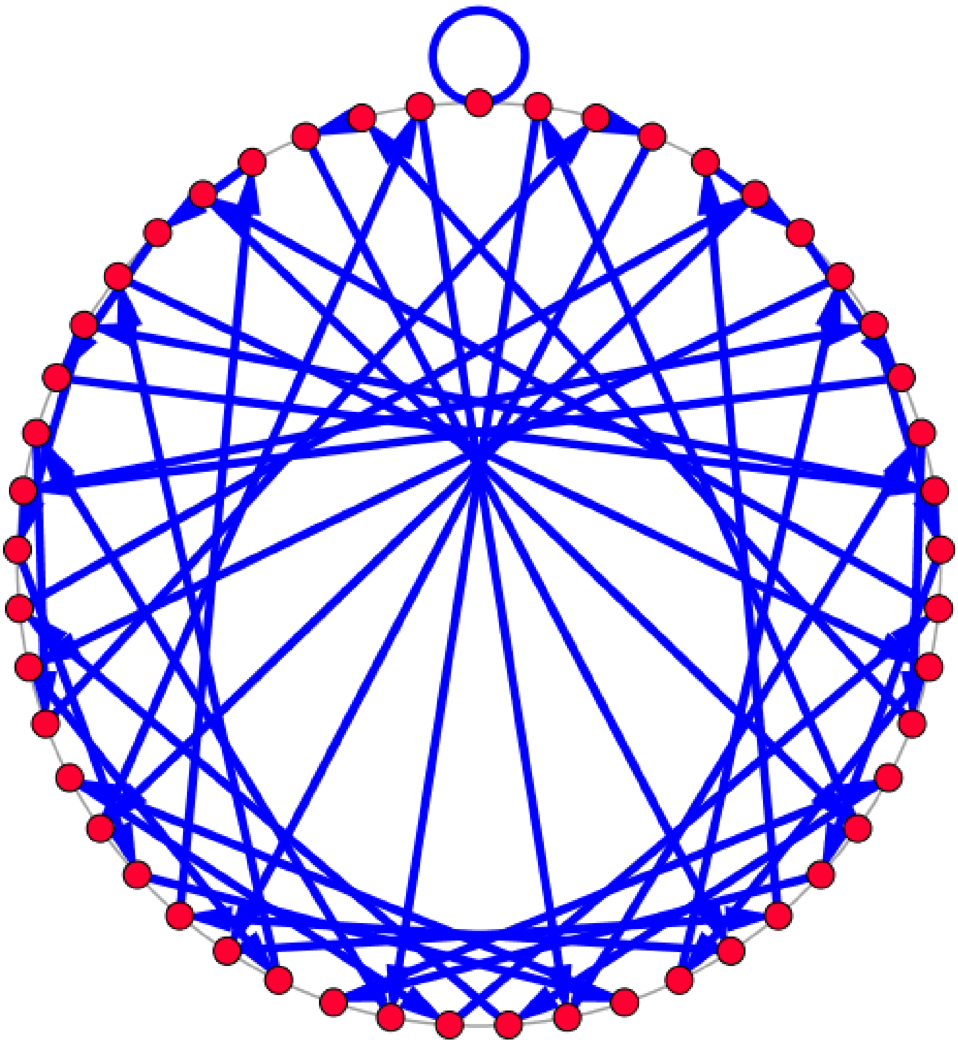
Pijlenklokken



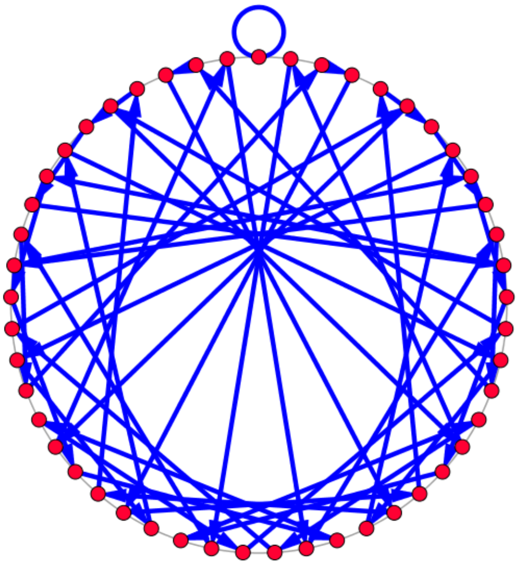
Wiskunde B-dag 2017

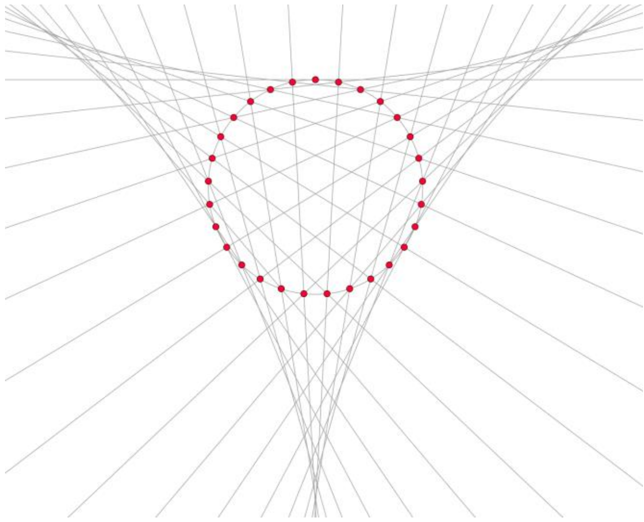
Wiskunde B opdracht 2017

Inleiding

Over de opdracht

Mensen (dus ook jullie) zijn gemaakt om patronen en structuren te herkennen. De wiskunde maakt hier een sport van. In deze opdracht leiden eenvoudige recepten tot prachtige plaatjes die we pijlenklokken en lijnenklokken noemen.





