Geschiedenis van de wiskunde

Inhoud

Anders tellen

Archimedes en de omtrek van de cirkel

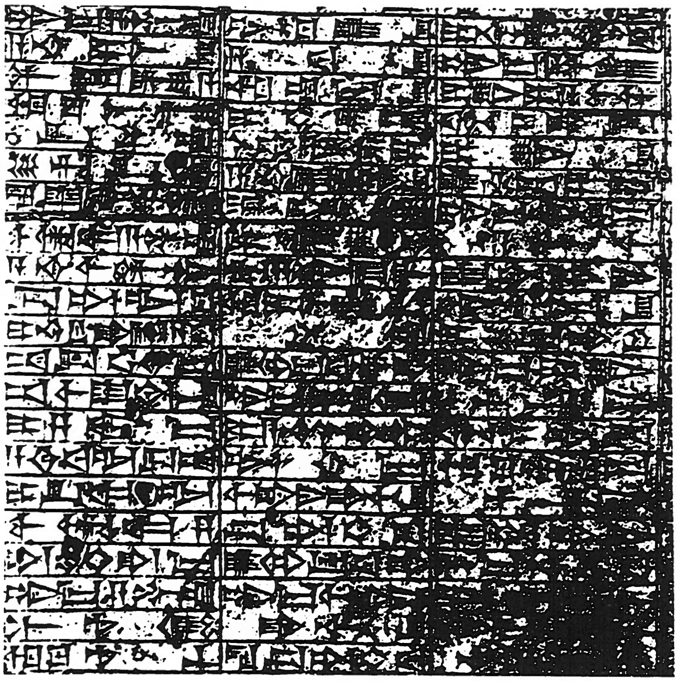
Oppervlakteberekening door middel van rechthoeken

De geschiedenis van het negatieve getal

ANDERS TELLEN

over

TURVEN, HAKEN EN SPIJKERS



Josien Langeland

Joop Huisjes

ANDERS TELLEN . . . . .

over turven, haken en spijkers.

LEERLINGENMATERIAAL

Jasper en Liesbeth spelen een kaartspelletje. Ze houden goed de stand bij. Na ieder spelletje krijgt de winnaar 1 punt en de verliezer geen.

<u>opgave 1</u>

a) Stel dat jij samen met een vriendje dit spelletje speelt, hoe zou jij dan de stand bijhouden?

b) Zijn er verschillende manieren om de stand bij te houden? Kun je er een paar noemen?

Jasper en Liesbeth hebben hun stand bijgehouden door te turven. Met turven bedoelen we tellen door middel van streepjes zetten. Voor elk ding wat je telt zet je een streepje en voor elk vijfde ding zet je een schuin streepje door de vorige vier.

<u>Voorbeeld</u>

 = 14

De einduitslag van het kaartspelletje was:

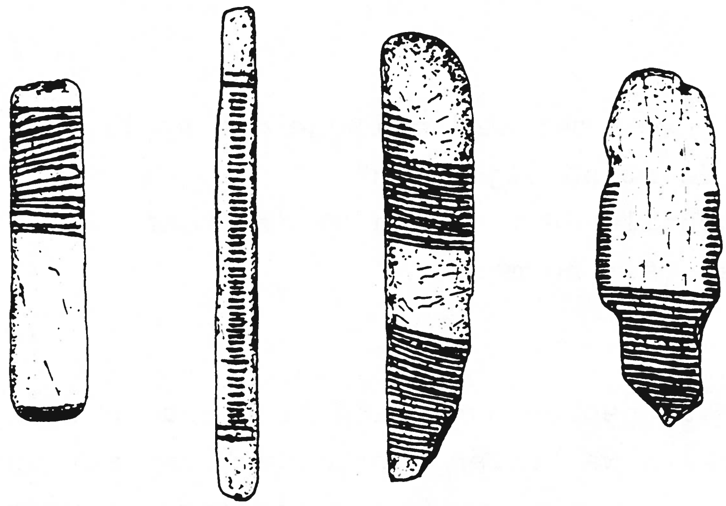
Jasper	Liesbeth
	

<u>opgave 2</u>

a) Wie heeft er gewonnen?

b) Hoeveel punten hadden Jasper en Liesbeth?

Vroeger telden de mensen ook door streepjes te zetten. Deze streepjes kerfden ze dan in hout of in een bot. Het aantal streepjes stond dan bijvoorbeeld voor het aantal runderen dat ze bezaten.



Ingekerfde botten uit de Vroege Steentijd (35 000-20 000 voor Chr.)

<u>opgave 3</u>

Kun je redenen bedenken waarom de mensen in de oudheid begonnen zijn met dingen te tellen?

Zoals je hebt gezien bij het spelletje van Jasper en Liesbeth, is turven een handige manier van tellen. De reden dat er steeds 5 streepjes bij elkaar staan komt waarschijnlijk omdat een mens 5 vingers heeft. Vroeger telden de mensen met hun vingers.

<u>opgave 4</u>

Als je 43 moet turven hoeveel blokjes van 5 krijg je dan?

Dus 8 blokjes van 5 + 3 losse streepjes = 43

We hebben nu met blokjes van 5 geturfd. Maar als je bijvoorbeeld het aantal dagen wilt turven kun je beter met blokjes van 7 turven. Een week heeft 7 dagen, dus ieder blokje van 7 is één week.

<u>Voorbeeld</u>

 = 7 + 7 + 7 + 4 = 25

Dus 3 weken + 4 dagen = 25 dagen.

<u>opgave 5</u>

Hoeveel dagen zijn 6 weken en 5 dagen?

<u>opgave 6</u>

Als je 43 moet turven met blokjes van 7, hoeveel blokjes van 7 krijg je dan?

Dus 6 blokjes van 7 + 1 los streepje = 43.

<u>opgave 7</u>

Je turft met blokjes van 7.

Vul in:

a) 38 = ... blokjes van 7 + ... losse streepjes.

b) 26 = ... blokjes van 7 + ... losse streepjes.

c) 21 = ... blokjes van 7 + ... losse streepjes.

d) 58 = ... blokjes van 7 + ... losse streepjes.

Nu even iets anders. Hoewel....? Je zult zien dat het veel met het andere te maken heeft.

Op het afgebeelde horloge staat de tijd. Het is 4:09 56.
4 uur, 9 minuten en 56 seconden, na 12 uur 's nachts.

<u>opgave 8</u>

a) Hoeveel seconden na 4 uur is het dan? Laat de berekening zien.
b) En hoeveel seconden na 12 uur 's nachts? Laat de berekening zien.

<u>opgave 9</u>

a) Stel dat het horloge 24 seconden verder heeft geteld, hoe laat is het dan?
b) Welke tijd geeft het horloge aan als het 100 seconden verder heeft geteld? Laat zien hoe je aan het antwoord komt.

Zoals je hebt gezien reken je met blokjes van 60 als je met seconden en minuten rekent. Er zitten 60 seconden in een minuut en een uur heeft 60 minuten.

Als je met blokjes van 60 turft is het erg vervelend om steeds 60 streepjes te zetten. Om dat te voorkomen gaan we het volgende doen.

