Afstanden, grenzen & gebieden

Voortgezette Meetkunde, deel I

Nieuwe wiskunde tweede fase
Profiel N&T
Freudenthal instituut

Afstanden, grenzen en gebieden

Project: Wiskunde voor de tweede fase
Profiel: Natuur en Techniek
Domein: Voortgezette Meetkunde
Klas: VWO 5
Staat: Tweede herziene versie
Ontwerp: Aad Goddijn, Wolfgang Reuter

Inhoudsopgave

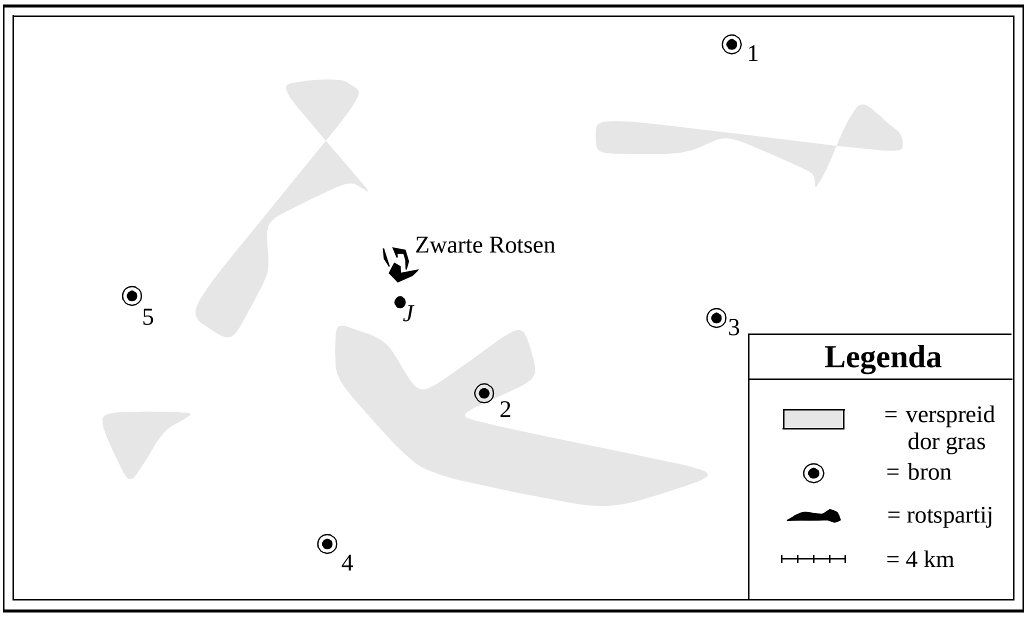
Hoofdstuk 1
Voronoi-diagrammen

In dit eerste hoofdstuk maak je kennis met een type gebiedsindeling die veel wordt toegepast.
We beginnen met eenvoudige gevallen. Maar houd ook de voorplaat van dit hoofdstuk in de gaten.
Die is ook van de soort gebiedsindelingen van dit hoofdstuk!

Je zult heel wat moeten tekenen. Dat kun je doen ín dit boekje. Voor sommige opgaven is een speciaal werkblad opgenomen voor de tekeningen.
Je hebt vaak geodriehoek, liniaal en passer nodig.
Vaak zal je bij uitwerkingen van vragen in je schrift ook schetsen en tekeningen opnemen.

1: In de woestijn

Hier is een kaart van een stuk woestijn. Er zijn vijf bronnen in dit gebied. Stel je voor dat je bij *J* staat met een kudde schapen. Jullie hebben dorst; je hebt deze kaart bij je.



1 a. Naar welke bron ga je op weg?

Die keus was niet moeilijk. Je gaat natuurlijk naar de dichtstbijzijnde bron.

b. Geef nog twee plekken aan, vanwaar je naar bron 2 zou gaan. Kies die plekken ver uit elkaar.

c. Schets nu een indeling van de woestijn in vijf gebieden; elk gebied hoort bij één bron. Overal in één zo’n gebied moet díe bron de meest nabije zijn.

d. Wat kun je doen als je precies op de grens van twee gebieden staat?

e. Grenzen de gebieden rond de bronnen 1 en 5 in jouw schets aan elkaar? Probeer anders toch een punt te vinden dat op gelijke afstanden van bron 1 en 5 ligt en verder van de andere bronnen.

f. De woestijn loopt eigenlijk veel verder door dan op deze kaart. Als geen bronnen andere bronnen zijn dan de aangegeven vijf, grenzen dan de gebieden rond de bronnen 3 en 4 aan elkaar?

g. De grens tussen de gebieden die bij bron 2 en 3 horen, gaat precies door het midden van de verbindingslijn van bron 2 en 3. Geldt zoiets ook voor de andere grenzen?

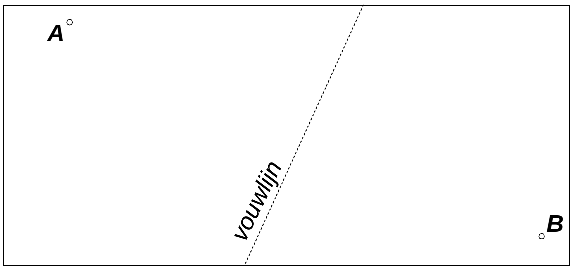
h. Wat voor soort lijnen zijn de grenzen eigenlijk? Recht? Krom?

In deze opgave heb je een gebied ingedeeld volgens het *naaste-buur-principe*. Dergelijke indelingen worden tegenwoordig in diverse wetenschappen gebruikt. Onder andere in de geologie, bosbouwkunde, marketing, sterrenkunde, robotica, taalkunde, kristallografie, meteorologie, om er maar een paar te noemen. We komen daar later nog af en toe op terug.
Nu onderzoeken we eerst het eenvoudige geval van twee bronnen. Eigenlijk: twee punten. Want in andere toepassingen gaat het niet per se om bronnen.

2: De grens tussen twee gebieden

vouwen

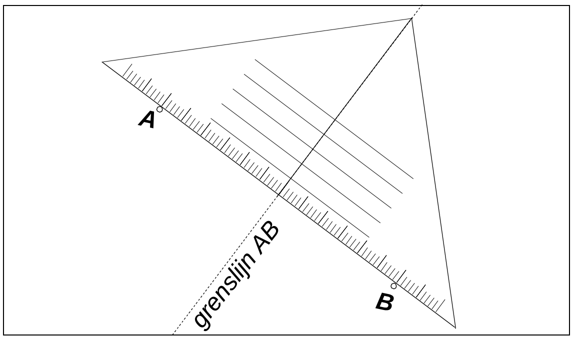
Hier is een eenvoudige situatie met twee bronnen aangegeven. We verwaarlozen de afmetingen van de bronnen zelf, dat wil zeggen: we doen alsof ze geen afmetingen hebben. In de tekening: de punten *A* en *B*.



Op papier is de grenslijn tussen de gebieden die bij *A* en *B* horen snel te vinden, namelijk door het vel papier zó dubbel te vouwen dat *A* op *B* komt. De vouwlijn is de grens tussen de gebieden rond *A* en *B*.

geodriehoek

Er is nog een manier om deze grenslijn snel te vinden: met de geodriehoek. Zie de schets hiernaast. *A* en *B* liggen hier even ver van het midden van de geodriehoek.



In deze figuur zijn de gebieden rond *A* en *B* verschillend gekleurd.
In het *A*-gebied geldt:

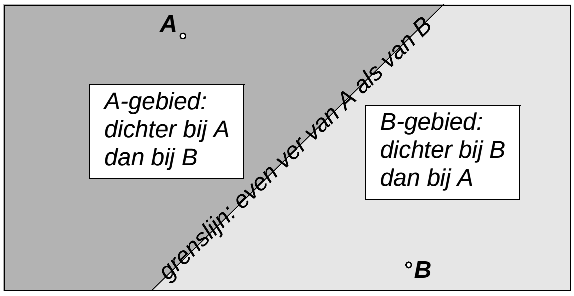
afstand tot A < afstand tot B.

In het *B*-gebied geldt:

afstand tot A > afstand tot B.

Alleen op de grens geldt:

afstand tot A = afstand tot B.



halfvlak

Eigenlijk moet je je voorstellen dat het niet alleen om het getekende stuk gaat, maar dat alles onbeperkt naar alle kanten doorloopt. De twee gebieden die zo zijn bepaald, zijn oneindig groot en worden begrensd door een rechte lijn. De naam voor zo'n gebied is *halfvlak*. Reken de grenslijn als behorend bij beide halfvlakken.
In de figuur zijn het gebied rond *A* en het gebied rond *B* dus allebei halfvlakken. Deze halfvlakken overlappen elkaar op de grenslijn.

2 De grenslijn wordt ook wel *conflictlijn* genoemd. Een goede naam? Waarom?

3: Meer punten, meer grenzen

Met behulp van vouwen, gaan we nu een situatie met vier punten onderzoeken. Neem daartoe werkblad A bij de hand, dat is bladzijde 121 van dit boekje.

3 Bij elk tweetal punten bepalen we de grenslijn door vouwen.

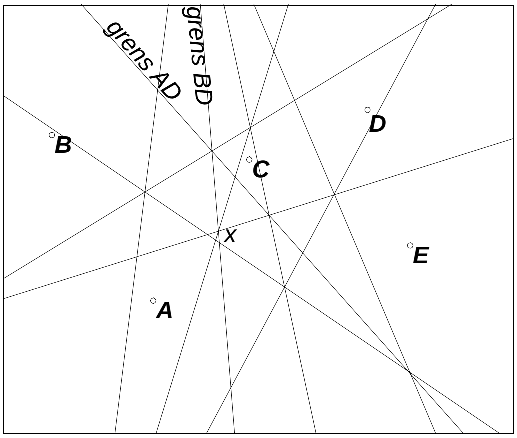
a. Bereken eerst hoeveel vouwen er gemaakt moeten worden en voer het vouwen dan uit. Doe dat zo nauwkeurig mogelijk, bijvoorbeeld door het vel papier tegen het licht te houden. Gebruik de vouwlijnen om de gebiedsindeling te tekenen.

b. Bij het vouwen ontstaan veel snijpunten van vouwlijnen. Toch zijn er verschillende soorten snijpunten. Wat voor verschillen merk je op?

c. Een vouw blijkt achteraf overbodig te zijn. Waardoor komt dat?

uitsluit-techniek

Hier is een situatie met vijf punten waarin de grenslijnen voor alle puntenparen te zien zijn.



4 **a.** Hoeveel van die grenslijnen moeten er zijn?

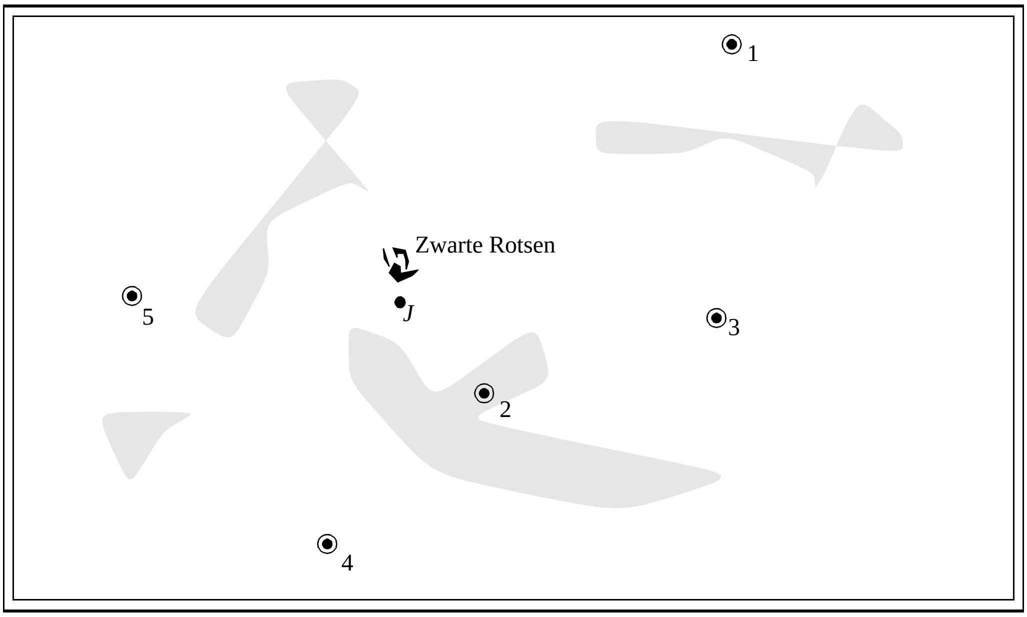
b. Van het kruisje bij grenslijn *BD* zie je meteen: die plek hoort zeker niet bij *B*. Hoe weet je dat?

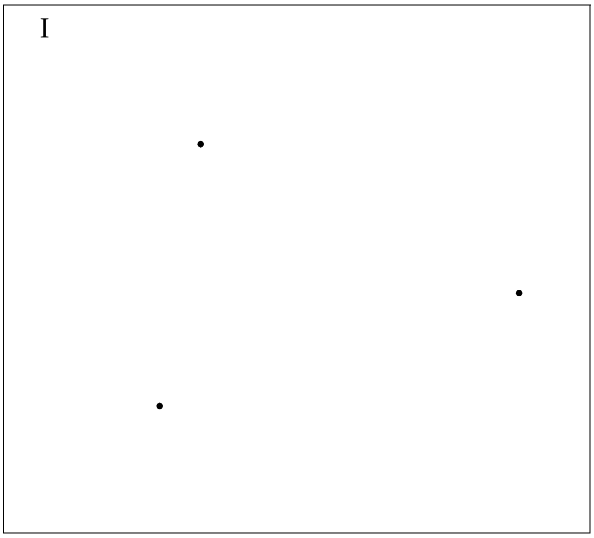
c. Gebruik andere lijnen om andere mogelijke eigenaren uit te sluiten. Uiteindelijk blijft er één over. Welke?

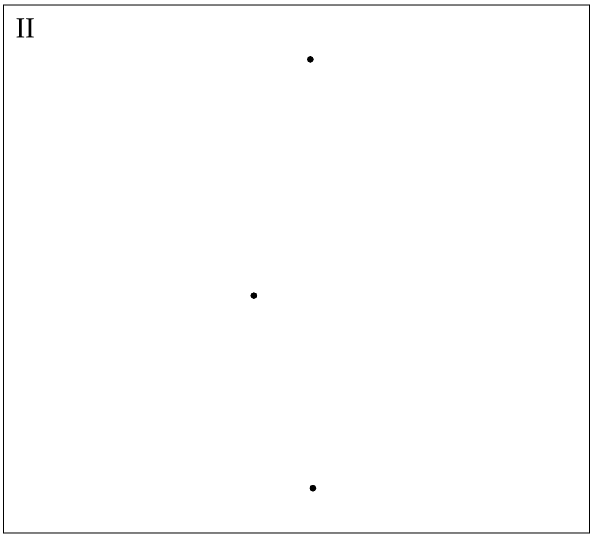
d. Vind bij meer gebiedsdelen het centrum waar ze bij horen met deze uitsluittechniek en maak de indeling met vijf kleuren af.

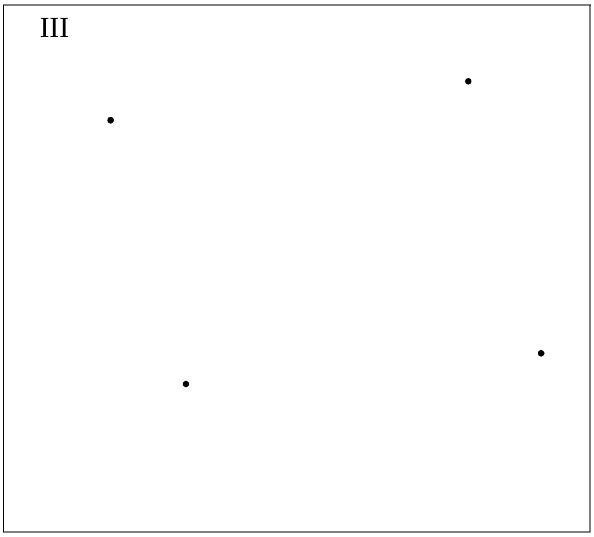
met de geodriehoek

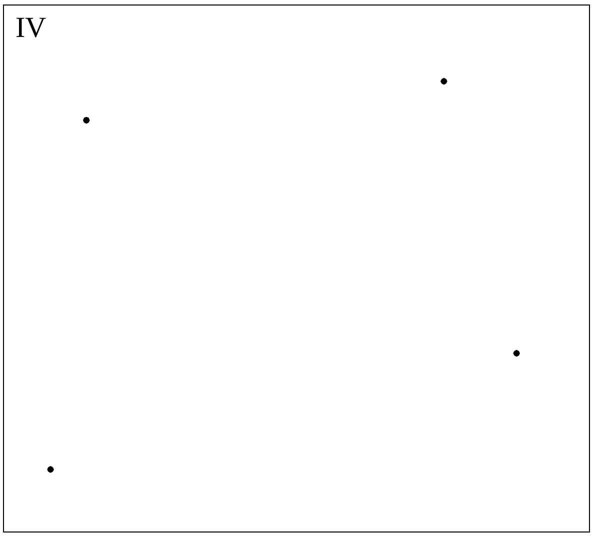
5 Teken nu met de geodriehoek-methode precies de grenzen tussen de gebieden rond de bronnen in de woestijnkaart.

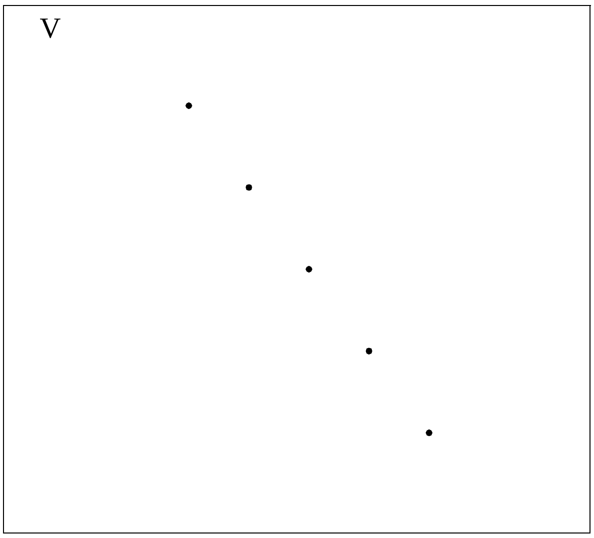


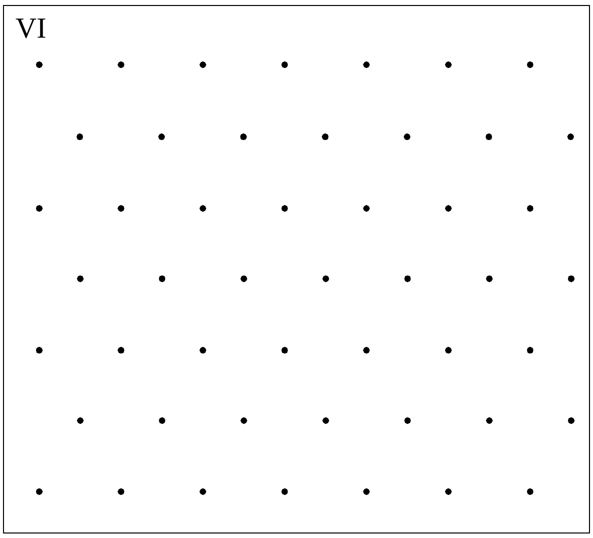

I


II


III


IV


V


VI

4: Voronoi-diagram, centra, grenzen

naaste-buur-principe

In het voorgaande gedeelte hebben we gebiedsindelingen gemaakt volgens het '*naaste-buur-principe*'.

We spreken nu nog wat meer terminologie af.

centrum, centra

De punten waar het om gaat (zoals de bronnen in het voorbeeld) heten voortaan *centra* (meervoud van *centrum*). In dit boekje gaan we steeds van een eindig aantal centra uit.

Voronoi-diagram

De figuur van de grenzen heet een *Voronoi-diagram*.
Een andere naam is *grenzendiagram*.

Voronoi-cel

Het gebied dat bij een centrum hoort, heet de *Voronoi-cel*, of kortweg *cel* van dat centrum.

hoekpunten

Een Voronoi-cel wordt begrensd door rechte lijnen of stukken van rechte lijnen. Waar meerdere stukken lijn elkaar ontmoeten, ligt een *hoekpunt* van het Voronoi-diagram.

geschiedenis

Voronoi-diagrammen zijn genoemd naar de wiskundige Voronoi. Hij (in 1908) en Dirichlet (in 1850) gebruikten deze diagrammen bij een puur wiskundig probleem, het onderzoek naar positief definiete kwadratische vormen. In 1911 gebruikte Thiessen dezelfde soort diagrammen bij het bepalen van hoeveelheden neerslag in een gebied, waarin maar op een klein aantal punten is gemeten. In de meteorologie, de aardrijkskunde en de archeologie is de term Thiessen-polygoon in plaats van Voronoi-cel ingeburgerd.