Aan jullie de uitdaging de patronen en structuren hierachter te ontdekken.

Structuur van de dag

Deze Wiskunde B-dag opdracht bestaat uit inleidende opgaven, een extra opgave en een eindopgave. Probeer ongeveer de helft van de dag aan de eindopgave te besteden. Deze bestaat uit een open onderzoek waarbij je op ontdekkingtocht gaat. Experimenteer, stel vragen, ontdek patronen en verklaar die patronen. Ieder (groepje) kan zijn eigen weg inslaan.

Het gehele verslag moet om 16:00 worden ingeleverd. Plan je tijd en verdeel de taken. Het kan nuttig zijn om al in de ochtend te beginnen met het uitschrijven van je uitwerkingen van de inleidende opgaven.

Wat lever je in?

Aan het eind van deze dag lever je een digitaal verslag in. Daarin beschrijf je de resultaten die je bij de opgaven hebt gevonden, in het bijzonder van het onderzoek uit de eindopgave. Vertel je eigen duidelijke en overtuigende verhaal.

Tips:

- Wees begrijpelijk: zó dat je werk voor iemand die niet aan de Wiskunde B-dag heeft meegedaan (maar wel voldoende wiskunde beheerst) leesbaar is. Dat betekent dat je volledig moet formuleren en niet moet verwijzen naar tekst uit de opdracht.
- Als je onderbouwing, uitleg of verklaringen geeft, dan probeer je dat zo veel mogelijk *met wiskundige argumenten* te doen. Een combinatie van helderheid, bondigheid en correctheid is prachtig!

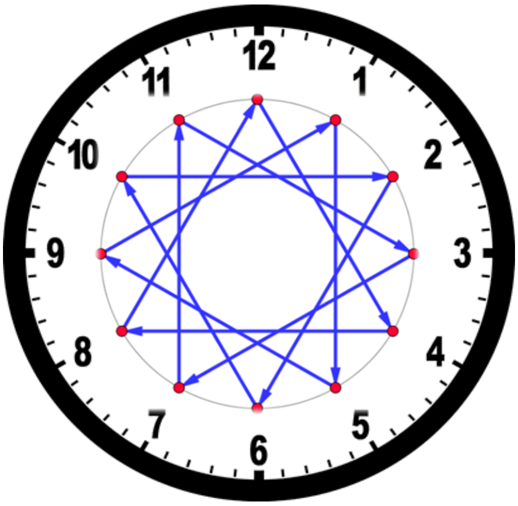
- Gebruik veel figuren om je ideeën te illustreren. Gebruik hiervoor bijvoorbeeld kopieën van door jou gevonden plaatjes (screen captures) of een passer en liniaal.
- Maak een planning en verdeel de taken over de groep.

Zowel de wiskundige inhoud van het verslag als de manier waarop het is opgeschreven telt mee in de beoordeling!

Basisopgaven

Opgave 1 Klok

Hieronder zie je een klok met twaalf (rode) punten bij de getallen. Er staan pijlen van elk geheel uur naar 4 uur later.

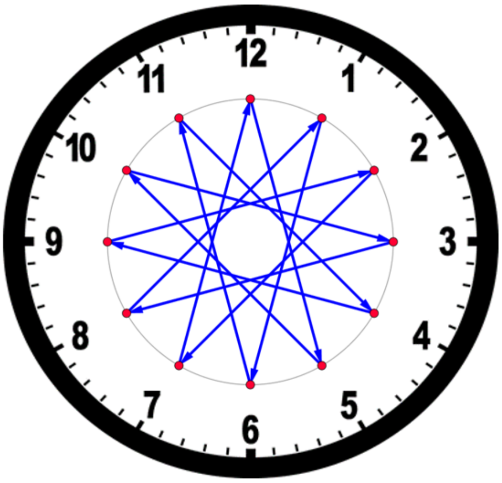


We zien vier gelijkzijdige driehoeken met de eerder genoemde (rode) punten als hoekpunten.

(a) Maak eenzelfde soort plaatje waar de pijlen naar 9 uur later wijzen. Wat zie je nu? Gebruik eventueel het werkblad.

We noemen dit soort plaatjes *pijlenklokken*. We hebben nu pijlenklokken bekeken waar de pijlen 4 en 9 uur vooruit wijzen. In beide gevallen vormden de blauwe pijlen veelhoeken met hoekpunten de rode punten. Hoe zouden de pijlenklokken eruit zien als de pijlen naar b uur later wijzen met $b = 1{,}2{,}3{,}4{,}5, \ldots, 10$ of 11?

Een veelhoek kan ook een stervorm hebben. Als $b = 5$ dan krijg je het volgende plaatje



We zeggen nu ook dat de pijlen een twaalfhoek vormen.

(b) Onderzoek wat voor veelhoeken de pijlen vormen bij de verschillende waarden van b (1 t/m 11) en hoeveel veelhoeken er dan zijn. Gebruik eventueel het werkblad.

Op een andere planeet hebben de klokken 15 uur in plaats van 12. Voor deze klokken kun je hetzelfde onderzoek doen als in onderdeel (b): voor welke waarden van b vormen de pijlen meer dan één veelhoek met rode hoekpunten? Dit heeft iets te maken met de grootste gemene deler van b en 15.

(c) Leg uit hoe dat zit.

(d) Bedenk een klok (anders dan met 12 of 15 uur) waarbij je voor elke waarde van b maar één veelhoek hebt. Dat kan dus ook een stervorm zijn.

