

WISKUNDE B - DAG 2002

$$1 + 1 = 2$$

en hoe nu verder?

29 november 2002



De Wiskunde B-dag wordt gesponsord door **Texas Instruments**

Inleiding

Snel machtverheffen

Stel je voor dat je 7^{25} moet uitrekenen. Je weet dat machtverheffen herhaald vermenigvuldigen is. Dus kun je het als volgt doen:

$$7^2 = 7 \times 7 = 49$$

$$7^3 = 49 \times 7 = 343$$

$$7^4 = 343 \times 7 = 2401$$

$$7^5 = 2401 \times 7 = 16807$$

$$7^6 = 16807 \times 7 = 117649$$

$$7^7 = 117649 \times 7 = 823543$$

$$7^8 = 823543 \times 7 = 5764801$$

$$7^9 = 5764801 \times 7 = 40353607$$

$$7^{10} = 40353607 \times 7 = 282475249$$

$$7^{11} = \dots\dots\dots$$

en met wat geduld en nauwkeurigheid kom je er wel, maar het vraagt wel 24 vermenigvuldigingsstappen!

Door slim gebruik te maken van al gevonden tussenresultaten, kan het ook korter.

Je begint met $7^1 \times 7^1$; het resultaat is 7^2 . Daarna bereken je $7^2 \times 7^1$ met resultaat 7^3 . Vervolgens $7^3 \times 7^3 = 7^6$. Nu kan $7^6 \times 7^3 = 7^9$ worden gemaakt; daarna $7^9 \times 7^9 = 7^{18}$ en ook $7^{18} \times 7^6 = 7^{24}$.

Tenslotte bereik je 7^{25} door $7^{24} \times 7^1$ te berekenen.

Bij elke volgende stap worden alleen maar eerder gemaakte resultaten gebruikt.

Bij deze manier van machtverheffen let je alleen maar op de exponenten en dus ben je eigenlijk niet aan het vermenigvuldigen, maar aan het *optellen*. Zo kun je de 25-ste macht van een willekeurig getal bereiken met de volgende rij van 7 optellingen van exponenten:

$$1 + 1 = 2; 2 + 1 = 3; 3 + 3 = 6; 6 + 3 = 9; 9 + 9 = 18; 18 + 6 = 24; 24 + 1 = 25$$

Zo'n rijtje van optellingen kan korter worden genoteerd met een zogenaamde **optelketen**:

$$1, 2, 3, 6, 9, 18, 24, 25$$

Over het vinden van dergelijke korte optelketens gaat de opdracht van deze Wiskunde B-dag.

De afkomst van het probleem is eigenlijk al verteld. Het gaat om het snel berekenen van hoge machten door op een slimme manier vermenigvuldigingen te combineren.

Het probleem speelt een rol in de wereld van de informatica, de theorieën die de achtergrond vormen voor het werken van computers. Vaak gaat het daarbij over hoeveel simpele rekenstappen uitgevoerd moeten worden om een bepaald probleem op te lossen.

Het gebied van de wiskunde dat er bij hoort heet *complexiteitstheorie*, een hot item in de toepassingen van de wiskunde op dit moment; een spannend gebied waarin jij vandaag je eerste stappen zet.

De opdracht

In deze Wiskunde B-dag opdracht ga je op zoek naar zo kort mogelijke optelketens voor natuurlijke getallen.

Een korte optelketen voor het getal 25 is bijvoorbeeld 1, 2, 3, 6, 9, 18, 24, 25 (zie inleiding).

Maar wat je niet zomaar ziet, is of deze optelketen de kortst mogelijke is. Misschien kan het door handiger gebruik te maken van eerder gemaakte getallen nog korter!

Heel wat mensen hebben op dit gebied al onderzoek gedaan. Soms met succes, maar ook wel met minder succes. Je krijgt hulp bij je zoektocht, onder andere doordat je een paar resultaten van eerdere onderzoekers aangereikt krijgt. Maar het probleem is nog steeds niet bevredigend opgelost..... Wellicht kunnen jullie vandaag een bijdrage leveren aan een verdere oplossing van het probleem!

De opdracht is ingedeeld in 5 delen.