6 **a.** Op de bladzijde hiernaast zie je zes situaties. Elke stip stelt een centrum voor. Teken in deze situaties de grenzendiagrammen.
b. In situatie I vind je in het midden één punt waar drie grenzen samen komen. Wat weet je van de afstanden van dat punt tot de centra?
c. Heeft situatie II ook zo'n punt?
d. In de situaties III en IV liggen drie van de vier centra op overeenkomstige plaatsen. Toch verschillen de Voronoi-diagrammen aanzienlijk. Probeer de oorzaak daarvan aan te geven.
e. Bij situatie V liggen de centra op één lijn en daardoor is het diagram betrekkelijk eenvoudig. Wat kun je zeggen over de onderlinge ligging van de grenslijnen en de vorm van de Voronoi-cellen?
Weet je plaatsen in Nederland waar landbouwgebieden ongeveer zo zijn ingedeeld?
f. Situatie VI heeft veel centra. Toch is vanwege de regelmaat het tekenen van het grenzendiagram weer eenvoudig. Als een cel bekend is, volgt de rest vanzelf.
Ken je gebiedsindelingen in de natuur die dit patroon hebben?

oneindig grote cellen

7 Er is niet gezegd dat een Voronoi-cel aan álle kanten door lijnstukken of lijnen wordt ingesloten. Sommige cellen zijn in feite oneindig groot, ook al zal je dat op een tekening niet kunnen zien.
a. Hoeveel oneindige cellen zijn er bij het bronnenvoorbeeld?
b. Bij situaties met twee of drie centra zijn er alleen maar oneindige cellen. Teken nu twee situaties met vier centra. In het ene geval moeten alle cellen oneindig groot zijn, in het andere geval niet.
c. Beschrijf een situatie met twintig centra en twintig oneindige cellen.
d. Waar kun je in een Voronoi-diagram de oneindige cellen verwachten?

5: Drielandenpunten, lege cirkels

Hieronder zie je een herindeling van Nederland via een Voronoi-diagram. De centra zijn de provinciehoofdsteden.

drielanden-punt

Op de hoekpunten van het Voronoi-diagram komen hier steeds drie cellen bij elkaar. Je spreekt in zulke gevallen van een *drielandenpunt*, ook al gaat het helemaal niet over landen.

8 **a.** Wat weet je van de afstanden van het ‘drielandenpunt’ tussen de steden Middelburg, Den Haag en Den Bosch tot die drie steden?

b. Zet je passerpunt op dat drielandenpunt. Teken nu de cirkel door die drie steden met dit drielandenpunt als middelpunt.

c. Zet ook je passerpunt eens op de grenslijn tussen Zwolle en Arnhem, maar niet op een hoekpunt van het diagram, en teken de cirkel met dit middelpunt die door Arnhem gaat.

grootste lege cirkels

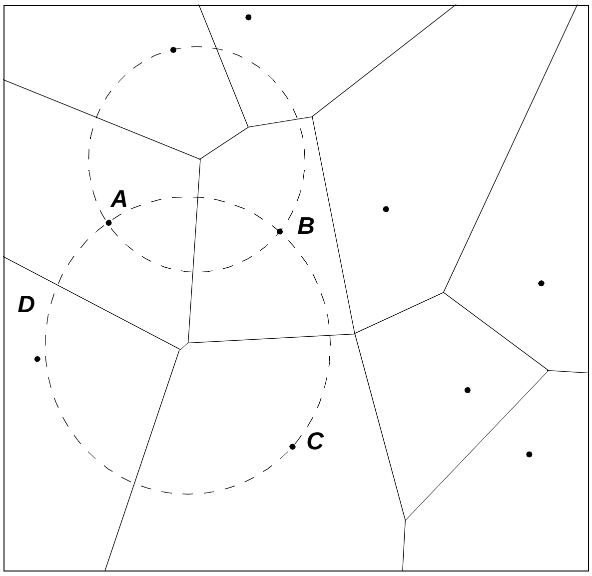
Wat je getekend hebt, zijn voorbeelden van *grootste lege cirkels*.
Een grootste lege cirkel bij een Voronoi-diagram is een cirkel waarbinnen geen centra liggen en waarbij wel minstens een centrum óp de cirkel ligt.

De naam *grootste lege cirkel* is goed gekozen: als je zo’n cirkel om zijn middelpunt ook maar iets uitvergroot, is het binnengebied van de cirkel niet meer leeg: er liggen dan zeker één of meer centra in.

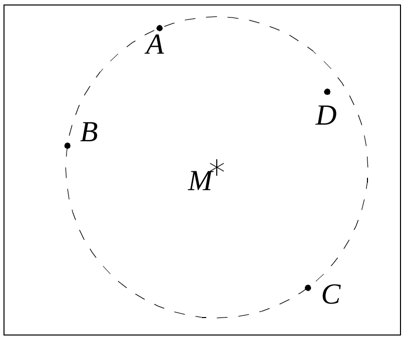
9 **a.** In dit Voronoi-diagram zijn al twee grootste lege cirkels aangegeven. Markeer hun middelpunten.

b. Teken hier enkele grootste lege cirkels:
- een met *vier* centra op de cirkel,
- een met *twee* centra op de cirkel,
- een met *een* centrum op de cirkel.

c. Wat kun je in het algemeen zeggen over het aantal centra op een grootste lege cirkel rond een drielanden punt?



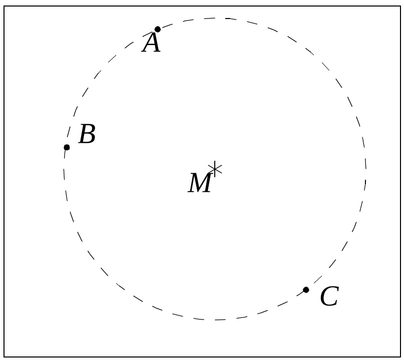
10 **a.** Hiernaast is een situatie met vier centra getekend. De centra zijn de zwarte stippen. Het sterretje bij M is het middelpunt van de cirkel door de centra A, B en C. Kan M het drielandenpunt van *de cellen rond* A, B en C zijn? Waarom wel of waarom niet?



b. Eronder staat dezelfde figuur, alleen centrum D is weggelaten. Teken het Voronoi-diagram. Denk eraan: M is geen centrum, maar je kunt M wel handig gebruiken bij het tekenen.

c. Voeg nu zelf het centrum D toe en breid ook het Voronoi-diagram uit, maar doe het zó, dat M een vierlandenpunt wordt.

d. Drielandenpunten zijn heel gewoon, vierlandenpunten zijn bijzonder. Verklaar dit.

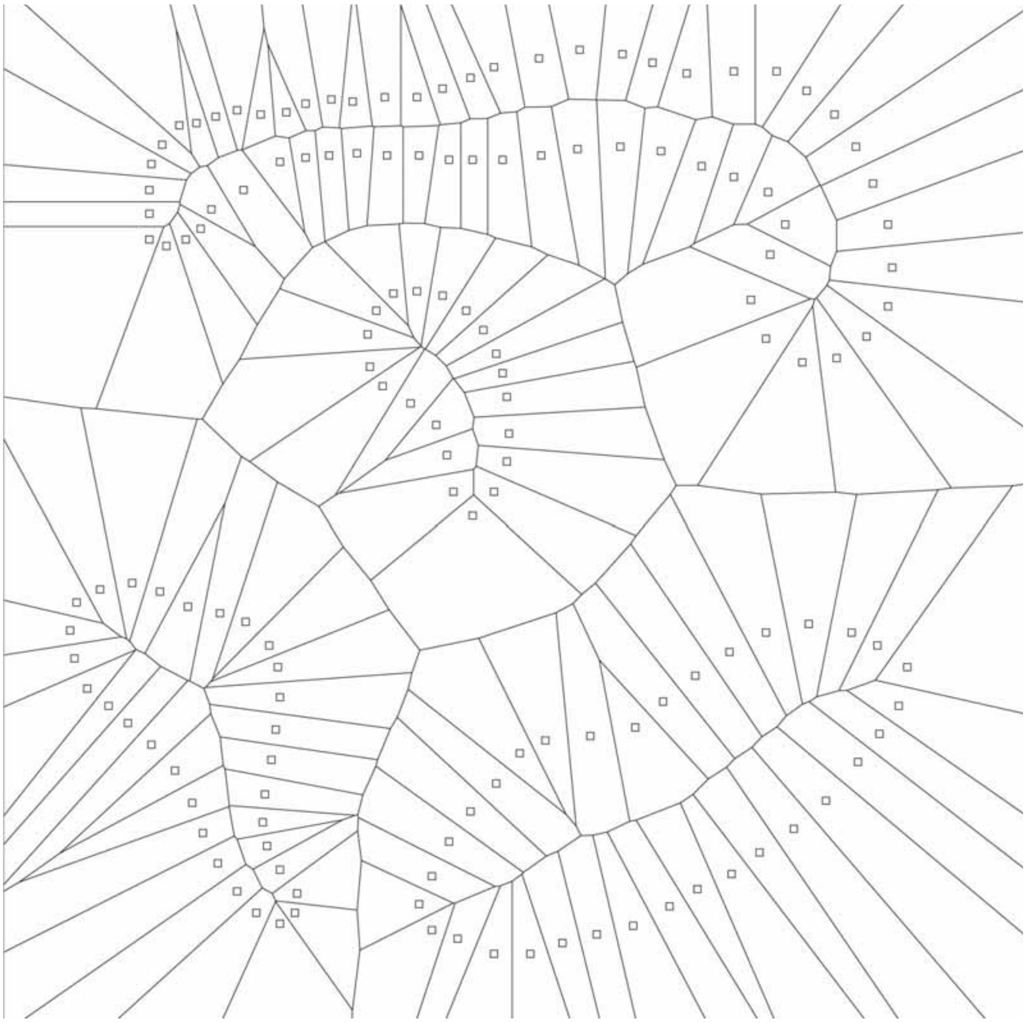


11 Op de volgende bladzijde staat een Voronoi-diagram waarbij de centra op de kust van vier eilanden liggen.
Delen van het Voronoi-diagram zijn nu eigenlijk grenzen geworden tussen gebieden rond die eilanden.

a. Markeer die grenzen met een kleur. Er ontstaat een indeling in vier gebieden.

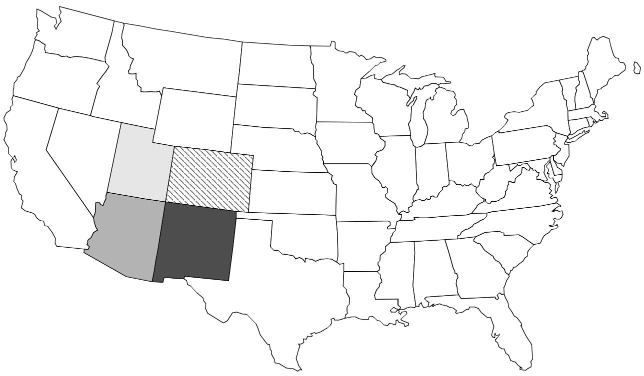
b. Ook bij die laatste gebiedsindeling zou je van drielandenpunten kunnen spreken. Teken nu met de passer enkele grootste lege cirkels die aan drie van de eilanden raken. Waar moet je hun middelpunten kiezen?

vier eilanden



echt vierlandenpunt

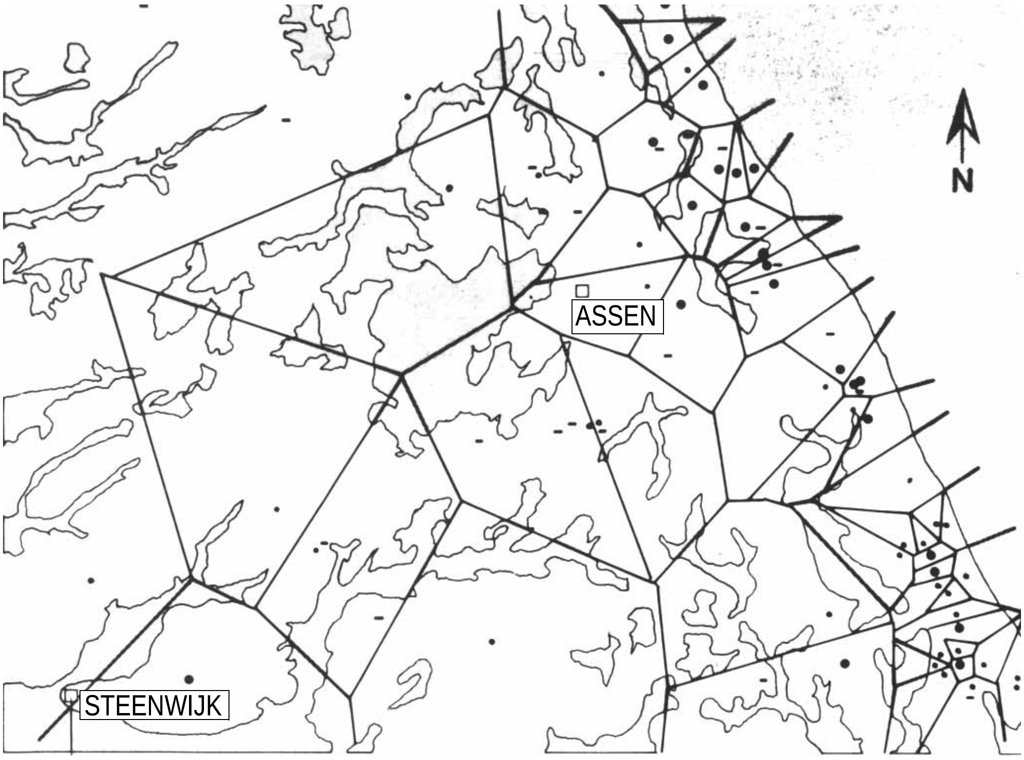
Echte vierlandenpunten tussen echte landen komen ook heel weinig voor. Hier is er een, tussen de staten Utah, Colorado, Arizona en New Mexico in de USA.
Weet je er nog een, vertel het dan!



12 Bij deze kaart van de Verenigde Staten is natuurlijk geen sprake van een Voronoi-diagram.
Teken zelf een situatie van centra en Voronoi-diagram waarbij
- alleen vierlandenpunten voorkomen en geen drielanden punten
- én er een vierkante cel is
- én er grenzen in elkaars verlengde liggen, evenwijdig zijn, of loodrecht op elkaar staan.

6: Hunebedden in Drente

Een opdeling van het oostelijk gedeelte van het Drents plateau in denkbeeldige territoria.



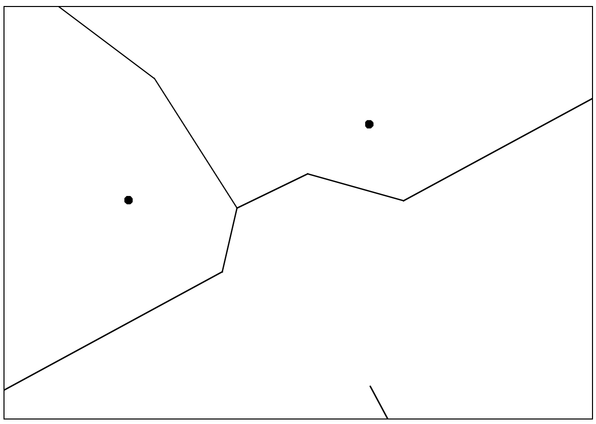
Centra zijn hier groepjes hunebedden. Hunebedden waren soms 600 jaar aan één stuk door in gebruik als bewaarplaats van beenderen en schedels. Het Voronoi-diagram geeft een mogelijke indeling van het gebied. Archeologen zoeken vaak of zulke indelingen overeenkomen met de verdeling van soorten aardewerk over het gebied. Dat geeft aanwijzingen over de maatschappelijke en economische structuur van weleer.

13 a. In de cel waarin Assen ligt en die ten noorden daarvan zie je twee centra symmetrisch ten opzichte van de grenslijn liggen. Waarom die symmetrie?

b. Liggen overal de centra goed symmetrisch ten opzichte van de grenzen? Moet dat zo zijn bij een echt Voronoi-diagram?

c. In de cel ten zuidwesten van Assen staan meerdere stippen. Welke stip is gebruikt voor het maken van het Voronoi-diagram?

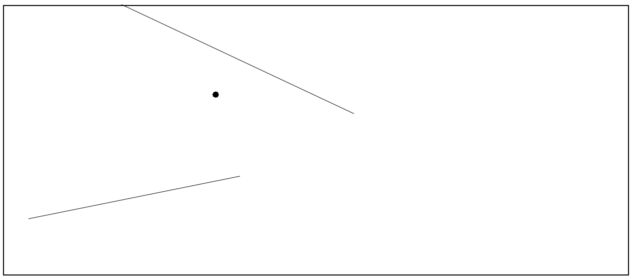
14 Redeneren met symmetrie kan ook helpen een onvolledige kaart van centra en grenzen aan te vullen. Hier is zo'n onvolledig Voronoi-diagram. Maak het compleet.



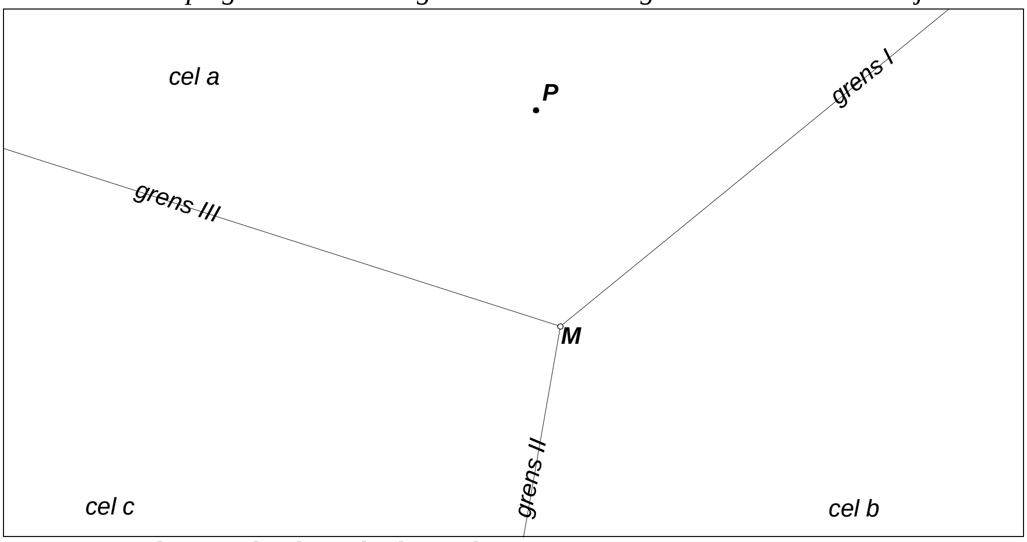
spiegelen

Voronoi-centra van aangrenzende cellen liggen altijd spiegelbeeldig ten opzichte van hun Voronoi-grens. Door spiegelen in een grens kun je ontbrekende centra terugvinden. Hier volgen twee voorbeelden waarbij je die techniek kunt gebruiken.

15 In deze tekening is maar één centrum aangegeven. Omdat er twee grenzen (gedeeltelijk) zijn aangegeven, moeten er nog twee centra zijn en ook nog een derde grens. Maak de tekening nauwkeurig af.



16 Hieronder zijn de grenzen van een Voronoi-diagram met drie centra gegeven. In cel *a* ligt punt *P*.
Werk bij deze opgave zo nauwkeurig mogelijk, anders kom je in moeilijkheden.
Je kunt het spiegelen nauwkeurig uitvoeren met de geodriehoek. Zie bladzijde 6.



a. *P is zeker niet het bij cel a horende centrum.*
Dat kun je nagaan door *P* te spiegelen in grens I, noem het spiegelbeeld P_1.
Spiegel daarna P_1 in grens II. Noem het spiegelbeeld P_2.
Spiegel ten slotte P_2 in grens III. Noem het spiegelbeeld *Q*.
Waarom kan *P* niet het centrum van cel *a* zijn?

b. Teken het midden van lijnstuk *PQ* en noem het *R*. Spiegel ook *R* achtereenvolgens in de drie grenzen, zo ontstaat ten slotte punt S. Wat merk je nu aan dit uiteindelijke punt *S*?

c. Het gevonden punt *R* (of *S*) kán het centrum van cel *a* zijn, maar hoeft dat niet per se te zijn. Een andere mogelijkheid is bijvoorbeeld een punt dat midden tussen *R* en het aangegeven drielandenpunt *M* ligt. Ga dat na door herhaald spiegelen.

reconstructie-probleem

Het eindresultaat van opgave **16** is verrassend. Op de aangegeven manier kun je blijkbaar zonder dat je ook maar één van de centra wist, toch mogelijke centra terugvinden.