Voorbeeld

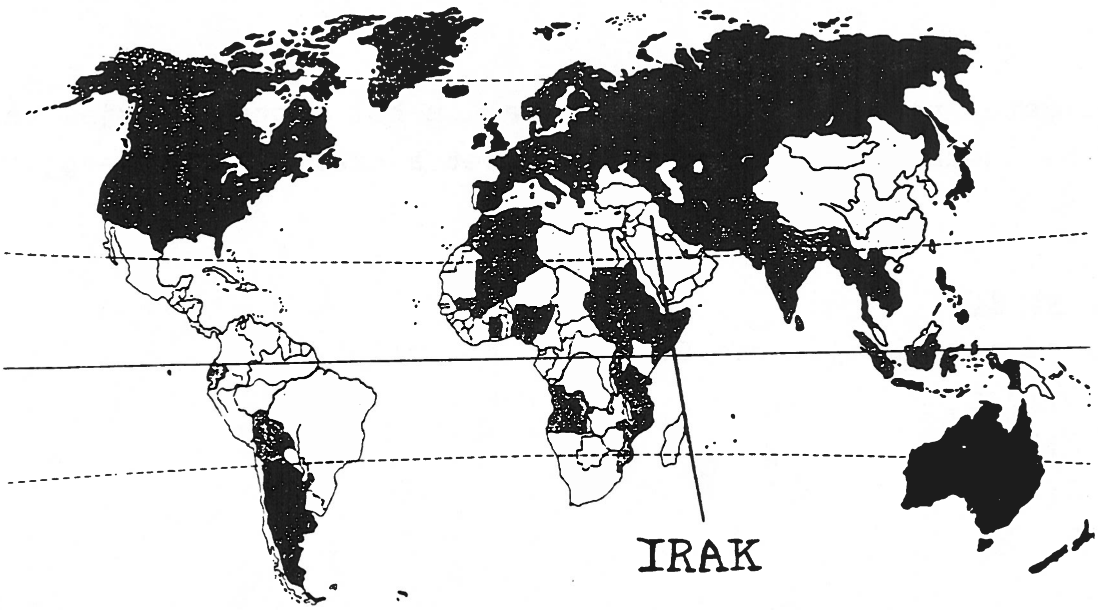
123 = 2 blokjes van 60 + 3 losse streepjes.
We noteren nu: 2;3

Het getal voor de punt-komma slaat op het aantal blokjes van 60 en het getal na de punt-komma op het aantal losse streepjes.

opgave 10
Als je met blokjes van 60 turft, hoeveel is dan:
a) 1;13
b) 2;26
c) 5;58
d) 20;34

Vroeger rekende men ook al met blokjes van 60. Een jaar heeft ongeveer 360 dagen. Dat zijn dus 6 blokjes van 60 dagen. Eén blokje van 60 dagen is twee maanden
Rekenen met blokjes van 60 is bedacht door de **Babyloniërs**, ongeveer 1800 jaar voor Christus.

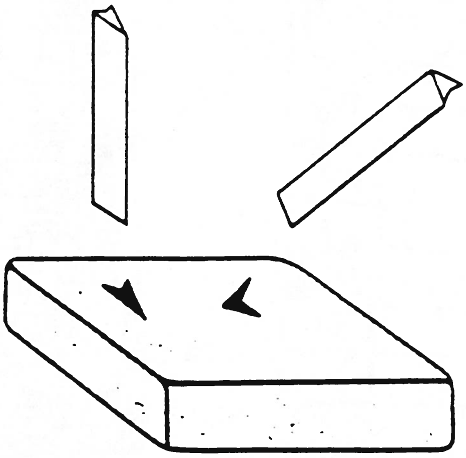
De Babyloniërs woonden in Mesopotamië. Mesopotamië betekent eigenlijk "land tussen de twee rivieren". Langs de rivieren lag vruchtbare grond, dus al heel vroeg gingen daar mensen wonen die het rivierwater gebruikten om hun land te bevloeien en hun dieren te laten drinken. De twee rivieren waren de Eufraat en de Tigris. Tegenwoordig heet het land waar deze rivieren liggen Irak.



opgave 11
Waaron gingen de Babyloniërs langs de twee rivieren de Eufraat en de Tigris wonen?

De Babyloniërs schreven op **kleitabletten**. Hieronder zie je een afbeelding van een kleitablet.

Wat je op de kleitablet ziet noemen we het **spijkerschrift**. Met een hoekige stift werden afdrukken gemaakt in zachte klei. Daarna werd de klei meestal gebakken. Om getallen te maken gebruikten de Babyloniërs twee tekentjes.
Hier zie je op het plaatje welke tekentjes dat waren.



<u>**opdracht 12**</u>
De babyloniërs schreven niet op papier. Waar schreven ze wel op en hoe noemen we de lettertekens die de Babyloniërs gebruikten?

Als je goed kijkt kun je zien, dat met dezelfde stift beide tekens gemaakt kunnen worden.

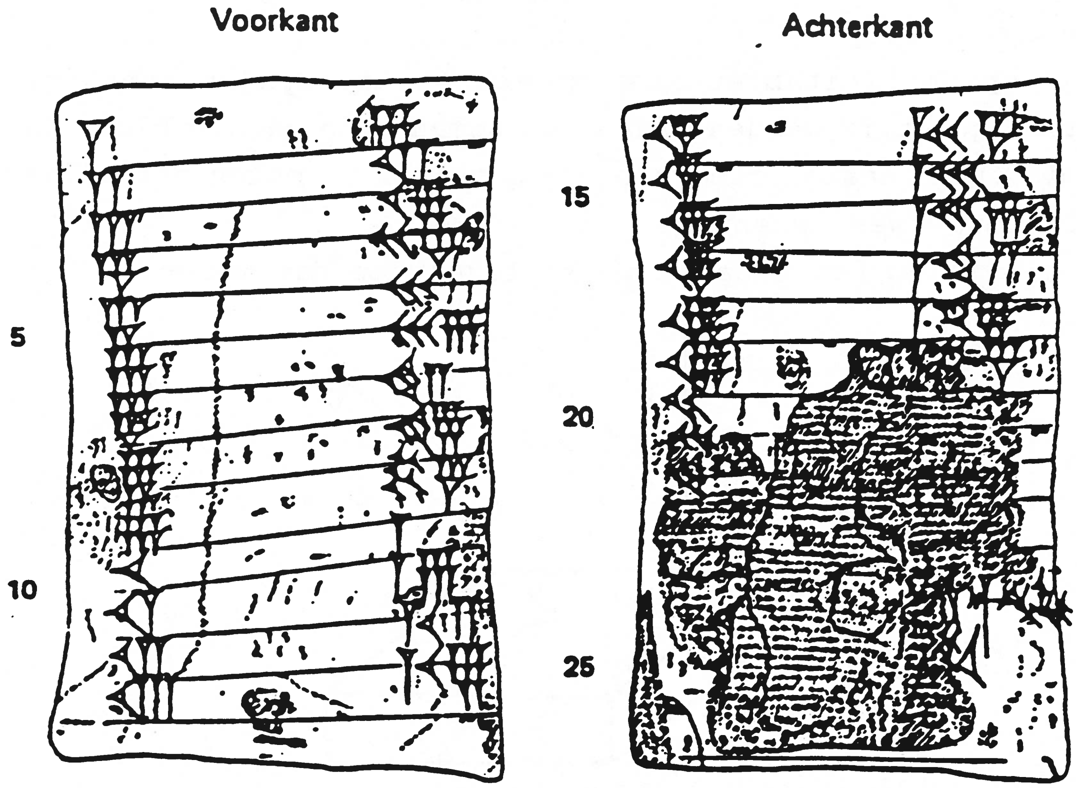
heet een **spijker**, en een spijker betekent 1.

heet een **haak**, en een haak betekent 10.