In deel A ga je zelf optelketens maken voor kleine getallen. In deel B wordt een eerste schatting voor de lengte van optelketens onderzocht. Daarna ga je in de delen C en D verdiepen in al bekende methoden om redelijk korte optelketens te maken. In deel E ga je proberen zelf een methode te ontwikkelen die uitspraken doet over wanneer een bepaalde methode echt korte of zelfs gegarandeerd kortste optelketens oplevert.

Je krijgt ook algemene vragen voorgelegd. Je zult daarbij vast allerlei samenhangen ontdekken.

Het visueel helder in beeld brengen van samenhangen die je gevonden hebt, is waardevol en levert bij deze opdracht zeker wat op in de beoordeling.

Bij het werken in zo'n nog gedeeltelijk onontgonnen gebied is niet alleen het *oplossen van een aan jou voorgelegd probleem* belangrijk, maar ook het *stellen van nieuwe relevante vragen* die het waard zijn om verder onderzocht te worden.

Het stellen van een goedgedefinieerd onopgelost probleem op dit gebied levert je absoluut een bonus op!

Deze opdracht is erg geschikt voor teamwerk:

- **je moet behoorlijk wat werk verzetten dat makkelijk te verdelen is,**
- **je kunt daarbij wel makkelijk iets over het hoofd zien, zodat een 'second opinion' echt noodzakelijk is,**
- **je moet subtiel kunnen redeneren en dat doe je het beste door aan elkaar je redeneringen voor te leggen en kritisch naar die van je compagnons te kijken,**
- **het eindproduct kun je uit losse illustraties en bewijzen en tekst goed in stukken voorbereiden en uiteindelijk samenvoegen. Bij echt teamwerk wordt het dan toch een geheel.**

Natuurlijk is het gebruik van een rekenmachine aan te bevelen en toegestaan.

Eigen computerprogramma's mogen ook.

Misschien denk je: ik schrijf wel een eenvoudig computerprogramma, dat bij elk gegeven getal n automatisch een kortste keten vindt. Goed idee, maar wees niet overmoedig! Dit is namelijk al heel lang geprobeerd, maar nog nooit bevredigend gelukt. Niet gelukt in die zin, dat zo'n programma niet binnen een dag met zekerheid de kortste ketens voor de getallen 1 t/m 50 berekenen kon op de snelste computers van de wereld!

Eindproduct: verslag van een ontdekkingsreis

Het eindproduct van deze opdracht is een voor een buitenstaander goed leesbare beschrijving van je speurwerk en de resultaten daarvan.

Schrijf dat eindproduct in de vorm van een aantrekkelijk verslag van het verrichte speurwerk, met daarbij natuurlijk de gevonden resultaten en de in jullie ogen belangrijke, maar nog niet opgeloste, problemen.

Na het lezen van dit verslag moet een geïnteresseerde lezer die de afzonderlijke opgaven van de delen A t/m E niet gezien heeft, in staat zijn te begrijpen hoe je snel getallen via optelketens kunt maken. Deel het verslag in naar eigen idee; daarbij hoeft je je niet aan de volgorde van de opgaven van de delen A t/m E te houden. Alle strategieën moeten duidelijk beschreven worden en voorzien zijn van wiskundige onderbouwing. Deze wiskundige onderbouwingen kunnen ook in aparte bijlagen worden beschreven; het verslag kan daardoor beter leesbaar worden. Denk er ook om te beschrijven waar methodes die jezelf gevonden hebt misschien verbeterd kunnen worden. Leg uit waarom je denkt dat je ideeën tot verbetering kunnen leiden. Het gaat hierbij dus om vragen waar je tijdens je speurtocht op kwam die nader onderzoek waard lijken, maar waar je geen antwoord op hebt gevonden. Ook illustreer je de gevonden methode aan de hand van getallenvoorbeeld(en). Je verslag mag zeker ook spanning en verrassing uitstralen naar de lezer.

Kortom:

Beschrijf in de vorm van een zelfstandig leesbaar verslag het onderzoek en de uiteindelijke methode op een zodanige manier dat:

- **het voor de lezer duidelijk is welk probleem aangepakt wordt,**
- **de lezer overtuigd wordt dat je methode goed werkt, maar dat er ook nog niet opgeloste problemen zijn die het waard zijn om verder te onderzoeken,**
- **de delen A t/m E verwerkt zijn in het verslag.**

Je mag er van uit gaan dat de lezer voldoende verstand van wiskunde heeft om de wiskundige inhoud in de bijlagen te begrijpen.