De vraag is natuurlijk: Waarom werkt dit altijd goed?

In *Onderzoeksopdracht A*, op bladzijde 16, staan enkele aanwijzingen om dit zelf uit te zoeken.

Samenvatting van hoofdstuk 1

Dit hoofdstuk was een voorlopige verkenning van Voronoi-diagrammen.
Daarbij kwamen diverse begrippen ter sprake.

naaste-buur-principe

Een Voronoi-diagram ontstaat als een aantal punten gegeven is en het vlak wordt ingedeeld door verder overal vast te stellen wat het dichtstbijzijnde gegeven punt is. Zo ontstaat een indeling in deelgebieden. Dit heet indelen volgens het *naaste-buur-principe*.

Omschrijvingen van de begrippen *centrum, Voronoi-diagram, grenzendiagram, Voronoi-cel, cel* en *hoekpunt* vind je op bladzijde 9.

oneindig grote cellen

De Voronoi-cellen kunnen oneindig groot zijn. De oneindige cellen horen bij centra die aan de rand liggen; dit zullen we later moeten preciseren.

drielandenpunten

In het algemeen komen in de hoekpunten drie cellen bij elkaar. Zulke hoekpunten noemen we drielandenpunten.
Meer dan drie cellen bij elkaar in een hoekpunt, dat is echt uitzondering.

grootste lege cirkel

Een cirkel waar geen centra binnenin liggen maar waarop wel een centrum ligt, heet een grootste lege cirkel. Zo'n cirkel kan niet vanuit zijn middelpunt vergroot worden.

spiegelen, reconstructieprobleem

Als alleen de grenslijnen gegeven zijn, kunnen de centra soms teruggevonden worden door spiegelen. Hierbij wordt steeds gebruikgemaakt van het feit dat de centra *symmetrisch* rond hun grenslijn moeten liggen.

vooruitblik

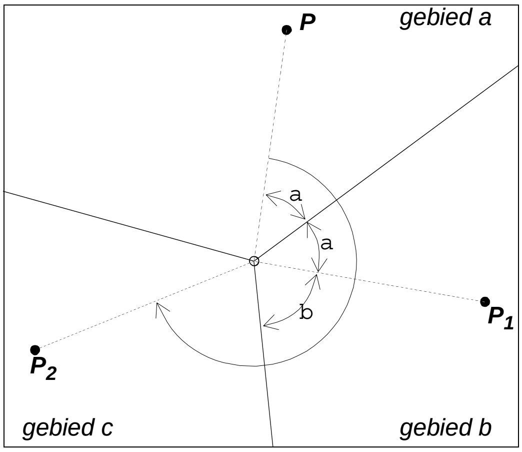
In de volgende hoofdstukken gaan we eerst dieper in op de wiskunde die we tot nu toe terloops hebben gebruikt. We zullen daarbij veel meer redeneren en minder zomaar uit de figuren concluderen. Toch zal een van de resultaten heel praktisch zijn, namelijk dat we een snelle manier vinden om vast te stellen of een centrum D binnen de cirkel door A, B en C ligt of niet, z*onder dat we die cirkel zelf bepalen*. Dat vereenvoudigt dan het bepalen van het Voronoi- diagram aanzienlijk.
Er is een hoofdstuk waarin je wat meer leert over Voronoi-diagrammen met behulp van een computerprogramma. Zowel de kennis van dit hoofdstuk als die van het volgende heb je daarbij nodig.

Onderzoeksopdracht A: Centra terugvinden

Deze opdracht sluit aan bij opgave **16**.
Zorg eerst dat je er zeker van bent wat daar de manier was om bij een Voronoi-diagram van drie cellen met een drielandenpunt een mogelijke ligging voor de centra terug te vinden.

Opgave EEN

Vind en beschrijf een redenering, waaruit blijkt dat de manier van opgave ***16*** *altijd werkt.*



Enkele tips:

a. In nevenstaande figuur zijn P_1 en P_2 al aangegeven. Het volgende gespiegelde punt zou Q zijn, maar noem dat punt nu P_3 en spiegel nog drie keer door. Je ontdekt iets over P_6.

b. ***Als*** je zeker zou zijn dat het voorgaande altijd klopt, ***dan*** kun je concluderen dat het midden R van PP_3 na *drie* keer spiegelen op zichzelf terechtkomt. Zoek uit waarom dat zo is.

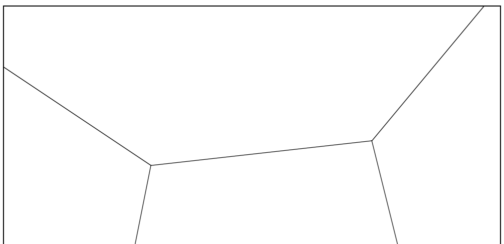
c. Maar waaróm is P_6 gelijk aan P?
In de figuur zijn enkele hoeken aangegeven. Je kunt het spiegelen ook opvatten als draai van de staaf MP om het draaipunt M. Vergelijk de draaihoek van MP naar MP_2 met de hoek van cel b.

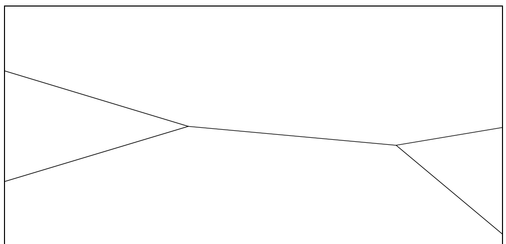
Opgave TWEE

Als je eenmaal één mogelijke positie voor het centrum van cel a hebt gevonden, weet je de andere mogelijkheden ook. Werk dit uit.

Opgave DRIE

Vind een manier om bij de volgende soort Voronoi-diagrammen de niet aangegeven vier centra terug te vinden.
Tip: Verdeel en heers.



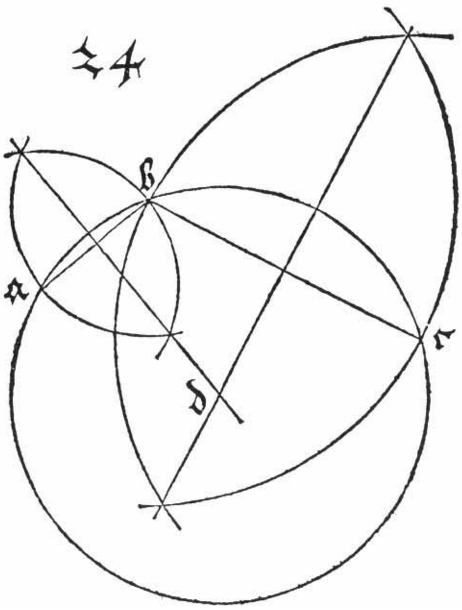


Werk je onderzoek als volgt af:

– Schrijf de redeneringen die je gevonden hebt bij de opdrachten in een verslag van een halve tot hoogstens één bladzijde op.
– Voeg er duidelijke tekeningen bij. In je verslag verwijs je naar de tekeningen.

Hoofdstuk 2
Redeneren met afstanden

ES iſt nützlich zůwyſſen/ ſo drey punckte͂ vngleich geſtelt werden/das man ſie behend ſo man ſeyn bedarff/ in eyn zirckel verfaſſen mûg diß mach alſo/ Die drey punckten ſeyen.a.b.c. die zeűch mit zweye͂ geraden linie͂ zůſame͂.a.b vnd.b.c.darnach thu jm zůgleicher weiß wie vorn in der.21.figur angezeigt iſt/ ſůch die mittel beder linien.a.b.vnd.b.c. vnd laß die zwů gerade͂ linien ſo die zwů für gegebnen linien. a.b.vñ.b.c.ytliche in der mitt von eynander teylen vnderſich her⸗ab durch eynander ſtreichen/ vnd ſo es not thut/ ſo erlenger die bed gerad teillinien/ Darnach nym ein zirckel vnnd ſetz den mit dem ein fuß in den punckten. d. vnnd den andern in den punckten.a. vnd reiß darauß ein gantzen zirckel ryß/ ſo rűrdt der zirckel/die drey punckten.a.b.c. wie jch das vnden hab auff⸗grieſſe.



In dit hoofdstuk wordt veel nauwkeuriger geredeneerd dan in het vorige.
In principe leiden we allerlei dingen af uit maar heel weinig uitgangsgegevens. We denken ook na hoe dat redeneren gaat en hoe je het kunt opschrijven.

De illustratie met de tekst in gotische letters op de voorpagina van dit hoofdstuk komt uit:

UNTERWEYSUNG DER MESSUNG MIT DEM ZIRCKEL UND RICHTSCHEYT.

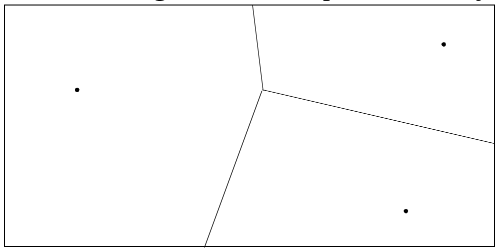
Dat is een door Albrecht Dürer in 1525 gepubliceerd meetkundeboek voor schilders en tekenaars.
De figuur is een illustratie bij wat in dit hoofdstuk *stelling 5* is. Die stelling zegt dat er bij elke driehoek precies één cirkel door de hoekpunten van de driehoek is. In de tekening van Dürer gaat het om driehoek *abc;* er wordt aangegeven hoe het middelpunt van de cirkel en de cirkel zelf met alleen passer en liniaal bepaald kunnen worden.

7: Inleiding: redeneren in de meetkunde

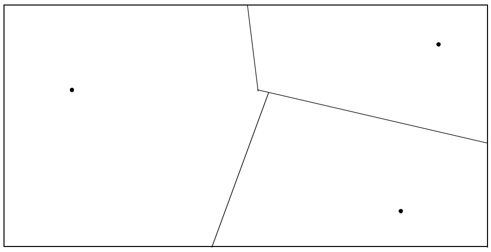
In het vorige hoofdstuk zijn diverse zaken onderzocht rond Voronoi-diagrammen. Er is gebruikgemaakt van wat je in figuren en tekeningen ziet. Maar eigenlijk worden zomaar dingen aangenomen waar misschien nog wel wat op valt af te dingen.

probleem A:

Waarom ziet het Voronoi-diagram van drie punten er altijd zó uit:



en nooit zó?



probleem B

De Voronoi-grens bij twee punten blijkt altijd een rechte lijn te zijn. De techniek van het vouwen ondersteunt dat idee. Maar waaróm zijn vouwlijnen altijd recht? Ook dit hebben we alleen in vele gevallen *gezien*. We weten eigenlijk niet echt waarom het zo is.

In dit hoofdstuk gaan we op deze twee vragen in.

redeneren i.p.v. kijken

We willen nu door *redeneren* zekerheid krijgen over deze vragen en niet door *kijken* naar enkele getekende figuren.
Hierdoor krijgt dit hoofdstuk een meer theoretisch karakter. Vooral aan het eind, want aan het begin gaat het nog over concrete diagrammen, maar aan het eind alleen over *stellingen* en *bewijzen*.
Je kunt daarbij het gevoel krijgen dat je op eieren loopt. Dat is ook zo, maar ook dat went; uiteindelijk ga je klagen als er iets gezegd wordt dat niet bewezen wordt.

1 a. In de paragraaf '*De grens tussen twee gebieden*' (bladzijde 6) worden nog wel meer eigenschappen van de grenslijn tussen twee gebieden genoemd die niet onderbouwd zijn. Welke bijvoorbeeld?

b. En hoe wordt daar in de paragraaf '*Hunebedden in Drente*' (*bladzijde 13*) gebruik van gemaakt?

8: Een redenering met drielandenpunten en cirkels

Eerst pakken we probleem A van de vorige bladzijde aan:

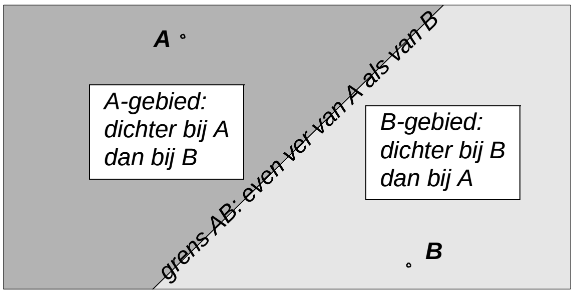
Waarom gaan bij een Voronoi-diagram met drie centra de drie grenslijnen door één punt?

Zulke vragen moet je altijd kritisch bekijken. Vandaar:

2 **a.** Teken enkele situaties met drie centra waarin er niet eens drie grenzen zijn. Blader desnoods terug naar de voorbeelden in het vorige hoofdstuk om op een idee te komen.

b. Waardoor zijn deze situaties gekenmerkt?

In de rest van deze paragraaf houden we geen rekening met dit bijzondere geval. In de samenvatting zetten we de waarschuwing er wel weer bij!



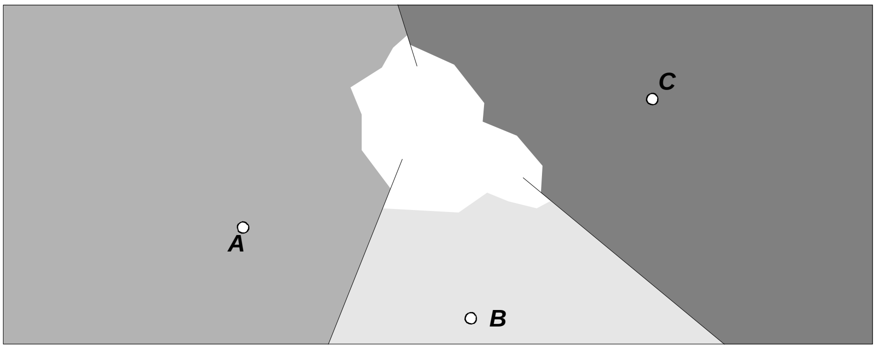
In het vorige hoofdstuk speelde de Voronoi-grens de hoofdrol. Karakteristiek was wat in deze figuur is aangegeven.

Alleen de punten op de grens hebben gelijke afstanden tot *A* en *B*. Anders uitgedrukt:

kenmerk Voronoi-grens

Alleen voor punten *P* op de Voronoi-grens tussen *A* en *B* geldt:
(afstand van P tot A) = (afstand van P tot B)

Van deze heldere vorm maken we gebruik bij de redenering over drie grenzen. Hier is een figuur waarin nog onbekend is óf de drie grenzen door een punt gaan.



3 Deze opgave helpt je aan een redenering naar: *de drie grenzen gaan door één punt*.

a. Geef het snijpunt van Voronoi-grens *AB* en Voronoi-grens *BC* aan en noem dat *M*.

b. Noteer, met behulp van het kenmerk van Voronoi-grenzen, de twee bijbehorende gelijkheden en leid hieruit een derde gelijkheid af. Noteer die ook.

c. Wat zegt die gelijkheid over het punt *M*? (Denk weer aan het kenmerk.)

d. Is nu het doel van de redenering bereikt?

4 De cirkel die *M* als middelpunt heeft en door *A* gaat, gaat ook door *B* en *C*.

a. Waar volgt dat nu uit?

b. In het vorige hoofdstuk had deze cirkel een bijzondere rol. Welke?

kritische noten

Door werken aan opgave **3** en **4** hebben we nu probleem A van bladzijde 19 opgelost, en meer, zo lijkt het nu.

5 Maar geef eens antwoord op de volgende vragen:
- **a.** Waarop is de aanname gebaseerd dát er zo'n snijpunt *M* is?
- **b.** Wordt ook niet (misschien zorgvuldig verborgen, maar toch echt) gebruikgemaakt van het feit dat de grenzen rechte lijnen zijn?

Dat valt nog niet mee!
Toch is de redenering van opgave **3** mooi, dat laten we niet meer los.
We kiezen dan ook voor het zoeken naar nog meer zekerheid.

We volgen dit plan:
- a. spijkerhard aantonen dat de Voronoi-grens van twee centra een rechte lijn is
- b. laten zien dat onder de voorwaarde dat de drie centra niet op één lijn liggen, de beide grenzen elkaar inderdaad snijden.

We zoeken zo naar de stevige grond onder onze redenering. Die moet gevonden worden in kenmerken van het afstandsbegrip, want dat is waar alles mee begon.

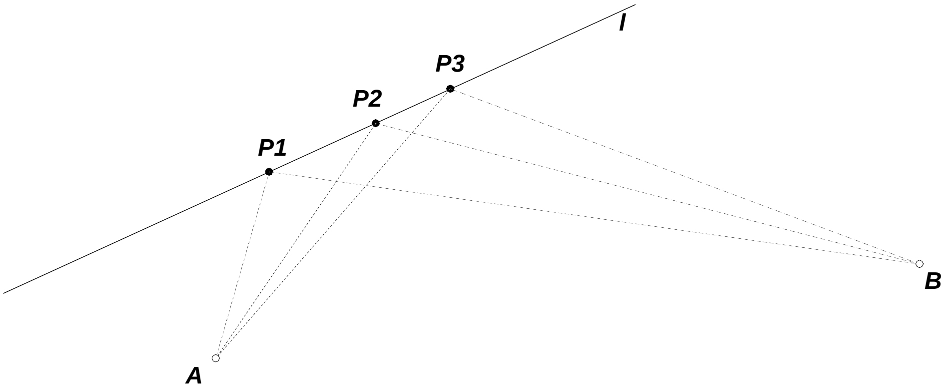
In de volgende paragraaf gaan we daarop af, uitgaande van een misschien onverwacht probleem.

9: Kortste wegen en driehoeksongelijkheid

kortste weg-principe

De kortste weg van punt A naar punt B is de rechte lijn die A en B verbindt.

6 Maar wat is de kortste weg van A naar B als onderwijl ook nog *via de lijn l* gegaan moet worden zoals hieronder? We zoeken dat nu uit.



a. Meet eens op welke van de drie routes van A naar B de kortste is.

b. We weten niet of er niet nóg een kortere route is! Nu komt een fraaie truc:

Spiegel A in de lijn l, noem het spiegelbeeld A'.
Verbind A' ook met de punten P.

Waarom geldt nu:

van A naar B via P_1 is even lang als v*an A' naar B via* P_1*?*

c. Bepaal nu, gebruikmakend van punt *A'*, punt Q op l, zodat gaan via Q de kortste route oplevert.

d. Bedenk een situatie waarin het van belang is een kortste route van deze soort te vinden.

Over het vinden van kortste wegen in ingewikkelde situaties is nog meer uit te vinden en in hoofdstuk 6 zullen we dat doen.
Nu stellen we alleen vast dat het *kortste-weg-princip*e de basis onder de oplossing vormde. Dat principe formuleren we nu in precieze vorm.
Omdat we het steeds hebben over *afstand* spreken we eerst een aparte notatie af voor de afstand van twee punten.

afstands-notatie

De afstand van twee punten A en B zullen we voortaan noteren als $d(A, B)$.
Omdat het steeds over *vergelijken* van afstanden gaat, doet het er niet toe of je daarbij aan centimeters op papier denkt of aan kilometers in het landschap. $d(A, B)$ is steeds een niet-negatief getal en je kunt er ongelijkheden en gelijkheden mee noteren. Ook uitdrukkingen als $d(A, B) + d(C, D)$ hebben betekenis. De d komt van het Engelse *distance*.

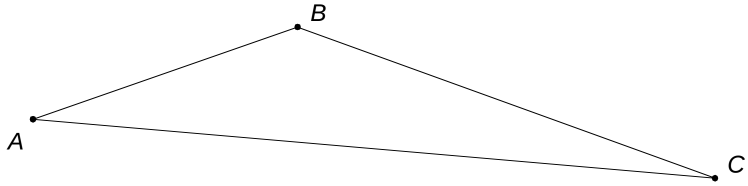
eenvoudige eigenschappen

7 **a.** Vertaal in gewoon Nederlands wat hier beweerd wordt:

voor punten P en Q geldt altijd: $d(Q, P) = d(P, Q)$

b. Wat weet je van de punten A en B als $d(A, B) = 0$?

In deze figuur zijn drie punten en hun verbindingen getekend.



We brengen nu precies met de *d*-notatie onder woorden dat van *A* naar *C* gaan via *B* een omweg is als *B* niet op lijnstuk *AC* ligt. Dit heeft een naam: de driehoeksongelijkheid.

driehoekson-gelijkheid

> **Driehoeksongelijkheid**
>
> **Voor elk drietal punten *A*, *B* en *C* geldt dat $d(A,C) \le d(A, B) + d(B, C)$.**
> **Het gelijkteken treedt alleen op als *B* op het lijnstuk *AC* ligt.**
> **In alle andere gevallen is er sprake van een echte ongelijkheid.**

De naam *driehoeksongelijkheid* komt voort uit het feit dat de *ongelijkheid* geldt als *A*, *B* en *C* een *driehoek* vormen.