<u>Voorbeeld</u>

 betekent 3,  betekent 21.

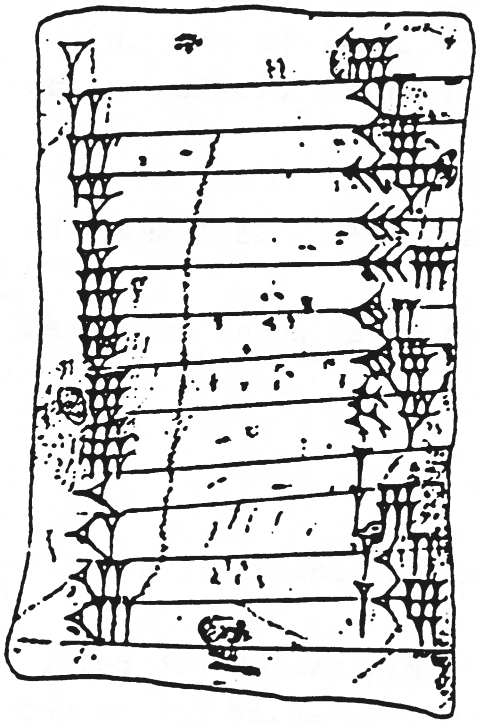
Hieronder zie je wat er op de voor- en achterkant van een kleitablet was gedrukt. Als je naar de voorkant kijkt zie je twee kolommen met getallen.
Ook op de achterkant staan twee kolommen met getallen.



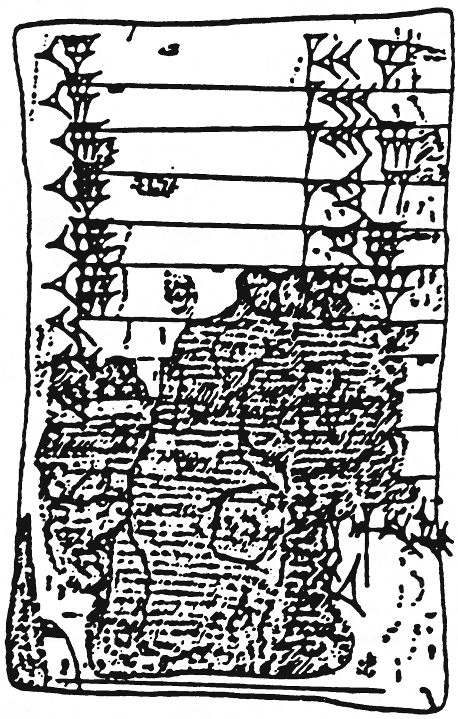
<u>opgave 13</u>
Maak opgave 13 op werkblad 1.

WERKBLAD 1

Voorkant



Achterkant



opgave 13

a) Kijk naar de eerste 8 regels van de voorkant van de kleitablet. Je ziet twee kolommen naast elkaar staan. Zet de eerste 8 getallen van de eerste kolom, in onze eigen notatie, onder elkaar in je schrift.

b) Ontcijfer met welke 8 getallen de tweede kolom op de voorkant begint. Schrijf deze kolom naast de andere in je schrift.

opgave 14

Kijk in het voorbeeld op blz 5. Schrijf op dezelfde manier het getal 85 met behulp van blokje:, van 60.

Als de Babyloniërs 85 wilden drukken in klei dan gingen ze eerst in gedachten 85 turven met blokjes van 60. Zoals je weet is dat 1;25. Vervolgens gingen ze de getallen 1 en 25 drukken in de klei.

 = 1 blokje van 60 + 25 losse = 85

Ze lieten een beetje ruimte tussen de 1 en de 25 zodat de mensen het goed konden lezen.

opgave 15

a) Probeer nu de rest van de voorkant van de kleitablet uit opgave 13 te ontcijferen.
b) Doe hetzelfde met de achterkant van de kleitablet tot regel 18. De rest van de kleitablet is zo erg beschadigd dat je het bijna niet kunt lezen.
c) Wat stellen deze getallen voor en wat stond er dus op de kleitablet geschreven?

opgave 16

Schrijf een getal tussen de 60 en 120 met behulp van de tekentjes van de Babyloniërs. Laat daarna je buurman/vrouw ontcijferen wat je hebt geschreven.

Je ziet nog een keer een foto van een kleitablet. Wat er opstaat is een beetje moeilijk te lezen, daarom heeft iemand een deel nagetekend op papier. (werkblad 2).

opgave 17

Kijk op werkblad 2 op deze pagina.

a) Op regel 11 staat een getal omcirkeld. Schrijf dit getal in onze eigen notatie.

b) Op regel 9 staat het getal 6 geschreven. Probeer dit getal te vinden en zet er een cirkeltje omheen.

c) Kijk naar regel 7 en probeer uit te zoeken met welk getal regel 7 begint.

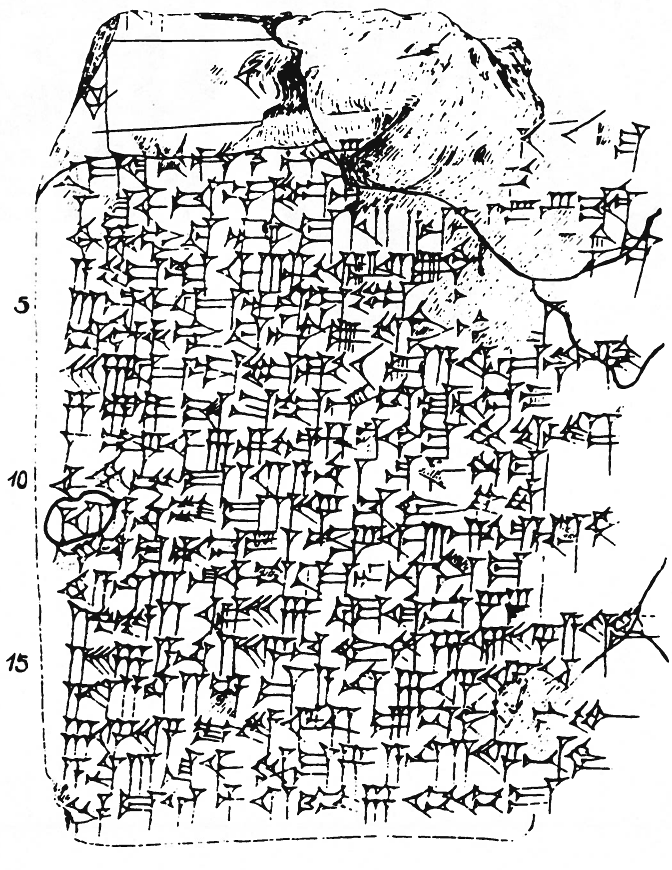
d) Met welk getal begint regel 15?
Met  begint het volgende woord.

e) Probeer zelf nog meer getallen te vinden. Zet om elk getal, dat je vindt, een cirkeltje met een kleurpotlood.

f) Welke getallen heb je gevonden?

g) Als je nu je werkblad vergelijkt met de foto, welk deel van de foto is dan op je werkblad nagetekend? Waaraan kun je dat zien?

