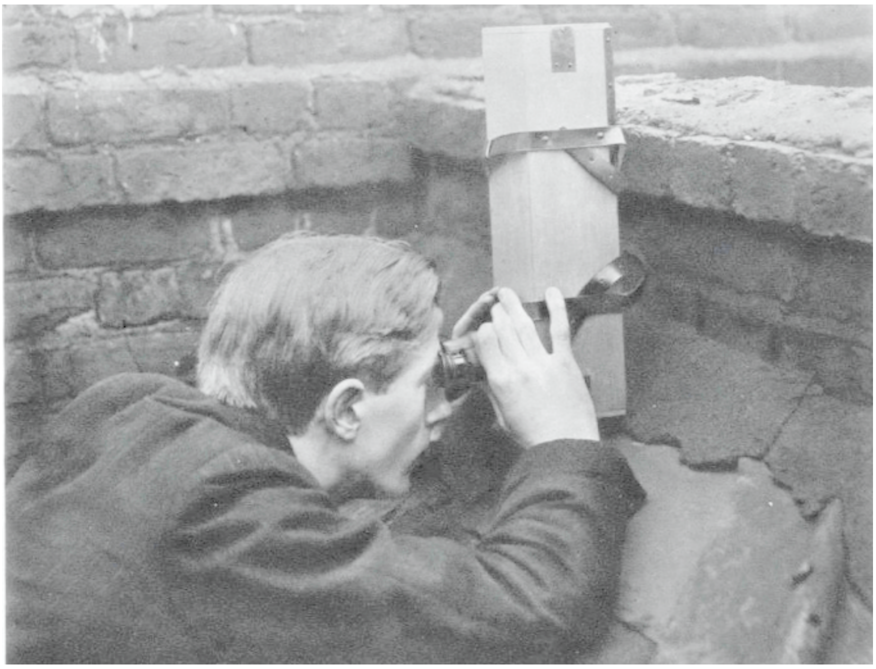
Wiskunde B-dag 2013

15 november, 9:00 - 16:00 uur

Bespiegelingen over spiegels

De Periscoop

Deze foto staat op de website www.geheugenvannederland.nl



Eerste Wereldoorlog: Man beproeft periscoop om over loopgraven heen te kunnen kijken bij een muur, 1915.

Verkenning 1 Dat werkt zo!

Neem ongeveer 10 minuten de tijd om de werking van een periscoop te onderzoeken. Informatie vind je (bijvoorbeeld met Google) op internet.
Gebruik in je verklaringen en schetsjes over de werking zeker de woorden ‘spiegels’ en ‘lichtstralen’, want daar gaat deze wiskunde B-dag opdracht over.

Nadere introductie Wiskunde B-dag 2013

Het onderwerp van vandaag

Deze Wiskunde B-dag gaat over spiegels en lichtstralen. Spiegels ken je. Je ziet er iedere dag vast wel één, al kijk je op dat moment misschien meer naar jezelf dan naar de spiegel! De lichtstralen zie je eigenlijk niet. Maar als je wilt begrijpen hoe spiegels werken (en samenwerken), dan heb je die lichtstralen wel nodig als getekende lijnen in een schetsje of in een precieze constructie. Waarschijnlijk heb je ze bij Verkenning 1 al gebruikt. Vandaag gaat het over het onderzoeken en verklaren van allerlei verschijnselen die optreden bij spiegels.

De delen van de dag

Deze Wiskunde B-dag opdracht bestaat uit drie delen: *basisdeel, eigen onderzoek, voltooien eindwerkstuk*.

- Het *basisdeel* is de noodzakelijke voorbereiding op deel 2: *eigen onderzoek*. Je verkent allerlei eigenschappen van spiegels en lichtstralen in één spiegel en in meerdere spiegels. De verkennende vragen zijn bedoeld om je met iets nieuws te laten kennismaken (*Verkenning* genoemd), maar er zijn ook vragen (*Opdracht* genoemd) waarbij je een beantwoording met een wiskundig correcte redenering moet opnemen in het eindverslag.
- In het deel *eigen onderzoek* kies je uit vier grotere onderzoeksvragen. Je behandelt twee van de onderzoeksvragen A, B en C die voortzettingen en verdiepingen zijn van wat in het basisdeel is verkend. Onderzoeksvraag D is een uitdaging om een record te breken. Die kun je als extra activiteit ook toevoegen aan je verslag.
- In het *eindverslag* beschrijf je het werk dat je in het deel *eigen onderzoek* hebt verricht. Vertel je eigen verhaal zó dat het duidelijk en overtuigend is. Uiteraard gebruik je daarbij belangrijke toelichtende figuren als illustraties. Wees begrijpelijk voor anderen die niet aan de Wiskunde B-dag mee doen maar wel voldoende wiskunde beheersen. Dat betekent dat je ook de problemen helder moet introduceren en dat je, waar nodig en nuttig, teruggrijpt op wat je in het *basisdeel* hebt verkend en beargumenteerd.
  Kortom: je schrijft een eigen duidelijk verhaal, met wiskundige argumenten onderbouwd. De manier van presenteren telt zeker ook mee in de beoordeling!

Experimenteren: beschikbaar gereedschap

Experimenteren met echte spiegels hoort bij deze dag.

- Je krijgt van jouw docent spiegeltegels en tape om spiegels scharnierend aan elkaar te bevestigen. Gebruik die spiegels waar nodig en nuttig.
- Er is ook een applet beschikbaar waarmee je een spiegelkamer en andere constructies met meerdere spiegels kunt simuleren. Waar je de applet kunt vinden, staat verderop in de opdracht.