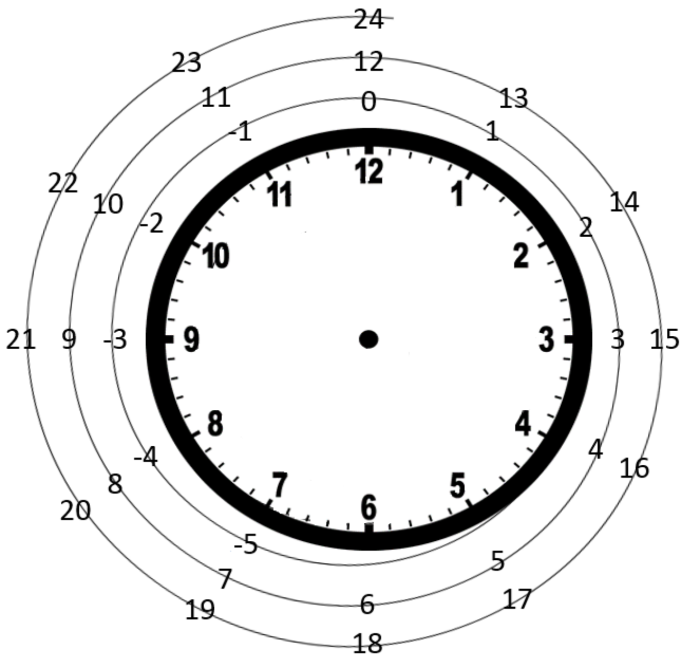
Modulorekenen

In de Figuur hierboven met de klok van twaalf uur staan pijlen $1 \rightarrow 5$, $2 \rightarrow 6$, $3 \rightarrow 7$, etc. In het algemeen voldeden de pijlen aan het voorschrift:

$$x \rightarrow x + 4,$$

met een grote kanttekening: voorbij de 12 begon je weer bij 1. Dus: $9 \rightarrow \cancel{13}\ 1$, $10 \rightarrow \cancel{14}\ 2$, etc. We schrijven ook wel $13 \equiv 1 \pmod{12}$, $14 \equiv 2 \pmod{12}$ en zo door.
Je kunt ook zeggen dat $a \equiv b \pmod{12}$ als het verschil van a en b een veelvoud van 12 is. Bijvoorbeeld $38 \equiv 14 \pmod{12}$ en $100 \equiv 28 \pmod{12}$, maar ook $7 \equiv -5 \pmod{12}$ en $-11 \equiv 49 \pmod{12}$.

Je kunt het zien alsof je de getallijn rond de klok wikkelt. De getallen -17, -5, 7, 19, 31, etcetera komen allemaal op de 7 terecht en zijn dus modulo 12 hetzelfde.



De “mod” staat voor “modulo” en rekenen hiermee wordt “modulorekenen” genoemd.

Als je $92 + 74 \pmod{12}$ wilt weten, kun je gewoon $8 + 2 \equiv 10 \pmod{12}$ doen, want $92 \equiv 8 \pmod{12}$ en $74 \equiv 2 \pmod{12}$. Dat werkt ook bij vermenigvuldigen

$$92 \cdot 74 \equiv 8 \cdot 2 \equiv 16 \equiv 4 \pmod{12}.$$

Maar let op: het werkt meestal niet bij delen!
Natuurlijk kun je ook modulorekenen met andere getallen dan 12.

Opgave 2 Veelhoekvergelijking

In opgave 1 onderzocht je voorschriften van de vorm

$$x \to x + b$$

met b een geheel getal. In het geval van een gelijkzijdige driehoek zien we:

$$x \to x + b \to x + 2b \to x + 3b.$$

Die laatste pijl moet weer terug bij af uitkomen, dus $x + 3b \equiv x \pmod{12}$. Aan beide zijden x aftrekken geeft de vergelijking $3b \equiv 0 \pmod{12}$.

Deze vergelijking kunnen we als volgt oplossen. $3b \equiv 0 \pmod{12}$ betekent dat $3b$ en 0 een 12-voud verschillen. Je kunt dus schrijven

$$3b = 0 + 12k$$

voor een geheel getal k. Delen door 3 geeft

$$b = 4k.$$

Dus we krijgen dat b een viervoud is, oftwel

$$b = \ldots, -8, -4, 0, 4, 8, \ldots$$

Conclusie: voor deze waarden van b krijg je een gelijkzijdige driehoek…behalve voor 0.

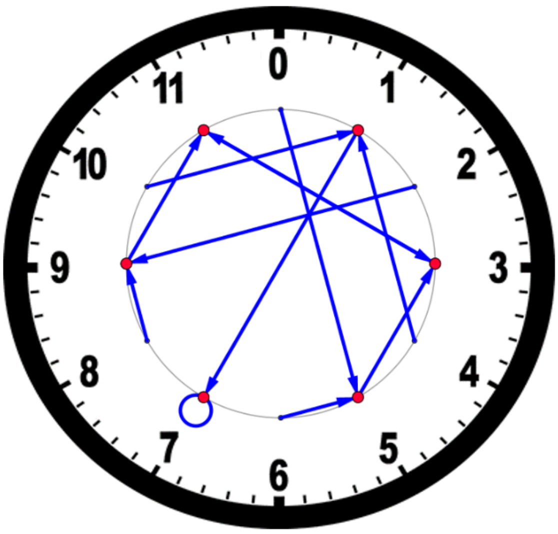
(a) Hoe zit dat? Waarom vinden we ook $b = 0$, terwijl we dan geen driehoek krijgen?

Je kunt op gelijke wijze onderzoeken voor welke b het voorschrift $x \to x + b$ leidt tot regelmatige vijfhoeken op een klok van 15 uur.

(b) Geef die vergelijking; leg uit hoe je eraan komt; en laat zien hoe je haar kunt oplossen.