WERKBLAD 2



EXTRA OPGAVEN

Een optelsom gaat eigenlijk net zo als in ons eigen stelsel.

```
Voorbeeld:          20; 3;16
                    2;48;33  +
                  ___________
                   22;51;49
```

opgave 1

Tel nu zelf bij elkaar op:

```
       44; 3;16                     32;56
           8;11  +               3;12;24  +
    ____________              ____________
```

Het antwoord op de laatste som is 3;44;80, maar als je met blokjes van 60 rekent schrijf je 80 niet als 80, maar als 1;20. Je moet dus 1 bij 44 optellen en er blijven 20 eenheden over. Het antwoord wordt nu 3;45;20. In deze notatie staan dus nooit getallen groter dan 60.

opgave 2

Bereken nu:

```
       13;48;39                  25;55;11
       26;53;14  +               29; 8;56  +
    ____________              ____________
```

opgave 3

Probeer nu een vermenigvuldiging op te lossen.

```
        2;3;7               3;14;8
            9  x                 5  x
    __________          __________
```

opgave 4

Wij maken nu vaak een staartdeling als we twee getallen op elkaar willen delen. Dit deden de Babyloniërs op een andere manier. Toch is het leuk om eens te proberen of het je lukt om de volgende staartdeling te maken, door te rekenen met blokjes van 60.

7/ 15;34;8;18\

opgave 5

Het rekenen met blokjes van 60, noem je ook wel rekenen in het **60-tallig stelsel**, wij rekenen nu altijd in het **10-tallig stelsel**.

Er worden meer tal-stelsels gebruikt naast het 10-tallig en 60-tallig stelsel. Bijvoorbeeld bij computers.

Computers gebruiken het **2-tallig stelsel**. Dit noem je ook wel het **binaire stelsel**. Ze gebruiken alleen nullen en enen.

voorbeelden:

$0 = 0 \quad = 0x2^0$

$1 = 1 \quad = 1x2^0$

$2 = 10 \quad = 1x2^1 + 0x2^0$

$3 = 11 \quad = 1x2^1 + 1x2^0$

$4 = 100 \quad = 1x2^2 + 0x2^1 + 0x2^0$

Schrijf nu de volgende getallen om van het 10-tallig stelsel naar het binaire stelsel.

a) 7

b) 10

c) 16

En nu andersom, van binair naar 10-tallig.

a) 100000

b) 1110

c) 111110

ANDERS TELLEN . . . . . .

over turven, haken en spijkers.

DOCENTENHANDLEIDING

HET PAKKET IN DE KLAS

Dit pakket is uitgeprobeerd in de brugklas van het MAVO-HAVO-VWO op een school in Groningen. De docente probeert wel vaker pakketjes uit en de leerlingen zijn dan ook gewend om met dit soort materiaal te werken.

De leerlingen konden heel goed in groepjes werken en dat is met dit pakket een groot voordeel. Om de geschiedenis van de wiskunde goed aan bod te laten komen is het nodig om een aantal open vragen tussen te voegen, want leerlingen lezen anders de tussenliggende tekst niet. Dit maakt het pakket juist leuk en het zou jammer zijn als er over heen gelezen werd.

Naderhand zijn de onduidelijkheden eruit gehaald en gewijzigd.

DOELEN

* De leerlingen meer inzicht geven in tal-stelsels, door te spelen met verschillende tal-stelsels .
* Leerlingen laten beseffen dat wiskunde en rekenmethodes niet altijd zo vast bestonden als je vaak denkt.
* Aan de hand van historisch materiaal de leerlingen een eerste kennismaking laten maken met de Babyloniërs, een volk dat voor de wiskunde erg belangrijk is geweest.

KENNISNIVEAU VAN DE LEERLINGEN

Het pakketje met de basisstof kan gebruikt worden in de eerste klas van het LBO. Als voorkennis moeten de leerlingen kunnen turven en tellen. Ook is een basiskennis van rekenen, met name optellen en vermenigvuldigen, nodig.
Een beetje inzicht in ons eigen 10-tallig stelsel is gewenst.

DUUR VAN HET PAKKETJE

Het pakketje kan in ongeveer drie lesuren gebruikt worden.

ACHTERGRONDINFORMATIE VOOR DE DOCENT

In dit pakketje maakt de leerling spelenderwijs kennis met verschillende tal-stelsels. Al turvende komt hij vanzelf bij het 60-tallig stelsel. Na een eigentijds voorbeeld van het 60-tallig stelsel, het digitaal horloge, met ons 60-tallig rekenen met minuten en seconden, wordt een overstap gemaakt naar de geschiedenis.

Enige historische informatie:

Tellen is niet altijd zo gemakkelijk geweest als dat het nu voor ons het geval is. Dit blijkt wel uit het feit dat de mensen vroeger alleen onderscheid kenden tussen 1, 2 en veel. Voorbeelden dat 3 symbolen wel voor veel gebruikt werden zijn: 3 golfjes voor het begrip zee en 3 bomen voor het begrip bos.

Maar er ontstond behoefte om hoeveelheden aan te geven. Dit in verband met het aangeven van bezittingen, de hoeveelheid kuddedieren die ze 's ochtends naar de weide brachten moesten 's avonds ook weer terug komen. Ook in de ruilhandel moest men hoeveelheden aan kunnen geven. Dit om de 'prijs' te bepalen.