Indicatie voor een tijdsindeling van de dag

- neem de tijd om het basisdeel rustig door te werken, zodat je de principes van het spiegelen en bijbehorende technieken goed beheerst. Dat mag best een paar uren in beslag nemen, bijvoorbeeld tot 11:30 uur.
- Maak een keus welke twee onderzoeksvragen A, B en C van deel 2 ('Eigen onderzoek') je verder wilt uitwerken.
- Het verslag moet digitaal worden aangeleverd. Als je werkbladen toevoegt, zorg er dan voor dat die (digitaal) goed zichtbaar zijn, dus graag met zwarttinten als PDF

Veel succes, maar vooral ook veel plezier, met deze Wiskunde B-dag opgave

Basisdeel

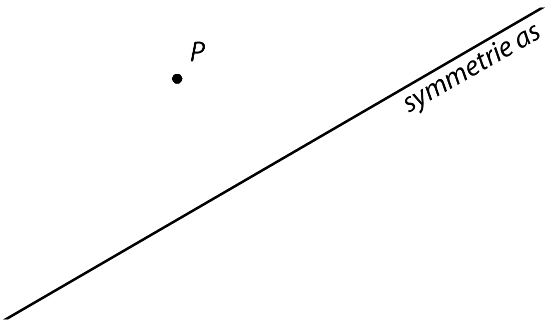
A. Verband tussen lijnsymmetrie en spiegelen

Lijnsymmetrie

Je ziet een (bijna) volmaakte lijnsymmetrie in deze prachtige atlasvlinder.
Bij volmaakte lijnsymmetrie is er een as waarop je de figuur kunt dubbelvouwen zodat de corresponderende punten links en rechts van die as exact op elkaar vallen. Eigenlijk toont de vlinder zijn symmetrie aan door gewoon zijn vleugels tegen elkaar dicht te slaan!

Verkenning 2 Lijnsymmetrie onderzoeken

In onderstaande figuur doen we het wat abstracter met passer en liniaal of met de geodriehoek. De as heet hier de symmetrie-as.
Stel je voor dat punt P een punt op de linkervleugel van de vlinder is.



a. Bepaal met behulp van je geodriehoek in deze figuur het punt P' op de rechtervleugel van de vlinder dat met punt P correspondeert.

b. Wat kun je zeggen over de samenhang tussen de *symmetrie-as*, de *verbindingslijn* PP' en de *afstand* van P en van P' tot de symmetrie-as?

P' wordt het spiegelbeeld van P genoemd, ook al is er helemaal geen spiegel. Waarom dat zo gezegd wordt? Dat komt nu.

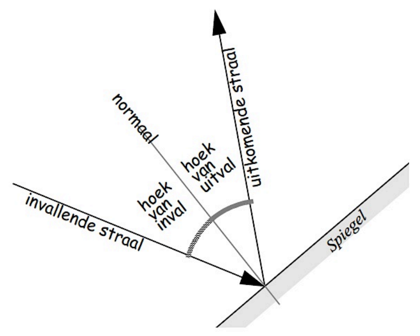
Het spiegelprincipe

Als een lichtstraal een spiegel treft, wordt die lichtstraal teruggekaatst door de spiegel. Maar de terugkaatsende straal gaat in het algemeen niet langs dezelfde weg weer terug.

Wel geldt dit *spiegelprincipe*:

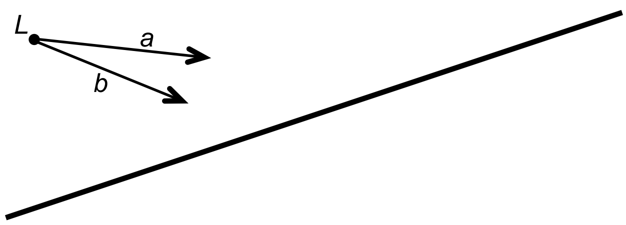
Hoek van uitval is hoek van inval.

De hoeken worden gemeten ten opzichte van de *normaal*. Dat is de lijn die loodrecht op de spiegel staat. Als je van bovenaf op de spiegel kijkt, ziet het er uit zoals in figuur 1.
Dat is een *natuurkundige* eigenschap. Deze eigenschap gaan we gebruiken bij het spiegelen. Het is vanaf nu voor ons de *hoofdeigenschap* van het spiegelen.



figuur 1

Van terugkaatsing naar spiegelbeeld
In figuur 2 zie je een lichtbron *L*, bijvoorbeeld een gewoon lampje. Die zendt in alle richtingen stralen uit. Twee van die lichtstralen zijn getekend (***a*** en ***b***).
Verder zie je een spiegel. De (spiegelende) voorkant vind je aan de kant van de lichtbron.
De tekening is een bovenaanzicht van de situatie (net zoals bij figuur 1). Anders gezegd: we concentreren ons op de richtingen in het vlak waarin we tekenen en vergeten de ruimte waarin we ons bevinden.



figuur 2

Opdracht 1 Waar komen de terugkaatsende stralen vandaan?

a. Trek eerst de twee stralen ***a*** en ***b*** door tot aan de spiegel en pas daar dan het spiegelprincipe op toe. Teken nu de terugkaatsende stralen van ***a*** en ***b*** in de spiegel.
b. De terugkaatsende stralen zijn gedeelten van gehele lijnen. Teken die *gehele* lijnen, dus ook de stukken aan de achterkant van de spiegel en markeer het snijpunt.
c. Dat gemarkeerde snijpunt heeft een bijzondere positie ten opzichte van de lichtbron! Welke positie is dat? Toon de juistheid van je bewering aan.