Belangrijk!!

Het verslag moet **geprint** worden of met **zwarte pen** geschreven zijn, in verband met het kopiëren. Als je in je verslag figuren opneemt, moeten deze ook geprint zijn of met zwarte pen gemaakt.

Tenslotte:

Bedenk dat het maken van het verslag veel tijd vergt. Het lijkt verstandig om daar ongeveer 2 uren voor te reserveren. Begin dus rond 14:00 uur met het maken er van.

Deel A: Optelketens

Bij het maken van optelketens voor natuurlijke getallen moet je je houden aan de volgende spelregels:

- **Je begint altijd met het getal 1.**
- **Elk volgend getal wordt gemaakt door gebruik te maken van getallen die al eerder zijn gevonden, de zogenaamde *voorgaande getallen*. Dat kan op twee manieren:**
 - door twee voorgaande getallen op te tellen
 - door een voorgaand getal te verdubbelen (dus op te tellen bij zichzelf)

Een zekere, maar erg trage, manier om 25 te maken gebruikt 24 optelstappen. Maar in de inleiding zag je dat het ook veel sneller kan:

$$1 + 1 = 2 ; 2 + 1 = 3 ; 3 + 3 = 6 ; 6 + 3 = 9 ; 9 + 9 = 18 ; 18 + 6 = 24 \text{ en } 24 + 1 = 25$$

Hiervoor zijn 7 optelstappen nodig en dat is een behoorlijke winst ten opzichte van de eerste manier. De vraag is nu: ***kun je 25 nog sneller maken dan met 7 optelstappen?***

Bij 25 is dat (handmatig) nog uit te zoeken door alle mogelijkheden systematisch af te werken, maar bij grotere getallen kan het al snel behoorlijk lastig worden.

Nu wordt eerst heel precies omschreven wat we bedoelen met een optelketen.

Definitie OPTELKETEN

Een **optelketen** voor een natuurlijk (dwz. positief geheel) getal n is een stijgend rijtje natuurlijke getallen:

- **dat begint met 1**
- **dat eindigt met n**
- **waarin elk getal na het startgetal 1 de som is van twee voorgaande getallen, of het dubbele is van een voorgaand getal.**

Bij de eerste hierboven genoemde manier om het getal 25 te maken hoort de optelketen:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25.$$

Bij de tweede manier hoort de optelketen:

$$1, 2, 3, 6, 9, 18, 24, 25.$$

Om het maken van optelketens te oefenen en daardoor greep te krijgen op verschillende methoden om een getal te maken, ga je nu eerst zelf een aantal optelketens maken.

>1 Zoek voor de getallen $n = 1$ t/m $n = 32$ de **kortste optelketens** en geef de resultaten weer in een tabel

Neem er de tijd voor, zodat je zeker weet dat je bij elk getal van 1 tot en met 32 de *kortst* mogelijke keten hebt gevonden. Om je waakzaam te houden: 15 kan met 5 optelstappen en 23 met 6.

Het kleinst mogelijke aantal optelstappen dat je nodig hebt om een natuurlijk getal te maken is een karaktereigenschap van dat getal. Daarom geven we ook de volgende definitie.

Definitie COMPLEXITEIT

De **complexiteit** van een natuurlijk getal n is het aantal optelstappen dat nodig is voor een *kortst mogelijke* optelketen voor dat getal n .

We geven de *complexiteit* van een getal n aan met $c(n)$.

De complexiteit van een getal kun je dus vinden uit een kortste optelketen, door het aantal getallen in die keten te tellen die volgen na het startgetal 1.

Voor $n = 10$ zijn er meerdere kortste optelketens te vinden, bijvoorbeeld:

1, 2, 3, 5, 10 en 1, 2, 4, 8, 10

In beide gevallen heb je een optelketen met 5 getallen, waarbij dus 4 optelstappen zijn gemaakt.