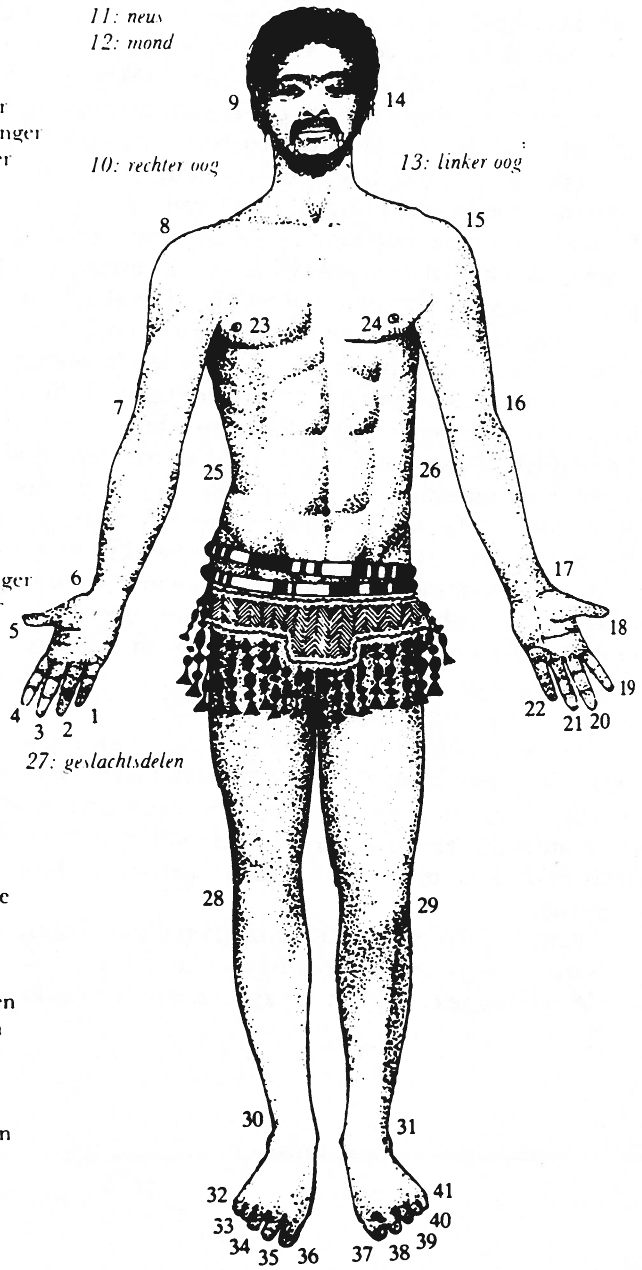
Eén van de eerste manieren van tellen, die in de oudheid ontwikkeld is, is die van de onderling gelijke verhouding. Een herder bijvoorbeeld, die een kudde van 55 dieren bezit, moet iedere dag na kunnen gaan of hij niet een dier verloren is. Hij had een manier om dat gemakkelijk na te kunnen gaan. Hij nam een bot en liet zijn schapen één voor één passeren. Voor iedere schaap dat hem passeerde kerfde hij een streepje in het bot. Nu hoefde hij 's avonds slechts voor ieder schaap dat terug kwam z'n vinger één streepje verder te schuiven om te zien of hij er nog evenveel had als 's ochtends. Als er overdag een lammetje was geboren, kerfde hij er een streepje bij. Een plaatje van zo'n kerfstok is in het leerlingenmateriaal opgenomen.

Op een gegeven moment werd ook het menselijk lichaam gebruikt om getallen aan te geven. Dan ontstaan er verschillende manieren om dat te doen.

Bijvoorbeeld: het tellen tot 10, een mens heeft 10 vingers.
het tellen tot 12, 10 vingers + 2 voeten.
het tellen tot 20, 10 vingers + 10 tenen.
het tellen tot 5, de 5 vingers aan één hand.

Het wijzen op een bepaald lichaamsdeel staat dan voor een getal. Maar ook andere, minder voor de hand liggende vormen zijn ontstaan. Bijvoorbeeld 41 plaatsen op je lichaam aan kunnen wijzen om een getal duidelijk te maken. In het volgende plaatje wordt duidelijk wat men met welk lichaamsdeel bedoelde.

1 rechter pink
2 rechter ringvinger
3 rechter middelvinger
4 rechter wijsvinger
5 rechter duim
6 rechter pols
7 rechter elleboog
8 rechter schouder
9 rechter oor
10 rechter oog
11 neus
12 mond
13 linker oog
14 linker oor
15 linker schouder
16 linker elleboog
17 linker pols
18 linker duim
19 linker wijsvinger
20 linker middelvinger
21 linker ringvinger
22 linker pink
23 rechter tepel
24 linker tepel
25 rechter heup
26 linker heup
27 geslachtsdelen
28 rechter knie
29 linker knie
30 rechter enkel
31 linker enkel
32 rechter kleine tee
33 volgende teen
34 volgende teen
35 volgende teen
36 rechter grote teen
37 linker grote teen
38 volgende teen
39 volgende teen
40 volgende teen
41 linker kleine teen



Het menselijk lichaam: de oorsprong van de rekenkunde (lichaamsmethode, zoals toegepast door de Papoea's van Nieuw-Guinea).

Het grondtal 60, zoals de Babyloniërs in Mesopotamië als eerste gebruikten is waarschijnlijk een mengeling van andere grondtallen. Bijvoorbeeld van 5 en 12, of misschien van 12 en 10.
Het volgende stuk is overgenomen uit het boek "De wereld van getallen' van Georges Ifrah.

Het raadselachtige grondgetal zestig

Als rekeneenheid vormt zestig een zeer hoog grondgetal, dat een aanzienlijke belasting vormt voor het geheugen: het vereist de kennis van zestig verschillende woorden of tekens om de getallen van 1 tot en met 60 weer te geven. Dit grondgetal maakt een zo groot aantal fundamentele telwoorden en symbolen noodzakelijk, dat men de tafels van optelling en vermenigvuldiging slechts met de grootste moeite uit het hoofd kan leren.

Toch zijn er in de loop van de geschiedenis volken geweest die hiervan gebruik hebben gemaakt, iets waarvan wij in onze cultuur de sporen nog voelen, omdat wij dit grondgetal gebruiken in onze tijdrekening in uren, minuten en seconden, en in het uitdrukken van bogen en hoeken in graden, minuten en seconden.

Dit grondgetal is voor het eerst gebruikt door de Soemeriërs, die plachten te rekenen in zestigtallen en machten van zestig. Daarna is dit systeem overgenomen door de wiskundigen en astronomen van het Babylonische rijk (de opvolgers van de Soemeriërs in Mesopotamië), die het gebruikten om een geleerd systeem van tellen uit te werken, waarna het, door tussenkomst van Griekse en Arabische astronomen, bij ons terechtkwam. Voor de reden, die de Soemeriërs hebben gehad om op het idee van een zo hoog grondgetal te komen, bestaat nog steeds geen afdoende verklaring.

Er zijn hierover verscheidene hypothesen in omloop, maar geen daarvan lijkt steekhoudend.

Sommige auteurs menen dat de keuze van dit grondgetal is geïnspireerd door de metrologie. Maar dat is een onaanvaardbare hypothese, omdat ze de vraag op een theoretisch niveau brengt: het grondgetal zestig is in de metrologie van de Soemeriërs terechtgekomen, uitsluitend omdat het al in hun rekenwijze fungeerde.

Volgens anderen staat het aantal dagen in een jaar, afgerond op 360, aan de wieg van de verdeling van de cirkel in 360°. En daar de koorde van het sextant (dat wil zeggen van het zesde deel van een cirkel) gelijk is aan de straal van die cirkel, zou dit getal hebben geleid tot de verdeling van de cirkel in zes gelijke delen van 60°, waaraan het getal zestig zijn bevoorrechte positie te danken zou hebben.

Anderen hebben de oorsprong van het systeem menen te kunnen vinden in het verband tussen het Soemerische 'uur' (dat ongeveer gelijk is aan twee van onze uren) en de schijnbare diameter van de zon, uitgedrukt in tijdseenheden die ieder ongeveer evenveel zijn als twee van onze minuten.

