrad is een van de oudste vindingen van de mens voor bevloeiing van land. Evenals alle andere oude hulpmiddelen voor bevloeiing werd het ontworpen om water omhoog te brengen uit bronnen, rivieren, poelen en reservoirs om het via goten en greppels op de velden te brengen.

hoeksnelheid

Hieronder zie je een schematische weergave van een waterrad. Het rad ligt voor de helft onder water. Door de stroming van het water draait het waterrad rond. Als de rivier waarin dit waterrad zich bevindt regelmatig stroomt, dan draait het rad zelf ook regelmatig (of *eenparig*) rond. Voor het gemak nemen we aan dat dit het geval is en dat het waterrad iedere seconde 60 draait.
We zeggen dan: de *hoeksnelheid* van het waterrad is 60 per seconde (60 /sec).



1 We volgen nu de beweging van één punt op de omtrek van het rad (zwarte stip in de figuur) en letten op de hoogte *h* van dit punt boven de waterspiegel.
Op het tijdstip $t = 0$ is de situatie zoals in de figuur op de vorige bladzij.

tip

a. De hoogte *h* op het tijdstip $t = 1$ kun je uitrekenen, door gebruik te maken van de sinus. Leg dit uit en controleer met de GR dat die hoogte (afgerond) 0.87 m is.

b. Vul onderstaande tabel verder in. (N.B. als de schoep onder water zit, reken je de hoogte negatief).

t (sec)	0	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$	4	$4\frac{1}{2}$	5	$5\frac{1}{2}$	6
h (m)	0		0.87										

c. Teken op mm-papier zo goed mogelijk een grafiek van *h* als functie van *t* op het tijdsinterval [0 , 6].

d. Voor $0 < t < 1\frac{1}{2}$ geldt een formule van de vorm $h = \sin(...)$. Wat moet er op de plaats van de stippen staan?

2 De definitie voor sinus is zodanig dat de formule van **1d** ook werkt voor die waarden van *t* waarbij de draaihoek niet ligt tussen 0 en 90 .Zo geldt dat sin 240 (komt overeen met $t = 4$) ongeveer gelijk is aan - 0.87.

tip

a. Hoe groot ongeveer zijn sin 135 , sin 225 en sin 315 ?

b. In opgave **1** hebben we één omwenteling van het waterrad bekeken. Wat voor grafiek krijg je bij twee omwentelingen? Hoe groot is sin 450 ? En sin 720 ?

c. Het hoeft natuurlijk niet bij twee omwentelingen te blijven.
Leg uit dat geldt: sin 11886 = sin 6 .

d. Terugdraaien kan ook. Hoe groot is sin (-750)?

3 **a.** Verklaar uit de beweging van het waterrad dat voor elke hoek a geldt:

sin(a + 360) = sin a

b. Kun je nog andere hoekwaarden dan 360 bedenken waarvoor een dergelijke formule geldt?

periode

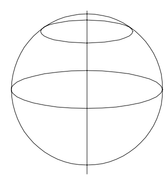
De formule van opgave **3** drukt uit dat de sinusfunctie zich steeds herhaalt. De gangbare uitdrukking hiervoor is: de sinusfunctie is *periodiek*. De kleinste positieve herhalingsstap (dat is hier 360) wordt de *periode* genoemd.
We laten de sinusfunctie nu eventjes rusten en gaan eerst wat verder in op de begrippen *hoekmaat* en *hoeksnelheid*.

4 Een punt op aarde (dat niet de Noord- of Zuidpool is) maakt ieder etmaal één ronde om de aardas. Bij benadering is die ronde een cirkel.

a. Neem een punt op de evenaar (lengte ca. 40000 km). Hoe groot is de snelheid van de beweging in km/uur?

b. En hoe groot is de hoeksnelheid gemeten in graden per uur?

c. De breedtecirkel van Amsterdam is veel kleiner dan de evenaar, factor ongeveer 0.61. Hoe groot is de snelheid van de dagelijkse cirkelbeweging in Amsterdam (in km/uur)? En hoe groot is de hoeksnelheid (in /uur)?



hoekgraad = degree

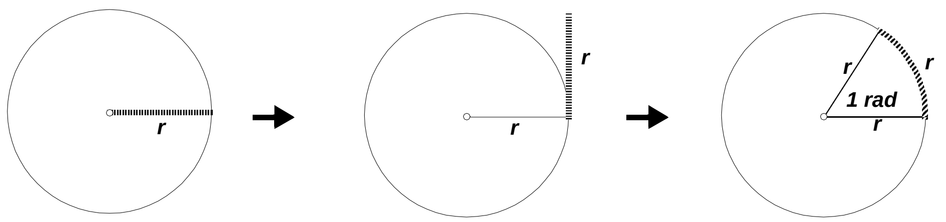
De waarde van de hoeksnelheid hangt niet alleen af van de tijdseenheid, maar ook van de eenheid waarmee de *hoek* gemeten wordt. Al sinds de tijd van de Babyloniërs wordt de *graad* (Engels: *degree*) als eenheid van hoekmaat gebruikt. Zoals je wel zult weten komt men aan een hoekgraad door een cirkel te verdelen in 360 gelijke boogjes.
Een hoek, waarvan het hoekpunt in het middelpunt van de cirkel wordt gekozen en waarvan de benen een boogje gelijk aan $\frac{1}{360}$ van de cirkelomtrek insluiten, is per definitie een hoek van 1 . Zo komt de verdeling van een gradenboog tot stand.
We drukken dit nu kort zó uit:

> ***Een middelpuntshoek van 1 hoort bij een cirkelboogje dat gelijk is aan het 360ste deel van de cirkelomtrek.***

De verdeling van de cirkel in 360 delen is tamelijk willekeurig. Landmeters gebruiken meestal een hoekmaat die afgeleid is van een verdeling van de cirkel in 400 boogjes. Een middelpuntshoek die hoort bij één zo'n boogje is een hoek van 1 (landmeters-)graad. Een rechte hoek heeft bij dit systeem 100 graden. Deze hoekeenheid zullen wij nooit gebruiken.

radiaal = radian

Er is nog een derde bekende hoekmaat en die wordt wèl veel gebruikt in de wis- en natuurkunde. Dat is de zogenaamde *radiaal* (Engels: *radian*).
Bij radialen is niet uitgegaan van een mooie verdeling van de cirkel in een geheel aantal boogjes. De afspraak luidt in populaire bewoording aldus: neem een touwtje dat precies even lang is als de straal. Leg dat touwtje strak langs de cirkelomtrek. Bij de boog die je zo afpast, hoort dan een middelpuntshoek van 1 radiaal.



In wat meer officiële taal:

> ***Een middelpuntshoek van 1 radiaal hoort bij een cirkelboog die precies even lang is als de straal van de cirkel.***

Het woord 'radiaal' is afgeleid van 'radius' (= straal).
De radiaal is niet zo maar een willekeurige hoekmaat. Het zal blijken (in hoofdstuk 4) dat er een groot voordeel is om met radialen te werken in plaats van met graden.
Op de GR kun je beide eenheden instellen onder MODE. Als je met hoeken of functies van hoeken werk op de GR, is het belangrijk dat je weet of is gekozen voor Radian of Degree!

5 Is de grootte van de radiaal afhankelijk van de grootte van de straal van de cirkel?

tip

6 Beschouw een waterrad dat ronddraait met een hoeksnelheid van 1 radiaal per seconde (1 rad/sec). Is dat sneller of langzamer dan het waterrad van opgave **1**?
Verklaar je antwoord, bijvoorbeeld met een figuur.

tip

7 Bij het omrekenen van graden naar radialen, maak je gebruik van de formule:

***omtrek cirkel met straal r* = 2pr**

Verklaar hoe uit deze formule volgt:

1 rad » 57.3×

8 Je kunt dit resultaat ook vinden op de GR via de sinusfunctie en zijn 'inverse'. Stel de GR in op Radian en bereken sin 1. Stel nu in op Degree, ga terug naar het rekenscherm en bereken $\sin^{-1}$ Ans.

9 Bij het omrekenen van graden naar radialen, drukt men de resultaten vaak uit in p.

a. Verklaar: 60 = $\frac{1}{3}$p rad » 1.05 rad.

b. In onderstaande tabel zijn de meest 'populaire' hoeken in graden vermeld. Schrijf bij elke hoek de exacte waarde in radialen.

DEG (^{0})	0	30	45	60	90	120	135	150	180
RAD	0			$\frac{1}{3}$p					

10 Hoeveel radialen is een hoek van 1 ?

11 Hoeveel graden is een hoek van $\frac{2}{5}$p radialen?

tip **12** Gegeven is een cirkel met straal *r* en daarin een middelpuntshoek van a radialen. Bij die middelpuntshoek hoort een boog. Druk de lengte van die boog uit in a en *r*.

tip **13** Dezelfde vraag als in opgave **12**, maar nu is de hoek a graden.

14 Terug naar het waterrad. Dezelfde uitgangssituatie als in opgave **1**, maar nu is de hoeksnelheid 1 rad/sec.

a. Bereken de hoogte *h* van de schoep op het tijdstip $t = 1$.

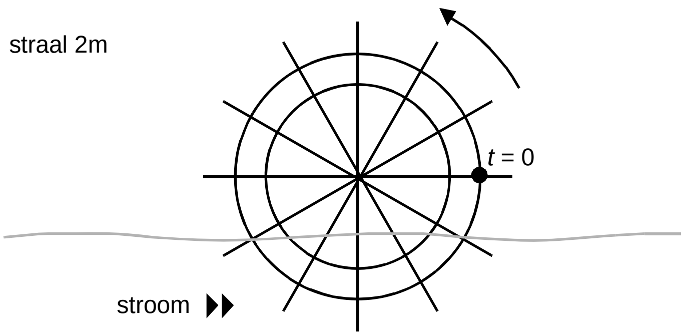
b. Maak met de GR de grafiek van *h* als functie van *t* op het interval [0 , 6].

c. Verklaar dat er nog net geen hele periode is afgelegd.

d. Hoe verandert de grafiek als de hoeksnelheid 2 rad/sec wordt? Welke formule drukt nu *h* uit in *t*?

e. Hoeveel volledige rondjes worden er in 1 minuut afgelegd bij een hoeksnelheid van 2 rad/sec?

15 In het plaatje zie je een waterrad met een straal van 2 m; het rad hangt 1 m onder water. De snelheid van het rad is 3 rad/sec.



De hoogte *h* (in m) van de schoep met stip is weer een functie van de tijd *t* (in sec). Beginstand: $h(0) = 1$.

a. Druk *h* uit in *t*.

b. Maak de grafiek van *h* als functie van *t*.

tip **c.** Hoe lang is de schoep onder water gedurende één rondje?

16 Beschouw een waterrad met straal 1 m dat half (= 1 m) onder water hangt. De hoeksnelheid = 1 rad/sec. Volg nu de schoep die op $t = 0$ precies de hoogste stand inneemt.

a. Druk de hoogte *h* van de schoep uit in *t*.

b. Controleer je formule door met de GR de bijbehorende grafiek te maken.

Samenvatting

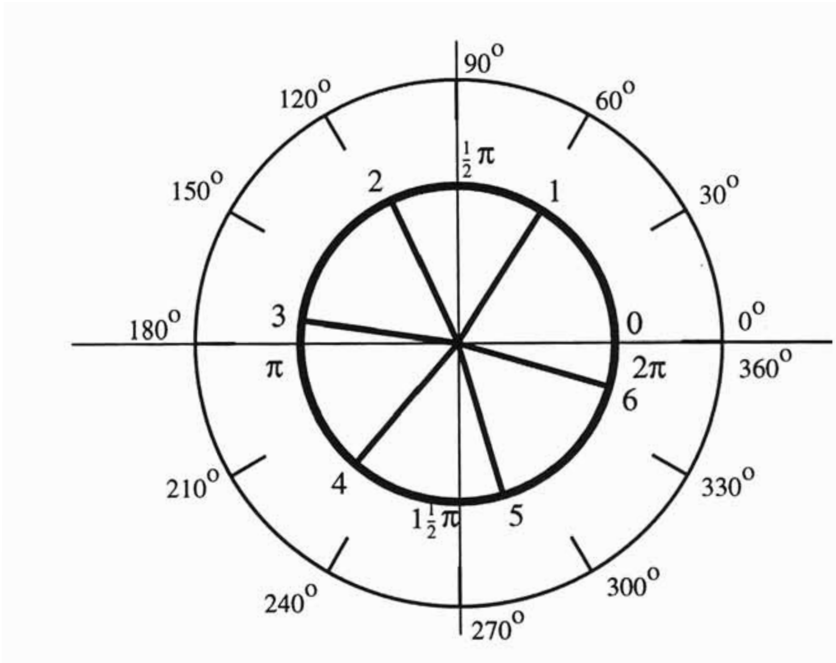
Bij een rondcirkelende beweging gebruiken we vaak het begrip *hoeksnelheid* om aan te geven hoe snel de beweging is. De eenheid van hoeksnelheid is afgeleid van de gekozen *hoekeenheid* en de gekozen *tijdseenheid*.

graden en radialen

In de wiskunde (en natuurwetenschappen) zijn twee hoekeenheden gangbaar:

graad (degree) en *radiaal* (radian).

Onderstaande figuur laat het verband tussen beide eenheden zien.

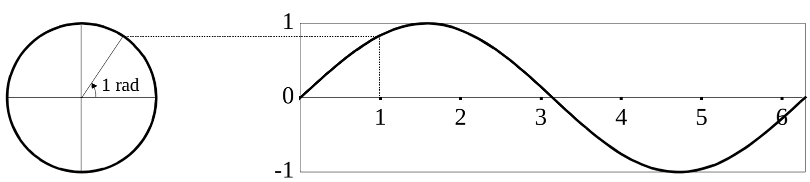


17 a. In de figuur zie je bijvoorbeeld dat een hoek van 4 radialen overeenkomt met een hoek tussen 210 en 240 . Bereken hoeveel graden die hoek is (afgerond in één decimaal achter de komma).

b. Je ziet ook dat een hoek van 300 gelijk is aan een hoek tussen 5 en 6 radialen. Hoeveel radialen is die hoek precies?

sinusoïde

Bekijk een beweging als van een punt op de omtrek van een waterrad. De hoogte van dat punt boven een horizontale lijn of vlak kan worden beschreven met een *sinusfunctie*. De grafiek van zo'n functie is een *golflijn* of *sinusoïde*.



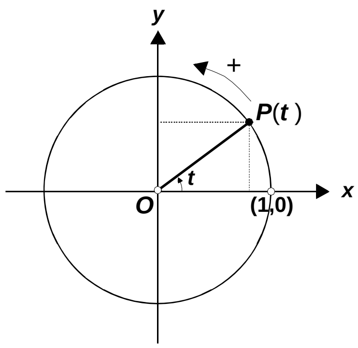
18 Je ziet hier de grafiek van $y = \sin t$ met t in radialen. De grafiek is afgeleid van een cirkelbeweging waarvan de straal gelijk is aan 1.

a. Hoe veranderen grafiek en formule als de straal wordt gehalveerd?

b. En hoe als de hoeksnelheid wordt gehalveerd?

2 Cirkelbewegingen op de computer of GR

In hoofdstuk 1 heb je de beweging bekeken van een punt op de omtrek van een waterrad. Als de hoeksnelheid constant is, spreekt men van een *eenparige cirkelbeweging*. Zo'n beweging kan worden gesimuleerd op de computer en op de GR. Om de bewegingen op de computer te simuleren gebruiken we dadelijk PARKROM.
Nu eerst een paar afspraken. Het vlak waarin de cirkelbeweging plaatsvindt, kiezen we als *Oxy*-vlak.

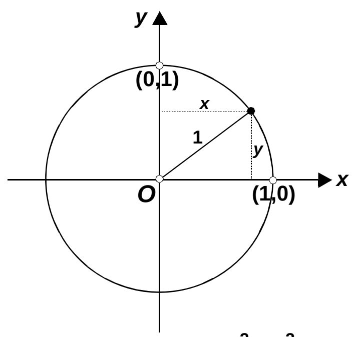


Veronderstel dat het punt *P* rond de oorsprong *O* draait in positieve richting. De plaats van het punt op het tijdstip *t* noemen we *P*(*t*). Als *P* zich op *t* = 0 op de positieve *x*-as bevindt en als de snelheid 1 rad/sec is, dan kan *t* ook worden opgevat als de *draaihoe*k (in rad) van *OP* ten opzichte van de positieve *x*-as.

eenheids-cirkel

Is de straal van de cirkel die *P* beschrijft gelijk aan 1, dan noemt men die cirkel de *eenheidscirkel*.

1 De eenheidscirkel bevat precies alle punten in het *Oxy*-vlak, waarvan de coördinaten voldoen aan de vergelijking: $x^2 + y^2 = 1$. Met welke beroemde meetkundige stelling hangt dit samen?