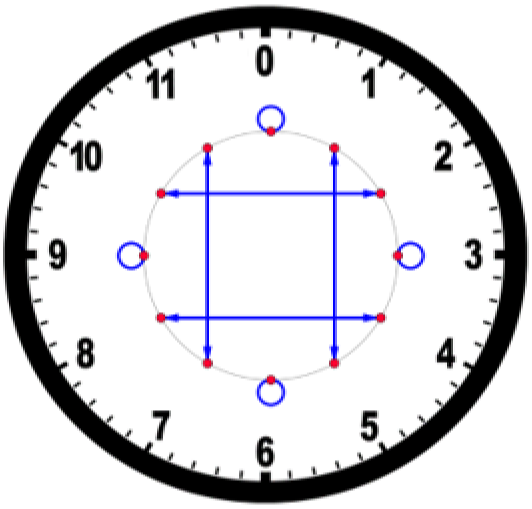
Opgave 3 Voorschriften

We krijgen meer variatie door naar een grotere klasse voorschriften voor de pijlen te kijken, bijvoorbeeld $x \to 2x + 5$. Merk op dat $12 \equiv 0$ (mod 12), dus je kunt ook een 0 bovenaan de klok zetten.



Het lusje bij 7 wil aanduiden dat dit getal met zichzelf wordt verbonden.

(a) Teken de pijlenklok bij het voorschrift $x \to 3x + 2$ met een klok van 12 uur.



(b) Geef een voorschrift $x \rightarrow \ldots$ bij bovenstaande pijlenklok.

Draai de pijlen binnen de klok nu $60°$ met de klok mee.

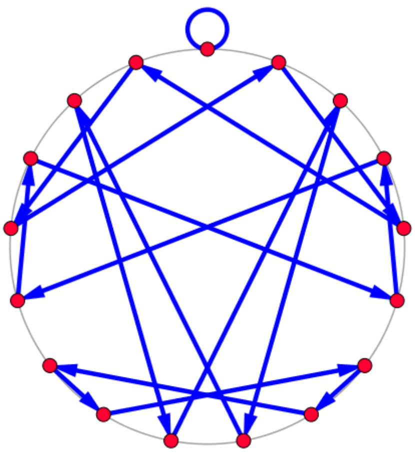
(c) Welk voorschrift hoort er dan bij?

Deze wiskunde B-dagopdracht gaat over pijlenklokken zoals je die in de opgaven hierboven bent tegengekomen.

We bekeken tot nu toe pijlenklokken op basis van 12 of 15 uur, maar er is geen reden ons hiertoe te beperken. We noteren met n het aantal uren op de klok.

Opgave 4 Doelpunten

Hieronder zie je een mooie symmetrisch pijlenklok met $n = 17$. We laten de wijzerplaat vanaf nu weg. Het voorschrift is hier $x \rightarrow 4x$.



Een (rood) punt waar de kop van een pijl uitkomt heet een *doelpunt*. Een (rood) punt waar de staart van een pijl vanuit gaat heet een *startpunt*.

(a) Reken na dat elk punt een doelpunt is, als het voorschrift $x \rightarrow 4x$ is en $n = 17$.

Hoe zit dat? Wanneer zijn punten wel of geen doelpunt?

(b) Waarom is 1 geen doelpunt bij het voorschrift $x \rightarrow 2x$ is en $n = 12$?

(c) Hoeveel pijlen komen er aan in elk doelpunt bij het voorschrift $x \to 2x$ en $n = 12$?

Bij het voorschrift $x \to 4x$ en $n = 15$ is 1 een doelpunt, want $4 \to 1$.

(d) Gebruik het feit $4 \to 1$ om het startpunt van de pijlen met doelpunten 2, 3, 4,…, 14 op een snelle manier te vinden.

(e) Gebruik dezelfde methode om bij $x \to 4x$ is en $n = 45$ van ieder doelpunt 1, 2,3,…,44 middels een formule aan te geven wat het startpunt is

Om te redeneren over pijlenklokken is het nuttig wat getaltheorie erbij te betrekken.

> Twee getallen a en n zijn relatief priem als het enige positieve gehele getal dat beide deelt 1 is (oftewel de grootste gemene deler van de getallen is 1, dat wil zeggen ggd$(a, n) = 1$).
>
> Is dit het geval, dan heeft de vergelijking
>
> $$a\,x \equiv 1 \pmod{n}$$
>
> precies één oplossing modulo n.
>
> In de extra opgave kun je ontdekken waarom dit zo is.

Bijvoorbeeld: 9 en 14 zijn relatief priem; de vergelijking $9\,x \equiv 1 \pmod{14}$ heeft $x = 11$ als enige oplossing modulo 14, want $9 \cdot 11 = 99 = 1 + 7 \cdot 14 \equiv 1 \pmod{14}$. Eventueel kun je even narekenen dat andere waarden voor x geen oplossing zijn.