Nog een hypothese, maar ditmaal van geometrische aard: de gelijkzijdige driehoek zou hebben gediend om de verschillen in richting in een plat vlak te meten; en de decimale verdeling van de hoek (gelijk aan die van 60°) die door deze figuur wordt gegeven zou hebben geleid tot de zestigdeling van het vlak (en dus van de cirkel), wat weer zou hebben geleid tot het rekenen met zestig als grondgetal.

Tegen dergelijke 'verklaringen' kan men echter inbrengen dat men noch aan de astronomie, noch aan de geometrie de oorsprong van een rekenkundig systeem kan toeschrijven. Desalniettemin is het geoorloofd te denken dat juist dank zij zijn geometrische en astronomische eigenschappen het grondgetal zestig zich tot de huidige tijd heeft kunnen handhaven in de tijdrekening en in de berekening van bogen en hoeken.

Een andere verklaring, die ooit naar voren werd gebracht: de keuze van dit grondgetal moet het gevolg zijn geweest van het samengaan, in prehistorische tijden, van twee verschillende beschavingen, waarvan de ene rekende op basis van het grondgetal tien, de andere op basis van het grondgetal zes. Daartegen werd, terecht, het bezwaar aangevoerd dat 'het bestaan van een systeem van rekenen waarvan het grondgetal gelijk zou zijn aan zes een postulaat is waarvoor geen enkele historische grond is'.

Maar ook al is er voor het grondgetal zes historisch gezien geen bewijs, voor twaalf is dat er wel degelijk. En we weten hoeveel belang er in de Soemerische beschaving aan werd gehecht. Dit grondgetal zou dus een fundamentele rol gespeeld kunnen hebben in de opbouw van het systeem.

Mijns inziens zijn er twee waarschijnlijke hypothesen:

Allereerst is er de mogelijkheid dat *twee verschillende culturen zijn samengegaan, waarvan de ene telde in twaalftallen en de andere in tientallen, waarna de keuze van het grondgetal zestig in bepaalde geleerde kringen het resultaat was van een 'wetenschappelijke' combinatie van het grondgetal twaalf met het grondgetal tien.*

Immers, ook het grondgetal tien heeft in de Soemerische beschaving een belangrijke rol gespeeld. De rekenkundigen uit het Land van Soemer hebben het geïntroduceerd als hulpeenheid, om tijdens het rekenen in het zestigtallig stelsel het geheugen te ontlasten, daar dit, in theorie, de kennis van zestig verschillende woorden of symbolen noodzakelijk maakte om de getallen van 1 tot en met 60 uit te drukken.

In een samenleving die tegelijk met het twaalftallig en met het (secundaire) tientallig stelsel rekent, zoals onze hypothese is, zouden de rekenkundigen, die intellectueel al een hoog niveau hadden bereikt (wat overigens bewezen wordt door de restanten van hun werk die zijn overgeleverd), deze hebben kunnen combineren overeenkomstig de eigenschap van het *kleinste gemene veelvoud* om een geleerde cyclus te vormen van zestig eenheden, die grote voordelen zou opleveren bij hun berekeningen. 60 is het kleinste gemene veelvoud van 12 en 10, en is tevens het kleinste gehele getal dat deelbaar is door elk van de eerste zes getallen. Zodat men zestig invoerde als grondgetal van een rekenmethode.

Men kan er ook van uitgaan (en deze hypothese lijkt mij waarschijnlijker) dat *de keuze van het grondgetal zestig het resultaat is geweest van een 'natuurlijke' combinatie van het grondgetal twaalf met het grondgetal vijf* (die waarschijnlijk beide hun oorsprong vonden in het tellen op de hand).

Deze hypothese is des te waarschijnlijker omdat we duidelijke sporen terugvinden van vijf als grondgetal in de Soemerische taal. Met een abstractie, die gebaseerd is op verschillende varianten, zijn de telwoorden voor de eerste tien getallen als volgt opgebouwd:

1 *gesh*
2 *min*
3 *esh*
4 *limmu*
5 *ià*
6 *àsh* (= à + sh = ià + gesh = 5 + 1)
7 *imin* (= i + min = ià + min = 5 + 2)
8 *ussu*
9 *illimmu* (= i + limmu = ià + limmu = 5 + 4)
10 *u* (letterlijk: 'de vingers')

Met uitzondering van het telwoord voor 8 laat de Soemerische taal, voor de telwoorden voor 6, 7 en 9, een duidelijk opbouw zien uitgaande van het grondgetal vijf. (Het is niet uitgesloten dat in prehistorische tijden ook het telwoord voor 8 werd uitgedrukt op een wijze die te vergelijken is met de telwoorden voor 6, 7 en 9; helaas is de oorspronkelijke, corresponderende vorm verloren gegaan.)

We zullen bovendien nog zien hoe het tellen op de vingers, toen dat eenmaal achterhaald was door het intellect, rekenkundige prestaties van een zeer hoog niveau mogelijk maakte.

Wanneer we uitgaan van de hierboven geschetste hypothese zou er een verband hebben kunnen bestaan tussen de oorsprong van het grondgetal zestig en een systeem van tellen op de hand, zoals dat door de Soemeriërs in het grijze verleden werd gebruikt.

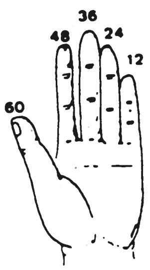
Het is natuurlijk moeilijk deze hypothese te verifiëren, maar een vergelijkbare concrete manier van tellen kunnen we tegenwoordig nog aantreffen in het gebied van de oostelijke Middellandse Zeekust tot India, en in Indochina.

Iemand die met behulp van de vinger-methode rekent moet haast wel terechtkomen bij het grondgetal zestig, met twaalf en vijf als hulp-grondgetallen. Hij gaat immers als volgt te werk:

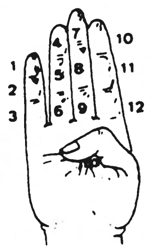
Op de rechterhand telt hij van 1 tot en met 12 door met de duim achtereenvolgens de drie kootjes van zijn vier vingers aan te raken. Wanneer hij op die manier tot twaalf heeft geteld, buigt hij de pink van zijn linkerhand. Op zijn rechterhand telt hij vervolgens van 13 tot en met 24, waarna hij de ringvinger van zijn linkerhand buigt. Zo telt hij verder van 25 tot en met 36, van 37 tot en met 48 (waarna hij zijn linker wijsvinger buigt), en tenslotte van 49 tot en met 60. Alle vingers van zijn linkerhand, inclusief de duim, zijn dan gebogen.

LINKERHAND

Elke vinger staat voor een dozijn.



RECHTER HAND



Elk van de vingerkootjes wordt aangeraakt door de duim en staat voor een eenheid.

De oorsprong van het grondgetal zestig zou dus het resultaat kunnen zijn van een combinatie van het tellen op de twaalf vingerkootjes van één hand met het tellen op de vijf vingers van de andere hand.