8 In de figuur op de vorige bladzijde, uitgebreid met *A'* en *Q*, kun je de driehoeksongelijkheid toepassen om aan te tonen dat *A*-*Q*-*B* de minimale route is.
a. Op welke driehoek pas je die dan toe?
b. *Q* ligt op *A'B,* dat is getekend. Wat zegt de driehoeksongelijkheid nu?

9 De *driehoeksongelijkheid* is op de keper beschouwd wat bescheidener dan het *kortste-weg-principe*.
a. Teken een situatie waarin twee routes vergeleken worden, waar het kortste-weg-principe wel iets over zegt, maar de driehoeksongelijkheid eigenlijk niet.
b. De redenering van opgave **6** loopt vlekkeloos en toch wordt alleen de driehoeksongelijkheid gebruikt. Waardoor komt dat eigenlijk?

We kiezen uiteraard voor het eenvoudigste uitgangspunt: de driehoeksongelijkheid.

uitgangs-punt

De driehoeksongelijkheid nemen we dus als vaststaand feit aan.
In redeneringen kun je er dus voortaan naar verwijzen.
Zo hangen onze redeneringen over afstanden niet meer in de lucht; je weet nu waar je vanuit mag gaan.

10 Je kunt nu terecht vragen: waar berust die driehoeksongelijkheid dan weer op? Als je die vraag zelf gesteld hebt, is deze opgave voor jou, anders niet.
a. Goede vraag, moeilijk antwoord. Bedenk zelf eens iets waar jij de driehoeksongelijkheid op zou baseren.
b. Wat zou dan de volgende vraag zijn?

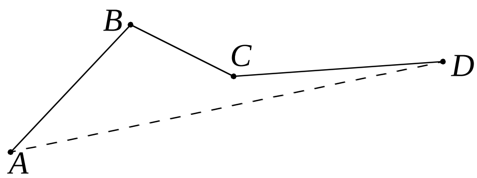
een andere notatie

Vaak wordt voor de lengte van het lijnstuk met uiteinde *A* en *B* de notatie $|AB|$ gebruikt. In dit hoofdstuk, waar alles nog in de sfeer van afstanden ligt, gebruiken we *d(A, B).* Als het om figuren met lijnstukken en hun lengtes gaat, in een later hoofdstuk, zul je ook $|AB|$ tegen gaan komen.

extra opgave

11 Toon aan dat in elke viertal punten *A*, *B*, *C* en *D* geldt:

$$|AD| \le |AB| + |BC| + |CD| .$$



10: Afstandsbegrip, stelling van Pythagoras

Een andere belangrijke eigenschap van het afstandsbegrip is uitgedrukt in de bekende stelling van Pythagoras over rechthoekige driehoeken.

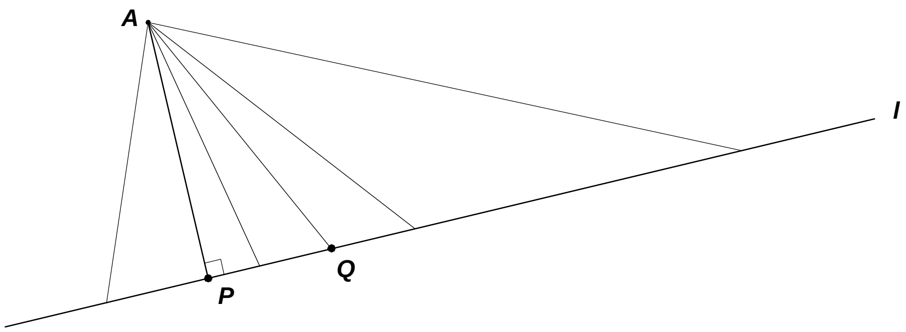
12 Formuleer die stelling, maar nu met gebruikmaking van de *d*-notatie van de vorige paragraaf. Je formulering gaat over een driehoek *ABC*, waarvan één hoek recht is.

We gebruiken deze stelling nu om de kortste afstand van een punt tot een lijn te bepalen en om zeker te weten dat de methode juist is.

kortste afstand tot een lijn

In deze figuur is *A* een punt buiten de lijn *l*. Je bent vast wel overtuigd van:

Van alle mogelijke verbindingslijnstukken van A met punten van l is het lijnstuk dat loodrecht op l staat het kortste.



13 a. Schrijf op – in *d*-notatie – wat voor driehoek *APQ* in de figuur volgens Pythagoras geldt.

b. Hoe volgt daaruit nu $d(A, P) < d(A, Q)$?

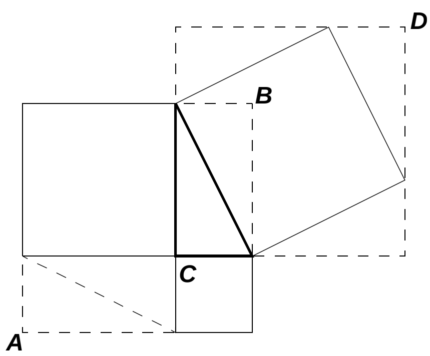
De stelling van Pythagoras is ook zo'n basis die je mag gebruiken. Op zich kun je 'Pythagoras' ook bewijzen op grond van weer eenvoudiger zaken, maar ook dat gaan we hier niet volledig doen. Een mogelijkheid wordt hieronder geschetst als 'extra'.

---

extra, Multatuli

Dit is het begin van nr. 116 uit de Ideeën van Multatuli.

Ik vond onlangs een nieuw bewijs voor de stelling van Pythagoras. Hier is het. Door, als op nevenstaand voorbeeld, zes driehoeken te construeren – ieder gelijk aan de gegeven rechthoekige driehoek – verkrijgt men twee gelijke kwadraten, AB en CD. Als men van elk dezer figuren vier driehoeken aftrekt, bewijst de gelijkheid van het overschot aan weerszij, wat er te bewijzen was.



Eenvoudiger kan het niet, dunkt me. Na dit bewijs gevonden te hebben, vernam ik dat er een werkje bestond waarin dit onderwerp werd behandeld. Ik schafte mij dat boekje aan en vond er mijn demonstratie niet in. Ook meen ik dat geen der daarin voorkomende bewijzen, zo aanschouwelijk en helder is als 't mijne.

Tot zover de trotse schrijver van de *Max Havelaar.*

Het bewijs van Multatuli steunt zwaar op het begrip oppervlakte. Daar hebben we niet precies de eigenschappen van vastgelegd. Ook wordt nogal makkelijk aangenomen dat bepaalde stukken van de figuur vierkanten zijn. Maar vooruit, we doen even met Multatuli mee.

14 a. Zet wat meer letters bij de figuur en schrijf een redenering op die uiteindelijk leidt tot de gelijkheid van de stelling van Pythagoras, uitgedrukt in oppervlakten van bepaalde vierkanten.

b. Wat zou je nog moeten aantonen om te kunnen concluderen dat het schuine 'vierkant' inderdaad een vierkant is?

extra; alternatief bij opgave 13 a/b.

15 Ook zonder de stelling van Pythagoras kun je aantonen dat de loodlijn vanuit *A* naar lijn *l* de kortste afstand levert. Gebruik de volgende tip en je eigen inventiviteit.
Tip: Hoe kom je op de snelste manier van A naar A als je via lijn l moet?

Onderstaande illustratie komt uit een Middeleeuws manuscript.
Het is gemaakt in het klooster van Mont Saint Michel in Bretagne, toen Robert de Torigni daar abt was. Dat was in de jaren 1154 tot en met 1186.
Het manuscript bevat figuren en teksten over astronomie, de abacus, klokken, en uiteraard wordt daar allemaal wiskunde bij gebruikt. Vermoedelijk is er heel wat uit Arabische geschriften overgenomen; in de Arabische wereld van die dagen werd veel meer aandacht besteed aan wiskunde en natuurwetenschap dan in de christelijk-westerse.
Deze afbeelding gaat over een toepassing van de stelling van Pythagoras bij het boogschieten. De boog is te zien, en bij de schuine zijde en de basis is het woord 'sagitta' (pijl) te zien. Bij de zijden zie je ook nog: 'filum V pedii', 'filum IIII pedii' en 'altitudo III pedii'. Vertaald: draden van 5 en 4 voet, een hoogte van 3 voet. Het is de bekende 3-4-5 driehoek. Zou de middeleeuwse monnik die de illustratie maakte, begrepen hebben dat het om de bedoeling van het plaatje ging en niet om het kunnen aflezen van de maten? De verhoudingen van de zijden kloppen in de figuur namelijk niet!

11: Eigenschappen van de middelloodlijn

De driehoeksongelijkheid gebruiken we nu om aan te tonen dat de
Voronoi-grens van centra A en B
gelijk is aan de
middelloodlijn van A en B.

belangrijk

Deze paragraaf is beslist de moeilijkste van dit hoofdstuk. Ook als je niet alles tot in details doorgrondt, kun je straks wèl verder met de volgende paragraaf. Maar doe een poging de redeneringen te volgen. Hoe meer je dit soort redeneringen mee kunt doen, hoe makkelijker het later wordt, gewoon doordat je er training in hebt gehad.

Eerst een *definitie* die je bekend moet voorkomen. Met definities leggen we in de wiskunde precies vast wat bedoeld wordt.

definitie Voronoi-grens

De <u>Voronoi-grens</u> van twee punten *A* en *B* is de verzameling van de punten *P* waarvoor geldt: *d(P, A) = d(P, B).*

Van hoofdstuk I heb je de sterke indruk overgehouden dat de Voronoi-grens van *A* en *B* precies de middelloodlijn van lijnstuk *AB* is. Dat gaan we nu *bewijzen*. Omdat we alleen van definities en bekende dingen willen uitgaan, moet nu dus ook ‘middelloodlijn’ gedefinieerd worden.

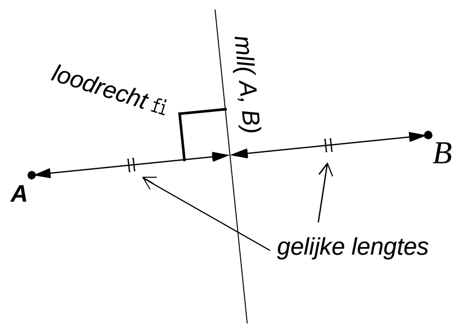
definitie middelloodlijn

De <u>middelloodlijn</u> van lijnstuk *AB* is de lijn die door het midden van *AB* gaat en loodrecht op *AB* staat.

mll (A, B)

Voor ‘middelloodlijn van lijnstuk *AB*’ spreken we een notatie af: *mll(A, B)*.
De figuur brengt de twee kenmerken van de middelloodlijn in beeld:

– hij staat *loodrecht* op de verbindingslijn
– hij *deelt* de verbindingslijn *middendoor.*



Wat we graag zeker willen stellen is:

bewering: gelijkheid

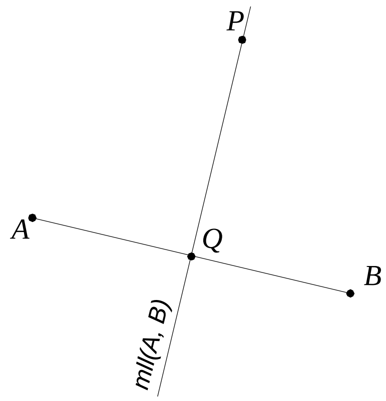
De <u>Voronoi-grens</u> van twee punten *A* en *B* en de <u>middelloodlijn</u> van het lijnstuk *AB* vallen met elkaar samen.

Dat betekent heel wat: niet alleen dat alle punten van de middelloodlijn op de Voronoi-grens liggen, maar ook dat de Voronoi-grens niet meer punten bevat. En andersom.

Daarom moeten twee dingen afzonderlijk bewezen worden:
a. Elk punt dat op de middelloodlijn ligt, ligt op de Voronoi-grens.
b. Elk punt dat *niet* op de middelloodlijn ligt, ligt *niet* op de Voronoi-grens.

We pakken beide delen afzonderlijk aan.

16 Bewijs van deel a:
Elk punt dat op de middelloodlijn ligt, ligt op de Voronoi-grens.
In de figuur is lijnstuk *AB* getekend en ook de *mll(A, B*). *Q* is het midden van *AB*. *P* is een punt dat op de middelloodlijn ligt.



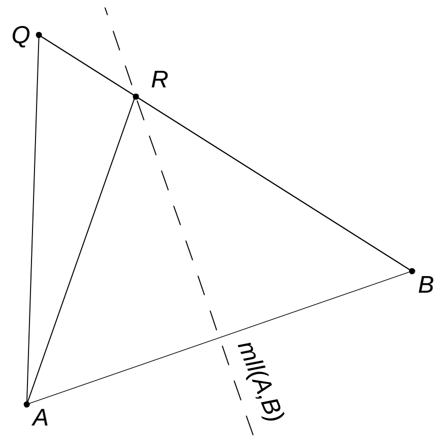
a. Geef in de figuur met groen de *twee* dingen aan, die je volgens de definitie van *mll(A, B)* nu mag gebruiken.
b. Kleur de lijnstukken, waarvan je moet bewijzen dat ze even lang zijn, rood.
c. Noteer wat Pythagoras over *d(P, A)* en *d(P, B)* zegt en leid daaruit af:

d(P, A) = d(P, B).

d. Zijn de twee kenmerken van de middelloodlijn allebei gebruikt? Waar in de redenering?

17 We zijn op de helft, want het bewijs van b moet nog:
Elk punt dat niet op de middelloodlijn ligt, ligt niet op de Voronoi-grens.

De situatie is hiernaast verbeeld. *Q* ligt niet óp *mll(A, B)*, maar aan de kant van *A*. *BQ* snijdt dan zeker de middelloodlijn, noem het snijpunt *R*. *R* ligt zeker niet op lijnstuk *AQ*. Dat is wat je weet en mag gebruiken in het bewijs.



a. Noteer in *d*-notatie nu wat je moet bewijzen.
b. Omdat we deel a al bewezen hebben, weet je wél iets over punt *R*. Noteer dat als een gelijkheid.
c. Stel ook een *on*gelijkheid op waar *Q*, *R* en *A* een rol in spelen.
d. Combineer een en ander om de gezochte conclusie te verkrijgen.

18 Doet de figuur en het gebruik van de driehoeksongelijkheid je niet aan een ander probleem denken?

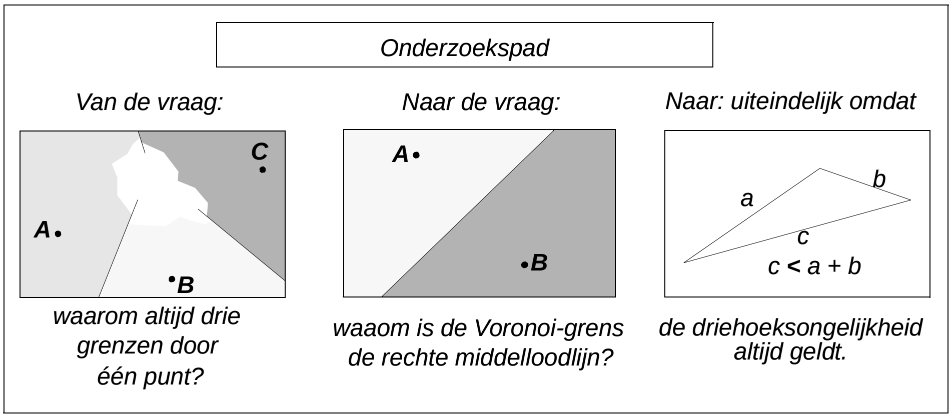
Eigenlijk moet ook nog het geval dat *d(A, Q)* > *d(B, Q)* onderzocht worden. Natuurlijk ligt *Q* dan aan de kant van *B* en gaat het op consequent verwisselen van de letters *A* en *B* precies zo. Dit is niet meer interessant.

12: Van onderzoek naar logische opbouw

inleiding op deze paragraaf

onderzoek

In het voorgaande hebben we onderzocht waarom de Voronoi-grenzen bij drie centra (in het algemeen) door één punt gaan.
We begonnen met het probleem van de gebiedsindelingen en kwamen erachter dat een fundamentele eigenschap van het afstandsbegrip van belang was.
Het onderzoek verliep zó:

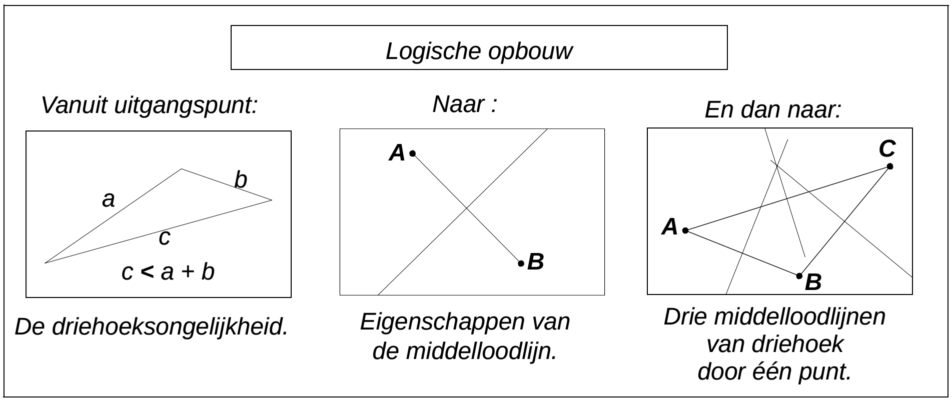


Tot zover het zoeken.

logische opbouw

Omdat we aan het redeneren zijn, is de logische opbouw achteraf bezien natuurlijk andersom: eerst de driehoeksongelijkheid, en daaruit afleiden dat de *Voronoi-grens* en de *middelloodlijn* samenvallen en ten slotte pas daaruit weer de bewering over de drie grenzen afleiden.

In deze paragraaf herhalen we het geheel in die laatste vorm. Daarbij zien we af van de terminologie van de Voronoi-diagrammen, we maken het nu wiskundig zuiver.
In overzicht dus zó:



De belangrijkste beweringen, die dan bewezen zijn, formuleren we kort en krachtig als stellingen. De stellingen nummeren we, er kan dan later gemakkelijk naar verwezen worden. Want dat is juist wat zal gebeuren: wat eerder bewezen is, mag je gebruiken in de logische opbouw.

uitgangspunten: driehoeksongelijkheid en Pythagoras

De driehoeksongelijkheid kan bewezen worden, vanuit andere, primitievere, uitgangspunten, maar zover gaan we niet. Het wordt onze eerste stelling.

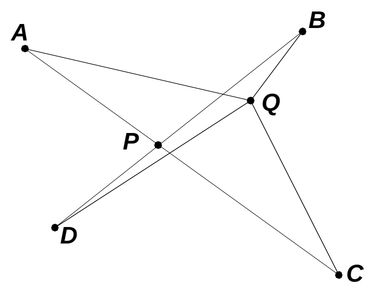
Stelling 1 **(Driehoeksongelijkheid)**
Voor elk drietal punten *A*, *B* en *C* geldt dat *d(A,C)* £ *d*(*A, B*) + *d*(*B, C*).
Het gelijkteken treedt alleen op als *B* op het lijnstuk *AC* ligt.
In alle andere gevallen is er sprake van een echte ongelijkheid.

Hier volgt een oefening in het gebruik van de driehoeksongelijkheid.

Gegeven zijn vier punten: *A*, *B*, *C* en *D*. *P* is het snijpunt van de lijnstukken *AC* en *BD*. *Q* is een ander punt dan *P*.
Je moet bewijzen dat
de vier afstanden van *Q* tot *A*, *B*, *C* en *D* samen
groter zijn dan
de vier afstanden van *P* tot *A*, *B*, *C* en *D* samen.

19 a. Noteer de te bewijzen bewering met de *d*-notatie als volgt:
Te bewijzen: d(P, A) + ... £ ....

b. Begin dan het bewijs met:
Bewijs: ..
en gebruik daarbij (een of meerdere keren) de driehoeksongelijkheid.



Voor de volledigheid is hier nog even de stelling van Pythagoras. Als je de extra-opgaven van bladzijde 25 gemaakt hebt, heb je daarvan een bewijs gezien.

Stelling 2 **(Pythagoras)**
Als in driehoek *ABC* hoek *B* recht is, dan geldt:
$d(A, C)^2 = d(A, B)^2 + d(B, C)^2$.

---

de middelloodlijn

Bij de middelloodlijn gaven we een definitie. Die nemen we hier over.

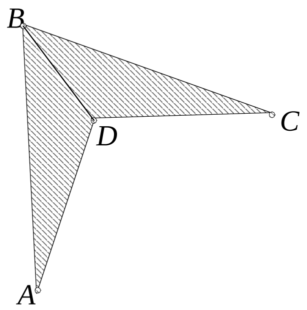
definitie middelloodlijn

De <u>middelloodlijn</u> van lijnstuk *AB* is de lijn die door het midden van *AB* gaat en loodrecht op *AB* staat.