Conclusie
Bij het spiegelen van een bron in een vlakke spiegel lijkt het alsof de terugkaatsende lichtstralen komen van een virtuele bron aan de achterkant van de spiegel. Die virtuele bron is het spiegelbeeld van de originele bron.

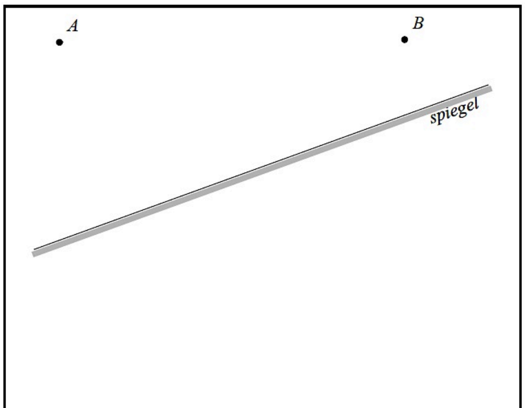
Alles is lichtbron
Wat voor de lamp in Opdracht 1 geldt, is ook waar voor niet-lampen. Elk object dat je ziet is namelijk een lichtbron; je oog ziet een object door het licht dat er vandaan komt. Dat is dan oorspronkelijk licht van een andere lichtbron (een lamp, de zon), maar dat doet er niet toe.

Opdracht 2 Hoe komt die straal daar?

a. Teken in figuur 3 nauwkeurig de lichtstraal die van object *A* via de spiegel naar oog *B* gaat. Het moet wel kloppen met het spiegelprincipe!

Bij vraag **a.** heb je misschien het spiegelbeeld *A′* van *A* in de spiegel getekend en dat met *B* verbonden. En je hebt daarmee vervolgens het lichtpad van *A* naar het juiste punt van de spiegel gevonden.

b. Werkt het ook als je het spiegelbeeld *B′* van *B* gebruikt? Krijg je dan hetzelfde resultaat? Onderbouw jouw uitspraak met wiskundige argumenten.



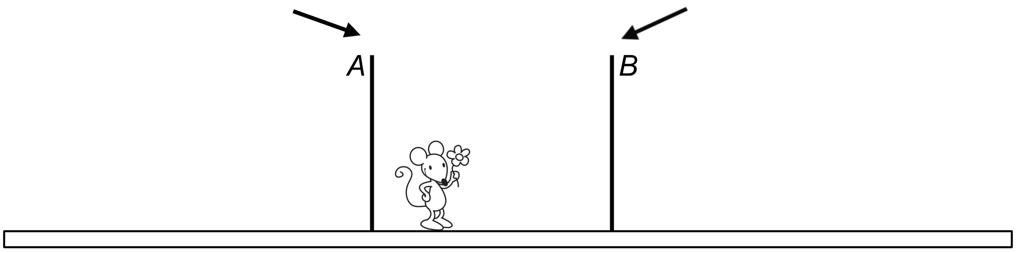
figuur 3

B. Meer spiegels, veel meer beelden

In de verdere opdrachten gaat het steeds om meer dan één spiegel. Je krijgt dan te maken met spiegelbeelden van spiegelbeelden. Eigenlijk was de periscoop uit verkenning 1 daar al een voorbeeld van. Bij dit onderdeel is het heel handig om met spiegeltegels te experimenteren. Twee voorbeelden zetten de toon en daarna volgt wat theorie.

Verkenning 3 Een eerste experiment

Maak een opstelling, zoals in figuur 4 is geschetst, bestaande uit twee spiegeltegels (*A* en *B*) en één muisje met bloem (of een ander voorwerp waarbij de linker- en rechterkant duidelijk verschillend zijn). Zorg ervoor dat de twee spiegels (zo goed mogelijk) loodrecht en evenwijdig aan elkaar op de tafel staan. De getoonde situatie is een vooraanzicht van de opstelling. Het muisje staat tussen de twee spiegels en kijkt naar jou.



figuur 4

a. Kijk je via een van de twee pijlen over de ene spiegel, dan zie je het muisje in de andere spiegel. Teken de twee spiegelbeelden van het muisje; let erop dat de spiegelmuisjes de bloem in de goede hand hebben! Gebruik **Werkblad 1**.

b. Voeg ook het spiegelbeeld *B′* van spiegel *B* in spiegel *A* toe.

Spiegels *A* en *B* met de ruimte ertussen, inclusief het muisje, zijn deel van de echte wereld. We noemen dat geheel een *basiscel*. Het stuk ruimte tussen *A* en *B′* (inclusief gespiegeld muisje), is het spiegelbeeld (in spiegel *A*) van deze basiscel. Dat is een virtuele ruimte. We noemen dat een *virtuele cel*.

c. Voeg meer virtuele cellen (spiegelbeelden van spiegels en herhalingen daarvan) met muisjes toe in de figuur op Werkblad 1.

d. Welke structuur ontdek je in die reeks van cellen?

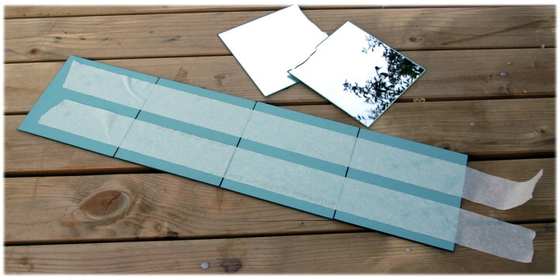
Je hebt nu gezien dat je met twee spiegels oneindig veel spiegelbeelden kunt genereren, maar dat is nog lang niet alles!