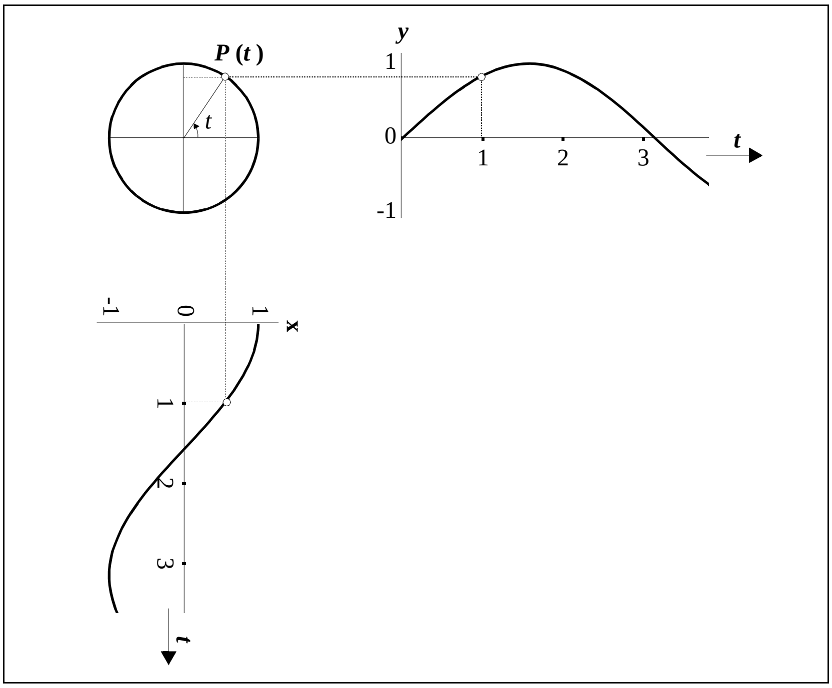
vergelijking eenheidscirkel: $x^2 + y^2 = 1$

2 Kijk naar de eenheidscirkel in de bovenste figuur. *P* draait rond met een hoeksnelheid van 1 rad/sec. Op het tijdstip *t* = 0 bevindt *P* zich in (1 , 0). De coördinaten van *P*(*t*) zijn functies van *t*; we noemen die coördinaten *x(t)* en *y*(*t*).

a. In hoofdstuk 1 heb je gezien *y*(*t*) = sin *t*. Wat weet je van *x*(*t*)?

b. Combineer **a** met de vergelijking van opgave 1. Er komt dan een formule die iets zegt over het verband tussen cos *t* en sin *t*. Welke formule is dat?

Hieronder zie je hoe de grafieken van x en y als functies van t kunnen worden afgeleid uit een cirkelbeweging.



3 Opnieuw de hierboven bedoelde beweging.
 a. Wat zijn de coördinaten van $P(\pi)$, $P(2\pi)$, $P(1001\pi)$, $P(85\pi)$, $P(8.5\pi)$?
 b. Er geldt: $P(t + 2\pi) = P(t)$ voor iedere waarde van t. Waarom eigenlijk?
 c. Voor welke waarden van k geldt: $P(t + k\pi) = P(t)$?
 d. In de grafiek hierboven kun je de waarde van $x(1)$ aflezen.
 Voor welke waarde van $t \neq 1$ en tussen 0 en 2π geldt: $x(t) = x(1)$? En $y(t) = y(1)$?

periode 2π

De cirkelbeweging met hoeksnelheid van 1 rad/ sec is *periodiek* met *periode* 2π.

bewegings-formules

De beweging van P wordt beschreven door de formules:

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$$

of kortweg:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

We noemen dit de *bewegingsformules* van P. In de natuurkunde spreekt men wel van *bewegingsvergelijkingen.* In de wiskunde spreekt men ook van een *parametervoorstelling* van de *baan* die P beschrijft; de coördinaten van P zijn functies van de *parameter t*.
Bij bewegingsformules in dit hoofdstuk, mag je steeds aannemen dat de hoekmaat de *radiaal* is en dat t de tijd in *seconden* is (tenzij anders vermeld).

Voor het tekenen van een baan bij een stel bewegingsformules, kun je gebruik maken van de GR (Parameter Mode) of van een computerprogramma (bijvoorbeeld PARKROM). De opgaven **4** tot en met **10** die nu volgen zijn geschreven op laatstgenoemde programma. Je kunt die opgaven echter ook maken met behulp van de GR.

practicum met PARKROM

4 Start PARKROM en voer de bewegingsformules van P in via de opdracht `Functies` (let op: hier staat $f(t)$ voor $x(t)$ en $g(t)$ voor $y(t)$).
Stel vervolgens de `Grenswaarden` in. Laat t lopen van 0 tot 6.3 en kies voor f en g het bereik van -3 tot 3. Na `Tekenen` wordt één rondje gemaakt.
Dit rondje kun je nog eens doorlopen door over de grafiek te `Wandelen`.

5 **a.** Hoe kun je de functies veranderen om het punt in *negatieve* richting (dus met de klokwijzers mee) over de eenheidscirkel te laten draaien?
b. Hoe moet je de functies veranderen om het punt een cirkel met straal 2 om de oorsprong te laten doorlopen?

Bij de volgende opdracht kun je handig gebruik maken van de opdracht `Wandelen`.

6 De hoeksnelheid van de cirkelbeweging uit de vorige opgave is 1 rad/sec.
a. Hoe groot is de *hoeksnelheid* van de beweging volgens de formules?

$$\begin{cases} x(t) = \cos 5t \\ y(t) = \sin 5t \end{cases}$$

b. Hoe lang doet het punt over één rondje, ofwel wat is de *omlooptijd*?
c. Wat is de periode van de beweging?

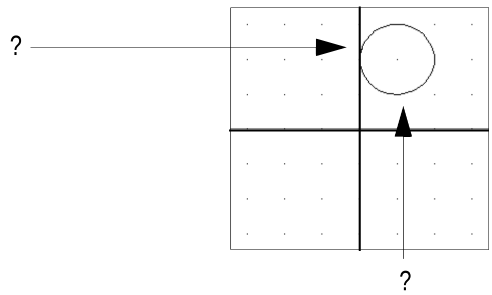
7 Een punt P bevindt zich nu op $t = 0$ in (0 , 1) en draait in positieve richting over de eenheidscirkel met een snelheid van 1 rad/sec.
a. Wat zijn de bewegingsformules?
b. Dezelfde vraag, maar nu is het startpunt (-1 , 0).

8 De beweging van een punt in het *Oxy*-vlak wordt beschreven door de formules:

$$\begin{cases} x(t) = 1 + 2\cos t \\ y(t) = 3 + 2\sin t \end{cases}$$

De baan van het punt is een cirkel.
a. Wat zijn de coördinaten van het middelpunt van de baan?
b. Hoe groot is de straal?

9 **a.** Simuleer met PARKROM een beweging over een cirkel die aan de y-as raakt.



b. Hoe moet je jouw formules veranderen om een grotere cirkel te krijgen die aan de y-as raakt?

tip

10 Een opgave waarbij je een beetje fantasie nodig hebt.
Hoe kun je de bewegingsformules van een eenparige cirkelbeweging veranderen, zó dat het punt zich langs een *spiraal* beweegt?
Gebruik PARKROM om te experimenteren.

cirkels met de GR

11 Je kunt ook deze bewegingsformules invoeren in de GR.
Kies in MODE het menu PAR (= parameter). Kijk meteen even of de hoekmaat op Radian staat. Onder WINDOW zie je nu behalve het *x*-interval en het *y*-interval ook het *t*-interval. Stel dat laatste in op [0 , 2π]; je kunt gewoon 2π intoetsen. Neem voor Tstep nu π/30 (= 0.1047). Kies het venster [-1 , 1] bij [-1 , 1] en stel daarna in op Zsquare. Maak nu X_{1T} = cosT en Y_{1T} = sinT. Na GRAPH maakt het punt één rondje.

12 Net zoals de computer simuleert de GR de cirkelbeweging ‘schoksgewijs’. Je kunt de schokken groter of kleiner maken door Tstep anders in te stellen.
Maak nu Tstep tien keer zo groot, dus π/3 en gebruik de bewegingsformules van de vorige opgave.

a. Verrassing? Hoe noem je de figuur die je zo krijgt?

b. Twee hoekpunten van de figuur liggen op de *x*-as; het zijn (1 , 0) en (-1 , 0).
De andere vier hebben één mooie en één minder mooie coördinaat, zoals op de GR kunt aflezen. Verklaar nu op ‘meetkundige gronden’ dat de *x*-coördinaten gelijk zijn aan $-\frac{1}{2}$ en de *y*-coördinaten aan $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

tip

13 Stel Tstep in op 0.1 en maak elk van de volgende eenparige cirkelbewegingen op de GR:

midd.punt	straal	startpunt	richting	hoeksnelheid
(0 , 0)	2	(2 , 0)	+	1 rad/sec
(1 , 2)	5	(6 , 2)	+	2 rad/sec
(0 , -1)	1	(0 , 0)	-	π rad/sec
(0 , 0)	1	$(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$	+	1 rad/sec
(0 , 0)	*r*	(0 , *r*)	+	ω rad/sec

14 Neem de eerste beweging van opgave **13.**

a. Voor welke waarden van *t* tussen 0 en 2π geldt: $y(t) = 1$?

b. Voor welke waarden van *t* tussen 0 en 2π geldt: $2\cos t = 1$?

15 Gegeven is de cirkelbeweging

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$$

Op zeker moment *a* tussen 0 en 2π bevindt het punt zich in $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$

a. Geef een benadering van *a* in drie decimalen nauwkeurig.

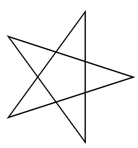
b. Op welk eerstvolgende moment (uitgedrukt in *a*) heeft het punt opnieuw de *y*-coördinaat 4/5?

c. En op welk eerstvolgende moment is de *x*-coördinaat weer 3/5?

d. Op welk moment tussen 0 en 2π was het punt in $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$? Druk je antwoord uit in *a*.

tip

16 Teken met de GR een regelmatige ‘vijf-punt-ster’:



Samenvatting

rond de oorsprong

Een punt P dat in het Oxy-vlak beweegt volgens de formules:

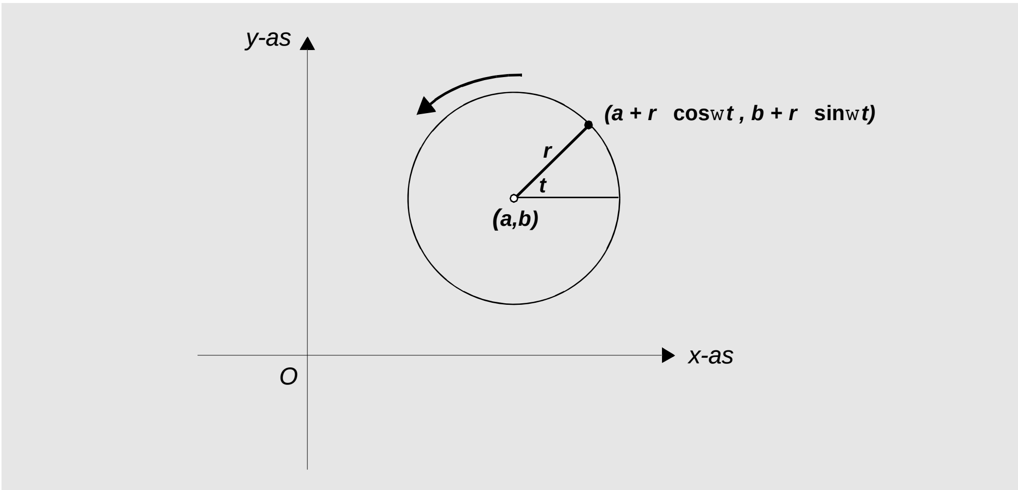
$$\begin{cases} x(t) = r\cos\omega t \\ y(t) = r\sin\omega t \end{cases}$$

doorloopt de cirkel met middelpunt (0 , 0) en straal r.
Het symbool ω (spreek uit: omega) wordt gebruikt om de hoeksnelheid aan te geven. Als t de tijd in seconden is, en de gebruikte hoekeenheid de radiaal is, dan wordt ω gemeten in rad/sec.

rond punt (a , b)

De formules voor een cirkelbeweging met dezelfde snelheid en dezelfde straal, maar nu rond het middelpunt (a , b), kunnen worden gevonden door in de rechterleden van bovenstaande formules respectievelijk a en b op te tellen:

$$\begin{cases} x(t) = a + r\cos\omega t \\ y(t) = b + r\sin\omega t \end{cases}$$



periode = omlooptijd

De *periode* van de hier gegeven beweging is gelijk aan $\frac{2\pi}{\omega}$
Je kunt dit ook de *omlooptijd* noemen.

17 Vergelijk de beweging van opgave **8** met de beweging gegeven door:

$$\begin{cases} x(t) = 1 + 2\sin t \\ y(t) = 3 + 2\cos t \end{cases}$$

Wat is het verschil tussen de beide bewegingen?

18 De twee wijzers van een ronde klok wijzen om 12 uur beide naar boven. De grote wijzer is twee keer zo lang als de kleine.

a. Simuleer met de GR de gelijktijdige beweging van de eindpunten van beide wijzers tussen 12 en 3 uur.

b. Hoe vaak haalt de grote wijzer de kleine in tussen 12 en 3 uur?

3 Eigenschappen van sinus & co

Als je een formule-boekje of wiskundig vademecum open slaat, dan zie je dat er behoorlijk (of onbehoorlijk?) veel formules zijn waarin de goniometrische functies sin en cos optreden. In dit en het volgende hoofdstuk zal je een aantal van die formules ontdekken. Het is niet belangrijk om al die formules uit het hoofd te kennen; je zult altijd kunnen beschikken over een formule-boekje. Om die formules waar nodig zinvol te kunnen gebruiken, is het goed dat je snapt waar ze vandaan komen.

kwadraten-formule

De eerste formule, met een knipoog naar Pythagoras, heb je al gezien in het vorige hoofdstuk bij opgave **2.**

$$\boxed{(\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1}$$

Dit wordt dikwijls geschreven als:

$$\boxed{\cos^2 t + \sin^2 t = 1}$$

De volgende formules drukken het periodieke karakter uit van de functies cos en sin.

periode-formules

$$\cos(t + 2\mathrm{p}) = \cos t$$
$$\sin(t + 2\mathrm{p}) = \sin t$$

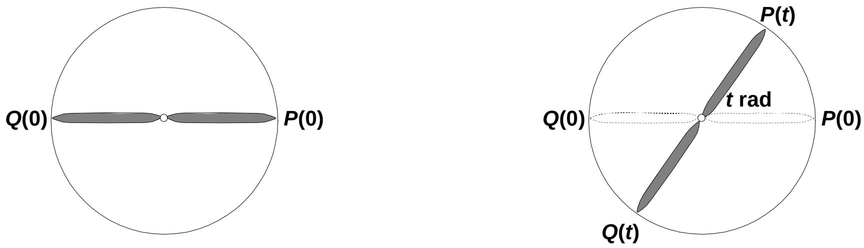
1 Van de hoek t is gegeven $\sin t = \frac{21}{29}$ en $0 < t < \frac{1}{2}\mathrm{p}$.

a. Bereken cos t met behulp van de kwadratenformule.

b. Wat verandert er in de uitkomst als geldt: $\frac{1}{2}\mathrm{p} < t < \mathrm{p}$?

propeller-formules

2 Bekijk de beweging van een propeller.



Neem voor het gemak de lengte van één propellerarm 1 m en de hoeksnelheid van de propeller 1 rad/sec. Vergelijk de propellertips P en Q.

a. Bij situering van de figuur in een Oxy-vlak geldt: $P(t) = (\cos t\ , \sin t)$.
Verklaar: $Q(t) = P(t + \mathrm{p})$.

tip

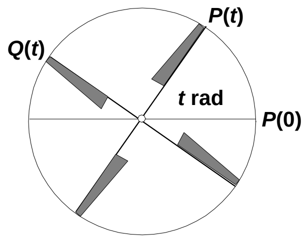
b. Verklaar hieruit de formules :

$$\cos(t + \mathrm{p}) = -\cos t$$
$$\sin(t + \mathrm{p}) = -\sin t$$

Je zou dit de *propellerformules* kunnen noemen.

molen-formules

3 Bekijk de beweging van een molentje.



Neem de straal van de cirkel 1 m en neem de hoeksnelheid van de molen 1 rad/sec.
Vergelijk de bewegingen van P en Q.

tip

Verklaar de *molenformules*:

$$\cos\left(t + \tfrac{1}{2}\pi\right) = -\sin t$$
$$\sin\left(t + \tfrac{1}{2}\pi\right) = \cos t$$

4 Van de hoek t is gegeven $\cos t = \frac{9}{41}$ en $0 < t < \frac{1}{2}\pi$.

Bereken met gebruik van de voorgaande formules achtereenvolgens:

$\sin t$; $\cos(t + \frac{1}{2}\pi)$; $\cos(t + 3\pi)$; $\sin(t - \pi)$.