De eigenschappen van de middelloodlijn staan in deze stelling:

Stelling 3 **De middelloodlijn van lijnstuk *AB* is de verzameling van de punten *P* waarvoor geldt *d(P, A) = d(P, B)*.**
Voor punten *P* buiten de middelloodlijn geldt:
Als *d(P, A) < d(P, B)*, dan ligt *P* aan de *A*-kant van *mll(A, B)*.
Als *d(P, A) > d(P, B)*, dan ligt *P* aan de *B*-kant van *mll(A, B)*.

Je kunt de stelling toepassen bij het volgende probleem. Denk hieraan: als twee punten van een Voronoi-grens bekend zijn, is de hele grens bekend.



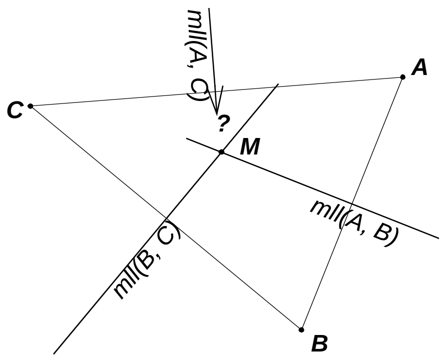
20 In deze deltavlieger zijn AB en BC even lang en ook AD en DC zijn even lang.
Toon aan dat BD en AC loodrecht op elkaar staan.

middelloodlijnen in de driehoek

Stelling 4 **In elke driehoek *ABC* gaan de drie middelloodlijnen van de zijden *AB*, *BC* en *CA* door één punt.**

21 a. Er was in de paragraaf '*Een redenering met drielandenpunten en cirkels*' een probleem: de drie centra mochten niet op één lijn liggen. Hoe is dat hier omzeild?
b. Als drie punten wél op één lijn liggen, wat is er dan aan de hand met hun drie middelloodlijnen? Teken er een (volledige) figuur bij.
c. Als de drie punten niet op één lijn liggen, hoe zit het dan?

Hier is een figuur bij de stelling.
M is het snijpunt van de middelloodlijnen van AB en BC.
Onderaan zie je het schema dat het bewijs weergeeft.



22 In feite is dat het bewijs zoals dat in opgave **3**, bladzijde 20, is gegeven.
a. Geef nauwkeurig aan hoe verschillende onderdelen van die opgave met onderdelen van dit schema corresponderen.
b. Stap 1 en 1bis verschillen van de conclusiestap. In welk opzicht?

stap 1
M op $mll(A, B)$ Dus $d(M, A) = d(M, B)$

stap 1bis
M op $mll(B, C)$ Dus $d(M, B) = d(M, C)$

↓

verbindingsstap
Dus $d(M, A) = d(M, C)$

↓

conclusiestap
$d(M, A) = d(M, C)$ Dus M op $mll(A, C)$

de omgeschreven cirkel

Eerst de definitie.

omgeschreven cirkel

> **Een omgeschreven cirkel van een driehoek *ABC* is een cirkel, die door de drie punten *A*, *B* en *C* gaat.**

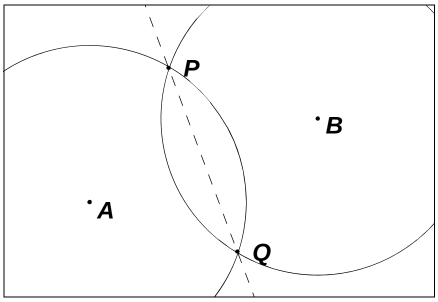
De stelling over de omgeschreven cirkel laat zich eenvoudig formuleren.

Stelling 5 **Elke driehoek *ABC* heeft één omgeschreven cirkel. Het middelpunt van de omgeschreven cirkel is het snijpunt van de drie middelloodlijnen van de driehoek.**

Het bewijs is eenvoudig: het punt M, waarin de drie middelloodlijnen elkaar snijden, ligt op gelijke afstanden van de drie hoekpunten en is het enige punt met die eigenschap.

We doen nog enkele oefeningen met cirkels en middelloodlijnen.

23 In deze figuur staan twee cirkels met gelijke straal. Hun middelpunten zijn de punten A en B. Op grond van welke stelling liggen de snijpunten P en Q op de middelloodlijn van lijnstuk AB?

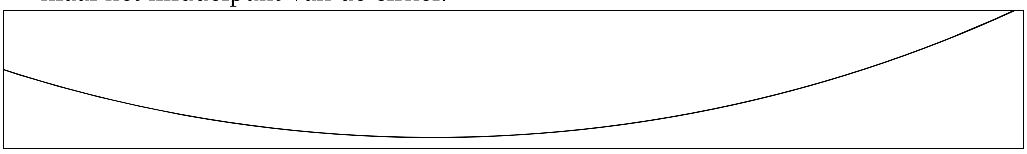


Dit is een recept om met passer en liniaal de middelloodlijn te tekenen. Je gebruikt geen geodriehoek en maakt geen gebruik van de cijfers op de liniaal.

24 Ga op de voorpagina van dit hoofdstuk na hoe Dürer die techniek gebruikt bij het vinden van de omgeschreven cirkel door de drie punten a, b en c.

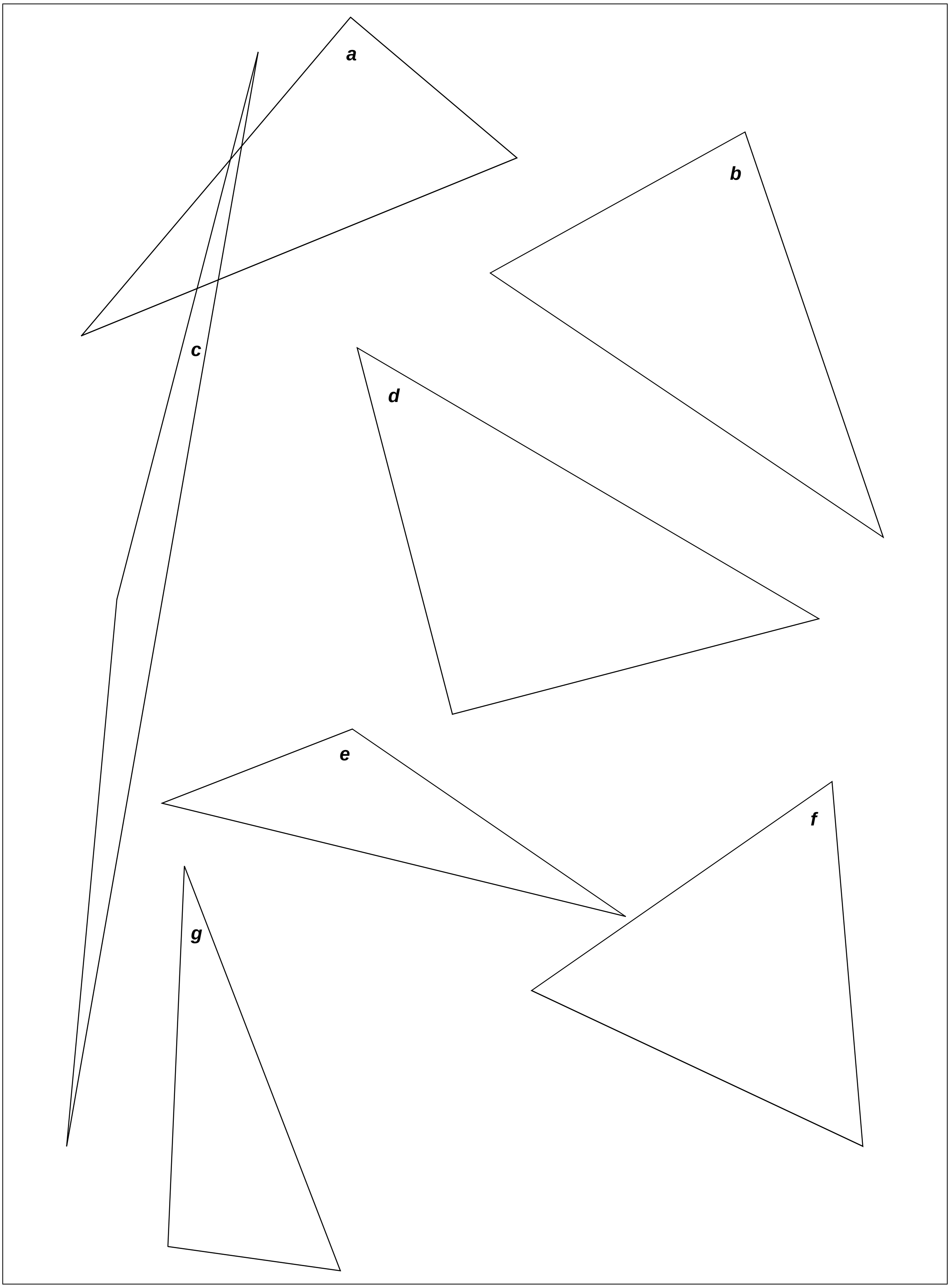
25 Op de volgende bladzijde staan wat driehoeken.
Kies er drie uit en bepaal daarbij het snijpunt van de middelloodlijnen en teken de omgeschreven cirkel. Voer in minstens één geval de constructie met passer en liniaal geheel uit.
Kies zodanig dat één middelpunt *binnen*, één middelpunt *op* en één middelpunt *buiten* de betreffende driehoek ligt. Hoe hangt dit *binnen-op-buiten* samen met de vorm van de driehoek?

26 Hier is een stuk van een cirkel gegeven. Bepaal met behulp van alleen passer en liniaal het middelpunt van de cirkel.

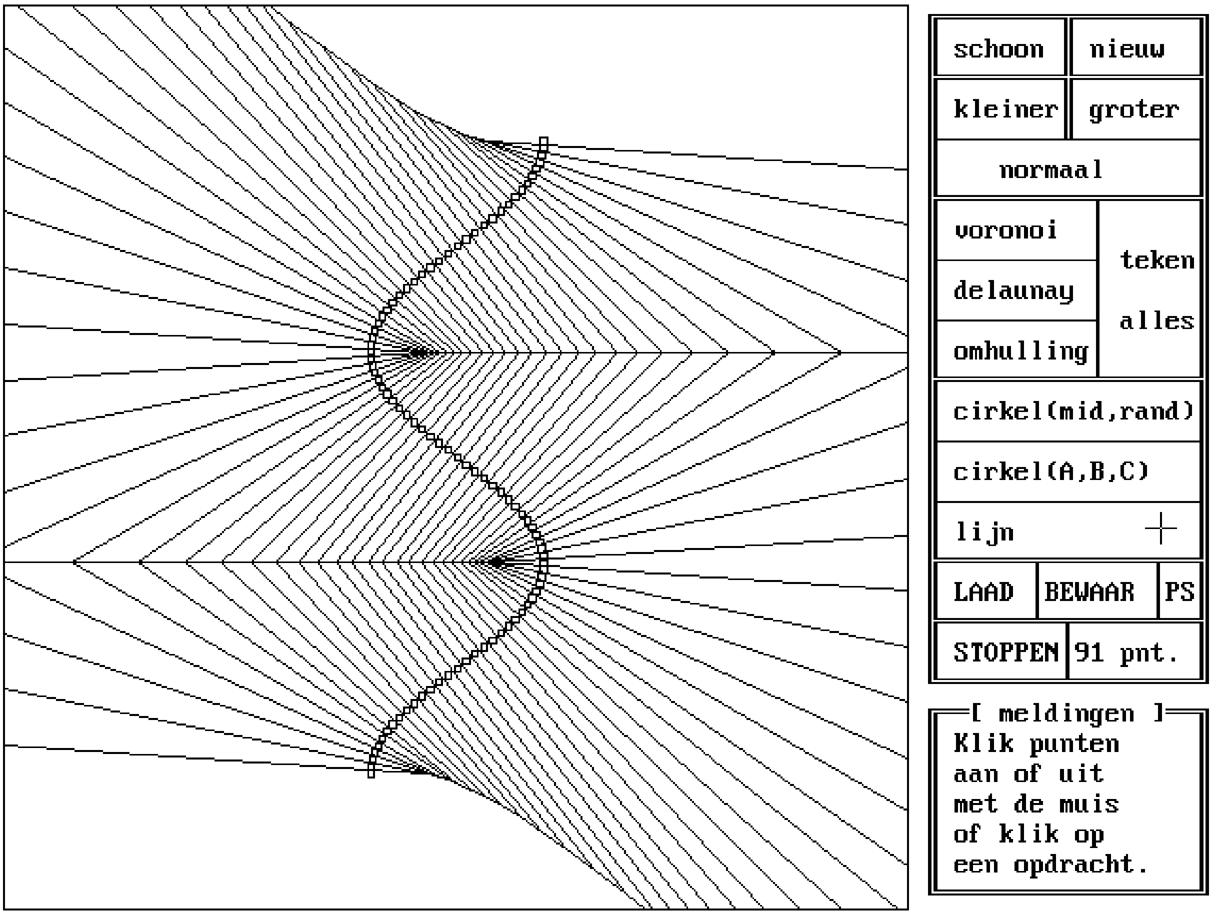


Samenvatting van hoofdstuk 2

Deze paragraaf is als geheel eigenlijk de samenvatting van dit hoofdstuk!


a
b
c
d
e
f
g

Hoofdstuk 3
Computerpracticum Voronoi-diagrammen



In dit hoofdstuk maken we Voronoi-diagrammen met behulp van de computer. Het hoofdstuk heeft een praktisch karakter: je gaat veel proberen en betrekkelijk weinig bewijzen.
Omdat we dan vrij snel ook met meer dan 5 of 6 centra zullen werken, kan gelet worden op andere kenmerken dan die in hoofdstuk 2.
De slotopgaven lopen vooruit op wat later aan bod komt. Dan werken we niet meer met puntvormige centra, maar met gebieden als centra.

De illustratie op de eerste pagina van dit hoofdstuk toont het programma dat we gebruiken in actie.

Een ander programma, waar de meeste dingen (maar niet alle) van dit hoofdstuk ook mee kunnen worden uitgevoerd, is op Internet bereikbaar.
De URL van dat programma is:

`http://loki.cs.brown.edu:8080/pages/Mocha.html#Voronoi`

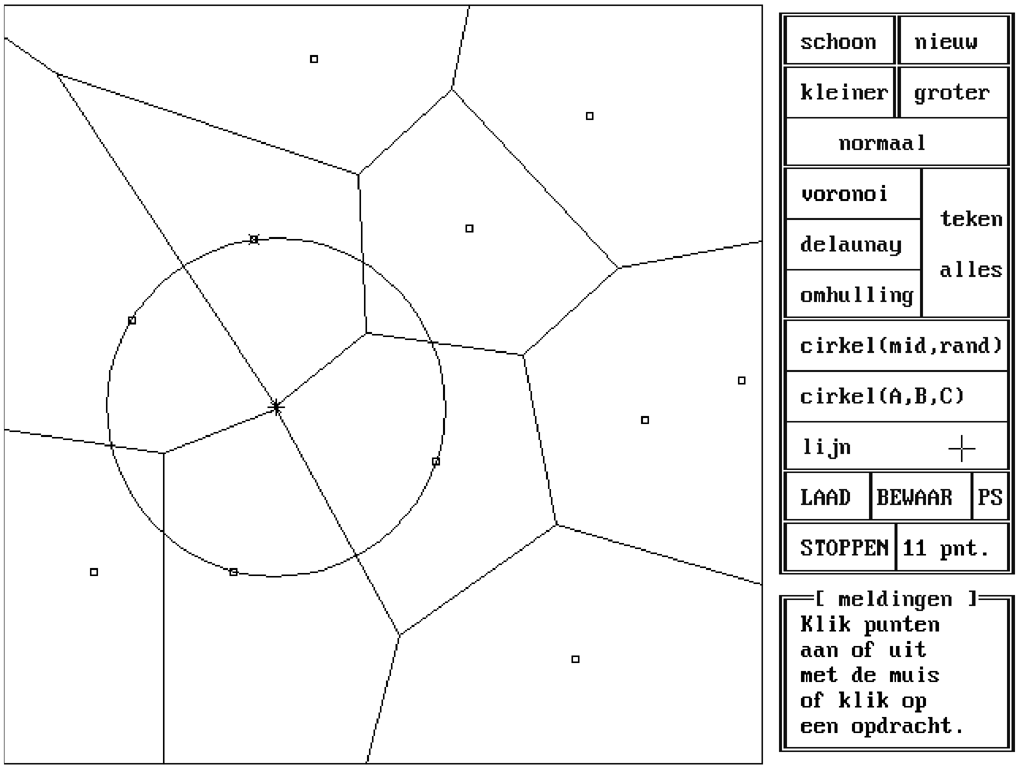
13: Inleiding

Je weet dat het maken van een Voronoi-diagram berust op tekenen van middelloodlijnen, maar ook dat het uitzoeken van de juiste stukken lijn tijdrovend is als er veel centra zijn. In toepassingen van Voronoi-diagrammen gaat het vaak om veel punten. Het ligt voor de hand dat er computerprogramma's zijn die dat tijdsintensieve tekenwerk kunnen doen. Met zo'n programma gaan we nu werken.

Het hangt van de plaatselijke situatie af hoe het computerprogramma wordt gestart. Volg de aanwijzingen van de deskundigen ter plekke.

bediening

Als het programma in werking is, kan het scherm er zó uit zien:



Je bedient het programma hoofdzakelijk met de muis, je hoeft alleen te klikken op de linker muisknop. Op het linkerdeel van het scherm klik je punten aan of uit. Rechts wijs je opdrachten aan voor het programma. Dit is alles. Bij sommige opdrachten krijg je aanwijzingen op het `meldingen`-deel van het scherm.

1 **a.** Zorg dat je ongeveer het schermbeeld van hierboven krijgt. Enkele punten aanwijzen en dan de opdracht `voronoi` aanklikken is genoeg.

b. Laten we even testen of het diagram correct is getekend door enkele grootste lege cirkels te tekenen. Er zijn twee mogelijkheden:

– `cirkel(mid,rand)`. Gebruik deze opdracht om een cirkel met bekend middelpunt te tekenen.
Neem eens als middelpunt een hoekpunt van het Voronoi-diagram en als randpunt een geschikt centrum. Kies zó, dat het een grootste lege cirkel wordt.

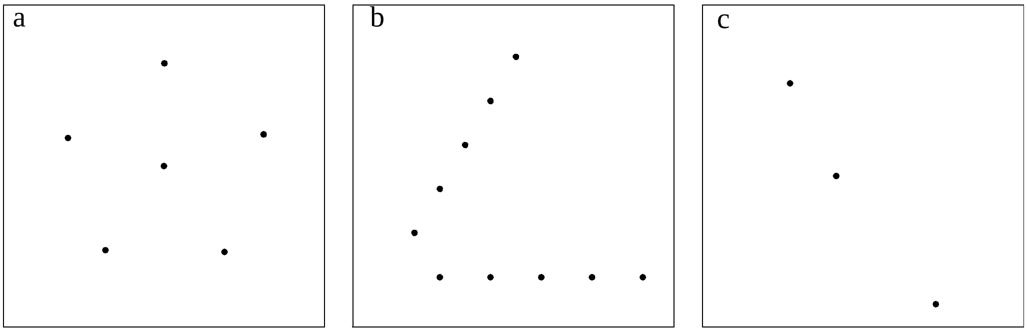
– `cirkel(A,B,C)`. Gebruik deze opdracht om een cirkel door drie punten te tekenen. Het programma doet de constructie van de voorplaat van hoofdstuk

2 in een flits voor je.
Kies de punten *A*, *B* en *C* zó, dat er weer een grootste lege cirkel ontstaat. Nu wordt ook het middelpunt van de cirkel vertoond. Is het een Voronoi-hoekpunt? Moet dat inderdaad zo zijn?

c. De opdrachten `schoon` en `nieuw` spreken voor zich.

Je weet nu genoeg om allerlei zaken uit te gaan proberen.

2 **a.** Maak met de computer Voronoi-diagrammen bij de volgende liggingen van de centra.