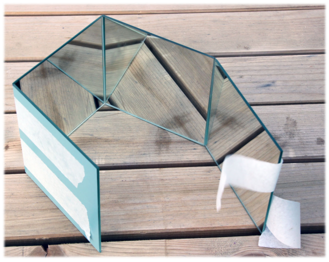
Van nano-vleugel naar oneindig maal oneindig

Deze vleugel is gemaakt van nano-lego. Hij is ongeveer 5 centimeter groot.

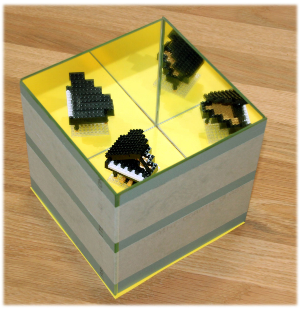
We zetten nu vier spiegels in een vierkant. Kijk mee op de foto's en lees de instructies, maar doe het ook zelf. Dat is veel mooier dan op papier en helpt je dingen te ontdekken.

Leg vier tegels op de kop naast elkaar, gebruik twee stukken afplakband, en buig de kamer voorzichtig tot een vierkant en plak het geheel dicht. Je hebt nu een vierkante spiegelkamer.

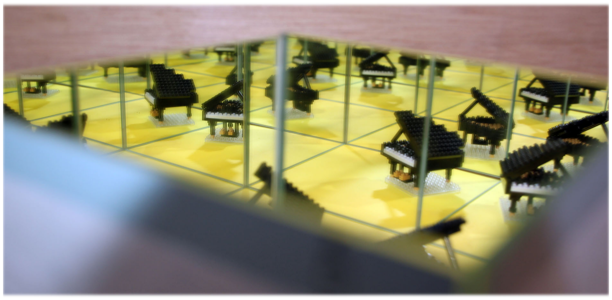




Zet het vierkant om de nano-piano (of gebruik een eigen asymmetrisch voorwerp). Natuurlijk zie je dan meerdere spiegelbeelden.

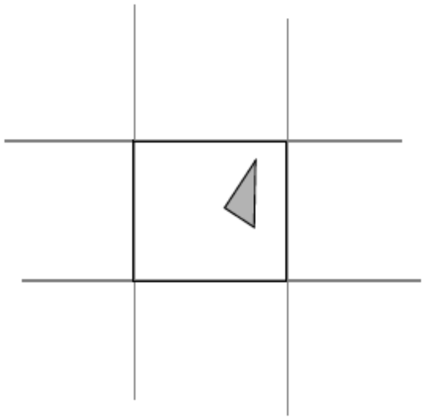


Dit zie je als je vlak over de rand van de spiegeltegels kijkt:



Buk je nog iets dieper, dan kijk je verder de eindeloze virtuele ruimte in. Kijk daar zelf rond en stel vast: de nano-piano's staan in rijen met dezelfde structuur als bij de muis-met-bloem beelden. Van die rijen zijn er eindeloos veel naast elkaar. Een rij van rijen, steeds volgens dezelfde structuur.

Net als bij het voorbeeld met twee evenwijdige spiegels, kun je het geheel hier opvatten als een *basiscel* (het vierkant gevormd door de vier echte spiegels met daarbinnen het oorspronkelijke object) en allerlei kopieën (spiegelbeelden en spiegelbeelden van spiegelbeelden) er omheen, die een heel vlak vullen.
Hieronder is die basiscel getekend en is de nano-vleugel vervangen door een niet-symmetrisch driehoekje. Je kijkt in bovenaanzicht op de basiscel en de ruimte er omheen met virtuele cellen.



Opdracht 3: In kaart brengen van de structuur

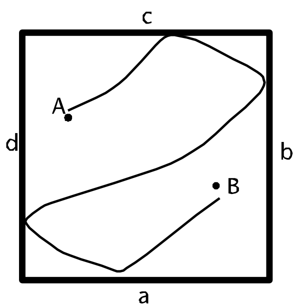
a. Teken het driehoekje steeds in de juiste ligging in de virtuele cellen die zijn gegeven op **Werkblad 2**.

b. Welke virtuele cellen zien er hetzelfde uit als de basiscel? Zie je daarin een regelmaat? Verklaar een en ander wiskundig.

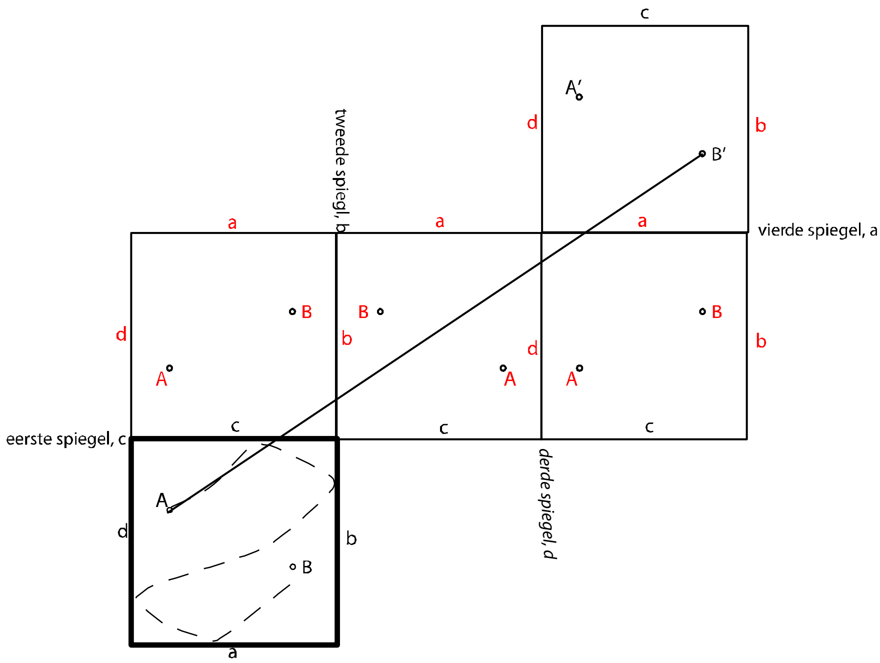
C. De UITVOUW-methode: Lichtpaden bij méér spiegels