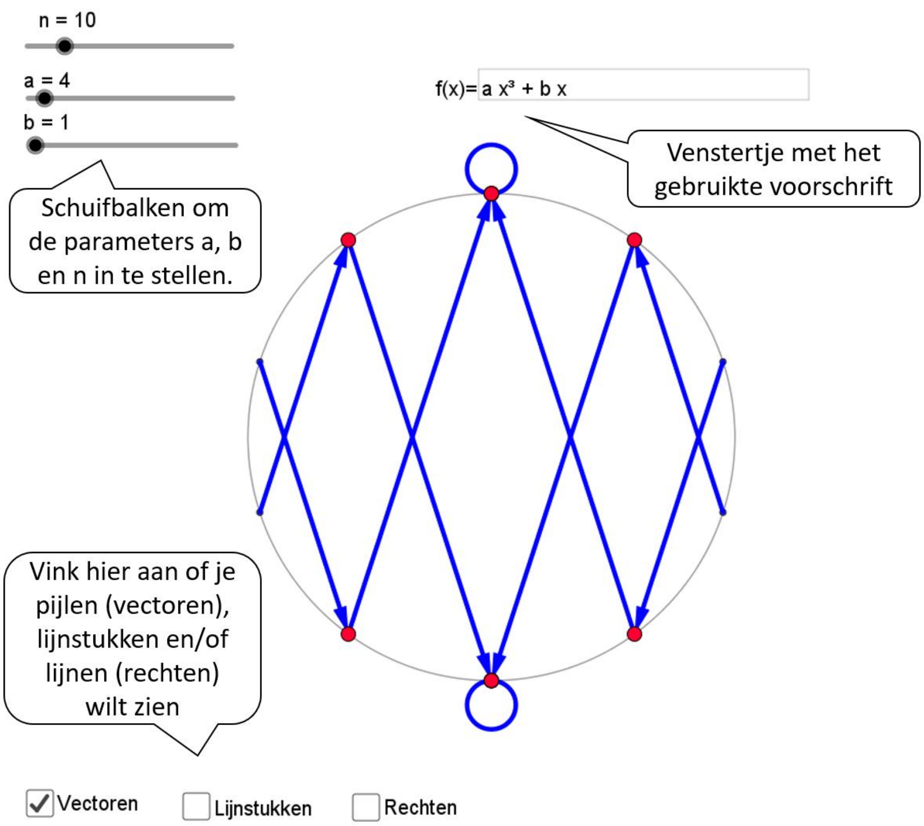
(f) Los op: $4x = 1 \pmod{9}$.

We kijken nu naar het algemene geval: het voorschift is $x \to ax$ en de klok heeft n uur.

(g) Leg uit hoe, uit de stelling in het kader, volgt dat elk getal een doelpunt is, als a en n relatief priem zijn.

Opgave 5 Geogebra-applicatie

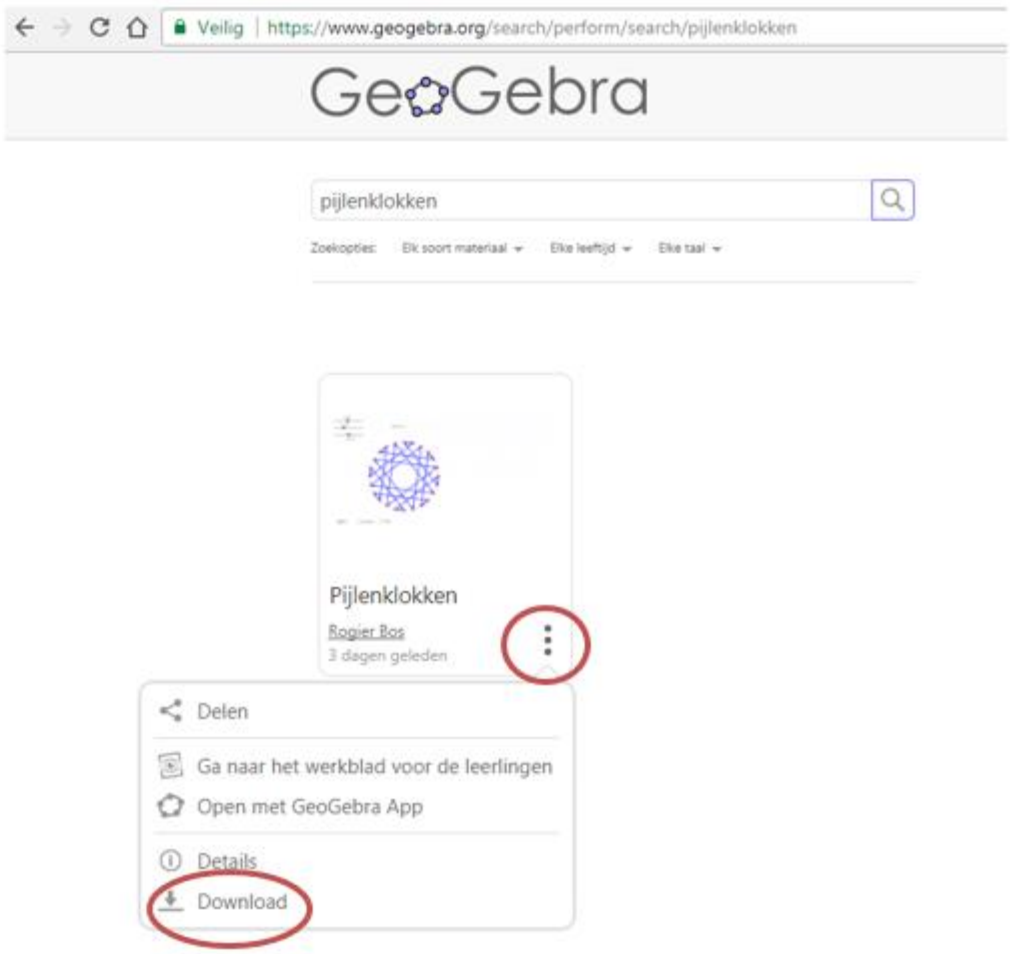
Ga in je browser naar https://www.geogebra.org/m/ZUDcUk2C. Je vindt daar een online Geogebra-applicatie waarmee je pijlenklokken kunt onderzoeken voor verschillende voorschriften.



Met de schuifbalken linksboven kun je de waarde van de parameters variëren. Probeer dit maar eens. Linksonder kun je aanvinken of je de pijlen (dat wil zeggen vectoren) wilt zien en/of lijnstukken tussen de punten en/of lijnen door de punten.