5 Druk $\cos\left(t + 1\frac{1}{2}\pi\right)$ en $\sin\left(t + 1\frac{1}{2}\pi\right)$ uit in $\cos t$ of $\sin t$.

Je kunt dit doen met behulp van het molentje bij opgave **3**, maar ook door twee formules die je inmiddels gezien hebt, te combineren.

negatieve richting

6 Verklaar uit de cirkelbeweging de formules:

$$\cos(-t) = \cos t$$
$$\sin(-t) = -\sin t$$

7 **a.** Bewijs dat voor elke waarde van t geldt:

$$\sin t + \sin\left(t + \tfrac{1}{2}\pi\right) + \sin(t + \pi) + \sin\left(t + 1\tfrac{1}{2}\pi\right) = 0$$

b. Bewijs ook:

$$\sin^2 t + \sin^2\left(t + \tfrac{1}{2}\pi\right) + \sin^2(t + \pi) + \sin^2\left(t + 1\tfrac{1}{2}\pi\right) = 2$$

voor elke waarde van t.

8 Maak op de GR de grafieken van $y_1 = (\sin x)^2$ en $y_2 = (1 - \cos x)(1 + \cos x)$

De grafieken vallen samen. Hoe is dat te verklaren?

Samenvatting

In dit hoofdstuk heb je een eerste serie eigenschappen van de goniometrische functies sinus en cosinus leren kennen.
Het meest in het oog springend is de eigenschap die berust op de stelling van Pythagoras:

$$\boxed{\cos^2 t + \sin^2 t = 1}$$

Deze gelijkheid geldt voor alle waarden van *t*.
De andere eigenschappen die je gezien hebt, hebben betrekking op het verband tussen de sinus (of cosinus) van $t + 2\mathrm{p}$, $t + \frac{1}{2}\mathrm{p}$, $t + \mathrm{p}$ of $-t$ en de sinus of cosinus van t.
We zetten die eigenschappen nog even op een rijtje:

$\sin(t + 2\mathrm{p}) = \sin t$	$\cos(t + 2\mathrm{p}) = \cos t$
$\sin(t + \frac{1}{2}\mathrm{p}) = \cos t$	$\cos(t + \frac{1}{2}\mathrm{p}) = -\sin t$
$\sin(t + \mathrm{p}) = -\sin t$	$\cos(t + \mathrm{p}) = -\cos t$
$\sin(-t) = -\sin t$	$\cos(-t) = \cos t$

Zonder meetkundige achtergrond is dit geen ‘lekker’ rijtje.
Als je de eenheidscirkel voor ogen hebt (met zo nodig de propeller of het molentje), zijn deze formules vrij gemakkelijk op te roepen.

9 **a.** Leid door combinatie van bovenstaande formules af dat voor elke waarde van *t* geldt: $\cos(\mathrm{p} - t) = -\cos t$ en $\sin(\mathrm{p} - t) = \sin t$.
b. Verklaar deze eigenschappen ook meetkundig.

tip **10** Als uitsmijter van dit hoofdstuk een verrassende puzzel.
Bereken:

$$\sum_{k=0}^{90} (\sin k)^2$$

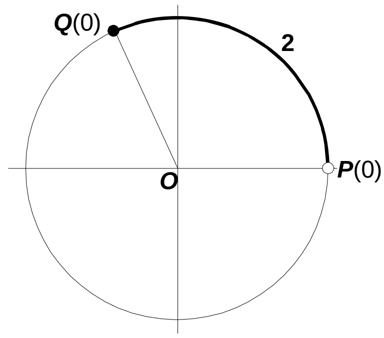
waarbij *k* de hoekgrootte in graden voorstelt.

4 Vergelijkingen met sinus & co

tip

1 De punten P en Q bewegen zich over de eenheidscirkel, volgens de formules:

$$\begin{cases} x_P(t) = \cos t \\ y_P(t) = \sin t \end{cases} \text{ en } \begin{cases} x_Q(t) = \cos(t+2) \\ y_Q(t) = \sin(t+2) \end{cases}$$



a. Het punt Q ligt steeds een booglengte 2 vóór op P. Geef op de eenheidscirkel aan waar P en Q kunnen liggen op de momenten dat ze dezelfde y-coördinaat hebben.

b. Voor welke waarden van t tussen 0 en 2π geldt dus: $\sin t = \sin(t + 2)$?

oneindig veel oplossingen

Als je **1b** goed hebt opgelost, heb je twee waarden voor t gevonden. Die twee waarden zijn dan *oplossingen* van de *vergelijking*:

$$\sin t = \sin(t+2)$$

Vanwege het periodieke karakter van de cirkelbeweging, heeft deze vergelijking nog oneindig veel meer oplossingen. Als P en Q vanuit posities met dezelfde y-coördinaat nog wat extra rondjes maken, hebben zij na afloop weer dezelfde y-coördinaat; zij bewegen immers met dezelfde snelheid. Dus bij ieder van de twee gevonden oplossingen kun je een geheel aantal keren 2π optellen .Als we de oplossingen van **1b** nu even t_1 en t_2 noemen, kunnen we *alle* oplossingen als volgt noteren:

$$\begin{aligned} t &= t_1 + k\ 2\pi \\ t &= t_2 + k\ 2\pi \end{aligned} \qquad \textbf{met } k = 0\ -\pm 1, \pm -2, ...$$

tip

2 Je kunt alle oplossingen van de vergelijking $\sin t = \sin(t + 2)$ ook met één formule beschrijven. Welke formule is dat?

tip

3 **a.** Gebruik de eenheidscirkel om twee oplossingen te vinden van de vergelijking:

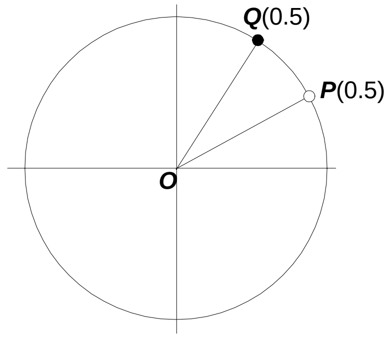
$$\cos t = \cos(t+2)$$

b. Hoe kun je nu *alle* oplossingen van die vergelijking noteren?

tip

4 De punten P en Q bewegen zich over de eenheidscirkel, volgens de formules:

$$\begin{cases} x_P(t) = \cos t \\ y_P(t) = \sin t \end{cases} \text{ en } \begin{cases} x_Q(t) = \cos 2t \\ y_Q(t) = \sin 2t \end{cases}$$



plaats van P en Q op t = 0.5

a. Op $t = 0$ vallen P en Q samen en hebben ze dus dezelfde y-coördinaat.
Wat is het eerstvolgende moment waarop ze weer dezelfde y-coördinaat hebben?

b. Er zijn in totaal vier posities van P op de eenheidscirkel waarbij $y_P = y_Q$. Die punten corresponderen met oplossingen van de vergelijking: $\sin t = \sin 2t$.
Teken die vier punten (zo nauwkeurig mogelijk).

c. Drie van de vier punten vormen de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek. Wat zijn de exacte coördinaten van die punten?

d. Om alle oplossingen van de vergelijking sin t = sin 2t te beschrijven kun je volstaan met twee formules. Welke formules zijn dat?

5 Teken voor elk van de volgende vergelijkingen eerst de punten op de eenheidscirkel die corresponderen met de oplossingen. Beschrijf daarna *alle* oplossingen:

a. $\cos t = \cos 2t$ **c.** $\cos t = \cos(t-1)$

b. $\sin t = \sin(t-1)$ **d.** $\sin t = \sin 3t$

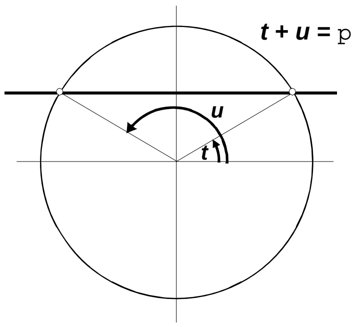
De meetkundige oplossingsmethode die je in de vorige opgaven hebt gebruikt, heeft het nadeel dat zij bij een meer ingewikkelde vergelijking, zoals:

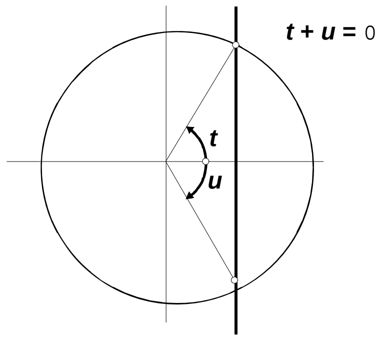
$$\sin(4t + 5) = \sin(2t + 3)$$

een heleboel hersengymnastiek vraagt.

sin(.) = sin(..)
en
cos(.) = cos(..)

Daarom bespreken we nu een algoritme dat snel resultaten geeft en waarbij geen puzzelwerk vereist is.
Bekijk onderstaande figuren:





Hieruit kun je begrijpen dat
- sin t en sin u alleen aan elkaar gelijk kunnen zijn als t en u aan elkaar gelijk zijn óf als ze samen gelijk zijn aan p (in beide gevallen afgezien van een veelvoud van 2p);
- cos t en cos u alleen aan elkaar gelijk kunnen zijn als t en u gelijk aan elkaar zijn óf als ze samen gelijk zijn aan 0 (in beide gevallen afgezien van een veelvoud van 2p).

Kortom:

met *k* = 0 –±1, ±–2, ...

sin *t* = sin *u*	**cos *t* = cos *u***
***t* = *u* + *k* 2p** óf ***t* + *u* = p + k 2p**	***t* = *u* + *k* 2p** óf ***t* + *u* = k 2p**

Deze algoritmen kan je altijd toepassen op vergelijkingen van het type sin(...) = sin (...) of cos (...) = cos (...), met op de plaats van de stippen uitdrukkingen in één variabele.

Om te laten zien hoe dit gaat, bekijken we twee voorbeelden van de vorige bladzij.

voorbeeld 1

$$\sin t = \sin 2t$$
$$t = 2t + k \quad 2\mathrm{p} \;\text{ óf }\; t + 2t = \mathrm{p} + k \quad 2\mathrm{p}$$
$$-t = k \quad 2\mathrm{p} \qquad \text{óf} \qquad 3t = \mathrm{p} + k \quad 2\mathrm{p}$$
$$t = -k \quad 2\mathrm{p} \qquad \text{óf} \qquad t = \frac{1}{3}\mathrm{p} + \quad \frac{2}{3}\mathrm{p}$$

voorbeeld 2

$$\cos t = \cos(t + 2)$$
$$t = t + 2 + k \quad 2\mathrm{p} \;\text{ óf }\; t + (t + 2) = k \quad 2\mathrm{p}$$
$$0 = 2 + k \quad 2\mathrm{p} \qquad \text{óf} \qquad 2t + 2 = k \quad 2\mathrm{p}$$
$$t = -1 + k \;\; \mathrm{p}$$

6 Bestudeer de beide oplossingsalgoritmen.
- **a.** Controleer of de resultaten in overeenstemming zijn met wat je eerder vond.
- **b.** In de oplossing van $\sin t = \sin 2t$, mag je $t = -k \quad 2\mathrm{p}$ vervangen door $t = k \quad 2\mathrm{p}$. Verklaar dit .
- **c.** Verklaar ook de laatste stap in de oplossing van $\cos t = \cos(t + 2)$.

7 Los op deze wijze de vier vergelijkingen op van opgave **5**.

8 Beschrijf alle oplossingen van de vergelijking: $\sin(4t + 5) = \sin(2t + 3)$.

9 Gegeven zijn de functies $y_1 = \sin(2\mathrm{p}x)$ en $y_2 = \cos(3\mathrm{p}x)$
- **a.** Hoe groot is de periode van y_1? En van y_2?
- **b.** Maak op de GR met venster [0 , 2] bij [-1 , 1] de grafieken van y_1 en y_2. Hoeveel snijpunten hebben de grafieken op het x-interval [0 , 2]?
- **c.** De vergelijking

$$\sin(2\mathrm{p}x) = \cos(3\mathrm{p}x)$$

kan met het voorgaande algoritme worden opgelost, als je $\cos(3\mathrm{p}x)$ vervangt door $\sin(3\mathrm{p}x + \frac{1}{2}\mathrm{p})$!
Los de zo ontstane vergelijking op met het algoritme. Controleer je resultaat met de grafiek van **b**.

10 Om de volgende vergelijkingen met behulp van het algoritme te kunnen oplossen, heb je eerst een van de formules uit de samenvatting bij hoofdstuk 3 nodig.
Kies de geschikte formule en los op:

- **a.** $\sin x = \cos 2x$
- **b.** $-\sin x = \sin(x - 1)$
- **c.** $\cos 2x = -\cos x$
- **d.** $\cos 4x = -\sin x$

Desgewenst kun je de oplossing controleren met grafieken.

5 Somformules

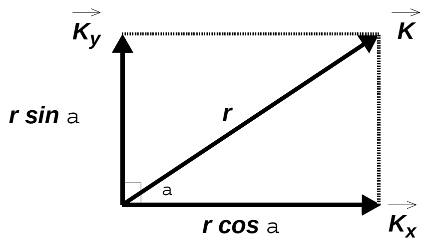
Je hebt in hoofdstuk 3 een paar formules gezien die de structuur hebben van

$$\cos(t + ...) = ... \text{ of } \sin(t + ...) = ...$$

In het rechterlid kwam er dan een uitdrukking als ±− cos *t* of − sin *t* te staan.
Als je in het linkerlid achter de + een hoekwaarde invult als bijvoorbeeld 1 of $\frac{2}{5}$p, dan worden de uitdrukkingen aan de rechterkant wat ingewikkelder.

vector ontbinden

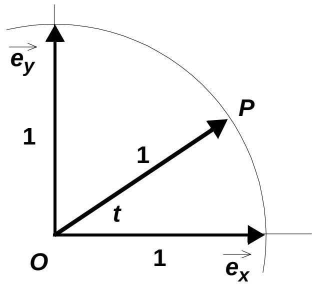
Voor je daar wat meer over te weten komt, nu eerst een kort intermezzo over *vectoren*. In de natuurkunde worden vectoren gebruikt om grootheden als kracht, snelheid en versnelling voor te stellen. Een veel gebruikte techniek in de natuurkunde is om een vector te ontbinden in onderling loodrechte *componenten*.

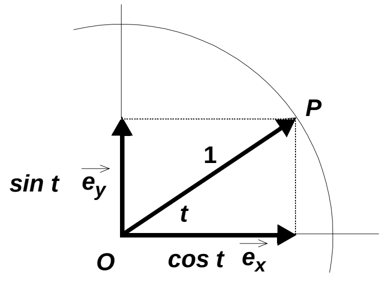


$$\vec{K} = \vec{K_x} + \vec{K_y}$$

In de figuur zie je de vector $\vec{K}$ ontbonden in de loodrechte componenten $\vec{K_x}$ en $\vec{K_y}$. Als $\vec{K}$ een hoek a maakt met $\vec{K_x}$ en als de lengte van $\vec{K}$ gelijk is aan *r*, dan is de lengte van $\vec{K_x}$ gelijk aan *r* cos a en die van $\vec{K_y}$ gelijk aan *r* sin a.

1 Bekijk de onderstaande figuur.
$\vec{e_x}$ en $\vec{e_y}$ zijn de vectoren met lengte 1 in de richting van de positieve *x*-as en *y*-as .
P is een punt op de eenheidscirkel.





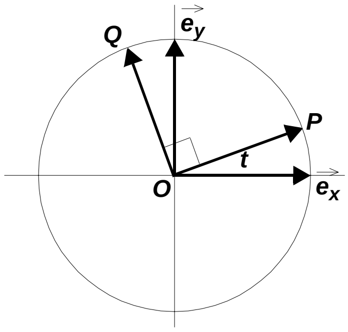
De hoek tussen $\vec{OP}$ en $\vec{e_x}$ is *t* radialen. In de figuur geldt: $0 < t < \frac{1}{2}$p
Er geldt (zie figuur):

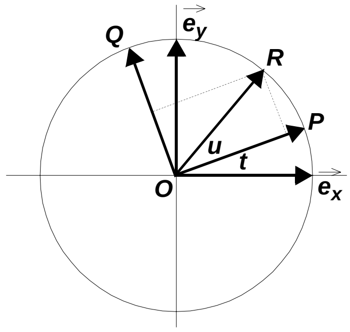
$$\vec{OP} = \cos t \ \vec{e_x} + \sin t \ \vec{e_y}$$

a. Geldt deze betrekking ook voor $t = 0$ en voor $t = \frac{1}{2}$p ?

b. En voor waarden van *t* buiten het interval [0 , $\frac{1}{2}$p] ?