We gaan verder met wat in Opdracht 2 is begonnen: het vinden van lichtpaden met gegeven beginpunt en eindpunt via één of meer spiegels.
Bij zo'n probleem probeer je vanaf een beginpunt A als het ware een laserpen (een zaklamp die een heel smalle lichtbundel geeft) via de spiegels op een punt B te richten dat na het spiegelen ook echt wordt bereikt.

Voorbeeld
Je ziet een vierkante spiegelkamer (met spiegelwanden a, b, c, d) waarin je vanuit punt *A* via de spiegels *c, b, d* en *a* naar punt B wilt gaan. Een schetsje is gauw gemaakt:



Om een nauwkeurige oplossing te vinden, spiegelen we de basiscel mét de punten *A* en *B* achtereenvolgens in de zijden c, b, d en a.



Na het spiegelen is de verbindingslijn van A naar het uiteindelijke spiegelbeeld B′ getekend.

Verkenning 4 Construeer het pad in het oorspronkelijke vierkant

Voltooi het geheel door het lichtpad in de basiscel precies te tekenen. Je spiegelt dan eigenlijk de stukjes van de lijn weer terug naar de basiscel, maar dat gaat nu eenvoudig want je kunt opmeten waar ze de spiegels raken!

Opdracht 4 Van A naar A' kan ook

a. Teken ook de verbindingslijn van A naar A'. Je merkt nu vanzelf dat je dan moet spiegelen via c, b, a, d. Teken het uiteindelijke lichtpad in de basiscel. Gebruik daarvoor **Werkblad 3**.

b. Als je zelf in een echte vierkante spiegelkamer zou staan dan geeft het lichtpad AA' van vraag **a.** aan dat je jezelf ziet in de spiegel. Zie je dan jouw voorkant of zie je jouw achterkant? Of misschien wel jouw zijkant?

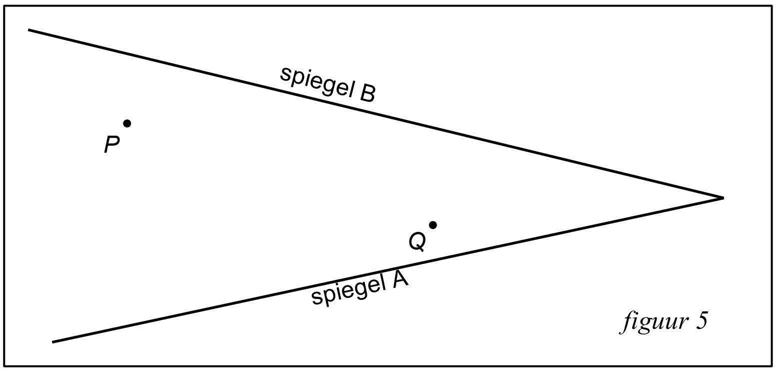
c. Is het ook mogelijk dat je jezelf ziet via drie spiegelingen? Hoe zie je jezelf nu?

Samenvatting Uitvouwmethode en andere voorbeelden

Bij het voorbeeld op de vorige bladzijde werk je sneller als je meteen veel vierkanten tekent, alsof het ruitjespapier moet worden, waarna je de spiegelbeelden van de punten in de virtuele cellen plaatst. Zoals dat vanzelf ging bij Opdracht 4. Dat is speciaal voor vierkanten een makkelijke manier.
In het algemeen - bij andere vormen van basiscellen, en dat komt nu - is het verstandig eerst even spiegel voor spiegel te werken. In het voorbeeld zag het eruit alsof je een opgevouwen figuur weer uitvouwt.
Vandaar de naam: de *UITVOUWMETHODE*.

Opdracht 5: Tussen twee lijnen

Ook de ruimte tussen twee lijnen (twee spiegels die met elkaar zijn verbonden en een hoek met elkaar maken) kan de basiscel zijn voor de uitvouwmethode. Zie figuur 5.
Voor deze opdracht is **Werkblad 4** beschikbaar.



figuur 5

a. Teken nauwkeurig het lichtpad van *P* naar *Q* via spiegel *B* en spiegel *A*.
Licht je werkwijze toe.
b. Teken ook een lichtpad van *P* naar *P* via achtereenvolgens de spiegels *B*, *A*, *B* en *A*.
Geef ook hierbij een toelichting van de werkwijze.

Bij biljarten kaatst de bal tegen de band (de rand van het laken) en gaat volgens het principe *hoek van inval is hoek van uitval* verder. Het midden van de bal is een punt en dat punt kaatst dan als het ware tegen een lijn die vlak voor de werkelijke band loopt. Zo beschouwd is biljarten eigenlijk gewoon hetzelfde als spiegelen. En dus is hier ook het principe van de uitvouwmethode bruikbaar.