Via het voorschriftvenster kun je een ander voorschrift geven. Je typt daarin bijvoorbeeld x^2 of a x^3+b. Het getypte voorschrift verschijnt vervolgens in het voorschriftvenster, nadat je op *enter* hebt gedrukt. Let op dat het voorschrift wel een output van gehele getallen moet hebben. Je kunt in het voorschrift de parameters a en b gebruiken, maar deze moet je los van de variabelen typen, dus “a x” of “a*x” en niet “ax”.

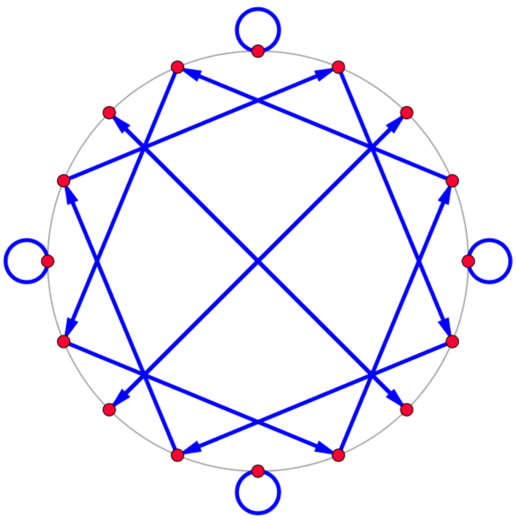
Je kunt ook offline werken met Geogebra, als deze software op je computer geïnstalleerd is. Je kunt het .ggb-bestand downloaden via https://www.geogebra.org/materials/. Zoek op “Pijlenklokken”.

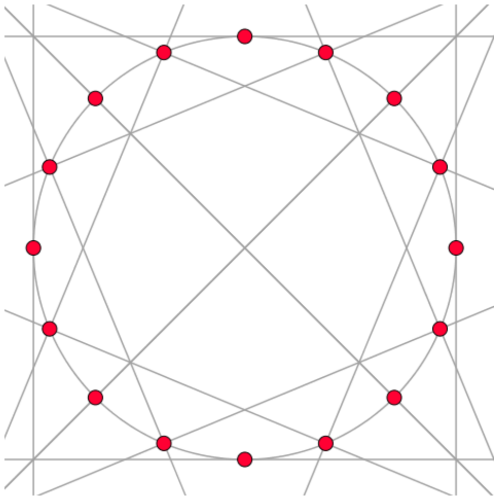


Klik op de drie kleine vierkantjes en dan op “download”. Je kunt het .ggb-bestand dan openen vanuit Geogebra op je computer. Het is waarschijnlijk in je download-folder terug te vinden. Als je offline werkt kun je nieuwe voorschriften niet invoeren via het voorschriftvenster; dan moet dat via het invoervak onderaan. Begin je voorschrift dan altijd met te typen “f(x)=”.

Opgave 6 Lijnen

We kunnen in plaats van pijlen ook lijnen trekken: hieronder voor het voorschrift $x \to 5x$ en $n = 16$. We noemen de rechter figuur een *lijnenklok*.

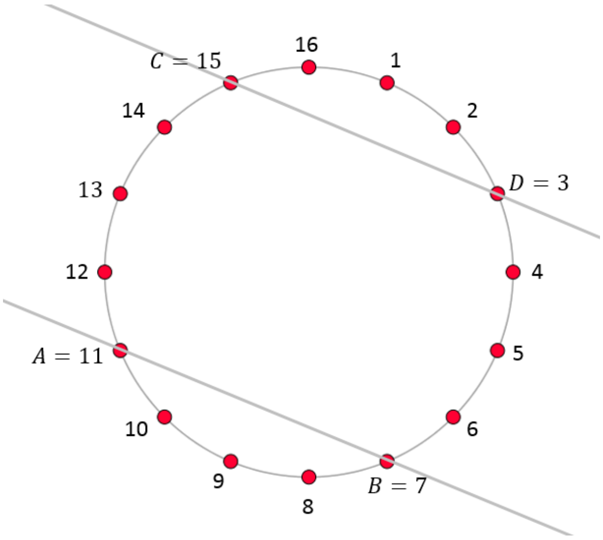




Voor de lusjes tekenen we een raaklijn aan de cirkel (waarom is dat geen gek idee?).

We zien veel paren evenwijdige lijnen. Dat gaan we proberen te *verklaren* in deze opgave.

Bekijk het volgende plaatje



De lijnen AB en CD zijn evenwijdig.

(a) Hoe zie je gauw aan de getallen A, B, C, D dat AB en CD evenwijdig zijn? Formeler: er is een vergelijking in A, B, C, D die precies betekent dat AB en CD evenwijdig zijn. Vind die vergelijking.

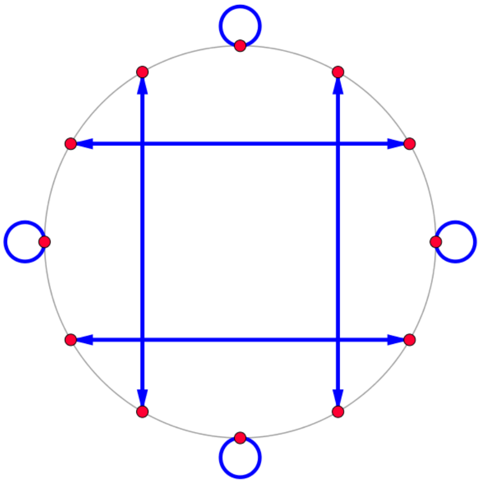
(b) Pas je vondst uit (a) toe op het voorschrift $x \to 5x$ en $n = 16$. Vind je zo alle paren?