2 Bekijk nu drie punten *P*, *Q* en *R* die in positieve richting langs de eenheidscirkel bewegen met een snelheid van 1 rad/sec.





De punten *Q* en *R* hebben een voorsprong op *P* van respectievelijk $\frac{1}{2}$p en *u* radialen. In de vorige opgave heb je gezien dat voor iedere waarde van *t* geldt:

$$\vec{OP} = \cos t \quad \vec{e_x} + \sin t \quad \vec{e_y}$$

a. Verklaar ook:

$$\vec{OQ} = -\sin t \quad \vec{e_x} + \cos t \quad \vec{e_y}$$

en

$$\vec{OR} = \cos (t+u) \quad \vec{e_x} + \sin (t+u) \quad \vec{e_y}$$

b. $\vec{OR}$ maakt een hoek van *u* rad met $\vec{OP}$.

Ontbind $\vec{OR}$ in component langs $\vec{OP}$ en $\vec{OQ}$. Dit geeft dan:

$$\vec{OR} = \cos u \quad \vec{OP} + \sin u \quad \vec{OQ}$$

Vervang $\vec{OP}$ en $\vec{OQ}$ door de bovenstaande uitdrukkingen in $\vec{e_x}$ en $\vec{e_y}$ en werk de zo verkregen vorm uit tot de gedaante $\vec{OR} = \ldots \quad \vec{e_x} + \ldots \quad \vec{e_y}$

c. Vergelijk dit resultaat met de tweede uitdrukking bij **a.**

Als je geen fout hebt gemaakt, dan krijg je de volgende formules.

somformules

$$\mathbf{\cos (t+u) = \cos u \quad \cos t \quad - \quad \sin u \quad \sin t}$$
$$\mathbf{\sin (t+u) = \cos u \quad \sin t \quad + \quad \sin u \quad \cos t}$$

3 Neem de proef op de som voor $t = 1$ en $u = 2$ met de GR (in RAD).

4 Ga na dat de propellerformules en de molenformules bijzondere gevallen zijn van de somformules.

5 Het linkerlid van beide somformules is ‘symmetrisch in *t* en *u*’, dat wil zeggen: je kunt *u* en *t* verwisselen zonder dat de waarde van de uitdrukking verandert. De rechterleden moeten dus ook symmetrisch in *t* en *u* zijn. Controleer of dit inderdaad zo is.

6 Gegeven is de vergelijking: $\cos 1 \quad \sin t + \sin 1 \quad \cos t = 1$.
Herschrijf deze vergelijking in de vorm sin (...) = sin (...) en los vervolgens de vergelijking op.

7 **a.** Maak op de GR de grafieken van $y_1 = \sin x$, $y_2 = \cos x$ en $y_3 = y_1 + y_2$.
b. Het lijkt er op dat de grafiek van y_3 ook een sinusoïde is. Het bewijs dat dit inderdaad zo is, kun je leveren met behulp van de somformules.
Toon aan:

$$\sqrt{2}\ \sin\left(x + \frac{p}{4}\right) = \sin x + \cos x$$

tip

8 **a.** Bewijs dat de waarde van:

$$\cos x\ \sin(1 - x) + \sin x\ \cos(1 - x)$$

onafhankelijk is van de waarde van x.
b. Hoe kun je die onafhankelijkheid op de GR laten zien?

verschil-formules

Uit de somformules volgen de verschilformules:

$$\begin{aligned} \cos(t - u) &= \cos u\ \cos t + \sin u\ \sin t \\ \sin(t - u) &= \cos u\ \sin t - \sin u\ \cos t \end{aligned}$$

9 **a.** Verklaar de verschilformules uit de somformules.
b. Controleer de verschilformules voor het speciale geval dat $t = u$.

10 Gegeven: $\sin a = \frac{3}{5}$ en $0 < a < \frac{1}{2}p$

tip

Bereken met behulp van de somformules: $\sin(2a)$ en $\cos(2a)$. Controleer je resultaat met de GR.

11 **a.** Maak op de GR de grafieken van $y_1 = \cos(2x)$ en $y_2 = \cos^2 x - \sin^2 x$
b. Je kunt bewijzen dat de grafieken van y_1 en y_2 inderdaad samenvallen met behulp van een van de somformules.
Neem $t = x$ en $u = x$ in de geschikte somformule en geef het bewijs.

12 Neem $t = x$ en $u = x$ in de formule voor $\sin(t + u)$.
Je krijgt dan een formule die iets zegt over het samenvallen van twee grafieken.
Welke functies passen er bij die grafieken?

13 **a.** Maak op de GR de grafieken van $y_1 = 2\cos^2 x - 1$ en $y_2 = 1 - 2\sin^2 x$.
Uit welke bekende formule volgt dat die grafieken samenvallen?
b. Beide grafieken vallen ook samen met de grafiek van $y_3 = \cos(2x)$. Controleer maar. Hoe kun je dit verklaren uit opgave **10**?

verdubbel-formules

Wat je in de opgaven **10**, **11** en **12** hebt ontdekt, vatten we samen in:

$$\begin{aligned} \cos(2t) &= \cos^2 t - \sin^2 t \\ &= 2\cos^2 t - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 t \\ \sin(2t) &= 2\cos t\ \sin t \end{aligned}$$

14 De grafieken van $y_1 = (\sin x + \cos x)^2$ en $y_2 = 1 + \sin 2x$ vallen samen.
Hoe kun je dat verklaren?

15 Los de beide volgende vergelijkingen op:
a. $2\cos t \sin t = \sin(1 - t)$
b. $\cos^2 t - \sin^2 t = \cos 3t$

Samenvatting hoofdstukken 4 en 5

algoritme voor vergelijkingen

met $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$\sin t = \sin u$	$\cos t = \cos u$
$t = u + k \cdot 2\pi$ óf $t + u = \pi + k \cdot 2\pi$	$t = u + k \cdot 2\pi$ óf $t + u = k \cdot 2\pi$

som- en verschil-formules

De som- en verschilformules geven aan hoe cosinus of sinus van $t - u$ uitgedrukt kan worden in $\cos t$, $\sin t$, $\cos u$ en $\sin u$.

$$\cos(t+u) = \cos u \cdot \cos t - \sin u \cdot \sin t$$
$$\sin(t+u) = \cos u \cdot \sin t + \sin u \cdot \cos t$$

$$\cos(t-u) = \cos u \cdot \cos t + \sin u \cdot \sin t$$
$$\sin(t-u) = \cos u \cdot \sin t - \sin u \cdot \cos t$$

verdubbel-formules

Door in de eerste formules $t = u$ te nemen, krijg je de verdubbelformules:

$$\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t$$
$$\sin(2t) = 2 \cdot \cos t \cdot \sin t$$

Voor $\cos 2t$ zijn er nog twee andere uitdrukkingen nuttig:

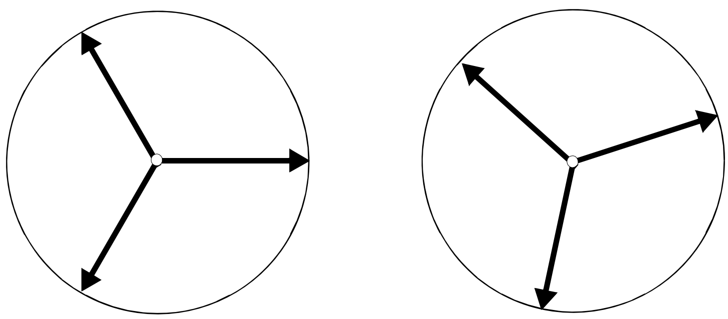
$$\cos(2t) = 2 \cdot \cos^2 t - 1$$
$$\cos(2t) = 1 - 2 \cdot \sin^2 t$$

16 a. Bewijs dat voor iedere waarde van x geldt:

$$\sin x + \sin\left(x + \tfrac{2}{3}\pi\right) + \sin\left(x + \tfrac{4}{3}\pi\right) = 0$$

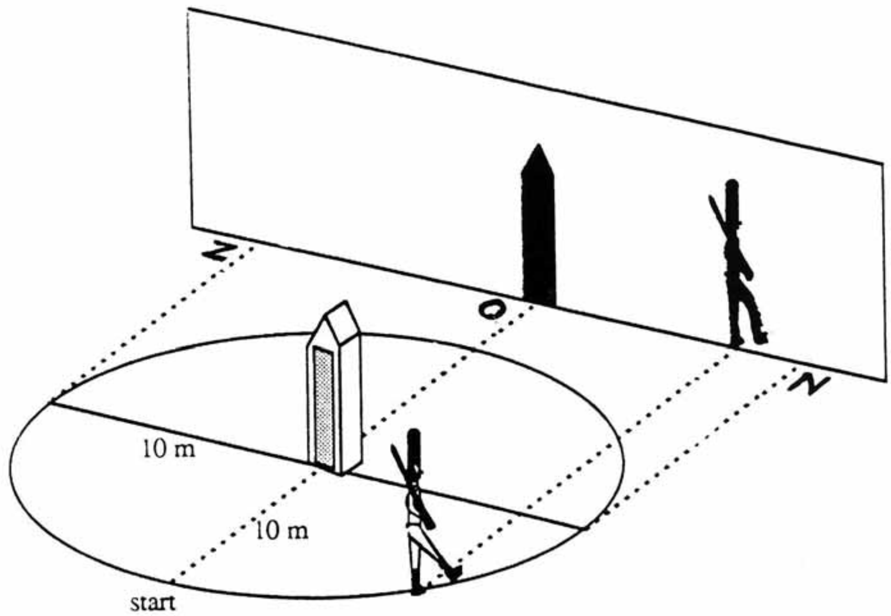
tip

b. Probeer deze gelijkheid ook meetkundig te verklaren.



6 Afgeleide en snelheid

heen en weer Een cirkelbeweging kan gemakkelijk in verband gebracht worden met een heen-en-weer beweging. Onderstaand plaatje stelt een schildwacht voor die met een constante snelheid rondjes om het wachthuisje maakt. Achter het wachthuisje staat een witgeschilderde muur waarop de schaduw van de schildwacht te zien is. De zon staat erg laag. We doen net alsof de zonnestralen loodrecht op de muur staan. De schaduwschildwacht loopt nu heen en weer op de muur tussen *N* en *Z*.



1 Veronderstel dat de schildwacht precies 60 seconden over één rondje doet.
Op het tijdstip $t = 0$ zou de schaduw in *O* zijn, als er geen wachthuisje stond.

a. Waar precies bevindt de schaduw zich op $t = 15$?

tip **b.** Op $t = 5$ is de schaduw halverwege *O* en *N*. Verklaar dat.

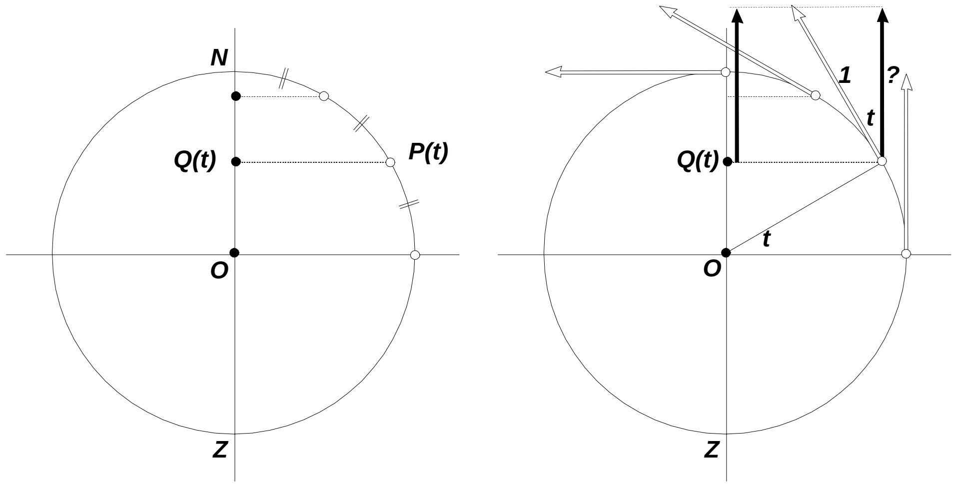
c. De snelheid waarmee de schaduw over de muur beweegt is dus niet constant! Op welke plaatsen denk je dat die snelheid minimaal is? En op welke plaats zal de snelheid maximaal zijn?

d. De afstand *s* van de schaduw tot *O* rekenen we positief als de schaduw aan de kant van *N*, en negatief aan de kant van *Z*.
Geef een formule die *s* in *t* uitdrukt.

projectie van de cirkelbeweging De beweging van de schaduwschildwacht ontstaat door loodrechte projectie uit de cirkelbeweging van de echte schildwacht. Terwijl de laatste, goed gedrild als hij is, met een constante snelheid loopt, verandert de snelheid van de schaduw voortdurend. We willen nu weten door welk type functie die snelheid wordt beschreven.

2 Voor we daarmee verder gaan, krijg je nu eerst de kans daar zelf een idee over te vormen. Probeer bijvoorbeeld een grafiek te schetsen van de snelheid van de schildwacht als functie van de tijd. Waar lijkt de snelheidsgrafiek op?

De situatie van de schildwacht vervangen we door de cirkelbeweging van een punt P over de eenheidscirkel met een hoeksnelheid van 1 rad/sec. Startpunt is (1 , 0). De projectierichting kiezen we parallel met de x-as. Die beweging wordt dan geprojecteerd als ‘heen-en-weer-beweging’ van Q op de y -as.



3 Beide figuren stellen een cirkel voor met straal 1 cm.
In het linkerplaatje kun je nog eens goed zien dat gelijke (boog-)afstanden afgelegd door P niet corresponderen met gelijke afstanden voor Q .

- **a.** Ga na dat de door Q afgelegde afstanden die corresponderen met de drie gelijke bogen gelijk zijn aan respectievelijk 0.50 , 0.37 en 0.13 cm.
- **b.** Bereken de gemiddelde snelheid (in cm/sec) van Q bij zijn reisje van O naar N?
- **c.** Hoe groot is de gemiddelde snelheid van P bij zijn reisje over een kwartcirkel?

snelheids-vector

4 De snelheid van P is constant van grootte, maar verandert continu van richting. Die snelheid kan in elke plaats worden voorgesteld door een vector met lengte 1. De snelheidsvector valt langs de raaklijn van de cirkel ter plaatse! De snelheid van het ‘schaduwpunt’ Q is dan gelijk aan de *verticale component* van die vector. (Zie de rechter figuur).
Afspraak: de snelheid van Q wordt positief gerekend als die vector naar boven (in de positieve y-richting) wijst en negatief als de vector naar beneden wijst.

- **a.** Hoe groot is de snelheid van Q als dit punt zich in N of Z bevindt?
- **b.** In welke positie van Q is zijn snelheid precies gelijk aan die van P?
- tip **c.** In de hierboven getekende situatie maakt de straal OP een hoek van t rad. met de positieve x-as. Toon aan dat de hoek tussen de snelheidsvector van P en zijn verticale component ook gelijk is aan t rad.
- **d.** Druk de snelheid van Q uit in t.
- **e.** Maak zelf een tekening voor het geval $\frac{1}{2}\pi < t < \pi$ en ga na dat je voor de snelheid van Q dezelfde uitdrukking vindt als bij vraag **d.**

afgeleide van sin is cos

De positie van Q op het tijdstip t bij de hier geschetste beweging geven we aan met $y(t)$. Er geldt: $y(t) = \sin t$. De snelheid van Q op het tijdstip t is gelijk aan de afgeleide $y'(t)$. In opgave **4** heb je ontdekt dat deze snelheid in de daar getekende situaties gelijk moet zijn aan $\cos t$. Uit de definitie van de cosinus volgt dat dit ook in andere situaties geldt. Conclusie: als $y(t) = \sin t$, dan $y'(t) = \cos t$.

tip

5 Bekijk nu bij de beweging van P (zie opgaven **3** en **4**), de beweging van de loodrechte projectie van P op de x-as. Leid hieruit af dat geldt: als $x(t) = \cos t$, dan $x'(t) = - \sin t$.

sin' = cos
cos' = -sin

Zo hebben we dus de volgende differentieerregels bewezen:

$$\boxed{\begin{array}{c} \frac{d}{dt}\sin t = \cos t \\ \\ \frac{d}{dt}\cos t = -\sin t \end{array}}$$

Opmerkingen

– De voorgaande redenering is gebaseerd op de begrippen snelheid en snelheidsvector; het is een natuurkundig getint bewijs. In hoofdstuk 7 zullen we nog op een tweede manier de regels sin' = cos en cos' = **-** sin afleiden, zonder gebruik te maken van kennis uit de natuurkunde.
– Het belang van de radiaal als hoekmaat kan nu pas worden duidelijk gemaakt. Omdat een hoek van 1 radiaal overeenkomt met een boog op de eenheidscirkel met lengte 1, konden we zeggen dat bij een hoeksnelheid van 1 rad/sec, de snelheidsvector de lengte 1 heeft. En daaruit volgen de ‘mooie’ formules voor de afgeleiden van sin en cos. Een hoeksnelheid van bijvoorbeeld 1 /sec geeft een snelheidsvector met lengte $\frac{2p}{360}$.

tip

6 Bekijk op de GR (Mode op Radian!) de numerieke afgeleiden van sin en cos.
Komt het resultaat overeen met bovenstaande regels?