In figuur 6 is een biljart in bovenaanzicht getekend. De bedoeling is dat je bal *A* zó wegstoot dat hij bal *B* pas raakt na drie banden te hebben geraakt. Twee keer dezelfde band mag ook, als er maar eerst drie keer een band wordt geraakt.

figuur 6

Verkenning 5 Driebanders

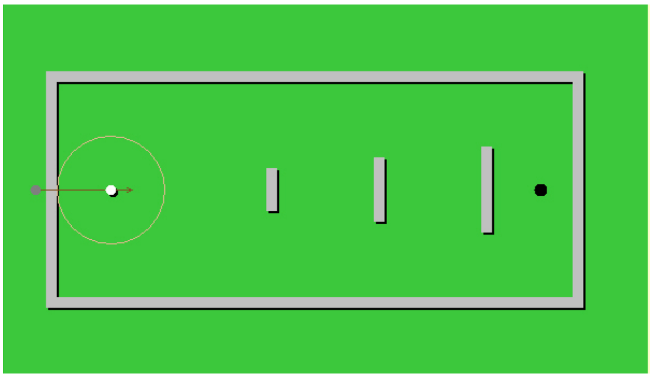
Construeer een paar verschillende routes voor bal *A*, waarbij bal *B* pas wordt geraakt nadat hij eerst drie banden heeft geraakt.

Ook minigolf blijkt op een soortgelijke manier te kunnen worden bekeken.

Verkenning 6 Minigolf (op het rekenweb)

a. Speel het spel online op de website om het te verkennen http://www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/03015/opgave4.html.

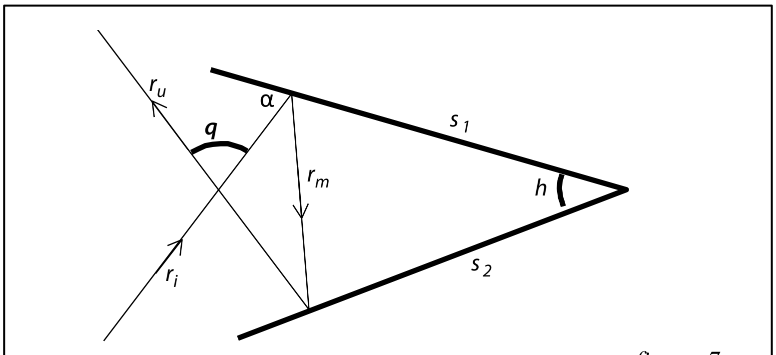
b. Vind *via nauwkeurig* tekenwerk de juiste slagrichting in deze tekening. Zijn er meerdere mogelijkheden?



D. Lichtpaden bij meerdere spiegels

Opdracht 6 Kaatsen in twee spiegels

Stel je voor dat een lichtstraal, zoals in figuur 7, door twee spiegels s_1 en s_2 gekaatst wordt.



figuur 7

De hoek tussen de twee spiegels is $\boldsymbol{h}$; de hoek tussen invallende straal r_i en spiegel s_1 is $\boldsymbol{\alpha}$. De hoek tussen de ingaande straal r_i en de uitgaande straal r_u noemen we $\boldsymbol{q}$. De vraag is of er een verband bestaat tussen de hoeken h en q.

Onderzoek deze situatie: $h = 40°$ en $\alpha = 60°$.

a. Hoe groot is hoek q in deze situatie?

b. Wat verandert er als de invallende lichtstraal een hoek $\alpha = 80°$ maakt bij $h = 40°$?

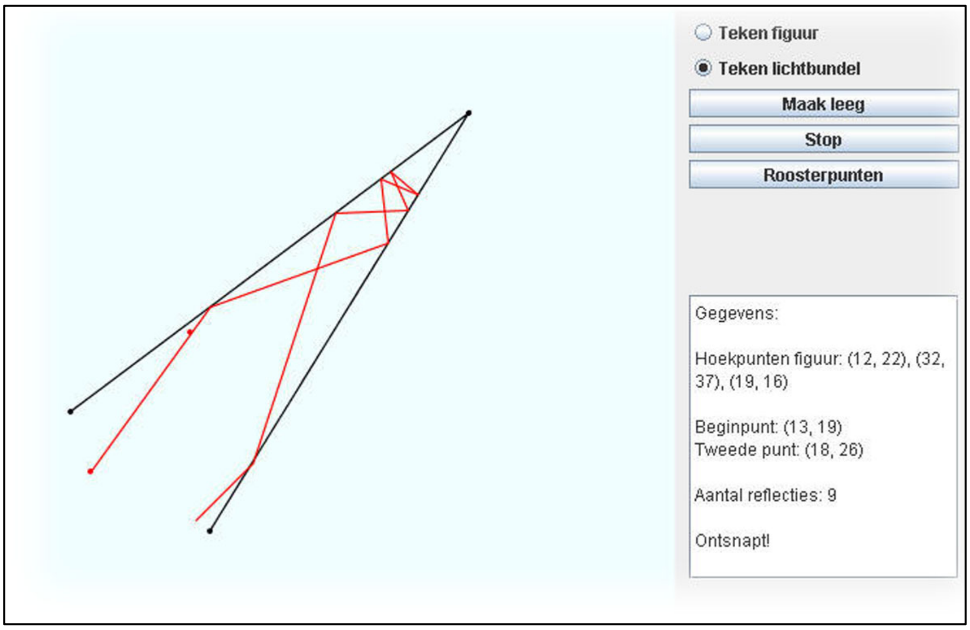
c. Onderzoek nog een paar andere getalsmatige combinaties van hoeken h en α. Formuleer een vermoeden over een verband tussen de hoeken h en q.

d. Probeer in algemene zin (dus niet alleen vanuit getalvoorbeelden) aan te tonen dat jouw vermoeden juist is.

e. Als de spiegels onder een bepaalde bijzondere hoek h staan, komt de lichtstraal precies in omgekeerde richting terug. Wat betekent dat voor hoek q en wat moet h dan zijn?