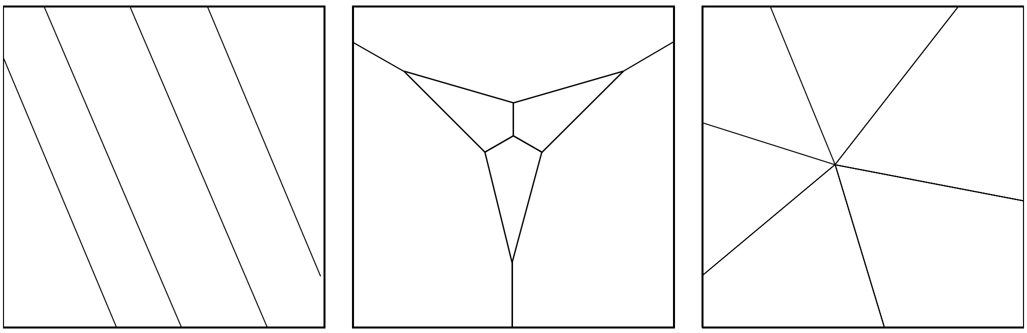


b. Als je situatie b heel nauwkeurig doet, liggen een aantal stukken grens recht achter elkaar. Ze vormen een lijn. Wat is die lijn eigenlijk?

c. In situatie c van hierboven kun je niet zien of er een drielandenpunt is. Gebruik de opdracht `kleiner` om het hele diagram te kunnen overzien. Doe dat desnoods een aantal keer achterelkaar. Je kunt ook eerst de opdracht `lijn` gebruiken om de punten geraffineerd te plaatsen.

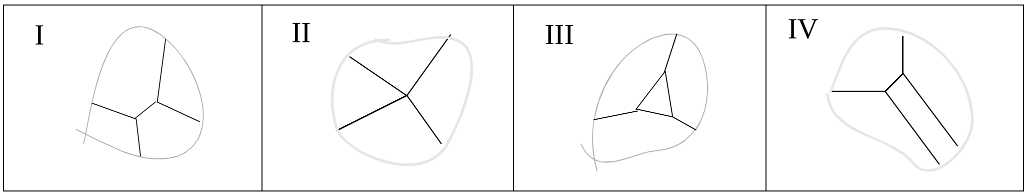
PS. Gebruik `normaal` om weer terug te keren, of kies direct `nieuw`.

3 Maak door handig centra te kiezen de Voronoi-diagrammen van de figuren hieronder. Denk eraan dat je ook eerst lijnen of cirkels kunt tekenen om uit te zoeken waar de centra moeten komen. Geef dan in de figuren aan waar de centra ongeveer komen.

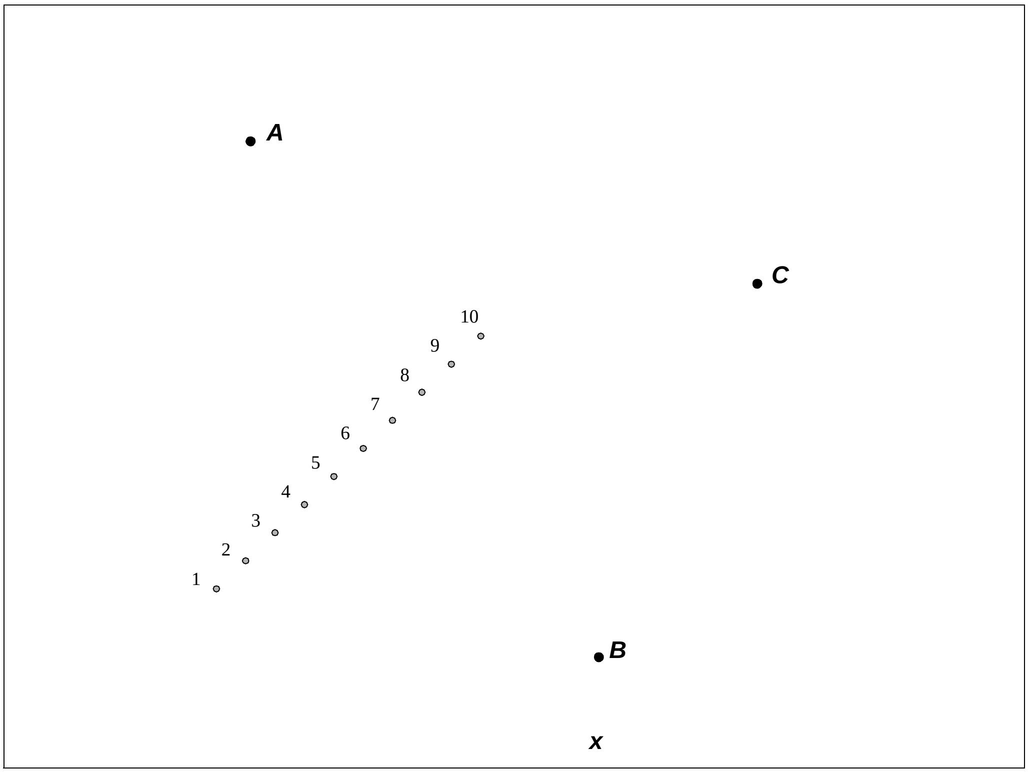


14: De invloed van het vierde punt

Er zijn eigenlijk maar vier duidelijk onderscheidbare diagrammen bij vier punten mogelijk. Namelijk deze vier:



4 Kies drie punten ongeveer zoals de zwarte punten *A*, *B* en *C* in de figuur hieronder.



Bij deze opgave voegen we steeds opnieuw een vierde punt (*D*) toe en kijken we wat de invloed van dat punt is. (De punten 1 t/m 10 spelen pas een rol bij de volgende opgave.)

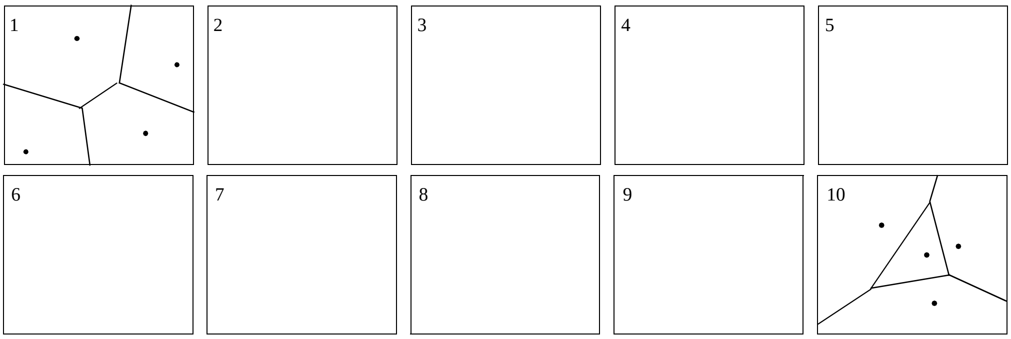
a. Klik een vierde punt aan, maar zó, dat een diagram van type III ontstaat. Als je dat punt een klein beetje verplaatst, blijft het diagram van type III.

b. Toon op het scherm alle mogelijke plaatsen voor *D*, waarbij het Voronoi-diagram van type II is.

c. Doe hetzelfde voor type IV.

d. Welk type ontstaat als *D* bij *x* ligt? Gebruik eventueel de opdracht `kleiner` als het niet duidelijk wordt.

5 Als het vierde punt achtereenvolgens de posities 1, 2, 3, ... , 10 inneemt, wijzigt zich het Voronoi-diagram geleidelijk. Begin en eind van dat proces zijn aangegeven. Schets de tussenstadia en geef bij elk stadium het type aan.



6 Uit het voorgaande merk je dat de overgangen van het ene type naar het ander type diagram plaatshebben, als het punt D over de omgeschreven cirkel of over een van de drie lijnen gaat (die door A en B, door B en C, door C en A).

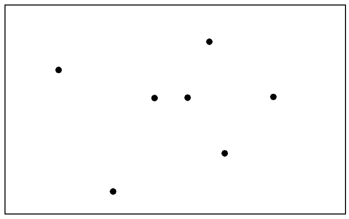
a. Bij elk tussenliggend gebied hoort een type. Geef dat in de figuur aan met I, II, III of IV.

b. Als je ‘zomaar’ een punt D kiest, is de kans op twee van de vier types erg groot, maar op de andere twee van de vier types toch wel héél erg klein. Hoe zit dat?

15: Oneindig grote cellen

Je hebt intussen gezien dat er cellen bestaan die aan alle kanten zijn ingesloten door grenzen en dat er cellen zijn waarbij dat niet zo is. Nu gaan we speciaal kijken naar die laatste soort cellen.

7 **a.** Maak om te beginnen eens het Voronoi-diagram bij de situatie die hiernaast is afgebeeld. Er zijn twee eindige cellen.



b. Gebruik nu een aantal malen de opdracht `kleiner`. Waar gaat het diagram nu steeds meer op lijken?

omhulling

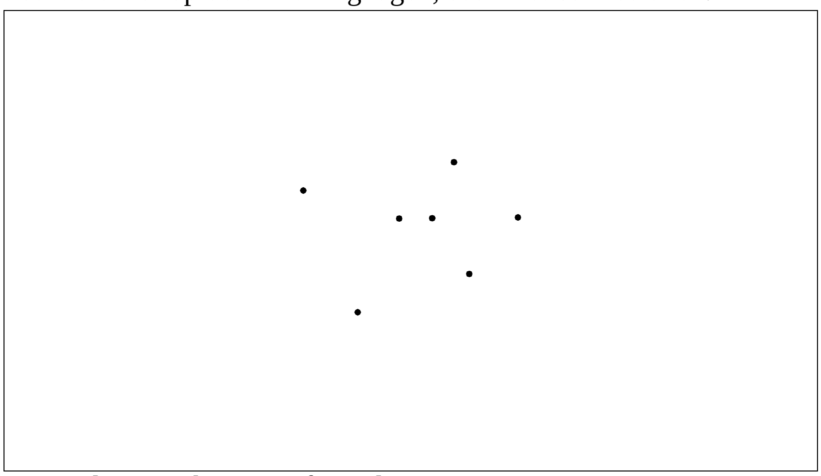
c. Kies nu eerst de opdracht `normaal` en daarna de opdracht `omhulling`. Er wordt nu een rode gesloten lijn toegevoegd. Stel je voor dat de centra spijkers in een plank zijn, die nog wat uit het hout steken. Met welk huishoudelijk voorwerp kun je nu mooi deze lijn laten zien?

d. Voeg enkele punten toe *binnen* de omhulling, maak een nieuwe tekening met de opdracht `correct` en verklein weer flink. Is het resultaat anders dan dat bij vraag **b**? Zijn er nieuwe oneindig grote cellen ontstaan?

e. Ga terug naar `normaal` en voeg één punt toe, maar doe dat zó, dat er wél een oneindig grote cel bijkomt en de andere oneindig grote cellen oneindig groot blijven.

Bij deze laatste vraag probeer je een centrum toe te voegen, terwijl de centra die bij de oude omhulling horen ook bij de nieuwe horen.
Als je bij vraag **c** (met de spijkers) gedacht hebt aan een elastiekje, dan is dit wat je moet doen: zorgen dat het elastiekje niet loskomt van de andere spijkers waar het tegenaanzit.

f. Hier is de situatie van vraag **7 a** nog eens, met wat meer ruimte eromheen. Geef met een kleur de gebieden aan, waar één nieuw centrum gekozen kan worden, zó dat centra die al op de omhulling lagen, daar niet van losraken.

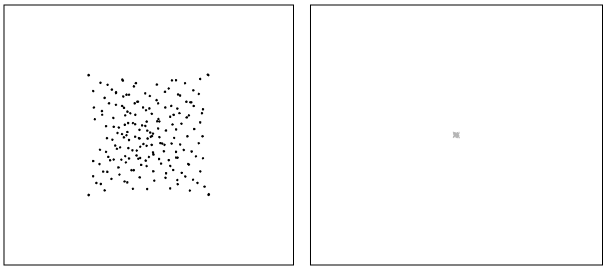


Voorlopige conclusie uit het voorafgaande:

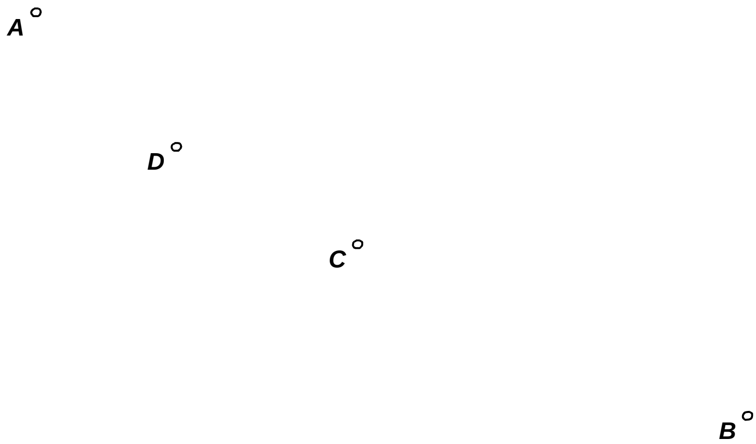
conclusie 1

De centra die op de omhulling liggen, hebben oneindig grote cellen.

8 Hier is een situatie, waarin ook de computer je niet kan helpen het Voronoi-diagram te tekenen. Dat gaat te lang duren. Toch kun je voorspellen hoe het diagram eruit ziet, als je heel erg verkleint. Geef dat aan in de figuur ernaast, waar het kleine grijze wolkje in het midden de groep centra voorstelt.



9 **a.** Maak deze situatie, met Voronoi-diagram en omhulling. Ga na, eventueel door verkleinen, of de cellen rond *A* en *B* aan elkaar grenzen.



b. Teken de cirkel door *A*, *D* en *B* en ook de cirkel door *A*, *C* en *B*. Zoek hun middelpunten op, gebruik eventueel de opdracht `kleiner`. Waarom moeten die op de Voronoi-grens van *A* en *B* of op het verlengde ervan liggen?

c. Voeg binnen de omhulling van *A*, *B*, *C* en *D* een nieuw centrum *E* toe, maar zodanig dat lijnstuk *AB* bij de omhulling blijft horen. Teken weer de cirkel door *A*, *E* en *B*. Blijven de cellen rond *A* en *B* aan elkaar grenzen? Waarom is dat zo (of niet zo)?

We trekken nóg een voorlopige conclusie:

conclusie 2

Twee centra die door een lijnstuk van de omhulling verbonden zijn, hebben aan elkaar grenzende oneindige cellen.

10 Test met enkele voorbeelden of deze conclusie standhoudt.

11 Maak een voorbeeld met zeven centra, waarbij de Voronoi-cellen van de twee verst uiteenliggende centra aan elkaar grenzen.

De twee conclusies die we in deze paragraaf hebben getrokken, zien er solide en betrouwbaar uit maar ze zijn alleen gebaseerd op waarnemingen die je gedaan hebt. Je zou ze ook wel op de manier van het vorige hoofdstuk nauwgezet kunnen bewijzen. Omdat het wel veel werk en niet zoveel nieuwe inzichten zou opleveren en we niet op de conclusies gaan voortredeneren, laten we het hierbij.

16: Extra opdrachten Voronoi-diagrammen

De opdrachten in deze paragraaf staan los van elkaar. Je kunt een keuze maken uit een of meer van:
– verbeterd Nederland
– rivier, zee, delta, eiland
– bijzondere liggingen

In deze paragraaf werken we met een paar grotere voorbeelden. Het hangt een beetje van de snelheid van de computer af hoever je komt.

> *Lees eerst de* ***noodgreep****, de* ***waarschuwing*** *en de* ***gebruiksaanwijzing*** *hieronder!*

Als het tekenen lang duurt, denk je maar eens na over het volgende:

12 Hoe meer centra zijn opgegeven, hoe langer de computer erover doet. Zou het zo zijn dat een situatie met het *dubbele* aantal centra ook de *dubbele* rekentijd vraagt?

noodgreep I

Mocht het rekenen aan een diagram je té lang duren, tik dan op de toets

ESC

waarschuwing

De namen van figuren die beschikbaar zij bij LAAD verschijnen vaak in twee varianten op het scherm: met en zonder een getal e achter.
Als je computer niet erg snel is, kies dan de wat dunnere versie: zonder het getal.
het getal geeft het aantal gebruikte centra aan.

gebruiksaanwijzing

Laden
De voorbeelden die we gebruiken haal je op door de opdracht `LAAD` aan te klikken. De computer vertoont dan een lijstje mogelijkheden. Je tikt een naam van je keuze aan.

Bewaren
Mocht je de opdracht BEWAAR willen gebruiken om door jou gemaakte diagrammen te bewaren, dan heb je een eigen schijfje nodig. Laat de in te tikken nieuwe naam dan met A: beginnen; dan wordt je diagram op de A:- schijf bewaard.

verbeterd Nederland

13 Deze opdracht gaat over de provinciehoofdsteden van Nederland. Je kunt ze op twee manieren op het scherm krijgen:
a: Met werkblad B, bladzijde 123. Losmaken en bij het scherm houden. Breng de twaalf provinciehoofdsteden zo nauwkeurig mogelijk over. Het mooist gaat het als het werkblad op doorzichtig papier is gekopieerd.
b: Klik de opdracht `LAAD` aan en tik op `nedkaart`.
Maak op een of andere manier dit Voronoi-diagram.

a. Zouden de Voronoi-cellen rond Maastricht en Assen aan elkaar grenzen? Onderzoek dit met de opdrachten `kleiner` en `omhulling`. Je kunt het antwoord op deze vraag ook direct op de kaart vinden met een liniaal. Hoe?
Kies `normaal` om de kaart op de juiste grootte terug te krijgen.

verbeter de provincie indeling.

14 a. Zoals je al gezien hebt, vallen de grenzen van de Voronoi-cellen niet overal samen met de werkelijke provinciegrenzen. Nu vinden Amsterdammers natuurlijk dat eigenlijk Amsterdam de hoofdstad van Noord-Holland zou moeten zijn. Haal Haarlem weg en voeg Amsterdam toe. Wordt de indeling al beter?
Probeer nog meer centra te verplaatsen zodat het Voronoi-diagram nog meer lijkt op de echte provinciale verdeling.

b. Een andere mogelijkheid is: bouw de provincies uit meer cellen op. Je krijgt dan wat grenzen teveel, maar sommige provincies zijn zo beter te benaderen.

verbeter de spoorwegen

15 a. Kies nu de opdracht `Delaunay`.
Er worden nu blauwe lijnen getrokken tussen centra.
Welke centra worden verbonden en welke niet?
Ga na dat Utrecht nu verbonden wordt met alle provinciehoofdsteden in aangrenzende provincies.

b. Is de Delaunay-triangulatie een goed voorstel voor het verbeteren van de Nederlandse spoorwegen? Geef in je commentaar aan wat je goede verbeteringen vindt en welke volgens jou weggegooid geld zou zijn.

vervolg Delaunay-triangulatie

De Delaunay-triangulatie geeft precies alle verbindingen van centra van aan elkaar grenzende cellen. Een andere naam is dan ook: het burendiagram.

16 Waarom geldt het volgende:

a. Er zijn precies evenveel lijnstukken in de Delaunay-triangulatie als er grenzen zijn in het Voronoi-diagram.

b. Bij elke verbinding in de Delaunay-triangulatie hoort een grenslijn in het Voronoi-diagram. Deze twee staan loodrecht op elkaar, maar hoeven elkaar niet echt te snijden.

c. Bij een Voronoi-diagram met alleen drielandenpunten (geen vier-of-meer) is het aantal drielandenpunten gelijk aan het aantal driehoeken in de Delaunay-triangulatie. Waarom?

d. Waarom is de omhulling een deel van de Delaunay-triangulatie?

17 Voeg bij de tien kleine figuren van opgave **5** een schetsje van de Delaunay-triangulatie toe. Constateer: als het Voronoi-diagram van type verandert, verandert de Delaunay-triangulatie ook.

rivier, zee, delta, eiland

18 Haal het voorbeeld `river` op. Maak eerst het Voronoi-diagram.
Je kunt hier denken aan een rivier waarvan je de twee oevers ziet. De bedoeling is een vaargeul te vinden die op zo groot mogelijke afstand van de oevers loopt.

a. Je ziet nu tussen de oevers duidelijk een bochtige doorlopende lijn lopen. Waarom was het maken van zo’n Voronoi-diagram hier een goede manier van werken?

b. Teken een paar cirkels die juist beide oevers raken. Hoe zou je hier de gevonden vaargeul kunnen omschrijven in termen van *afstanden*?

19 Haal het voorbeeld `ndzee` op. Met een beetje goede wil herken je de Noordzee met Groot-Brittanië links en Nederland, Duitsland, Denemarken en Noorwegen

rechts.
De Noordzee is ten behoeve van de oliewinning verdeeld via het naaste-buur-principe. Maak het Voronoi-diagram.

a. Tussen Engeland en Nederland en tussen Engeland en Noorwegen kun je makkelijk de grens vinden die het continentaal plat verdeelt. Voor de oliewinning is die grens echt zo gebruikt.

b. Op de eilandengroep ten noordoosten van Groot-Brittanië, de Shetland-eilanden, bevindt zich een belangrijke Britse oliehaven. Enkele jaren geleden is daar nog een mammoettanker op de rotsen gelopen.
Ga na hoe de Noordzee verdeeld zou zijn:
- als deze eilandengroep nog aan een Scandinavisch land toebehoorde. Voor 1472 was dat zo, maar toen boorde men nog niet naar olie.
- als die eilandengroep er niet zou zijn. Kijk ook wat de invloed in het verre noorden is (gebruik de opdracht `kleiner`).

c. Tussen Duitsland en Nederland vind je de grens in de zee niet zo makkelijk. Toch kan het. Kijk welke cellen bij Nederlandse oevercentra horen en welke bij Duitse. Maak een schets van alle grenzen.
Deze grens is later op wat minder wiskundige wijze gewijzigd.