Deze hypothese, die we overigens enigszins voorzichtig tegemoet moeten treden, daar er geen bewijs voor is, zou dan een bevestiging kunnen zijn voor de zuiver antropomorfe oorsprong van de andere grondgetallen die men ooit gebruikt heeft, en daarmee van het belang van het menselijk lichaam voor de geschiedenis van de getallen en het tellen.

Hoe het ook zij, het feit dat de mens zich de vaardigheid van het tellen eigen heeft gemaakt, en de fundamentele ontdekking van het principe van het grondgetal, hebben een grote rol gespeeld in de geschiedenis van de verschillende beschavingen. Ze hebben de mens in staat gesteld tot een groot aantal ontwikkelingen en zelfs revolutionaire ontdekkingen op de meest uiteenlopende gebieden. Zoals bijvoorbeeld op het gebied van de economie en de handel.

Dat van al deze verschillende vormen van tellen nu nog resten in onze beschaving aanwezig zijn kun je bijvoorbeeld zien bij de Fransen. In de Franse taal zegt men nog steeds quatre-vingt (4 x 20) voor 80. We turven nog steeds met het grondtal 5 en ons stelsel met minuten en seconden is 60-tallig, wat ook anders is als het nu gebruikelijke 10-tallige stelsel.

Voor verdere informatie over dit onderwerp zijn de volgende boeken aan te raden:

* Georges Ifrah, De wereld van het getal;
* Van der Waerden, Ontwakende wetenschap;
* Bunt, Van Ahmes tot Euclides;
* C.B. Boyer, A history of mathematics.

GEDETAILLEERD LESPLAN

<u>les 1</u>

* Beginnen met opgave 1 door middel van onderwijsleergesprek. De docent noteert op het bord de door de leerlingen gegeven antwoorden.
  10 minuten.

* Na deze inleiding gaan leerlingen in tweetallen zelfstandig verder met het pakket. De docent loopt rond totdat bijna alle tot en met opgave 4 af hebben.
  5 minuten.

* Bespreken van de opgaven door de docent. De leerlingen geven de antwoorden en kijken na.
  De docent laat de leerlingen zien hoe je op je handen twaalftallig kunt tellen. In de docentenhandleiding is hierover informatie opgenomen. De leerlingen raden welk getal de docent op de handen aangeeft.
  5 minuten.

* De leerlingen gaan verder met bladzijde drie, er wordt een overstap gemaakt naar turven met blokjes van 7, bijvoorbeeld het aantal dagen in een week.
  5 minuten.

* De leerlingen kunnen doorgaan met het horloge. De docent kijkt bij ieder tweetal of het vorige goed gemaakt is.
  15 minuten.

* Nadat iedereen, of bijna iedereen, opgave 10 gemaakt heeft, kunnen de opgaven 8 t/m 10 besproken worden. De docent legd de nadruk op het feit dat er na 60 weer bij 1 wordt begonnen met tellen. Net als bij ons tientallig tellen krijg je 11, 21 enz.
  10 minuten.

* De docent sluit de les af met een opmerking dat je op verschillende manieren kunt tellen.

<u>les 2</u>

* De docent begint de les met een samenvatting van de vorige les. Daarna komt een inleiding over de Babyloniërs, pagina 6 kan daarbij gebruikt worden, evenals het verhaal in de docentenhandleiding. De leerlingen kunnen voor hun zelf het verhaal nalezen en ze maken opgave 11 en 12.
  Ook kan de docent vertellen dat er een heleboel talstelsels hebben bestaan. Aan de hand van het 41-tallig tellen op ledematen zou dit duidelijk kunnen worden.
  20 minuten.

* De docent verteld over de kleitabletten en samen wordt naar de afbeelding op pagina 7 gekeken. Een manier om de vorm van de stift duidelijk te maken, is dat de docent de vorm uit een aardappel snijdt en een afdruk maakt op het bord. Ook zouden de leerlingen zelf afdrukken kunnen maken in klei als ze eerst, bijvoorbeeld met hulp van de handvaardigheiddocent, stiften van hout hebben gemaakt.
  10 minuten.

* Opdracht 13 inleiden zodat de bedoeling van de opdracht duidelijk wordt. De leerlingen maken in tweetallen de opdracht.
  15 minuten.

* bespreken van opdracht 13.
  5 minuten.

les 3

* Opdracht 14 gebruiken als inleiding op de notatie van de Babyloniërs voor getallen groter dan 60. De docent laat de notatie door een leerling die het begrijpt uitleggen.
  10 minuten.

* Leerlingen opdracht 15 en 16 laten maken. Opdracht 16 dient als controle of leerlingen het hebben begrepen.
  10 minuten.

* Eventueel laat de docent nog een aantal leerlingen voor de klas komen om een getal in het spijkerschrift op te schrijven. De hele klas kan dan raden welk getal er op het bord staat.
  5 minuten.

* Leerlingen maken opdracht 17.
  15 minuten.

* Opdracht 17 nakijken en het pakketje afsluiten met een onderwijs leergesprek over de verschillende talstelsels.
  10 minuten.

* De extra opgaven kunnen besproken worden met de eventuele snelle leerlingen, die al aan deze opgaven waren begonnen.

ANDERS TELLEN . . . . . .

over turven, haken en spijkers.

ANTWOORDEN

Antwoorden van de opgaven + enkele aanwijzingen

opgave 1
In combinatie met opgave twee inventariseren welke mogelijkheden je hebt om een stand bij te houden.

opgave 2
Je kunt de stand bijhouden door bijvoorbeeld:
* Na ieder spelletje in onze eigen getalnotatie de stand noteren
* Na ieder spelletje degene die gewonnen heeft een lucifer geven. De winnaar is degene die aan het eind van alle spelletjes de meeste lucifers heeft.
* turven

opgave 3
a) Liesbeth heeft gewonnen.
b) Liesbeth had 14 punten en Jasper had slechts 8 punten.

opgave 4
Op een gegeven moment zijn mensen begonnen met tellen omdat ze bijvoorbeeld dingen gingen vergelijken. Ik heb meer runderen dan jij, maar eenveel als hij. Ook toen de eerste primitieve handel ontstond, was er de behoefte om te kunnen tellen. Ruilen was alleen mogelijk als je wist hoeveel je wilde ruilen en hoeveel je er voor terug wilde hebben.
Ook de afstand van de ene plaats naar de andere werd bijvoorbeeld uitgedrukt in het aantal dagen reizen. Om naar een andere plaats te gaan was bijvoorbeeld twee dagreizen ver.

opgave 5
Je hebt dan 8 blokjes van 5 en 3 losse streepjes.

opgave 6

6 Weken en 5 dagen zijn 35 dagen.

opgave 7

Je hebt dan 6 blokjes van 7 en 1 los streepje.

opgave 8

a) Het is dan 9x60 + 56 = 596 seconden na 4 uur

b) Het is 4x60x60 + 9x60 + 56 = 14400 + 596 = 14996 seconden na 12 uur 's nachts.

opgave 9

a) Het is dan 4:10 20.

b) 100 Seconden na 4:09 56 is 4:11 36.