7 Bereken:

a. $\frac{d}{dt}\sin 2t$

b. $\frac{d}{dt}\cos(t+2)$

c. $\frac{d}{dt}t\sin t$

d. $\frac{d}{dt}(2\sin 5t + 5\cos 2t)$

e. $\frac{d}{dt}e^{\cos t}$

f. $\frac{d}{dt}\frac{\sin t}{t}$

8 **a.** Bereken de afgeleide van $y(x) = \cos x \sin(1 - x) + \sin x \cos(1 - x)$.
b. Vergelijk het resultaat met de bewering in opgave **8** hoofdstuk 4.

9 **a.** Geef een lineaire benadering van $\sin x$ in de buurt van $x = 0$.
b. Hoe kun je het antwoord grafisch controleren met de GR?

10 Gegeven: $A(t) = \sin t + \cos t$ en $B(t) = e^t \cos t$.
Te bewijzen: $B'(t) = e^t A'(t)$.

tip

11 **a.** Bewijs dat geldt:

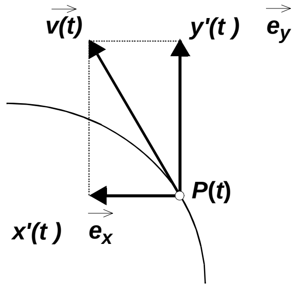
$$\frac{d}{dx}\cos^2 x = \frac{d}{dx}\left(\tfrac{1}{2}\cos 2x\right)$$

b. Wat betekent dit resultaat voor de grafieken van $y_1 = \cos^2 x$ en $y_2 = \frac{1}{2}\cos 2x$?

12 Terug naar opgave **1** van dit hoofdstuk.
a. Hoe groot is de snelheid van de rondlopende schildwacht in m/sec?
b. De bewegingsformule voor de schaduw luidt: $s(t) = 10\sin\left(\frac{p}{30}t\right)$.
Druk de snelheid $v(t)$ van de schaduw uit in t.
c. Laat zien dat de versnelling $a(t)$ van de schaduw evenredig is met de (positieve of negatieve) afstand tot O.

snelheid met componenten

Beschouw een cirkelbeweging in het *Oxy*-vlak.
De positie van het bewegende punt P op het tijdstip t is: $P(t) = (x\,(t)\ ,\ y\,(t))$.
De snelheidsvector van de beweging op het tijdstip t valt langs de raaklijn in $P(t)$.
De snelheidsvector kan worden ontbonden in een horizontale en een verticale component.
Die componenten vind je door de coördinaten van $P(t)$ naar t te differentiëren.



$$\vec{v}(t) = x'(t)\ \vec{e}_x + y'(t)\ \vec{e}_y$$

Hierbij zijn $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$ zijn de eenheidsvectoren in de richting van de positieve x-as en de positieve y-as.
In plaats van $\vec{v}(t) = x'(t)t\ \ \vec{e}_x + y'(t)\ \ \vec{e}_y$, schrijft men ook kortweg: $\vec{v}(t) = (x'(t)\ ,\ y'(t))$
De (grootte van) de snelheid (= lengte van de vector), kun je uitrekenen met behulp van de stelling van Pythagoras. Geven we de snelheid aan met $v(t)$, dan geldt:

$$v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

Bij een eenparige cirkelbeweging is $v(t)$ constant, maar in het vervolg zal je ook cirkelbewegingen tegenkomen, waarbij dat niet het geval is.
Overigens geldt het voorgaande niet alleen voor cirkelbewegingen, maar ook voor bewegingen langs andere gladde krommen (of rechte lijnen). In een volgend boekje komen we daarop terug.

13 Een eenparige cirkelbeweging is gegeven door $\begin{cases} x\,(t) = r\cos t \\ y\,(t) = r\sin t \end{cases}$

a. Wat zijn de componenten van de snelheidsvector $\vec{v}(t)$?
b. Als je de componenten van de snelheidsvector differentieert, krijg je de versnellingen in horizontale en verticale richting. Die vormen dan de componenten van de versnellingsvector $\vec{a}(t)$.
Welke zijn die componenten?
c. In welke richting wijst de versnellingsvector?

14 De eenparige cirkelbeweging van een punt P om het punt $(a\ ,\ b)$ met een hoeksnelheid van w rad/sec en met straal r wordt beschreven door de formules:

$$\begin{cases} x\,(t) = a + r\cos \mathrm{w}\, t \\ y\,(t) = b + r\sin \mathrm{w}\, t \end{cases}$$

Neem aan dat de lengte-eenheid 1 cm is. Hoe groot is de snelheid in cm/sec van het ronddraaiende punt P ?

15 Tot nu toe heb je steeds cirkelbewegingen gezien waarbij de snelheid constant was. In deze opgave bekijk je een niet-eenparige cirkelbeweging.

a. Maak op de GR de cirkelbeweging zichtbaar die wordt gegeven door:

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t^2) \\ y(t) = \sin(t^2) \end{cases}$$

Neem het *t*-interval [0 , 2.5] en 0.1 als stapgrootte van *t*.

b. Je ziet een versnelde cirkelbeweging. Toon aan dat de snelheid *v* evenredig is met de tijd *t*.

c. Als je het *t*-interval groter maakt, bijvoorbeeld [0 , 10] gebeurt er iets geks op de GR. Hoe kun je verklaren wat je te zien krijgt?

16 Een punt *P* beweegt zich in het *Oxy*-vlak volgens de formules:

$$\begin{cases} x(t) = \cos(2\sqrt{t}) \\ y(t) = \sin(2\sqrt{t}) \end{cases}$$

Hierbij is *t* de tijd in seconden.

a. Verklaar waarom ook hier sprake is van een niet-eenparige cirkelbeweging.

b. De snelheid van *P* op het moment *t* noemen we $v(t)$. Druk $v(t)$ uit in *t*.

Samenvatting

De afgeleiden van sin en cos hebben we gevonden uit de cirkelbeweging.
Resultaat:

$$\frac{d}{dt}\sin t = \cos t$$

$$\frac{d}{dt}\cos t = -\sin t$$

Bij de beweging van een punt *P* in het *Oxy*-vlak, waarbij de coördinaten *x* en *y* van *P* gegeven zijn als functies van *t*, kun je de horizontale en de verticale component van de snelheidsvector vinden door differentiëren van *x* en *y* naar *t*:

$$\vec{v(t)} = x'(t)\ \vec{e_x} + y'(t)\ \vec{e_y}$$

De lijn waarlangs de snelheidsvector wijst is de *raaklijn* aan de baan van *P*.

De grootte van de snelheid (= lengte van de vector), kun je uitrekenen met behulp van de stelling van Pythagoras. Er geldt:

$$v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

extra opgave **17 a.** Bekijk op de GR de periodieke beweging van een punt *P* gegeven door:

$$\begin{cases} x(t) = (\cos t)^3 \\ y(t) = (\sin t)^3 \end{cases}$$

b. Laat zien dat

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 1$$

een vergelijking van de baan van *P* is.

c. Bereken $x'(t)$ en $y'(t)$.

d. Bewijs dat geldt:

$$v(t) = \left|1\tfrac{1}{2}\sin 2t\right|$$

Opmerking: de absolute waarde is nodig, omdat de lengte van een vector positief wordt gerekend!

e. In welke punten van de baan is de snelheid maximaal?

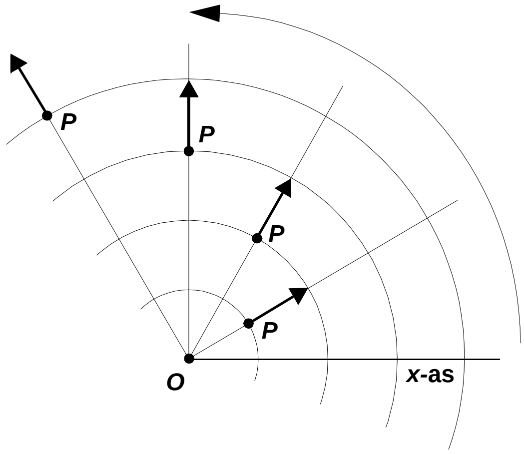
tip **f.** De baan van het punt *P* wordt astroide genoemd. Deze kromme heeft een zeer bijzondere eigenschap; het stuk van de raaklijn in een punt dat ligt tussen de *x*-as en de *y*-as, heeft steeds dezelfde lengte (in dit geval 1). De astroide wordt als het ware voortgebracht door een lijnstuk met vaste lengte, waarvan het ene eindpunt langs de *x*-as en het andere eindpunt langs de *y*-as glijdt. Probeer deze eigenschap op basis van de formules voor $x(t)$, $y(t)$, $x'(t)$ en $y'(t)$ te bewijzen.

7 Spiraal van Archimedes

1 Opgave **10** uit hoofdstuk 2 van luidde:
'Hoe kun je de bewegingsformules van een eenparige cirkelbeweging veranderen, zo dat het punt zich langs een *spiraal* beweegt? Gebruik PARKROM om te experimenteren.' Weet je nog welk antwoord je indertijd hebt gegeven?

Op de volgende manier kun je een spiraalbeweging krijgen als samenstelling van twee gelijktijdige bewegingen:

- een halve rechte lijn draait vanuit de positieve *x*-as rond *O* met een constante hoeksnelheid
- een punt *P* beweegt zich vanuit *O* over deze draaiende halve rechte met een constante snelheid van de oorsprong af.



2 Stel dat de halve rechte draait met een hoeksnelheid van 1 radiaal per seconde.

a. Welke bewegingsvergelijkingen beschrijven de beweging van *P*, als *P* zich op de draaiende rechte zou bevinden op een vaste afstand *r* van *O*?

b. In de afbeelding hierboven verwijdert *P* zich echter met een constante snelheid van 1 cm per seconde van *O*. Pas de bewegingsformules hieraan aan.

c. Controleer de bewegingsformules met een tekening op de GR.

3 **a.** Verander de bewegingsvergelijkingen zodat de spiraal niet tegen de klok in, maar met de klok mee draait.

b. Hoe verandert de spiraal als de hoeksnelheid twee keer zo groot wordt, terwijl de snelheid waarmee *P* van *O* af beweegt gelijk blijft?

c. Teken de spiraal als de hoeksnelheid 5 radialen per seconde is. Waarom wordt de spiraal naar buiten toe steeds hoekiger getekend?

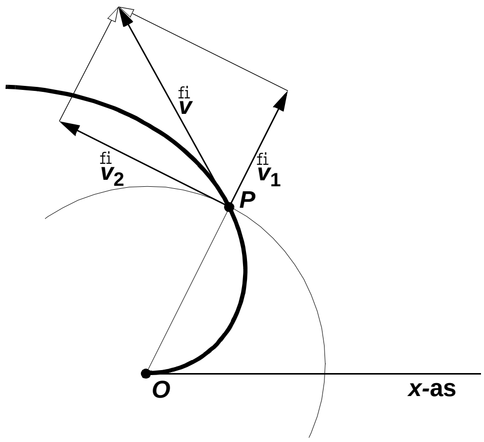
Archimedische spiraal

Als de beweging van een punt *P* beschreven wordt door de formules:

$$\begin{cases} x(t) = t \cos t \\ y(t) = t \sin t \end{cases}$$

dan doorloopt *P* een spiraal. Deze spiraal heet de *spiraal van Archimedes*.
Archimedes, de beroemde Griekse wiskundige uit de derde eeuw voor Christus, bedacht een manier om de *richting* en de *grootte* van de snelheid te construeren. Ook berekende hij de exacte oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door een deel van de spiraal en twee voerstralen. Dat laatste voert hier te ver.

4 Archimedes gebruikte onderstaande constructie



In de tekening is $\vec{v}$ de snelheidsvector en zijn $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$ de componenten van de snelheidsvector in het verlengde van *OP* respectievelijk loodrecht daarop.

a. Bestudeer de tekening en verklaar de constructie.

b. Neem de figuur op papier over. Kies zelf twee andere punten op de spiraal en construeer de snelheidsvectoren in deze twee punten.

c. Teken de spiraal op de GR en loop er met TRACE overheen.
Hoe zie je dat de snelheid van het punt steeds groter wordt?
Hoe blijkt dat uit bovenstaande constructie?

5 Stel de hoek die *OP* heeft gedraaid t.o.v. de positieve *x*-as gelijk aan *t* radialen.

a. Druk de kentallen van $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$ uit in *t*.

b. Er zijn nu twee manieren om de kentallen van de raakvector $\vec{v}$ te bepalen:
- door optelling van $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$
- door differentiëren van de bewegingsformules $(x(t),y(t))$.

Controleer dat beide manieren hetzelfde opleveren.

c. Bereken ook de grootte van de snelheid op tijdstip *t*.

6 Deze opgave gaat over de afstanden tussen de opeenvolgende snijpunten van de Archimedische spiraal met de positieve *x*-as.

a. Teken de spiraal op papier, zodat minstens vier rondes zichtbaar zijn.

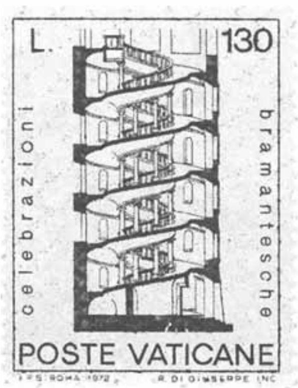
b. Meet de afstanden tussen de opeenvolgende snijpunten van de spiraal met de positieve *x*-as. Wat valt je op?

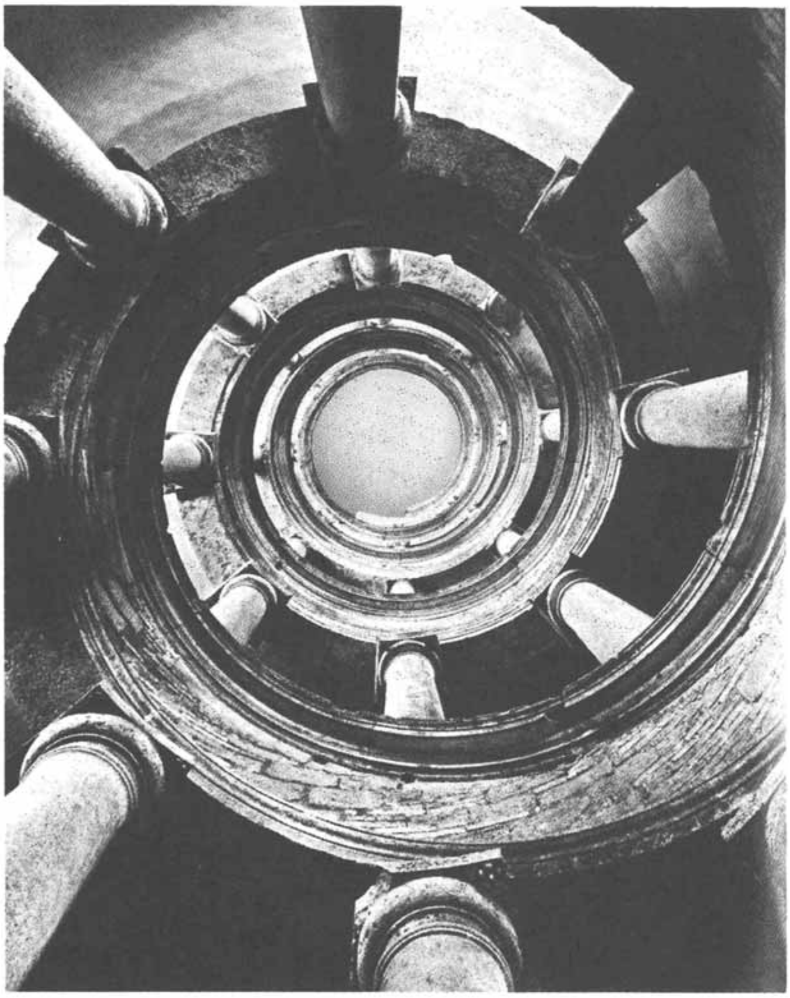
c. Geef een verklaring voor wat je bij **b.** gevonden hebt.

d. Hoe zit het met de snijpunten van de spiraal met de lijn $y = x$?