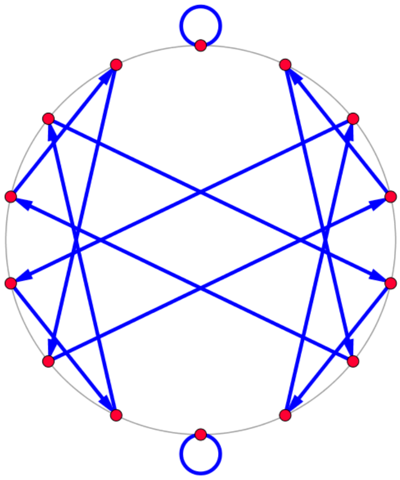
(c) Beredeneer met behulp van de voorwaarde in (a) voor welke waarden van n we paren evenwijdige lijnen vinden bij het voorschrift $x \to 5x$.

(d) Leg uit waarom je vergelijking uit onderdeel (a) evenwijdige lijnen oplevert.

Opgave 7

In opgave 3 kwam je de pijlenklok hieronder links tegen.





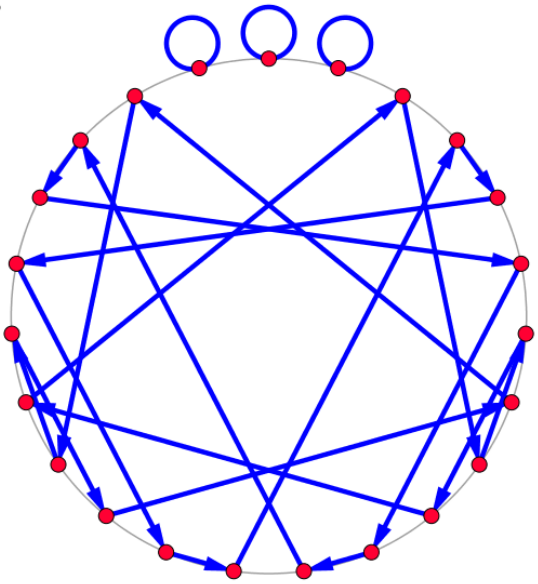
Bij deze klok zie je vier lusjes. Bij de rechter pijlenklok, die met hetzelfde voorschrift is gemaakt, maar met $n = 14$ zie je er twee.

(a) Onderzoek voorschriften van de vorm $x \to ax$ en varieer a en n. Vind een regel/formule voor het aantal lusjes als functie van a en n.

(b) Verklaar deze regel/formule.

Opgave 8

(a) Speel eens met de verschillende waarden voor n bij het voorschrift $x \to x^3$ en noteer enkele zaken die je opvallen.



Mogelijk is je opgevallen dat alle pijlenklokken spiegelsymmetrisch zijn in de verticale lijn door het midden.

(a) Leg uit waarom de pijlenklokken bij het voorschrift $x \to x^3$ spiegelsymmetrisch zijn in de verticale as voor alle waarden van n.

(b) Geef meer voorschriften waarbij de pijlenklok spiegelsymmetrisch is in de verticale lijn door het midden. Leg eventueel uit als je een wiskundige redenering hebt gebruikt in je zoektocht.

(c) Geef een voorschrift waarbij de pijlenklok voor sommige waarden van n wel spiegelsymmetrisch is, en voor andere waarden van n niet. Leg eventueel uit als je een wiskundige redenering hebt gebruikt in je zoektocht.

Extra opgave

Stelling: als ggd$(a, n) = 1$, dan heeft de vergelijking

$$a\,x \equiv 1 \pmod{n}$$

precies één oplossing modulo n.

Je gaat dit bewijzen door uit te leggen hoe, als we de waarde van x variëren van 0 tot $n - 1$, $a\,x$ alle waarden van 0 tot $n - 1$ precies eenmaal aanneemt modulo n.

(a) Hoe volgt hieruit de stelling?

Stel dat

$$a\,x_1 \equiv a\,x_2 \pmod{\mathrm{n}}$$

voor twee gehele getallen x_1 en x_2.

(b) Leg uit hoe hieruit volgt dat

$$a\,(x_1 - x_2) = k \cdot n$$

voor een geheel getal k.

(c) Leidt hieruit af dat n het verschil $x_1 - x_2$ deelt.

(d) Voltooi het bewijs.

Eindopgave

Als je de voorschriften en schuifbalken varieert krijg je prachtige pijlen- en lijnenklokken.

We dagen jullie uit om die nauwkeurig te bestuderen.

- Beschrijf welke meetkundige verschijnselen je ziet: denk aan de onderlinge ligging van de lijnen of pijlen, draai- en spiegelsymmetrie, (het aantal) doelpunten, (het aantal) lusjes, veelhoeken, …
- Ontdek patronen. Bijvoorbeeld: als n een drievoud is dan, …
- Verklaar de patronen, bijvoorbeeld met behulp van delingseigenschappen van getallen.

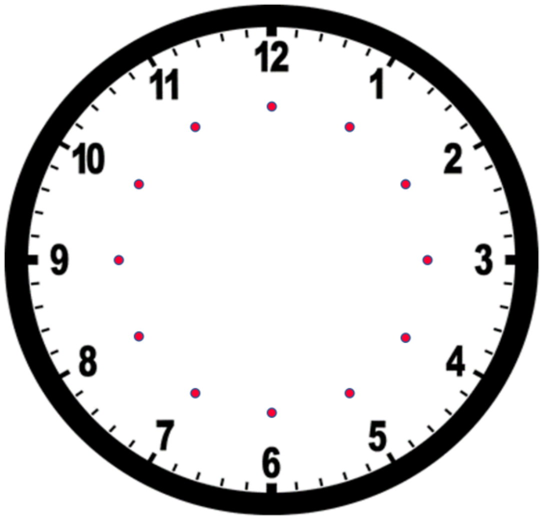
Je hoeft niet telkens alle drie deze stappen te doorlopen. Misschien dat je in sommige gevallen alleen een mooi verschijnsel benoemt of een patroon beschrijft zonder het te verklaren.