Omdat je ook kunt nagaan dat er geen kortere optelketen voor 10 mogelijk is, geldt dus $c(10) = 4$

**>2 Vul de tabel van vraag 1 aan met de waarden van $c(n)$.
Hieronder is al een begin gemaakt.**

n	een kortste optelketen	$c(n)$
1	1	0
2	1, 2	1
3	1, 2, 3	2
4	1, 2, 4	2
5	1, 2, 3, 5	3
6	1, 2, 3, 6	3
7	1, 2, 3, 4, 7	4
8	1, 2, 4, 8	3
9	1, 2, 3, 6, 9	4
10	1, 2, 3, 5, 10	4
.....

Deel B: Een eerste schatting voor $c(n)$

Voor het maken van een getal n heb je ten hoogste $n-1$ optelstappen nodig. Dat aantal stappen is precies nodig als je steeds 1 optelt bij het laatstgevonden getal. Meestal is dit echter bij lange na niet de snelste manier om bij n te komen.

Maar je weet nu in ieder geval zeker dat voor ieder getal n geldt: $c(n) \leq n-1$

In de tabel van vraag 1 zie je dat $n-1$ een erg grove schatting voor de bovengrens is. In het algemeen kan het met veel minder optelstappen.

Een belangrijk deel van de speurtocht van deze Wiskunde B-dag is gericht op het vinden van een bovengrens voor $c(n)$ die zo dicht mogelijk bij de werkelijke waarde van $c(n)$ ligt.

Zo'n bovengrens zullen we een *scherpe* bovengrens noemen.

Een eerste poging om de bovengrens te verscherpen volgt nu.

>3 Controleer met je tabel of de volgende uitspraak klopt voor de getallen 1 t/m 32:

$$c(n) \leq \frac{n+1}{2}$$

Als deze uitspraak over $c(n)$ klopt voor *ieder* natuurlijk getal n , dan heb je opeens een veel betere bovengrens gevonden voor $c(n)$!

De uitspraak komt er eigenlijk op neer dat je niet domweg steeds 1 bij een voorgaand getal blijft optellen totdat je n hebt bereikt, maar dat je onderweg een handige versnelling inbouwt. In feite zegt de uitspraak dat het altijd mogelijk is om een optelketen te maken met hoogstens $\frac{n+1}{2}$ stappen.

>4 Beredeneer dat bovenstaande uitspraak waar is voor ieder getal n

Dit is een belangrijk moment!

Je hebt nu door te redeneren de grove bovengrens voor $c(n)$ al een stuk scherper gemaakt, zeker voor grotere waarden van n , en daar gaat het om:

een bovengrens noemen we beter of scherper dan een andere, als die voor alle waarden van n (op een paar waarden in het begin na) beter is.

Zo is $\frac{n}{3} + 3$ scherper dan $\frac{n+1}{2}$, omdat er voor grote n forse winst wordt behaald, terwijl we maar even niet letten op de waarden van n tot aan 15.

In het vervolg komen we hier nog op terug.

Deel C: De verdubbelingsmethode

Sommige getallen kun je maken door alleen maar steeds te verdubbelen. In de tabel van vraag 1 zie je dat je dan machten van 2 als uitkomst krijgt.

- >5 Veronderstel dat n een macht van 2 is, zeg: $n = 2^k$. Wat is dan $c(n)$?**
- >6 Wat is het grootste getal n dat complexiteit 10 heeft, dat wil zeggen: wat is de grootste n met $c(n) = 10$?
En wat is het grootste getal n met $c(n) = q$, voor een willekeurig natuurlijk getal q ?
Geef bij deze vraag een sluitende redenering!**

De machten van 2 zijn bijzondere getallen.

Het getal 39 kun je bijvoorbeeld niet bereiken met alleen maar verdubbelen. Je komt tot 32 via 1, 2, 4, 8, 16, 32. Daarna kun je, met gebruikmaking van al eerder gemaakte machten van 2, toch bij 39 komen:

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 36 (= 32 + 4), 38 (= 36 + 2), 39 (= 38 + 1)$$

De methode die alleen maar gebruik maakt van zo ver mogelijk verdubbelen en daarna aanvullen met eerder gemaakte lagere machten van 2, noemen we de **verdubbelingsmethode**.