8 Schroeflijn

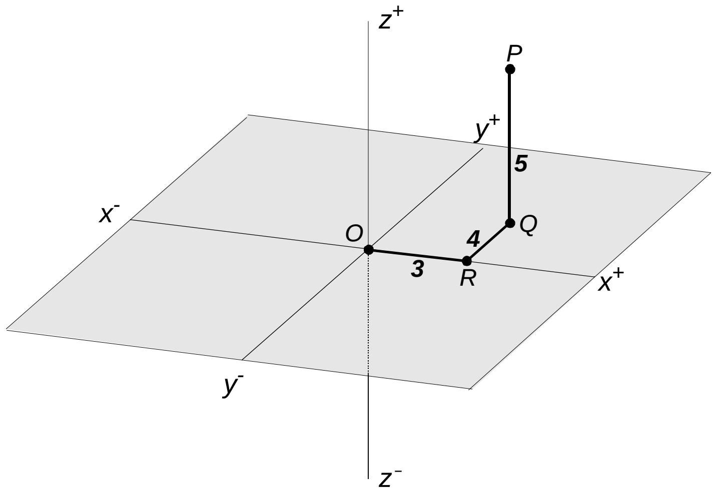
In het voorgaande ben je een aantal periodieke bewegingen in het vlak tegengekomen.
In dit hoofdstuk bekijken we een beweging in de ruimte.
De allereerste tekening in dit boek, afkomstig van de grote kunstenaar Albrecht Dürer, is, zoals gezegd, waarschijnlijk het eerste voorbeeld van een sinusoïde in de geschiedenis. Dürer bedoelde met zijn tekening een zich omhoog bewegende spiraal (denk aan een wenteltrap!) te schetsen. De cirkelfiguur is het *bovenaanzicht* en de sinuskromme het *zij-aanzicht* van de spiraal.
Hieronder zie je een foto van een wenteltrap in het Vaticaan (in het slot Belvédère) van de architect Dunato Bramante (1444-1514). De postzegel uit 1972 laat het zijaanzicht van deze trap zien.





Als je je voorstelt dat iemand met constante snelheid zo'n wenteltrap oploopt, dan krijg je in het bovenaanzicht van Dürer een eenparige cirkelbeweging te zien.
In het zij-aanzicht zie je dan een beweging langs een sinusoïde.

De beweging langs zo'n wenteltrap of de spiraal van Dürer, is een ruimtelijke beweging. Om zo'n beweging vast te leggen met formules hebben we een 3-dimensionaal coördinatenstelsel nodig. Zo'n stelsel kan als volgt worden gebouwd. Richt in de oorsprong van een *Oxy*-stelsel een lijn op die loodrecht op zowel de *x*-as als de *y*-as staat. Die lijn noemen we de *z*-as.



In de (ruimte-)figuur hierboven zie je het *Oxy*-vlak grijs. Het punt *Q* ligt in het grijze vlak en heeft de *x*-coördinaat 3 en de *y*-coördinaat 4. Van het punt *P* dat 5 eenheden boven het punt *Q* ligt, zeggen we nu dat de coördinaten (3 , 4 , 5) zijn. De eerste twee coördinaten geven de positie aan van het voetpunt van *P* in het *Oxy*-vlak, de derde coördinaat (*z*-coördinaat) geeft de hoogte aan boven het *Oxy*-vlak.
Ligt een punt *onder* het *Oxy*-vlak, dan wordt de *z*-coördinaat negatief gerekend.
Voor punten *in* het *Oxy*-vlak is de *z*-coördinaat 0.

1 **a.** Wat zijn dus de drie coördinaten van het punt *Q* in de figuur hierboven? En van *R*?

b. Veronderstel dat het punt *P* zich omhoog beweegt evenwijdig aan de *z*-as met een snelheid van 2 lengte-eenheden per seconde. Omdat de *x*-coördinaat en de *y*-coördinaat niet veranderen zijn de bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = 3 \\ y(t) = 4 \\ z(t) = \ldots \end{cases}$$

Wat moet er op de plaats van de stippen staan (aangenomen dat op $t = 0$ de *z*-coördinaat 5 is)?

c. Hoe beweegt *P* zich (en met welke snelheid) als de bewegingsvergelijkingen zijn:

$$\begin{cases} x(t) = 3 - t \\ y(t) = 4 \\ z(t) = 5 \end{cases}$$

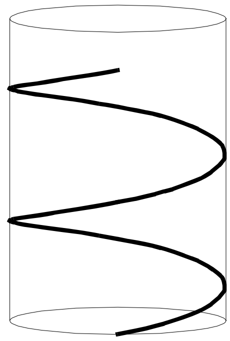
d. En hoe als geldt:

$$\begin{cases} x(t) = 3 + t \\ y(t) = 4 + t \\ z(t) = 5 \end{cases}$$

Nu de wenteltrapbeweging, ook wel *schroefbeweging* genoemd.
Een eenvoudig geval krijg je als je aanneemt dat:

– Het startpunt van de beweging is (1 , 0 , 0)
– In het bovenaanzicht (op het *Oxy*-vlak) is de beweging een eenparige cirkelbeweging in positieve richting met hoeksnelheid 1 rad/sec.
– De opwaartse snelheid (in de richting van de positieve *z*-as) is 1 eenheid per sec.

2 a. Beschrijf de bewegingsformules van deze schroefbeweging. De baan van het punt wordt *schroeflijn* (of *helix*) genoemd.

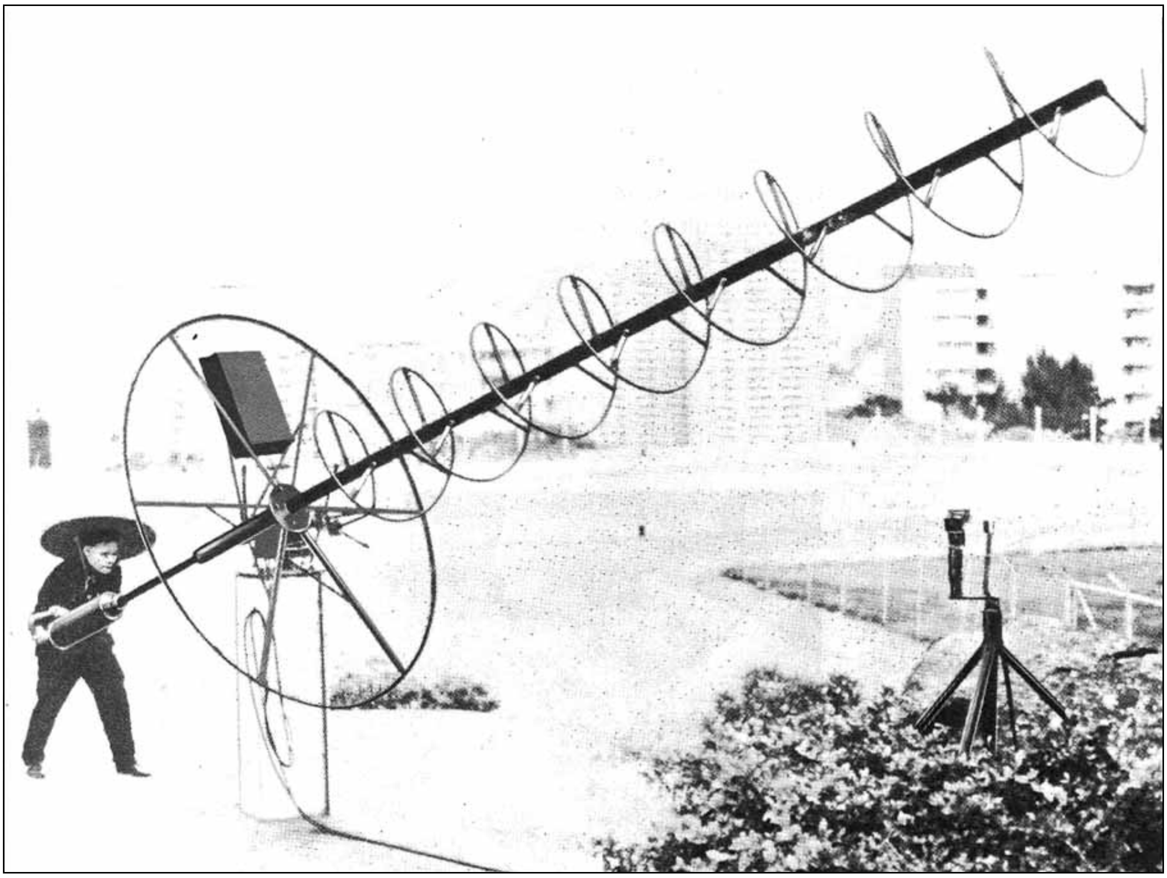


b. De snelheidsvector op het tijdstip t heeft drie componenten (in de x, y en z richting). Die componenten vind je, net als bij een beweging in het *Oxy*-vlak, door differentiëren. Ga na dat je zo krijgt:

$$\vec{v} = -\sin t \ \vec{e}_x + \cos t \ \vec{e}_y + 1 \ \vec{e}_z$$

c. De snelheidsvector op het tijdstip t valt langs de raaklijn in $P(t)$ aan de schroeflijn. Verklaar uit **b** waarom alle raaklijnen van de schroeflijn een hoek van 45° met de verticale richting maken.

d. De snelheid maakt niet alleen een constante hoek met de as van de schroeflijn, maar is ook constant van grootte. Hoe groot?



De foto toont een miniatuur radiotelescoop in Hong Kong met een schroeflijn-antenne, ingesteld op een passerende Amerikaanse weersatelliet

3 De schroeflijn ligt geheel op een cilindervlak met straal 1 om de z-as. Voor één periode is een cilinder met hoogte 2p nodig.
Zo'n cilinder kun je openknippen langs de verticale lijn door (1 , 0 , 0) en uitrollen. Er ontstaat dan een rechthoek. Teken de uitgerolde schroeflijn in die recht

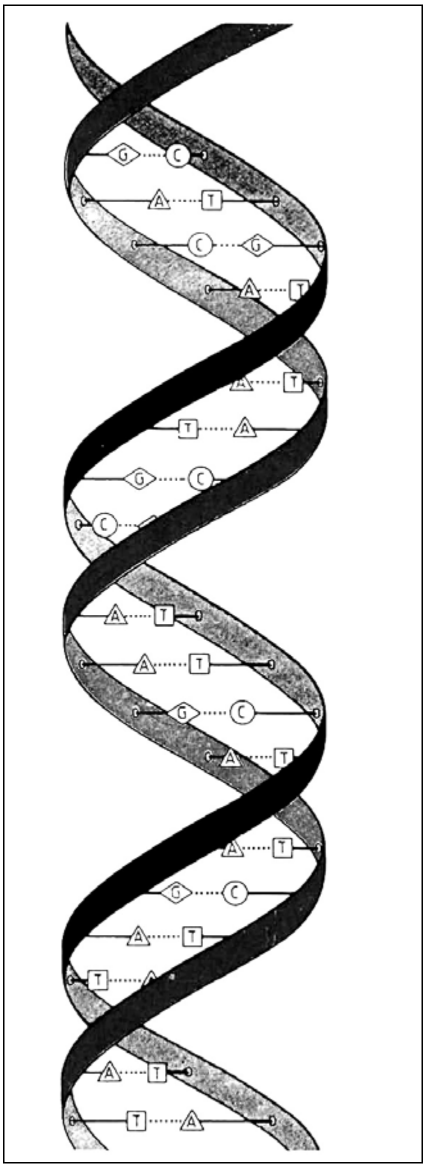
4 **a.** Wat moet je veranderen in de bewegingsvergelijkingen om een schroeflijn op dezelfde cilinder te krijgen met een periode die 2 keer zo klein is.
b. Hoe groot is nu (bij benadering) de hoek die de snelheidsvector maakt met de verticale richting?
c. Hoe teken je die schroeflijn op de uitgerolde cilinder (met hoogte 2p)?

5 De schroeflijn in opgave **2** is een *rechtsdraaiende* schroeflijn. Wat moet je aan de formules veranderen om er een *linksdraaiende* schroeflijn van te maken?

6 Het Watson-Crick-model van het DNA-molekuul, de zogenaamde 'dubbel-helix', bestaat uit twee schroeflijnen waarbij de ene schroeflijn wordt verkregen door de andere 90^{o} om zijn as te draaien.
a. Neem voor de ene schroeflijn de parametervoorstelling

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases}$$

Wat zal dan de parametervoorstelling van de andere schroeflijn zijn?
b. De horizontale verbindingslijnstukken (de 'sporten' van zo'n dubbel-helix) zijn allemaal even lang. Toon dit aan.



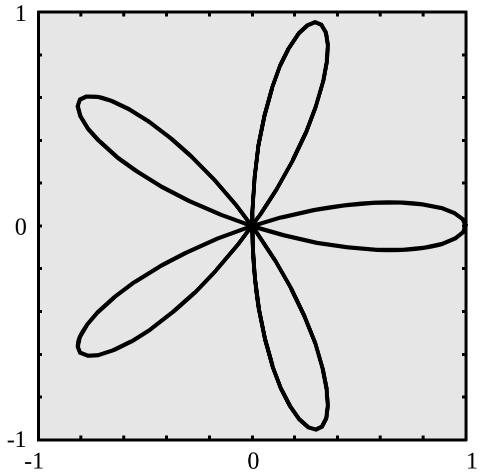
Onderzoeksopdracht ‘Bloemen’

In deze opdracht ga je kromme lijnen onderzoeken, die passen bij een parametervoorstelling van het type:

$$\begin{cases} x(t) = \cos nt \cos t \\ y(t) = \cos nt \sin t \end{cases}$$

met n = 1, 2, 3, ...

Hieronder zie je zo’n kromme (voor een zekere waarde van n).



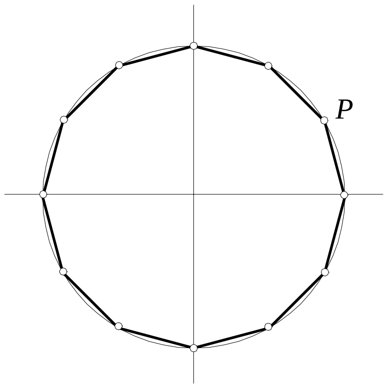
We noemen die kromme een *bloem-met-5-blaadjes*.
Neem als t-interval steeds $[0 , 2\pi]$.

- Waar liggen de uiterste puntjes van de bloemblaadjes?
- Onderzoek met de GR hoe het aantal blaadjes van de bloem afhangt van n.
- Formuleer een algemene regel.
- Hoe is die regel te verklaren?

Zelftoets

1 Een punt P beweegt zich in het Oxy-vlak over een cirkel met middelpunt (5 , 3) en straal 10. Op het tijdstip $t = 0$, bevindt P zich in (15, 3). De hoeksnelheid is 5 radialen per seconde en de bewegingsrichting is positief.
Geef de formules die deze beweging beschrijven.

2 In de eenheidscirkel is een regelmatige twaalfhoek beschreven.



Het punt P correspondeert met oneindig veel oplossingen van een vergelijking van de gedaante:

$$\sin t = \sin(nt)$$

met $0 < n < 12$.

a. Welke waarde heeft n?

b. Welke hoekpunten van de twaalfhoek corresponderen *niet* met deze vergelijking?

3 Bereken:

a. $\frac{d}{dt}\sin(4t + 5)$

b. $\frac{d}{dt}\ln(2 + \sin t)$

c. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos x}\right)$

d. $\frac{d}{dx}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

4 Een beweging in het Oxy-vlak wordt beschreven door;

$$\begin{cases} x(t) = \cos^2 t \\ y(t) = \sin^2 t \end{cases}$$

a. De baan van het punt is een lijnstuk. Hoe kun je dat verklaren?

b. Hoe vaak wordt het lijnstuk doorlopen in het tijdsinterval [0 , 2p]?

c. Hoe groot is de maximale snelheid op dit tijdsinterval?

5 Maak met de GR de grafieken van:

$y_1 = \sin x \quad \sin(1 - x)$ en $y_2 = \cos x \quad \cos(1 - x)$

Het lijkt er op of de grafieken verschoven ten opzichte van elkaar liggen.
Onderzoek of dit werkelijk zo is en bewijs je antwoord.

Tips

Hoofdstuk 1 (Water-) rad en sinus

1 **a.** Zet de GR op Degree. Maak voor de uitleg een goed plaatje.
b. Ga eerst na hoe groot de draaihoek is op de diverse tijdstippen.

2 **a.** Maak een tekening (cirkel met de bedoelde draaihoeken).
b. Eén of meer complete rondjes hebben geen invloed op de hoogte; je kunt dus altijd de hoek terugbrengen tot één die tussen 0× en 360 ligt.
c. Als het waar is wat er staat, dan weet je iets over het verschil tussen 11886 en 6

4 Eén volledig rondje duurt 24 uur.

6 Let op de boog bij een hoek van 1 rad en bij een hoek 60× .

7 Hoeveel radialen is 360 ?

12 1 rad hoort bij een boog met lengte *r*.

13 1 hoort bij een boog met lengte $\frac{2pr}{360}$.

14 **a.** Zet de GR op RAD (= radian).
c. Wat is de periode van $y = \sin x$?