20 Het voorbeeld `archi` heb je al eerder gezien, afgedrukt in dit boekje.

a. Haal het op en teken enkele grootste lege cirkels die aan drie eilanden grenzen.

b. Stel, je moet van noord naar zuid tussen deze eilanden doorvaren, maar je blijft graag zo onzichtbaar mogelijk. Hoe kies je je route?

In een van de volgende hoofdstukken gaan we nader in op zulke lijnen die op gelijke afstanden van enkele *gebieden* (hier de oevers en de eilanden) liggen.

bijzondere liggingen

21 Haal het voorbeeld `recht` op. De Voronoi-cellen worden lange strippen, dat weet je nu wel.

a. Zet een extra centrum op een paar centimeter van de cellenlijn af. In de rest van de opgave heet dat centrum *F* en heet de lijn waar de andere centra op liggen *l*. Laat *l* zien op het scherm.

b. Straks maak je het Voronoi-diagram. Hoe zal de cel rond *F* eruit gaan zien? Test je vermoeden met de computer.

c. Wat gebeurt er met de cel rond *F* als *F* dichterbij *l* wordt gekozen?

d. Een dergelijke vorm heb je vaker gezien. Hoe heet die vorm?

e. Op elk van de grenslijnstukken van de cel rond *F* ligt een punt dat even ver van *F* als van *l* af ligt. Hoe kun je zo'n punt bepalen?

f. Neem zo'n punt als middelpunt van een cirkel, neem *F* als randpunt. Kun je verklaren dat die cirkel aan *l* raakt?

Als je de punten op de rechte lijn heel dicht bij elkaar hebt liggen, krijgt de cel om F een vloeiender vorm. De kleine rechte stukjes grens waar die vorm uit opgebouwd is, geven de richting van de 'raaklijn' aan die vloeiende vorm aan.

g. Neem zo'n stukje grens in het oog. Er horen twee centra bij: F zelf en nog een. Hoe hangt de stand van de raaklijn samen met de ligging van die twee centra?

22 Haal het voorbeeld `cirk` op. Ook hier is het Voronoi-diagram makkelijk te voorspellen.

a. Maar voeg eens een centrum *F* toe, binnen of buiten de cirkel (beide tegelijk kan natuurlijk ook).

b. Onderzoek uitvoerig hoe de ligging van *F* met de vorm van de cel rond *F* samenhangt. Noteer je bevindingen.

andere figuren met symmetrie

23 De voorbeelden `honing`, `pent`, `vlinder` en `vier` geven mooie symmetrische figuren.

a. Als je bij `honing` de hoekpunten van het Voronoi-diagram als centra aan de oorspronkelijke ligging toevoegt en weer opnieuw het Voronoi-diagram vraagt, wat moet je dan te zien krijgen? Dit moet je kunnen bedenken vóór de computer ermee klaar is!

b. Probeer ook zoiets bij `pent` te doen. Deze figuur heeft vijftallige symmetrie.

24 De voorbeelden `orion`, `beren` en `wild` kun je ook ophalen en bekijken. Orion, Grote Beer en Kleine Beer zijn sterrenbeelden.

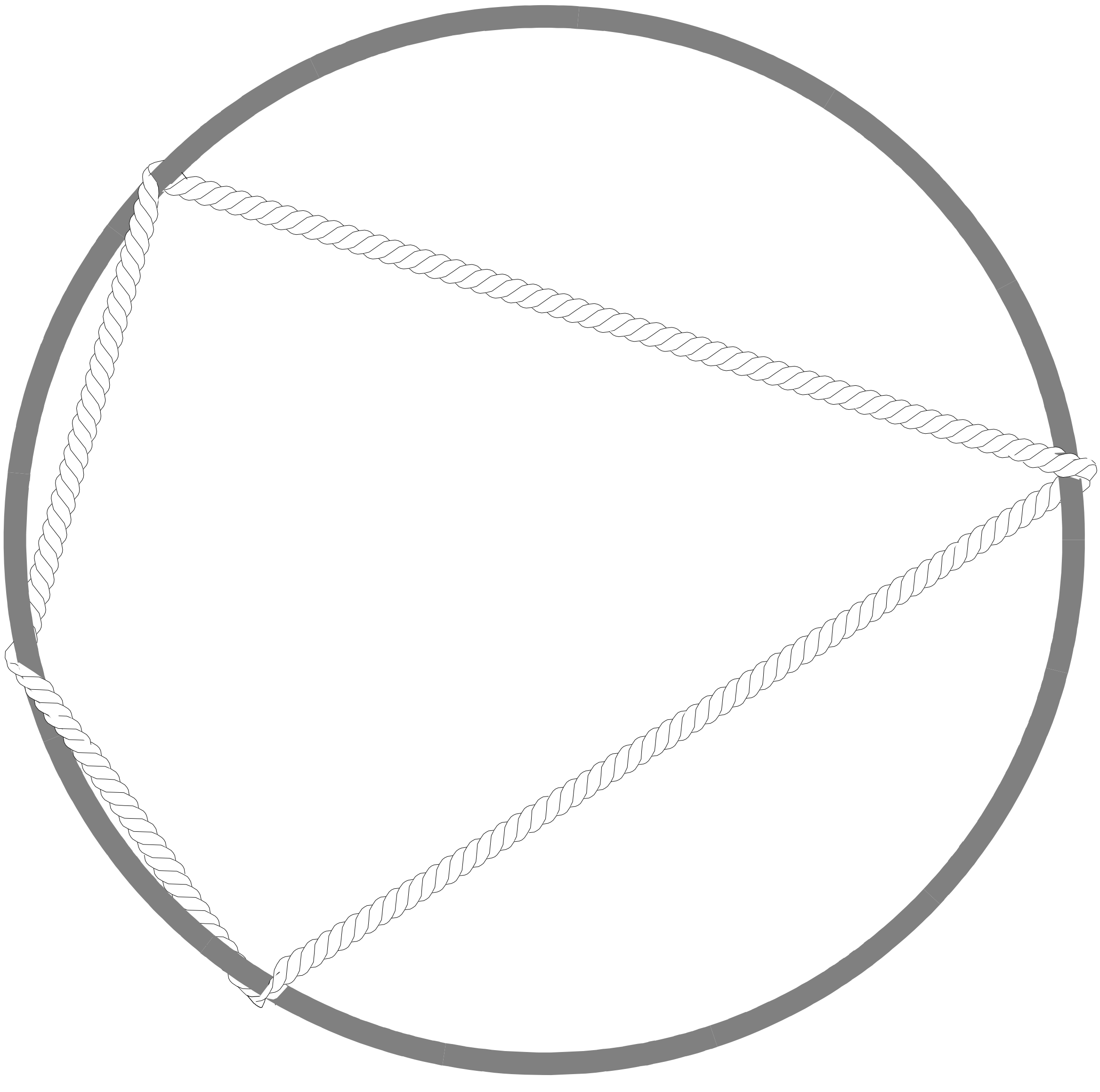
Samenvatting van hoofdstuk 3

In het computerpracticum heb je enkele dingen kunnen uitproberen die je al eerder hebt gezien, zoals het bestaan van grootste lege cirkels.
Bij het verkennen van de invloed van een vierde punt op een diagram bij drie centra, bleek ook dat de omgeschreven cirkel van de driehoek van de drie centra een dominante rol speelt. Ook de zijden van de driehoek waren daarbij belangrijk.

Je hebt ook preciezer gekeken naar de oneindige cellen.
De centra daarvan blijken op de omhulling te liggen.

Als je met grote aantallen punten kunt werken, kun je figuren vormen als rivieren en eilanden. Het Voronoi-diagram vertoont dan ook de grenzen die tussen deze figuren ontstaan.
Een voorbeeld was een enkel los punt tegenover een serie punten op een lijn. Daarbij leek een figuur te ontstaan die verdacht veel op een parabool leek.

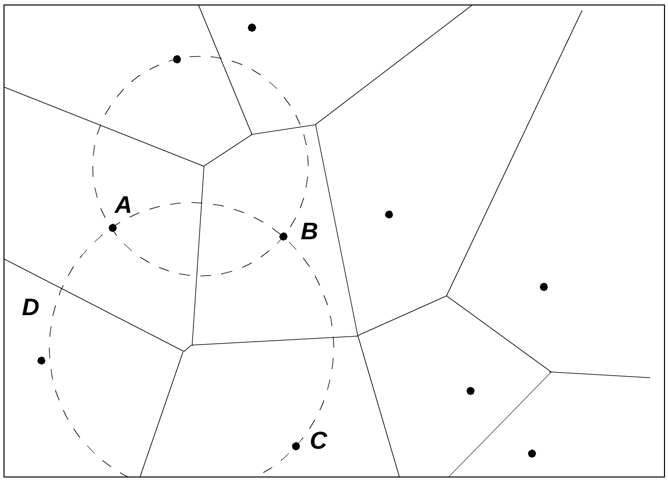
Hoofdstuk 4
Een speciale vierhoek



In dit hoofdstuk gaan we verder met redeneren.

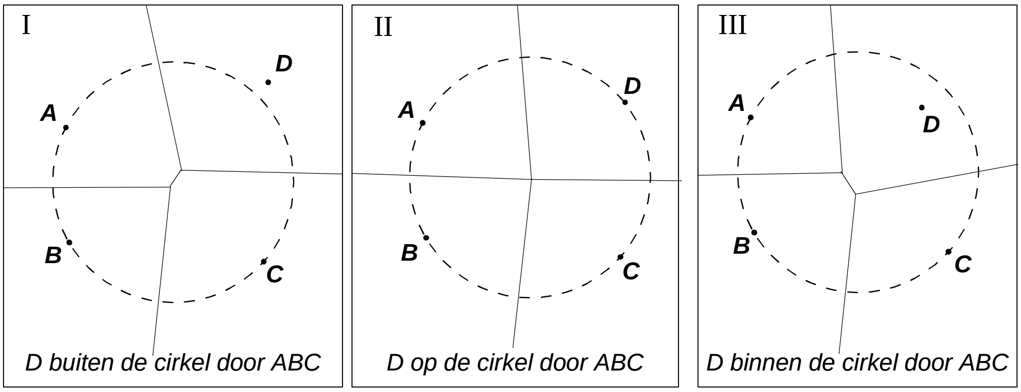
In principe leiden we allerlei dingen over afstanden en hoeken af uit maar heel weinig uitgansgegevens. We denken ook na hoe dat redeneren gaat en hoe je het kunt opschrijven.

17: Koordenvierhoeken



In hoofdstuk I over Voronoi-diagrammen stond dit voorbeeld, waarin punt *D* net buiten de omgeschreven cirkel van driehoek *ABC* lag. Die cirkel is leeg, dus hebben de cellen rond *A*, *B* en *C* een drielandenpunt, dat natuurlijk het middelpunt van de omgeschreven cirkel van driehoek *ABC* is. *D* verstoort dat drielandenpunt dus niet.

Wat betreft de ligging van een vierde punt *D* ten opzichte van de cirkel door drie punten *A*, *B* en *C* zijn er drie mogelijkheden:



(In geval III kan *D* ook zó dicht bij *B* liggen dat de cel rond *D* gesloten wordt.)

1 **a.** In geval II is het Voronoi-diagram erg bijzonder: er is een vierlandenpunt. Waarom?

b. Welk hoekpunt van het Voronoi-diagram is in geval I het middelpunt van de omgeschreven cirkel van driehoek *ABC*?

c. Hoe zit dat bij geval III?

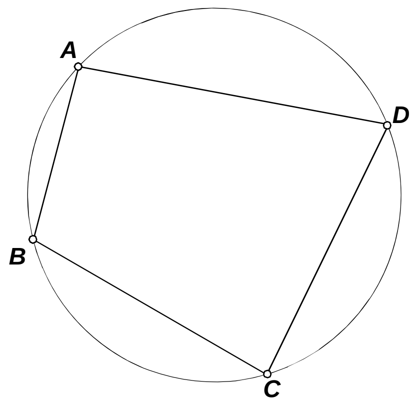
Omdat de zijden van de vierhoek in het bijzondere geval allemaal *koorden* van de cirkel zijn, noemen we de vierhoek *ABCD* een koordenvierhoek. De **definitie** is:

definitie van koorden-vierhoek

Een vierhoek heet **koordenvierhoek** als zijn vier hoekpunten op één cirkel liggen.

In deze paragraaf zullen we voor deze speciale vierhoeken een verband tussen de groottes van de hoeken bewijzen. Later zullen we dat verband ook voor andere doelen gebruiken dan bij Voronoi-diagrammen.

2 Hiernaast is een koordenvierhoek *ABCD* getekend. Eigenlijk is in de figuur nog niet het hoofdkenmerk van de cirkel uitgebeeld: dat er een middelpunt *M* is en dat de lijnstukken *MA*, *MB*, enzovoort, gelijke lengte hebben.



a. Teken daarom ook dat middelpunt en de lijnstukken *MA, MB, MC* en *MD.*

b. De vierhoek is nu verdeeld in vier driehoeken. De acht hoeken bij de hoekpunten van de vierhoek zijn twee aan twee gelijk. Waarom?

c. Geef gelijke hoeken aan met een zelfde teken; gebruik bijvoorbeeld de tekens `*`, `,` `·`, `•`. Bij elk hoekpunt zie je een andere combinatie van tekens. Maar wat valt op, als je de tekens bij *A* en *C* samen vergelijkt met die bij *B* en *D* samen?

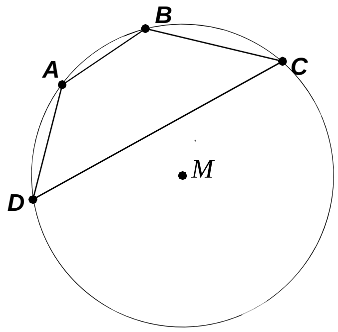
Eerst een kleine voetnoot.
Bij vraag **2b** is het enig mogelijke antwoord: omdat driehoek *ABM* gelijkbenig is. De gelijk*benigheid* is gegeven, namelijk *d(A, M) = d(B, M)*. Dat je daar de gelijk*hoekigheid* uit mag concluderen, berust op een hier nog niet geformuleerde stelling over gelijkbenige driehoeken. Die stelling zullen we niet apart gaan bewijzen. In de samenvatting nemen we hem wel op. Later zullen we een volledige lijst opstellen van dit soort stellingen, waar je eigenlijk allang mee vertrouwd bent.

Wat je zo-even bewezen lijkt te hebben, is de volgende *voorlopige* stelling:

> **voorlopige stelling van de koordenvierhoek**
>
> **In elke koordenvierhoek *ABCD* geldt –*A* + –*C* = –*B* + –*D*.**

Het lijkt dat we door handig redeneren een fraai resultaat, een stelling, hebben bereikt. Er zijn echter nog een paar vervelende kwesties:

Probleem A Die eerste vraag die je nu moet stellen is:
Is nu wel voor alle denkbare koordenvierhoeken de stelling bewezen?
Denk bijvoorbeeld eens aan een koordenvierhoek zoals hiernaast is afgebeeld.
We hebben weer naar één figuur gekeken, die niet representatief is voor alle gevallen. Bij dit geval gaat het bewijs niet op.



Probleem B De voorlopige stelling spreekt alleen over gelijkheid van –*A* + –*C* en –*B* + –*D*. Dat is een beetje mager. Misschien kan er iets gezegd worden over de grootte van –*A* + –*C* en –*B* + –*D* zelf.

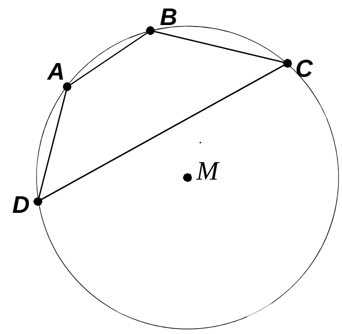
Probleem C Net als bij de volledige stelling over de middelloodlijn, stelling 3, bladzijde 29, moeten we ook weten wat er aan de hand is als *D* binnen of buiten de cirkel ligt. Dat is namelijk het meest voorkomende geval!

18: Bewijzen onder de loep

Probleem A

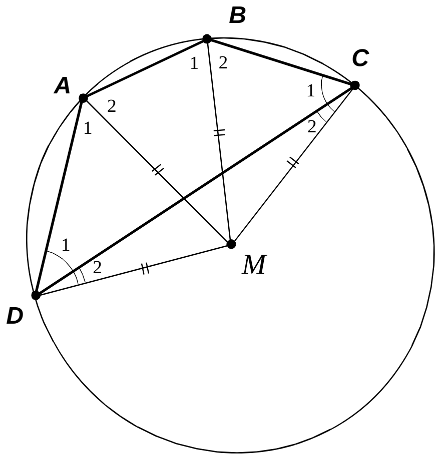
3 **a.** Wat is het essentiële verschil tussen deze koordenvierhoek en die van opgave **2**?

b. Lees de stappen van opgave 2 nog even door. Waarbij moet je voor dit geval afwijken van opgave **2**?



Het is niet zo heel moeilijk een bewijs te geven dat bij déze situatie klopt. Dit bewijs gaan we opstellen in een helder genoteerde vorm.

Dit is de tekening die er bijhoort. Door de tekening weten we waar we over praten.
Nu kunnen we makkelijk over allerlei deelhoeken praten, zonder dat we in de tekst van het bewijs naar tekentjes moeten verwijzen.



4 In de stelling die we aan het bewijzen zijn, is sprake van $\angle A$.
Daarmee is dus bedoeld $\angle DAB$. De tekening toont ook $\angle DAB = \angle A_1 + \angle A_2$.
We redeneren hier niet op grond van de tekening, maar de tekening geeft aan wat we met al die letternotaties bedoelen.

a. Wat wordt in de stelling met $\angle D$ bedoeld?
Noteer de samenhang met
$\angle D_1$ en $\angle D_2$. Let goed op hoe de boogjes zijn aangegeven.

Het volledige bewijs kan zo beginnen:

$\angle D_1 = \angle A_1, \angle A_2 = \angle B_1, \angle B_2 = \angle C_1, \angle C_2 = \angle D_2$
(omdat de driehoeken *DMA* , *AMB, BMC* en *CMD* gelijkbenig zijn)

Dat is eigenlijk

een bewering

met een motivering.

In de rest van het bewijs gaan we met behulp van de gegevens uit de tekening en deze vier gelijkheden de hoekensom $\angle A + \angle C$ stapsgewijs omwerken tot $\angle B + \angle D$. Tussen haken staat steeds waarom een gelijkheid geldt, dat zijn dus weer motiveringen.

$\angle A + \angle C = \angle BAD + \angle DCB$
= (hoeken onderverdelen)
$(\angle A_1 + \angle A_2) + (\angle C_1 - \angle C_2)$
= (gelijke hoeken gebruiken)

b. Maak dit verhaal af.

De laatste regel van het verhaal wordt dus

$$= -B + -D$$

(Je kunt, als je vastloopt, ook nog zoeken door aan de kant van $-B + -D$ *te* beginnen.*)*

Voor het eerste geval (waar *M* binnen koordenvierhoek *ABCD* ligt) had je het bewijs ook in deze vorm kunnen opschrijven.

5 De tekening zou dan anders zijn, maar je hoeft in het bewijs slechts enkele kleinigheden te veranderen.Welke?

gevalsonderscheiding

We zijn nog steeds bezig met de voorlopige stelling van de koordenvierhoek. We hebben de gevallen dat het middelpunt van de omgeschreven cirkel binnen en buiten de vierhoek ligt zorgvuldig onderscheiden.

6 **a.** Is de voorlopige stelling van de koordenvierhoek nu voor álle mogelijke koordenvierhoeken bewezen? Met andere woorden: zijn er nog andere situaties mogelijk dan die waar *M binnen* respectievelijk *buiten* de vierhoek ligt?
b. Als je nog een geval vindt, welk van de twee bewijzen gaat daar dan voor op?