- >7 Gebruik de verdubbelingsmethode om een optelketen te maken voor 1308.**
- >8 Beredeneer dat je met de verdubbelingsmethode elk getal n kunt maken.**

De verdubbelingsmethode kan dus ingezet worden voor ieder getal n . Maar denk nu niet dat dit altijd de snelste methode is. Dat kun je ook al zien in de tabel van deel A.

Deel D: De factormethode

Het getal 15 kun je op verschillende manieren maken.

De verdubbelingsmethode van deel B leidt tot de optelketen:

1, 2, 4, 8, 12, 14, 15

Maar het kan korter met:

1, 2, 4, 5, 10, 15

en ook met:

1, 2, 3, 6, 12, 15

In de tweede keten wordt 15 gemaakt door handig gebruik te maken van het getal 5; in de derde keten door handig gebruik te maken van het getal 3. Het is geen toeval dat 3 en 5 als factoren in 15 voorkomen.

De methode die bij het maken van een optelketen gebruik maakt van factoren die in het getal voorkomen, noemen we de *factormethode*.

>9 Pas de factormethode toe op $n = 85$ en op $n = 1122$

De vraag is nu of deze factormethode snellere resultaten geeft dan de verdubbelingsmethode. Dit is vast niet altijd zo, maar in sommige gevallen wel.

>10 Onderzoek de getallen 63 en 1023.

Zoek een kortere optelketen dan de keten die je met de verdubbelingsmethode krijgt.

Vergelijk het aantal stappen dat je daarbij nodig hebt met het aantal stappen bij de verdubbelingsmethode.

>11 Zoek een voorbeeld waarbij de factormethode een optelketen geeft die 8 stappen korter is dan de keten van de verdubbelingsmethode.

Deel E: Eigen onderzoek

In deel A heb je een tabel gemaakt voor kortste optelketens voor de getallen 1 tot en met 30. In de delen C en D zijn speciale methoden bekeken om optelketens te maken: de verdubbelingsmethode en de factormethode.

Het wordt nu tijd om zelf verder te speuren. Natuurlijk kun je daarbij gebruik maken van de twee methoden die zijn bekeken (of varianten daarvan) en van speurwerk naar bijzonderheden in de tabel van deel A. Mogelijke richtvragen bij het verder zoeken, zijn:

Als ik $c(n)$ weet, geldt dan altijd $c(2n) = c(n) + 1$? Wanneer wel en wanneer niet?

Als $n = a \times b$, geldt dan: $c(n) = c(a) + c(b)$? Wanneer klopt dit en wanneer niet?

Deze vragen hoef je niet aan te pakken (ze zijn zeker niet makkelijk te beantwoorden!), maar geven wel aan wat voor *soort* vragen je jezelf kunt stellen, bijvoorbeeld aan de hand van de gevallen die je in de tabel van deel A al hebt vastgelegd.

Een belangrijk onderdeel van het speurwerk is gericht op het verder verscherpen van de bovengrens en de ondergrens voor $c(n)$. Een eerste aanscherping van de bovengrens is in deel B al gevonden. Voor de ondergrens hebben we nu alleen nog maar de erg flauwe uitspraak dat je voor alle getallen $n > 1$ minstens 1 optelstap nodig hebt.

Uit de verdubbelingsmethode is een verscherping van beide grenzen af te leiden. Bedenk daarbij hoe je een getal n maakt met de verdubbelingsmethode. Ook de factormethode kan wellicht bijdragen aan het verscherpen van de grenzen waartussen $c(n)$ zeker moet liggen.

>12 Probeer nu een methode te formuleren die je in staat stelt bij een gegeven getal n een korte optelketen te maken. Hoe scherp kun je $c(n)$ daarbij afschatten?

Om de methode te testen, mag je je kennis toepassen op een speciaal geval.

>13 Vind een zo kort mogelijke keten voor het getal 8127. Leg aan de hand van je methode uit hoe je tot je antwoord komt en waarom je denkt dat je resultaat niet verbeterd kan worden.

Tenslotte

Verwerk de resultaten van je onderzoek in het eindproduct zoals dat op bladzijde 3 is beschreven.

Succes met de uitvoering van de opdracht!!