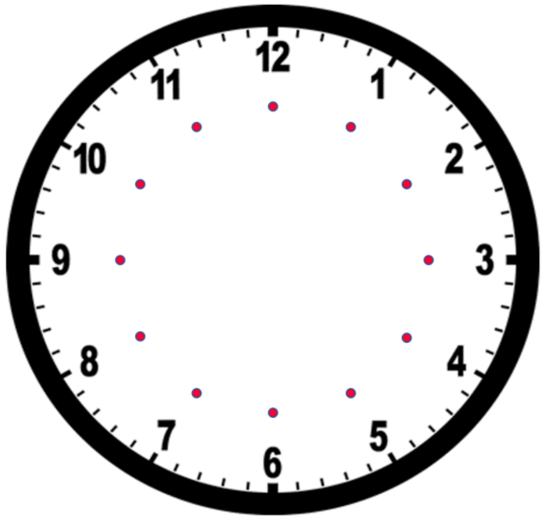
We adviseren om te beginnen met het voorschrift $f(x) = a\,x + b$. Hiermee kun je al talloze ontdekkingen doen. Probeer daarna of je dezelfde soort fenomenen ook kunt zien bij voorschriften als $f(x) = a\,x^2$ of $f(x) = a\,x^3$ of nog ingewikkelder. Je kunt daarna bij deze ingewikkeldere voorschriften natuurlijk ook nog op zoek naar nieuwe fenomenen.

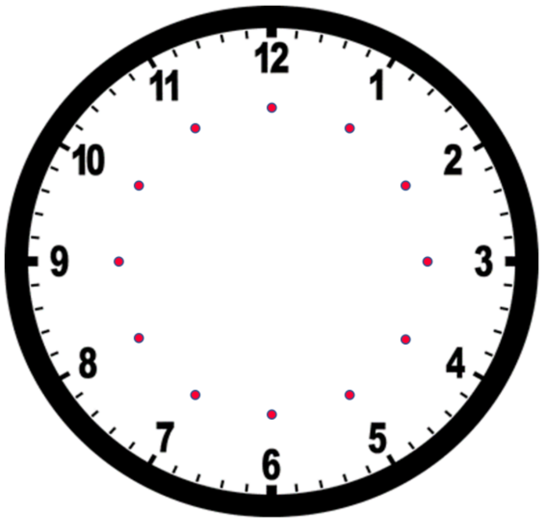
Bronnen

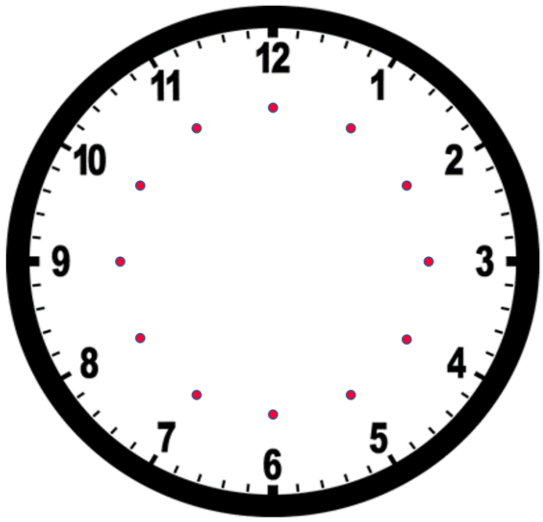
Klok: https://www.kamogo.com

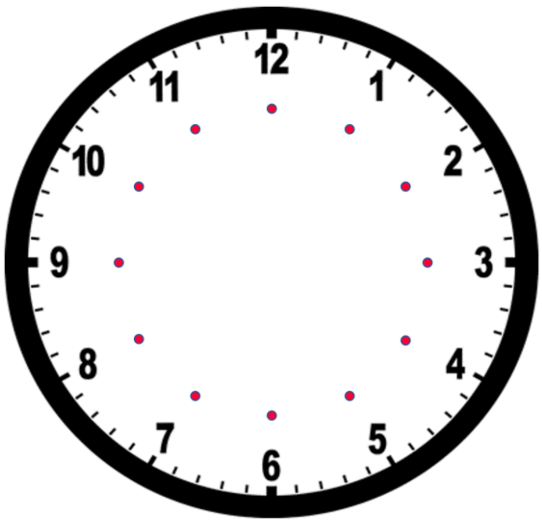
Werkblad

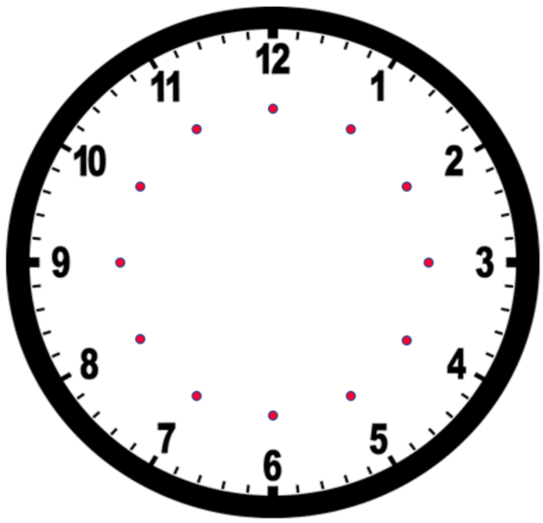

12
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11


12
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11


12
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11


12
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11


12
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11


12
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11