Digitaal experimenteren

Op www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/28005/test.html is een applet beschikbaar, waarmee je een open of gesloten spiegelkamer tekent (met 'Teken figuur') van willekeurige vorm en waarin je een lichtstraal maakt door een *Beginpunt* en een *Tweede punt* op te geven (met 'Teken lichtbundel'). Daarna tekent de computer het lichtpad.
Hier is een voorbeeld:



De applet toont ook de coördinaten van de hoekpunten van de spiegelkamer en de coördinaten van Beginpunt en Tweede punt van de lichtstraal.
Er is een button waarmee je kunt zorgen dat alleen geheeltallige coördinaten toegestaan zijn ('Roosterpunten'). Bij Hoofdopgaven C en D is die nodig.

Verder geldt:
- 'Maak leeg' maakt het hele scherm schoon. Je bent dan jouw spiegelkamer kwijt. Om dat te voorkomen, omdat je een andere lichtstraal wilt testen, houd je de button 'Teken lichtbundel' actief en definieer je twee nieuwe punten voor een nieuwe lichtstraal.
- Als je een gegeven spiegelconstructie wilt aanpassen kun je hoekpunten verslepen als de button 'Teken figuur' eerst wordt geactiveerd.
- De 'Stop' button moet je gebruiken als de lichtbundel zichzelf gaat herhalen.

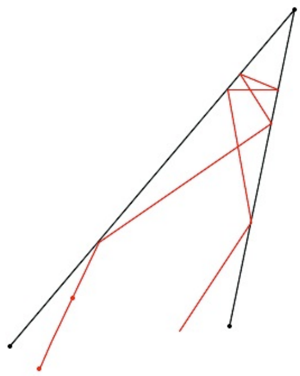
Ook belangrijk zijn de drie volgende zaken.
- De applet maakt in principe open figuren. Als je een gesloten spiegelkamer wilt maken kies je als laatste hoekpunt een punt dat dicht bij het eerste punt ligt. Dat laatste punt sleep je dan naar het eerste punt om de figuur gesloten te maken.
- Als in een open kamer een lichtstraal toevallig een hoekpunt raakt is het niet duidelijk hoe de lichtstraal dan verder moet gaan. Dan krijg je de melding 'Er is een hoekpunt geraakt!'. Probeer dan met een andere lichtstraal verder te werken.
- Af en toe kan het voorkomen dat de applet vastloopt. Gebruik dan Reload/Herladen om de applet opnieuw te starten.

Eigen Onderzoek

Kies twee van de drie hoofdopgaven A, B en C en werk die naar vermogen goed uit.
Als extraatje kun je je ook nog storten op D waar naar een recordpoging wordt gevraagd.

Hoofdopgave A: Twee spiegels onder een (kleine) hoek

Zet twee spiegels loodrecht op tafel; de spiegels zijn zo met tape aan elkaar bevestigd dat ze kunnen scharnieren en je dus de hoek tussen de twee spiegels kunt variëren.
Als je een voorwerp tussen de spiegels legt, zie je meteen een aantal spiegelbeelden, afhankelijk van de hoek tussen de twee spiegels.



Richtvragen voor het onderzoek:

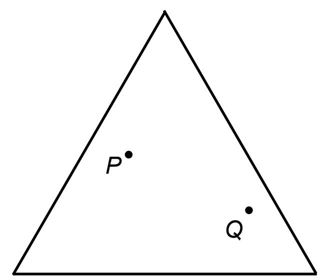
- Hoe hangt het aantal spiegelbeelden samen met de hoek tussen de twee spiegels?

- Als de opstelling met de spiegels groot genoeg is kun je ook jezelf een aantal keren zien in de spiegel(s). Hoeveel keer? Is dat ook afhankelijk van de hoek tussen de spiegels? En hoe dan?

Je kunt bij deze opdracht goed experimenteren met de applet, omdat die aangeeft na hoeveel spiegelingen een straal ontsnapt uit de hoek.

Hoofdopgave B: Lichtpaden in driehoekige spiegelkamers

Bij de Opdrachten 3 en 4 heb je de structuur van de eindeloze virtuele ruimte bij een vierkante spiegelkamer onderzocht.
In de driehoekige spiegelkamer van figuur 8, met drie wanden van gelijke afmetingen, ga je onderzoeken hoe lichtpaden via 1, 2, 3, 4 of meer keren kaatsen in de wanden zich gedragen. Hier is een voorbeeld getekend van de basiscel, de echte ruimte tussen de drie spiegels met daarin twee punten: *P*, het startpunt van het lichtpad, en *Q* het te treffen punt van dat lichtpad.
De punten *P* en *Q* zijn uiteraard vrij te kiezen binnen de driehoek.



figuur 8

Aandachtspunten bij het onderzoek zijn zeker

- Is het mogelijk een lichtpad te maken waarbij een lichtstraal na 1, 2, 3 of meer keren kaatsen terugkomt op hetzelfde lichtpad en zichzelf dus blijft herhalen? Is dat afhankelijk van de posities van *P* en *Q* binnen de basiscel?
- Als punt *Q* samenvalt met punt *P* dan kun je onderzoeken of jij, als je in zo'n spiegelkamer zou staan in punt *P*, jezelf ziet na 1, 2, 3, ... keer kaatsen in de spiegelwanden. Als dat gebeurt, wat zie je dan van jezelf (voor-, zij-, of achterkant)?