15 **c.** Hoe groot is het deel van de omtrek dat onder water zit?

Hoofdstuk 2 Cirkelbewegingen op de computer en de GR

10 Bij een cirkelbeweging is de afstand van het bewegende punt tot een vast punt constant; bij een spiraalbeweging verandert die afstand continu.

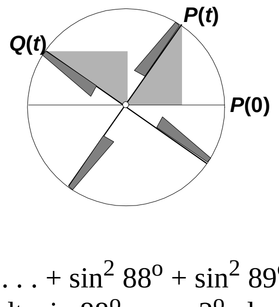
13 Bij de voorlaatste van de serie: hoe groot is exact de hoek (in rad) die de straal naar het startpunt maakt met de positieve *x*-as?

16 Eén keer rond is niet voldoende!

Hoofdstuk 3 Eigenschappen van sinus & co

2 **b.** Vergelijk de coördinaten van $P(t)$ en $Q(t)$.

3 De coördinaten kun je vergelijken door gebruik te maken van de draaiing over 90^o:



10 Er staat:
$\sin^2 0^o + \sin^2 1^o + \sin^2 2^o + \ldots + \sin^2 88^o + \sin^2 89^o + \sin^2 90^o$
Bedenk dat bijvoorbeeld geldt: $\sin 88^o = \cos 2^o$, dus $\sin^2 2^o + \sin^2 88^o = 1$

Hoofdstuk 4 Vergelijkingen met sinus en cosinus

1 Als P en Q op de eenheidscirkel liggen en dezelfde y-coördinaat hebben, dan liggen ze symmetrisch ten opzichte van de y-as.

2 Het boogverschil tussen de twee mogelijke posities van P is gelijk aan p.

3 **a.** De met cos t en cos (t + 2) corresponderende punten op de eenheidscirkel zijn elkaars spiegelbeeld ten opzichte van de x-as.
b. Ook nu kan worden volstaan met één formule.

4 **a.** Gebruik weer de symmetrie ten opzichte van de y-as.

Hoofdstuk 5 Somformules

8 **a.** Je kan sin(1 - x) en cos(1 - x) uitwerken met de verschilformule, maar het kan handiger! Kijk naar het rechterlid van de eerste somformule.

9 **a.** $t - u = t + (-u)$

9 **a.** $2a = a + a$

16 **b.** De som van de drie vectoren in het ‘Mercedes-plaatje’ is gelijk aan de nulverctor.

Hoofdstuk 6 Afgeleide en snelheid

1 **b.** Let op de middelpuntshoek.

4 **c.** Teken de loodlijn van P naar de x-as; gebruik de raaklijneigenschap van de cirkel.

5 Kijk goed naar de richting van de geprojecteerde beweging.

6 Je kunt Nderiv gebruiken, maar als je zelf iets meer inbreng wilt hebben kun je een differentiequotiënt (bijvoorbeeld met Dx = 0.001) invoeren.

11 **a.** Gewoon links en rechts differentiëren. Het kan ook zonder differentiëren: vervang cos2x door een uitdrukking in cos x (zie hoofdstuk 4).

17 **f.** Druk de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in $P(t)$ uit in t; bepaal vervolgens de cordinaten van de raaklijn met de x-as en de y-as (als uitdrukking in t).

Hoofdstuk 7 De spiraal van Archimedes

3 **a.** Bedenk dat de draaihoek negatief wordt.

5 **b.** Denk aan de produktregel bij het differentiëren.

7 **b.** Kijk nog eens terug naar opgave 5.

Hoofdstuk 8 Schroeflijn

1 **d.** Bedenk eerst hoe de beweging zou zijn als er stond: $z(t) = 0$.

2 **c.** Je kunt de snelheid ook ontbinden in een component in het Oxy-vlak en een component evenwijdig met de z-as. Beide componenten hebben de lengte 1.

6 **b.** Gebruik een bovenaanzicht.

Antwoorden en uitwerkingen

Hoofdstuk 1 (Water-) rad en sinus

1 **a.** sin60× » 0.87.
b. 0 ; 0.5 ; 0.87 ; 1 ; 0.87 ; 0.5 ; 0 ; -0.5 ; -0.87 ; -1 ; -0.87 ; -0.5 ; 0.
c. sinusoïde met periode 6 en amplitude 1.
d. *h* = sin(60*t*)×

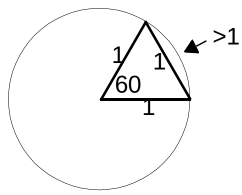
2 **a.** 0.71 ; -0.71 ; -0.71
b. Twee complete 'golven'; sin 450 = sin 90 = 1 ; sin 720 = sin 0 = 0.
c. 11886 = 6 + 33 · 360
d. sin(-750) = sin 330 = - 0.5

3 **a.** Na een volledig rondje is de hoogte van het punt , nl. sin(a + 360), gelijk aan de oorspronkelijke hoogte, nl. sin a.
b. Alle veelvouden van 360 .

4 **a.** ca. 1667 km/uur
b. 15 /uur
c. ca. 1017 km/uur ; de hoeksnelheid is hetzelfde als op de evenaar!

5 Nee. Als je de straal *r* vergroot, wordt de cirkelsector bij een boog met lengte *r* gelijkvormig groter, en dat betekent dat de middelpuntshoek gelijk blijft.

6 Langzamer. De boog bij 1 rad is 1 m lang.
De koorde bij 60× is ook 1 m lang, dus de boog bij 60× is langer dan 1 m.



7 $\frac{1}{2p}$ · 360 » 57,3 .

8 Met Radian: sin 1 = 0.84147.... Met Degree: sin^{-1}Ans = 57.29577...

9 **a.** 360× komt overeen met 2p rad, dus 60× met $\frac{2p}{6}$ = $\frac{1}{3}$p rad.
b. $\frac{1}{6}$p ; $\frac{1}{4}$p ; $\frac{1}{2}$p ; $\frac{2}{3}$p ; $\frac{3}{4}$p; $\frac{5}{6}$p ; p.

10 $\frac{1}{180}$p » 0,017

11 72

12 a*r*

13 $\frac{a}{360}$ · 2p*r*

14 **a.** 0.84 m
b. sinusoïde met periode 2p en amplitude 1.
c. 6 < 2p.
d. wordt in horizontale richting 'ingedrukt' (vermenigvuldigd met $\frac{1}{2}$); *h* = sin 2*t*.
e. 19

15 **a.** *h* = 2sin 3*t* + 1
b. sinusoïde met periode $\frac{2}{3}$p , amplitude 2 , evenwichtsstand *h* = 1
c. 0.7 sec

16 **a.** *h* = cos *t* ; even goed is : *h* = sin(*t* + $\frac{1}{2}$p)

17 a. $\frac{4}{\pi} \cdot 180 \approx 229{,}2$ rad.

b. $1\frac{2}{3}\pi$

18 a. De formule wordt: $y = \frac{1}{2} \sin t$; als je de schaal op de assen niet verandert krijg je grafiek door de oorspronkelijke grafiek in verticale richting ‘in te drukken’. Andere oplossing: vervang bij de verticale as -1 door $-\frac{1}{2}$.

b. De formule wordt: $y = \sin(\frac{1}{2} t)$; de grafiek vind je door uitrekken in horizontale richting (factor 2) of door aanpassing van de horizontale schaal (1 wordt 2; 2 wordt 4; enz.)

Hoofdstuk 2 Cirkelbewegingen op de computer en de GR

1 De stelling van Pythagoras.

2 a. $x(t) = \cos t$

b. $(\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1$

3 a. (-1 , 0) ; (1 , 0) ; (-1 , 0) ; (- 1 , 0) ; (0 , 1).

b. 2π sec later betekent precies één rondje verder, dus weer in hetzelfde punt..

c. $k = 0, -2, -4, \ldots$

d. $t = 2\pi - 1$; $t = \pi - 1$

4 -

5 a. $\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = -\sin t \end{cases}$ of, even goed: $\begin{cases} x(t) = \cos(-t) \\ y(t) = \sin(-t) \end{cases}$

b. $\begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = 2\sin t \end{cases}$

6 a. 5 rad/sec

b. $\frac{2}{5}\pi$

c. idem.

7 a. $\begin{cases} x(t) = -\sin t \\ y(t) = \cos t \end{cases}$ ofwel: $\begin{cases} x(t) = \cos(t + \frac{1}{2}\pi) \\ y(t) = \sin(t + \frac{1}{2}\pi) \end{cases}$

b. $\begin{cases} x(t) = -\sin t \\ y(t) = -\cos t \end{cases}$ ofwel: $\begin{cases} x(t) = \cos(t + \pi) \\ y(t) = \sin(t + \pi) \end{cases}$

8 a. (1 , 3)

b. 2

9 a. $\begin{cases} x(t) = 1 + \cos t \\ y(t) = 2 + \sin t \end{cases}$

b. $\begin{cases} x(t) = 2 + 2\cos t \\ y(t) = 3 + 2\sin t \end{cases}$, bijvoorbeeld

10 Ga uit van $\begin{cases} x(t) = r\cos t \\ y(t) = r\sin t \end{cases}$ en vervang *r* door een geschikte functie van *t*.

11 -

12 a. regelmatige zeshoek

b. $\cos \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}$, $\sin \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; $\cos \frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$, $\sin \frac{2}{3}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; etc.

13 a. $\begin{cases} x(t) = 2\sin t \\ y(t) = 2\cos t \end{cases}$

b. $\begin{cases} x(t) = 1 + 5\cos 2t \\ y(t) = 2 + 5\sin 2t \end{cases}$

c. $\begin{cases} x(t) = \sin \pi t \\ y(t) = -1 + \cos \pi t \end{cases}$

d. $\begin{cases} x(t) = \cos (t + \frac{1}{4}\pi) \\ y(t) = \sin (t + \frac{1}{4}\pi) \end{cases}$

e. $\begin{cases} x(t) = r\cos \omega t \\ y(t) = r\sin \omega t \end{cases}$

14 a. $t = \frac{1}{3}\pi$ en $t = \frac{5}{3}\pi$

b. idem

15 a. 0,927

b. $\pi - a$

c. $2\pi - a$

d. $\frac{1}{2}\pi - a$

16 T-interval = $[0 , 4\pi]$; T-step = $\frac{4}{5}\pi$

17 Startpunt eerste beweging is (3 , 3) en van de tweede beweging (1 , 5); richting eerste beweging positief, tweede beweging negatief.

18 Neem als vergelijkingen bijvoorbeeld: $\begin{cases} x_{1t} = 2\sin t \\ y_{1t} = 2\cos t \end{cases}$ en $\begin{cases} x_{2t} = \sin (t/12) \\ y_{2t} = \cos (t/12) \end{cases}$

a. Stel een geschikt vierkant venster in en kies bij de hier genoemde vergelijkingen het *t*-interval $[0 , 6\pi]$

b. Twee keer.

Hoofdstuk 3 Goniometrische formules

1 **a.** $\frac{20}{29}$
b. De uitkomst wordt tegengesteld.

2 **a.** $Q(t) = (-\cos t,\ -\sin t)$

3

4 $\sin t = \frac{40}{41}$; $\cos(t + \frac{1}{2}p) = -\frac{40}{41}$; $\cos(t + 3p) = -\frac{9}{41}$; $\sin(t - p) = -\frac{40}{41}$

5 $\cos(t + 1\frac{1}{2}p) = \sin t$
$\sin(t + 1\frac{1}{2}p) = -\cos t$

6 Draaien over *t* radialen met de klok mee of *t* radialen tegen de klok in, maakt voor de *x*-coördinaat van het draaiende punt niet uit; de *y*-coördinaat is dan tegengesteld.

7 **a.**

$\sin t + \sin(t + p) = \sin t - \sin t = 0$ en ook $\sin(t + \frac{1}{2}p) + \sin(t + 1\frac{1}{2}p) = 0$

b.

$$\sin^2 t + \sin^2(t + \tfrac{1}{2}p) + \sin^2(t + p) + \sin^2(t + 1\tfrac{1}{2}p) = \sin^2 t + \cos^2 t + \sin^2 t + \cos^2 t = 2$$

8 $(1 + \cos x)(1 - \cos x) = 1 - \cos^2 x$

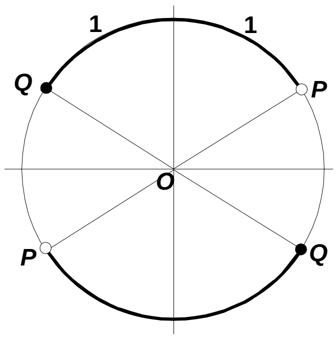
en uit de kwadratenformule volgt: $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$

9 **a.** $\cos(p - t) = \cos(t - p) = \cos(t + p) = -\cos t$
$\sin(p - t) = -\sin(t - p) = -\sin(t + p) = \sin t$

10 $45\frac{1}{2}$

Hoofdstuk 4 Vergelijkingen met sinus en cosinus

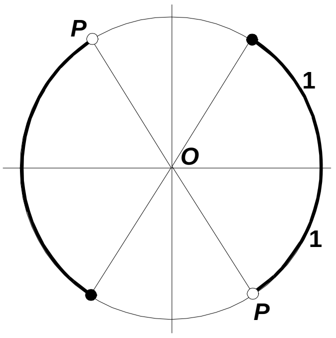
1 **a.**



b. $t = \frac{1}{2}p - 1$, $t = 1\frac{1}{2}p - 1$

2 $t = \frac{1}{2}p - 1 + k\ p$

3 **a.**



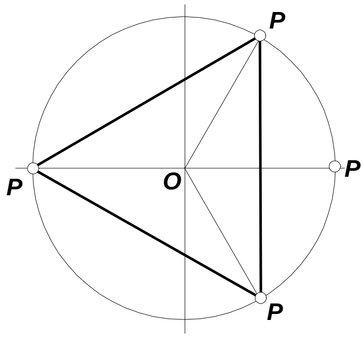
Twee oplossingen zijn:

$t = -1$, $t = \pi - 1$

b. Alle oplossingen: $t = -1 + k\ \pi$

4 **a.** $t = \frac{1}{3}\pi$

b.

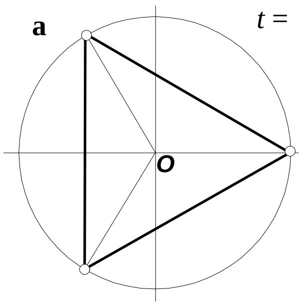


c. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$, $(-1, 0)$ en $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3})$.

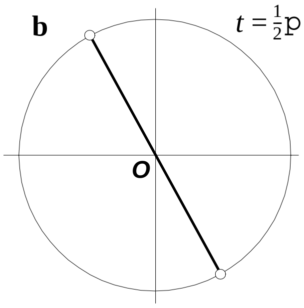
d. $t = \frac{1}{3}\pi + k\ \frac{2}{3}\pi$, $t = k\ 2\pi$

5

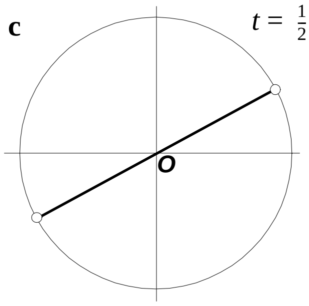
a $t = k\ \frac{2}{3}\pi$



b $t = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2} + k\ \pi$

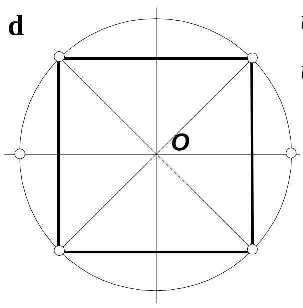


c $t = \frac{1}{2} + k\ \pi$



d $t = k\ \pi$,

$t = \frac{1}{4}\pi + k\ \frac{1}{2}\pi$



6 **a.**
b. Als k alle gehele waarden doorloopt, doet $-k$ dat ook.
c. $0 = 2 + k\ \ 2\pi$ geeft geen oplossingen; $2t + 2 = k\ \ 2\pi$ leidt tot $t = -1 + k\ \ \pi$

7 **a.** $t = 2t + k\ \ 2\pi$ of $t + 2t = 0 + k\ \ 2\pi$ geeft: $t = k\ \ \frac{2}{3}\pi$

b. $t = t - 1 + k\ \ 2\pi$ of $t + t - 1 = \pi + k\ \ 2\pi$ geeft: $t = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2} + k\ \ \pi$

c. $t = t - 1 + k\ \ 2\pi$ of $t + t - 1 = k\ \ 2\pi$ geeft: $t = \frac{1}{2} + k\ \ \pi$

d. $t = 3t + k\ \ 2\pi$ of $t + 3t = \pi + k\ \ 2\pi$ geeft: $t = k\ \ \pi$, $t = \frac{1}{4}\pi + k\ \ \frac{1}{2}\pi$

8 **a.** $\sin(4t + 5) = \sin(2t + 3)$
$4t + 5 = 2t + 3 + k\ \ 2\pi$ of $4t + 5 + 2t + 3 = \pi + k\ \ 2\pi$
$2t = -2 + k\ \ 2\pi$ of $6t = \pi - 8 + k\ \ 2\pi$
$t = -1 + k\ \ \pi$, $t = \frac{1}{6}\pi - 1\frac{1}{3} + k\ \ \frac{1}{3}\pi$

9 **a.** Periode y_1 is 1, periode y_2 is $\frac{2}{3}$.
b. Zes snijpunten.
c. $\sin(2\pi x) = \sin(3\pi x + \frac{1}{2}\pi)$ geeft:
$2\pi x = 3\pi x + k\ \ 2\pi$ of $2\pi x + 3\pi x = \pi + k\ \ 2\pi$ en dit leidt, gecombineerd met $0 \le x \le 2$ tot: $x = 0.1$; 0.5; 0.9; 1.3; 1.5; 1.7

10 **a.** $x = \frac{1}{6}\pi + k\ \ \frac{2}{3}\pi$

b. $x = \frac{1}{2} + k\ \ \pi$

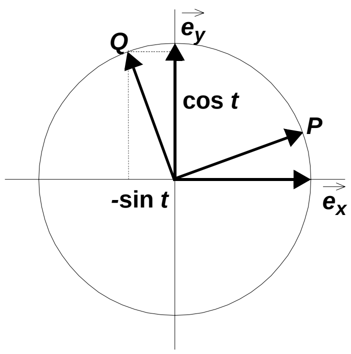
c. $x = -\frac{1}{3}\pi + k\ \ \frac{2}{3}\pi$

d. $x = -\frac{1}{10}\pi + k\ \ \frac{2}{5}\pi$ of $x = \frac{1}{6}\pi + k\ \ \frac{2}{3}\pi$

Hoofdstuk 5 Somformules

1 **a.** Ja, voor $t = 0$ geldt $\overrightarrow{OP} = \cos 0\ \ \vec{e}_x + \sin 0\ \ \vec{e}_y = \vec{e}_x$ en voor $t = \frac{1}{2}\pi$: $\overrightarrow{OP} = \vec{e}_y$.
b. Ja.