opgave 10

a) 1x60 + 13 = 73

b) 2x60 + 26 = 146

c) 5x60 + 58 = 358

d) 20x60 + 34 = 1234

opgave 11

redenen: * langs de rivieren heb je vruchtbaar grond
 * er is daar drinkwater voor de dieren

opgave 12

De Babyloniërs schreven op kleitabletten. Ze gebruikten daarvoor het spijkerschrift.

opgave 13

a) Op de voorkant, in de eerste kolom t/m regel 8, staan onder elkaar staan de getallen 1 t/m 8.

b) De eerste 8 getallen van de tweede kolom op de voorkant zijn de getallen: 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42 en 48.

opgave 14

85 = 1 blokje van 60 + 25 losse streepjes.

opgave 15

a) De rest van de voorkant bestaat uit de getallen 9 t/m 13 in de eerste kolom en de getallen 54, 60, 66, 62 en 78 in de tweede kolom.

b) De achterkant van de kleitablet bestaat ook uit twee kolommen. In de eerste kolom de getallen 14 t/m 18. In de tweede kolom de getallen 84, 90, 96, 102 en 108.

c) Op de kleitablet staat de tafel van 6 geschreven.

opgave 16

Door de leerlingen even te laten oefenen met het schrijven van de Babylonische getallen en het corrigeren van elkaar leren ze er mee omgaan.
Misschien kan de docent ook op het bord een paar getallen tekenen en de klas de getallen laten noemen.

opgave 17

a) Dit is het getal 1;12. In onze notatie het getal 72.

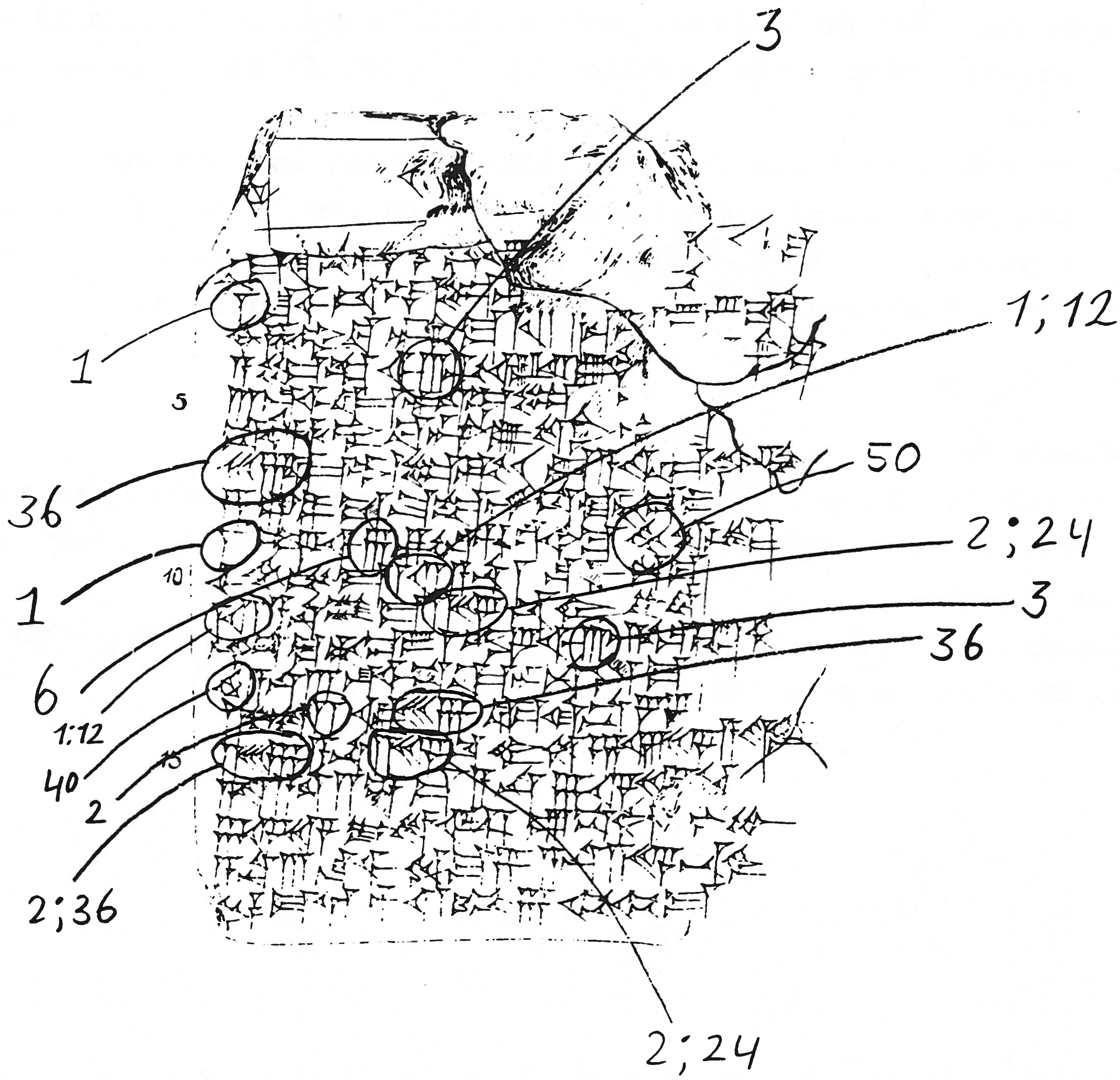
b) Zie plaatje hieronder.

c) Regel 7 begint met het getal 36.

d) Regel 15 begint met het getal 2;36. In onze notatie is dat het getal 156.

e+f) Zie plaatje hieronder. De mogelijke getallen zijn omcirkeld en in onze notatie is het desbetreffende getal erbij geschreven.

g) Het meest linkse stuk is nagetekend, je kunt dat zien aan de beschadiging van de kleitablet. Ook kun je als je goed kijkt op regel 7 zien dat er met het getal 36 is begonnen.



Antwoorden van de extra opgaven

opgave 1

a) 44;11;27

b) 3;44;70 maar doordat er natuurlijk geen getallen groter dan 60 in het antwoord mag staan wordt het: 3;45;10.

opgave 2

a) 40;41;53

b) 55;4;7

opgave 3

a) 18;28;3

b) 16;10;40

opgave 4

```
7/ 15,34,8,18 \ 2,13,26,54
   14
     94                  15-14=1
     91                   1=60
       188                  60+34=94
       192
          378
          378
            0
```

opgave 5

Het binaire stelsel kan als illustratie dienen dat ook nu nog verschillende stelsels bestaan.

a) $7 = 1x2^2 + 1x2^1 + 1x2^0 = 111$ in binaire stelsel

b) $10 = 1x2^3 + 0x2^2 + 1x2^1 + 0x2^0 = 1010$

c) $16 = 1x2^4 + 0x2^3 + 0x2^2 + 0x2^1 + 0x2^0 = 10000$

a) $100000 = 1x2^5 = 32$

b) $1110 = 1x2^3 + 1x2^2 + 1x2^1 + 0x2^0 = 14$

c) $111110 = 1x2^5 + 1x2^4 + 1x2^3 + 1x2^2 + 1x2^1 + 0x2^0 = 62$