Verdere onderzoeksvragen zouden zich kunnen richten op

- Welke onderzochte eigenschappen bij een gelijkzijdige driehoeks-spiegelruimte zijn ook geldig in een willekeurige driehoeks-spiegelruimte?

Hoofdopgave C: Lichtpaden in een rechthoekige spiegelkamer

Deze opdracht gaat over een rechthoekig biljart of over een rechthoekige spiegelkamer. Het maakt eigenlijk geen verschil. Omdat je bij deze opgave goed kunt experimenteren met de applet, houden we het op spiegelen.
Tip: zet het GRID in de applet aan. Dan kun je precies de maten realiseren.

Voorbeeld:
Een rechthoek van 24 bij 15 dm. De bal (lichtstraal) wordt op pad gestuurd vanuit de hoek linksonder in de figuur, onder een hoek van 45° graden met de zijden.
Uiteindelijk blijkt de bal (lichtstraal) in een van de drie andere hoeken van het biljart uit te komen.

a. In welke hoek is dat? Nu hoeveel spiegelingen in de wanden?

b. Bij een biljart van 24 bij 14 dm of een biljart van 24 bij 16 dm gaat het heel anders. Neem wel dezelfde startsituatie van de lichtstraal: beginnend in de hoek linksonder onder een hoek van 45°.

c. Onderzoek wat voor mogelijkheden er zijn bij andere maten van het biljart en of je een algemene regel kunt vinden. Het zou mooi zijn als je bij gegeven grootte van de zijden via een eenvoudige berekening kunt voorspellen in welke hoek de straal eindigt.

Bij je onderzoek kun je mogelijk goed gebruik maken van de uitvouwmethode.
Ook het gebruik van coördinaten kan van pas komen; kies het punt O(0, 0) in het startpunt van de bal (straal). Dan hebben de andere hoekpunten, bij het uitvouwen altijd als coördinaten veelvouden van de zijden van het biljart.

Mogelijk heb je ook wat aan de begrippen '*kleinste gemeenschappelijke veelvoud*' en '*grootste gemeenschappelijke deler*'. Je kunt in ieder geval even op internet opzoeken wat dat zijn.

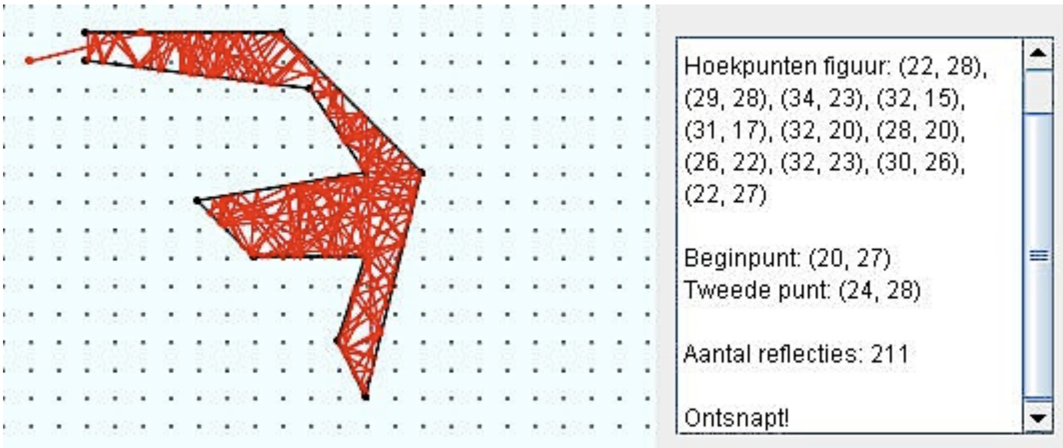
Eventueel vervolgonderzoek:

d. Wat gebeurt er als niet in een hoekpunt gestart wordt en ook niet op een lichtpad dat uit een hoekpunt komt?

e. Wat gebeurt er als je onder een andere hoek start, maar wel in de richting van een ander punt gaat dat ook hele coördinaten heeft?

Hoofdopgave D: Recordpoging reflectie-aantallen.

Hier zie je een voorbeeld van een spiegelende veelhoek in de applet waar een lichtstraal door een ingang naar binnen gaat en er na een fors aantal spiegelingen weer uit komt.



Tot nu toe is het nog niet gelukt een lichtstraal via zo'n ingang een veelhoek in te sturen, waarbij de lichtstraal niet meer terug naar buiten komt.
De lichtstraal kwam er altijd weer uit, zij het na heel veel spiegelingen.

Jouw recordpogingen

- Ontwerp een spiegelende veelhoek (met ingang) met een zo *groot* mogelijk aantal reflecties voordat de straal er weer uit komt, en liefst met een *klein* aantal spiegelende wanden. Stel de applet in op 'Roosterpunten', want je mag in de wedstrijd alleen gehele coördinaten voor de hoekpunten en straal invoeren.
- In je zoektocht houd je de coördinaten van de veelhoek bij om later daarmee opnieuw te kunnen experimenteren; de applet helpt je daarbij.
- Als je denkt een record te hebben gevonden, licht je uiteraard ook toe waarom je deze vorm van de spiegelkamer hebt gekozen.

Let op! Het is de bedoeling dat je met een *zo klein mogelijk* aantal spiegelwanden een zo groot mogelijk aantal reflecties probeert te krijgen. En ook dat je jouw keuzes over vormen en aantal kunt verantwoorden.
Neem in je verslag een screen print op van jouw recordpoging.