2 **a.**



b. $\overrightarrow{OR} = (\cos u \cdot \cos t - \sin u \cdot \sin t)\vec{e}_x + (\cos u \cdot \sin t + \sin u \cdot \cos t)\vec{e}_y$

3 $\cos 3 = -0.9899... = \cos 1\ \ \cos 2 - \sin 1\ \ \sin 2$
$\sin 3 = 0.1411... = \cos 2\ \ \sin 1 + \sin 2\ \ \cos 1$

4 Bij de propellerformule geldt: $u = \pi$ en bij de molenformule: $u = \frac{1}{2}\pi$

6 $\sin(t + 1) = \sin(\frac{1}{2}\pi)$; de oplossingen hiervan zijn: $\frac{1}{2}\pi - 1 + k \cdot 2\pi$

7 **a.**

b. $\sqrt{2} \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sin x + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \cos x\right) = \sin x + \cos x$

8 **a.** Gebruik de somformule met $t = 1 - x$ en $u = x$; er komt dan:
$\cos x \cdot \sin(1 - x) + \sin x \cdot \cos(1 - x) = \sin 1$

b. De grafiek van $y = \cos x \cdot \sin(1 - x) + \sin x \cdot \cos(1 - x)$ is een horizontale lijn.

9 **a.** $\cos(t - u) = \cos(t + (-u)) = \cos(-u) \cdot \cos t - \sin(-u) \cdot \sin t =$
$\cos u \cdot \cos t + \sin u \cdot \sin t$
$\sin(t - u) = \sin(t + (-u)) = \cos(-u) \cdot \sin t + \sin(-u) \cdot \cos t =$
$\cos u \cdot$ sins $t - \sin u \cdot \cos t$

b. Er volgt cos 0 = 1 en dat klopt en sin 0 = 0 en dat is ook correct.

10 $\sin(2a) = \sin(a + a) = 24/25$ en $\cos(2a) = \cos(a + a) = 7/25$

11 **a.**

b. $\cos(2x) = \cos(x + x) = \cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$

12 $y_1 = \sin(2x)$ en $y_2 = 2\cos x \cdot \sin x$

13 **a.** Uit $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

b. $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$

14 $(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 1 + 2\sin x \cos x = 1 + \sin 2x$

15 **a.** $\sin 2t = \sin(1 - t)$ geeft $t = \frac{1}{3} + k \cdot 2\pi$ of $t = \pi - 1 + k \cdot 2\pi$

b. $\cos 2t = \cos 3t$ geeft: $t = k \cdot \frac{2}{5}\pi$

16 **a.** $\sin\left(x + \frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\sqrt{3}\cos x$ en $\sin\left(x + \frac{4}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sin x + \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\cos x$

b. De som van de drie vectoren is gelijk aan de ‘nulvector’.

Hoofdstuk 6 Afgeleide en snelheid

1 **a.** In N

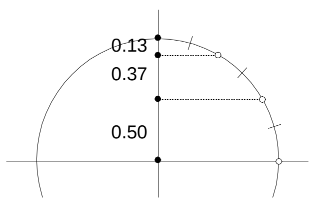
b. De middelpuntshoek is 30^o, de afstand vanaf O is dan $10 \cdot \sin 30^o = 5$ m.

c. De snelheid is minimaal bij N en Z en maximaal bij O.

d. $s(t) = 10\sin\left(\frac{\pi}{30}t\right)$, met de hoek in radialen.

2

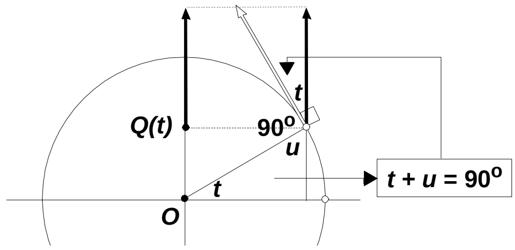
3 **a.** $\sin\frac{1}{6}\pi = 0.50$ en $\sin\frac{1}{3}\pi = 0.87$, dus:



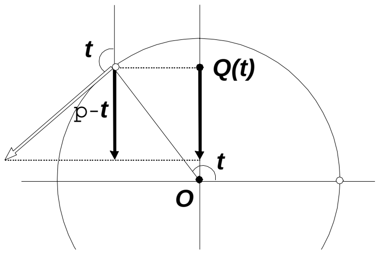
b. $\frac{2}{\pi}$ cm/s.

c. 1 cm/s.

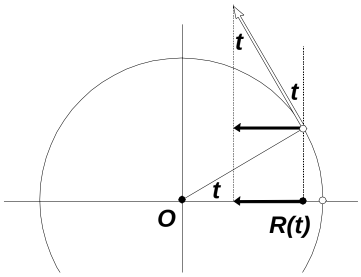
4 **a.** 0 cm/s.
b. in *O*.
c.



d. $v_Q = \cos t$
e.



5 $v_R = -\sin t$



6

7

a. $2\cos 2t$

b. $-\sin(t+2)$

c. $\sin t + t\cos t$

d. $10\cos 5t - 10\sin 2t$

e. $(-\sin t)e^{\cos t}$

f. $\dfrac{t\cos t - \sin t}{t^2}$

8 **a.** $y'(x) = 0$
b. y is een constante functie van x.

9 **a.** $\sin x$ » x
b. De grafiek van $y = \sin x$ raakt in (0 , 0) aan de lijn $y = x$.

10 $A'(t) = \cos t - \sin t$ (somregel) en $B'(t) = e^t \ \cos t - e^t \ \sin t$ (produktregel).

11 **a.** $\frac{d}{dx}\cos^2 x = 2\cos x \ \ -\sin x$ (kettingregel) $= -2\cos x \sin x$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{1}{2}\cos 2x) = \frac{1}{2} \cdot -\sin 2x \cdot 2 = -\sin 2x$ en $\sin 2x = 2\cos x \sin x$

b. De grafieken liggen verticaal verschoven t.o.v. elkaar. Dit volgt ook uit de verdubbelformule: $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, dus: $\frac{1}{2}\cos 2x = \cos^2 x - \frac{1}{2}$

12 a. $\frac{1}{3}\pi$ m/sec

b. $v(t) = s'(t) = \frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{30}t\right)$

c. $a(t) = v'(t) = -\frac{\pi^2}{90}\sin\left(\frac{\pi}{30}t\right)$

d. Dus: $a(t) = -\frac{\pi^2}{900} \cdot s(t)$

13 a. $-r \sin t$ en $r \cos t$

b. $-r \cos t$ en $-r \sin t$

c. In de richting van het middelpunt (de oorsprong); de versnellingsvector is precies tegengesteld gericht aan $\overrightarrow{OP}$

14 a. $r\omega$ cm/sec

b. Op $t = 0$. Verklaring: $v(0) = 2$ en als $t \to 0$, dan is $t^2 + 1 > 1$, dus $v(t) < 2$.

15 a.

b. $v(t)^2 = 4t^2(\cos^2(t^2) + \sin^2(t^2)) = 4t^2$ dus $v(t) = 2t$ voor $t \neq 0$.

c. De GR rekent stapsgewijs en verbindt opvolgende punten (en tekent dus eigenlijk koorden van de cirkel); bij even grote stapjes van t (bijv. 0.1) horen steeds groter wordende stappen van t^2 en dus groeiende koorden in de cirkel.

16 a. Het is een cirkelbeweging want $(x(t))^2 + (y(t))^2 = 1$ voor iedere waarde van $t \neq 0$. De snelheid is niet eenparig; bijvoorbeeld in de eerste seconde draait OP over een hoek van 2 radialen, in de tweede seconden is de draaihoek $2\sqrt{2} - 2 \approx 0{,}83$ radialen.

b. $v(t) = \frac{1}{t}$

17 a.

b.

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{(\cos t)^6} + \sqrt[3]{(\sin t)^6} = (\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1$$

c. $x'(t) = -3\cos^2 t \sin t$; $y'(t) = 3\sin^2 t \cos t$

d. $v(t)^2 = 9\cos^4 t \sin^2 t + 9\sin^4 t \cos^2 t = 9\cos^2 t \sin^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t) = 9\cos^2 t \sin^2 t = (3\cos t \sin t)^2 = (1\frac{1}{2}\sin 2t)^2$.

e. In de punten die corresponderen met $t = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$ met $k = 0, 1, 2, 3$.

f. Richtingscoëfficiënt raaklijn in het punt $P(t)$ is glijk aan $\frac{y'(t)}{x'(t)} = -\frac{\sin t}{\cos t}$

Een vergelijking van die raaklijn is: $y - \sin^3 t = -\frac{\sin t}{\cos t}(x - \cos^3 t)$.

Snijpunten met de x-as en y-as : $A = (\cos t, 0)$ en $B = (0, \sin t)$.

En dus: $\mathrm{d}(A, B)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$

Hoofdstuk 7 Archimedische spiraal

1 Mogelijk zoiets als: $x(t) = t \cdot \cos t$
$y(t) = t \cdot \sin t$.

2 **a.** $x(t) = r \cdot \cos t$
$y(t) = r \cdot \sin t$.

b. Dat geeft: $x(t) = t \cdot \cos t$
$y(t) = t \cdot \sin t$.

3 **a.** Dat geeft: $x(t) = t \cdot \cos t$
$y(t) = -t \cdot \sin t$.

b. Dat geeft: $x(t) = t \cdot \cos (2t)$
$y(t) = t \cdot \sin (2t)$.

c. Aangezien de snelheid van het punt toeneemt, wordt de afstand tussen twee opvolgende punten steeds groter. De GR verbindt die punten met lijnstukjes, en dat leidt tot een steeds ‘hoekiger’ beeld.

4 **a.** $\vec{v}$ is de som van $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$. $\vec{v}_1$ ligt in het verlengde van *OP* en heeft lengte 1. $\vec{v}_2$ staat loodrecht op *OP* en is even lang als *OP*.

b.

c. Dat de snelheid steeds groter wordt, zie je aan de steeds grotere sprongen die de cursor maakt. In de constructie: naarmate de je verder over de kromme loopt, wordt de afstand *OP* groter, en dus ook de lengte van $\vec{v}_2$. Dientengevolge ook die van $\vec{v}$.

5 **a.** $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$ en $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -t & \sin t \\ t & \cos t \end{bmatrix}$.

b. Optellen van de vectoren geeft: $\vec{v} = \begin{bmatrix} \cos t - t\sin t \\ \sin t + t\cos t \end{bmatrix}$.

Differentiëren van $\begin{bmatrix} t\cos t \\ t\sin t \end{bmatrix}$ met de produktregel geeft hetzelfde resultaat.

c. De grootte van de snelheid is gelijk aan $\sqrt{(\cos (t) - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2}$.

Uitwerken van het kwadraat geeft: de snelheid is $\sqrt{t^2 + 1}$.

6 **b.** De afstanden zijn steeds ongeveer 6.3.

c. Als er één ronde wordt doorlopen, neemt t met 2π toe. De afstand tot *O* dus ook.

d. De snijpunten horen bij $t = \frac{1}{4}\pi + k\pi$. De onderlinge afstand tussen twee opvolgende snijpunten is weer 2π.

Hoofdstuk 8 schroeflijn

1 **a.** Q: (3 , 4, 0) en R : (3 , 0 , 0)

b. $5 + 2t$

c. Evenwijdig aan de x-as (in de negatieve richting) met snelheid 1 lengte-eenheid per sec.

d. Evenwijdig aan de bissectrice (deellijn) van de hoek tussen de x^+-as en de y^+-as met een snelheid van $\sqrt{2}$ lengte-eenheden per sec.

2 **a.** $\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \\ z(t) = t \end{cases}$

b.

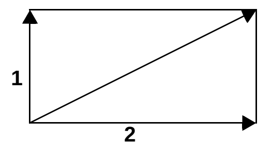
c. Je kunt de snelheidsvector ontbinden in één component in de richting van de positieve *z*-as en één gelijk aan een vector in het *Oxy*-vlak (namelijk de vector met lengte 1 die aan de eenheidscirkel raakt. Beide componenten hebben de lengte 1 en de resultante maakt dus hoeken van 45° met beide vectoren.

d. De grootte van de snelheid is $\sqrt{2}$.

3 In de rechthoek teken je een diagonaal. Als je van de rechthoek weer een cilinder maakt, geeft de diagonaal (één periode van) de schroeflijn

4 **a.** In de eerste twee vergelijkingen vervang je *t* door 2*t*.

b. Nu heeft de snelheidscomponent in het *Oxy*-vlak de lengte 2, terwijl de verticale component weer de lengte 1 heeft. De tangens van de hoek die de snelheidsvector (= raaklijnvector) maakt met de verticale richting is 2, dus de hoek is ongeveer 63.4°.



c. Verbind een hoekpunt met het midden van de lange zijde en herhaal dit voor het overstaande hoekpunt.

5 In de *x*- en de *y*-formule vervang je *t* door $-t$.

6 **a.** $\begin{cases} x = \cos(t + \frac{1}{2}\pi) \\ y = \sin(t + \frac{1}{2}\pi) \\ z = t \end{cases}$ ofwel: $\begin{cases} x = -\sin t \\ y = \cos t \\ z = t \end{cases}$

b. In het bovenaazicht zie je zo'n sport als een koorde van de basiscirkel, horend bij een middelpuntshoek van 90°. De lengte van zo'n koorde is $\sqrt{2}$. Omdat de sporten evenwijdig zijn met het *Oxy*-vlak is hun lengte gelijk aan de lengte in het bovenaanzicht.

Zelftoets

1 $\begin{cases} x(t) = 15 + 10\cos 5t \\ y(t) = 3 + 10\sin 5t \end{cases}$

2 **a.** $n = 5$

b. de vier punten met *x*-coördinaat $-\frac{1}{2}$

3

a. $4\cos(4t + 5)$

b. $\dfrac{\cos t}{2 + \sin t}$

c. $\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$

d. $\dfrac{1}{x^2}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

4 **a.** $x(t) + y(t) = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$.
De baan van het punt is het gedeelte van de lijn met vergelijking $y = 1 - x$ dat ligt tussen de positieve *x*-as en de positieve *y*-as.

b. Vier keer,

c. $x'(t) = 2\cos t \quad -\sin t = -\sin 2t$ en $y'(t) = 2\sin t \quad \cos t = \sin 2t$. De grootte van de snelheid is dus $|\sin 2t|\sqrt{2}$ en dit is maximaal $\sqrt{2}$ voor $t = \frac{1}{2}p$ of $t = 1\frac{1}{2}p$.

5 De grafieken liggen in verticale richting verschoven als het verschil $y_2 - y_1$ constant is. Inderdaad: $\cos x \quad \cos(1 - x) - \sin x \quad \sin(1 - x) = \cos(x + 1 - x) = \cos 1$