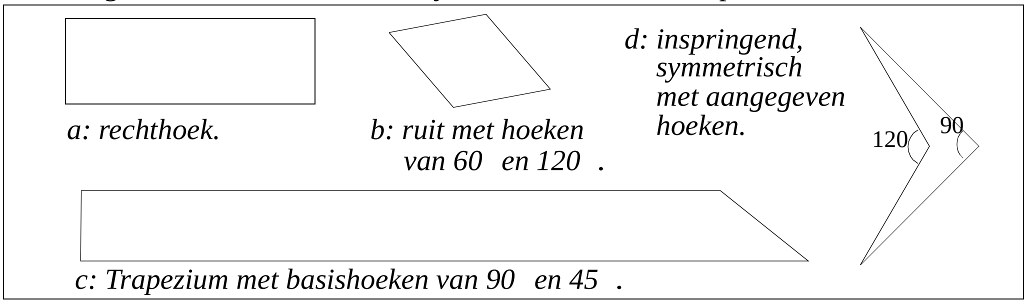
Conclusie uit dit gedeelte over Probleem A:
De voorlopige stelling van de koordenvierhoek stond even onder druk, maar is uiteindelijk gered door het bewijs voor het afwijkende geval aan te passen.
We hebben daarbij ook geoefend in het helder opschrijven van een bewijs. Daarbij werden beweringen en motiveringen onderscheiden.
Het noteren van hoeken met indices was handig om bewijs en tekening met elkaar in verband te houden.
Op naar probleem B.

Probleem B
Dat was:
De voorlopige stelling spreekt alleen over gelijkheid van $-A + -C$ en $-B + -D$. Dat is een beetje mager. Misschien kan er iets gezegd worden over de grootte van $-A + -C$ en $-B + -D$ zelf.

7 **a.** Ga in de figuren bij opgave **2** en **4** maar eens met de gradenboog bepalen wat $-A + -C$ en $-B + -D$ zijn. De vier resultaten zijn niet erg verschillend!
b. Wat is je vermoeden over de som van overstaande hoeken in een koordenvierhoek?

Als je vermoeden juist is, weet je ook iets over de totale hoekensom $-A + -C + -B + -D$ in zo'n vierhoek. Voor we gaan bewijzen dat de som van de vier hoeken in een *koordenvierhoek* 360 is, kijken we even of we ons hier wel tot koordenvierhoeken moeten beperken.
We gingen namelijk over van $-A + -C = -B + -D = 180$ op $-A + -C + -B + -D = 360$, maar dat laatste geldt ook wel als bijvoorbeeld $-A + -C = 140$ en $-B + -D = 220$. Met andere woorden: we gaan ons voor de totale hoekensom van 360 niet vastleggen op koordenvierhoeken.
We proberen eerst uit hoe algemeen $-A + -C + -B + -D = 360$ waar kan zijn.

8 Bepaal de totale inwendige hoekensom bij deze voorbeelden. Het zijn een paar speciale gevallen waarin het makkelijk rekenen en hoeken bepalen is.



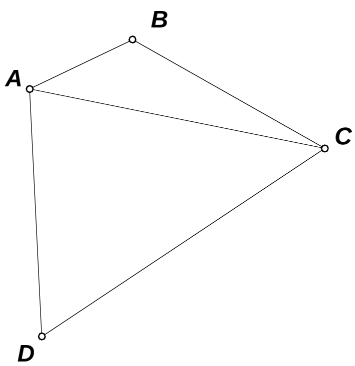
(Let er bij d op dat de hoek van 120 niet een hoek van de vierhoek zelf is.)

Laten we het vermoeden maar eerst als stelling formuleren, het bewijs komt erna.

Stelling 6 **In elke vierhoek is de som van de hoeken gelijk aan 360 .**

Het bewijs ga je zelf geven in de vorm die zo-even vertoond is. Je moet voor de kern van het bewijs zelf natuurlijk weten welke kant je uit moet zoeken. Nu weet je wel dat in een driehoek de som van de hoeken 180 is.
Ook dit is weer iets dat je al eerder hebt geleerd en nu kunt gebruiken. In de samenvatting nemen we dit feit ook als stelling op.
Kortom: verdeel de vierhoek in twee driehoeken!

9 **a.** Dit is een tekening die erbij hoort. Soms kan echter de verbinding *AC* buiten de



vierhoek vallen. Teken er zo'n geval bij en verdeel met een verbindingslijn ook die vierhoek inwendig in twee driehoeken. Zolang we niets meer gebruiken dan eigenschappen van driehoeken, gaat het na deze gevalsonderscheiding goed.

b. Voeg nu de nodige cijfertjes en boogjes in de figuur toe en noteer het bewijs op de manier van opgave **4**.

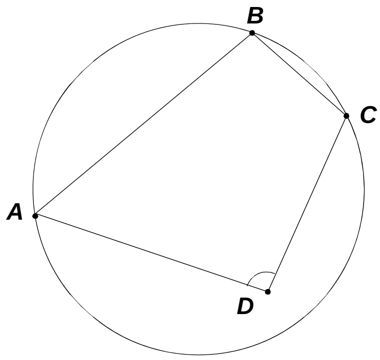
Het bewijs van stelling 6 is nu voltooid. Je kunt de stelling nu veilig gebruiken om de voorlopige stelling van de koordenvierhoek te verbeteren tot:

voorlopige stelling van de koordenvierhoek, verbeterde versie

In elke koordenvierhoek *ABCD* geldt –*A* + –*C* = –*B* + –*D* = *180*

Probleem C

Nu kijken we naar de situatie waarin D binnen de cirkel door A, B en C ligt.
Het volgende vermoeden ligt nu eigenlijk wel voor de hand: $\angle B + \angle D > 180$ .Stel je maar voor dat je ergens tegenover B op de cirkel staat. Als je naar voren loopt, moet je steeds wijder uit elkaar naar links en rechts kijken om A en C te kunnen zien.
Het bewijs van $\angle B + \angle D > 180$ zal op dit idee gebaseerd zijn: we gaan de situatie in punt D vergelijken met die in een punt dat wel op de cirkel ligt.



10 Voor dat punt moet natuurlijk niet een geheel nieuw punt worden gekozen, maar een punt dat verband heeft met de andere punten.

- **a.** Kies het op het verlengde van AD en noem het E. Zorg dat vierhoek $ABCE$ geheel getekend is.
- **b.** Toon nu aan, met behulp van een bekende eigenschap van driehoeken, dat
$$\angle ADC = \angle DCE + \angle CED.$$
- **c.** Welke ongelijkheid geldt nu tussen $\angle ADC$ en $\angle CED$?
- **d.** Voltooi het bewijs van $\angle B + \angle D > 180$ door de voorlopige stelling van de koordenvierhoek toe te passen op $ABCE$ en te combineren met wat bij **c** is gevonden.

Het bewijs is nu niet in de strak georganiseerde vorm gegoten, maar dat is ook niet altijd nodig.

Bewezen is nu:

I. Als van vierhoek $ABCD$ punt D **BINNEN** de omgeschreven cirkel van driehoek ABC ligt, dan geldt $\angle B + \angle D > 180$

We wisten al:

II. Als van vierhoek $ABCD$ punt D **OP** de omgeschreven cirkel van driehoek ABC ligt, dan geldt $\angle B + \angle D = 180$

En we verwachten natuurlijk ook dit:

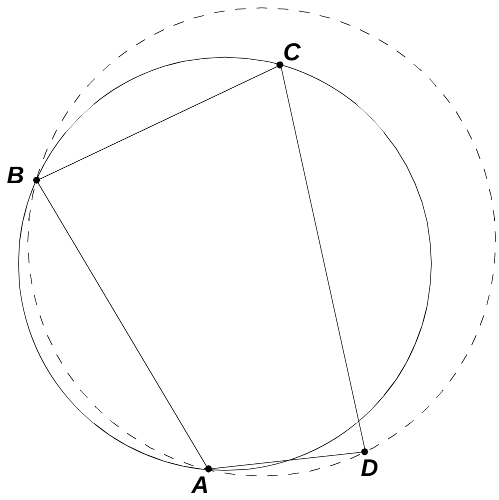
III. Als van vierhoek $ABCD$ punt D **BUITEN** de omgeschreven cirkel van driehoek ABC ligt, dan geldt $\angle B + \angle D < 180$

Je zou III kunnen bewijzen op bijna zo'n manier als in opgave **10**, en dat zou je wel lukken. Zonder dat te doen mag je de juistheid van III nu ook wel aannemen; het is niet leuk teveel van hetzelfde te doen. Maar ....

Van de andere kant: het is fraaier de bewezen gevallen I en II op een slimme manier te gebruiken en om zo daar geval III uit af te leiden. Dat gebeurt in deze extra-opgave.

extra

11 Allereerst de tekening. *D* ligt buiten de cirkel door *A*, *B* en *C*. De gestippelde cirkel gaat door *A*, *B* en *D*. Het lijkt erop dat de hele boog van *A* via *D* naar *B* buiten de cirkel door *A*, *B* en *C* ligt.



a. Beredeneer dat met gebruikmaking van stelling 5, bladzijde 31.
In feite moet je laten zien dat beide cirkels geen derde punt *X* gemeen kunnen hebben. Want wat zou dan immers de omgeschreven cirkel van *AXB* moeten zijn?

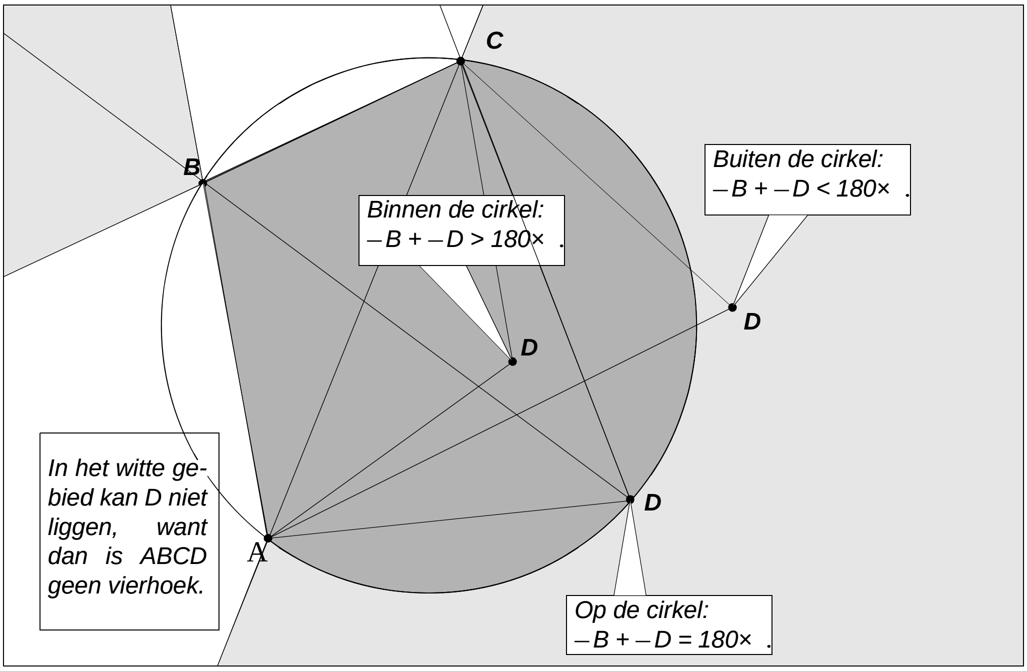
b. Dus *C* ligt binnen de cirkel door *A*, *B* en *D*. Het bewezen deel I van hierboven levert je nu een ongelijkheid waarin –*C* voorkomt. Noteer die.

c. Leidt met behulp van stelling 6 nu de gezochte bewering –*B* + –*D* < 180 af.

Probleem C is opgelost en we gaan de resultaten van deze paragraaf in één stelling samenvatten.

Stelling 7 **Als *ABCD* een koordenvierhoek is, dan geldt –*A* + –*C* = –*B* + –*D* = 180 .**
Als *D* binnen de omgeschreven cirkel van *A*, *B* en *C* ligt, dan geldt –*B* + –*D* > 180 .
Als *D* buiten de omgeschreven cirkel van *A*, *B* en *C* ligt, dan geldt –*B* + –*D* < 180 .

Dat verdient een overzichtsillustratie.



Opmerking: Omdat de drie gevallen die de stelling onderscheid elkaar uitsluiten, kun je direct conclusies trekken zoals:

Als in een vierhoek geldt $\angle B + \angle D = 180^\circ$*, dan is die vierhoek een koordenvierhoek.*

Immers, als die gelijkheid geldt, dan verzekeren de twee laatste beweringen van de stelling dat *D* niet buiten en niet binnen de cirkel ligt. Blijft over: op de cirkel.

extra, vinden van een goede definitie

12 In het witte gebied staat aangegeven, dat *D* daar niet kan liggen, omdat *ABCD* dan geen vierhoek zou zijn.
Dat is tamelijk vaag, zolang we niet precies afspreken wat een vierhoek is.
Zoek uit wat er precies aan de hand is en geef een definitie van ‘vierhoek’ die precies deze gevallen uitsluit.

19: Koordenvierhoeken gebruiken

In deze paragraaf keren we terug naar het maken van Voronoi-diagrammen. We gebruiken wat we van koordenvierhoeken weten, voornamelijk dus stelling 7. Omdat in die stelling gesproken wordt over hoeken, zal je enkele keren nauwkeurig hoeken moeten meten.

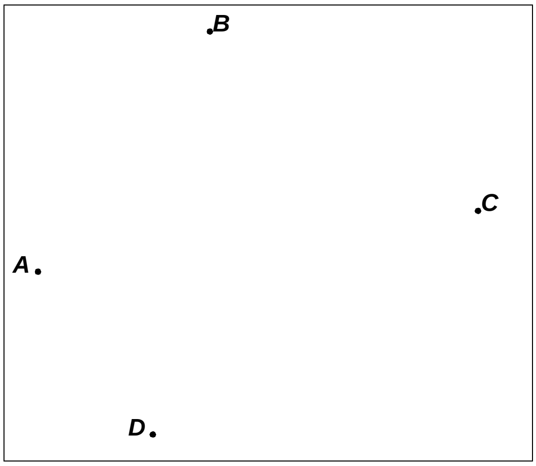
13 Vier centra zijn gegeven.

a. Zoek uit of in het Voronoi-diagram van deze vier punten de cellen rond *A* en *C*, of juist die rond *B* en *D* aan elkaar grenzen.

b. Teken alle verbindingslijnen van centra die aangrenzende cellen hebben met een kleur.

c. Maak het Voronoi-diagram af door middelloodlijnen te tekenen.

d. In tegenstelling tot opgave **4 a**, bladzijde 7, heb je nu geen middelloodlijn teveel getekend. Hoe komt dat?



14 a. Is dit ook waar?
Als een Voronoi-cel een vierhoek is, is die vierhoek een koordenvierhoek.
Geef eventueel een tegenvoorbeeld.

15 Teken een situatie met zes centra, waarbij twee vierlandenpunten optreden, als het Voronoi-diagram getekend zou worden. (Vermijd hierbij het flauwe geval dat de centra, die een vierlandenpunt hebben, een vierkant of rechthoek vormen.)

Samenvatting van hoofdstuk 4

redeneren

In dit hoofdstuk werden resultaten behaald door redeneren.
Daarbij is de conclusierichting steeds van het eerder bekende naar het nieuwe.

opschrijven van bewijzen

Je hebt geleerd dat je bewijzen kunt opschrijven op een nette manier. Twee hulpmiddelen waren:

a. Het aangeven van hoeken met indices: A_1, B_2, enzovoort. In de tekening kun je hoeken ook aangeven met tekentjes als *, , · ,en •.Het staat echter nogal raar als je een bewijs begint met: * = *. Een goed compromis is: Geef in de tekening gelijke hoeken met dezelfde kleur of hetzelfde teken aan en gebruik in het bewijs eenduidige benoemingen.

b. Het noteren van bewering en motivatie in de vorm:
een bewering
met een motivering.

motiveringen

Bij de motiveringen horen onder andere:
– verwijzingen naar definities
– beweringen die eerder bewezen zijn.

stellingen

Belangrijke dingen die we zeker weten en die we vaker gaan gebruiken, worden in de vorm van een stelling vastgelegd.
Enkele stellingen die hieronder staan, zijn niet in dit boekje bewezen. Dat zijn de eerste twee van het volgende overzicht.

overzicht van de stellingen van dit hoofdstuk

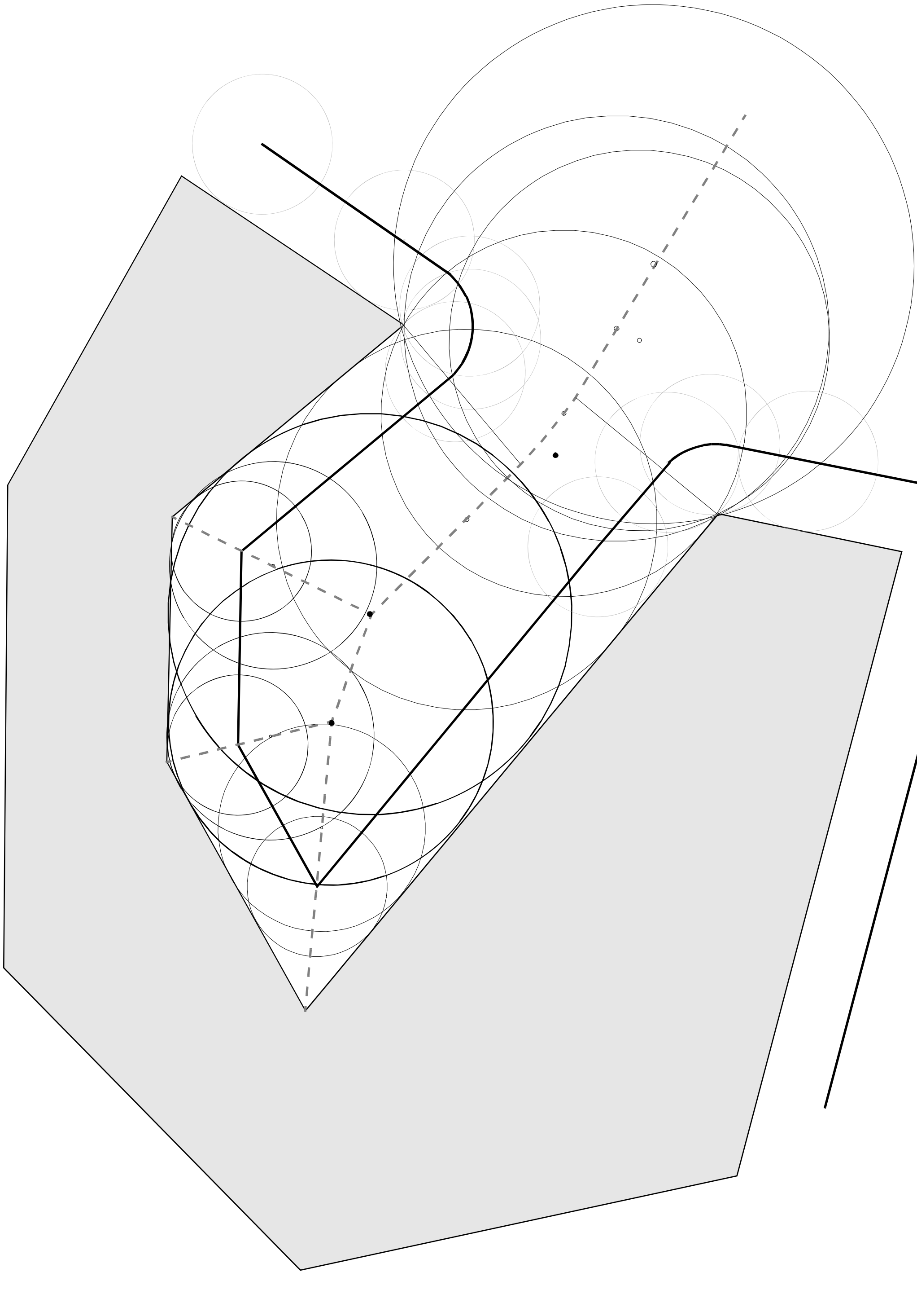
Stelling 1 **(Gelijkbenige driehoek)**
Als in driehoek ABC d(A, C) gelijk is aan d(B, C), dan is ook –CAB gelijk aan –CBA.
Ook het omgekeerde geldt:
Als in driehoek ABC –CAB gelijk aan –CBA, dan is d(A, C) gelijk aan d(B, C).

Stelling 2 **(Hoekensom in een driehoek)**
In elke driehoek geldt dat de som van de drie hoeken gelijk is aan 180 .

Stelling 3 **(Hoekensom in een vierhoek)**
In elke vierhoek is de som van de hoeken gelijk aan 360 .

Stelling 4 **(Eigenschappen van de koordenvierhoek)**
Als ABCD een koordenvierhoek is, dan geldt –A + –C = –B + –D = 180×.
Als D binnen de omgeschreven cirkel van A, B en C ligt,
dan geldt –B + –D > 180×.
Als D buiten de omgeschreven cirkel van A, B en C ligt,
dan geldt –B + –D < 180.

Hoofdstuk 5
Verkenning iso-afstandslijnen



Bij het verdelen van visgronden rond verschillende landen speelt het begrip iso-afstands-lijn een rol. Dat is dan een lijn die op een vaste afstand van de kust in de zee loopt.
Bestuderen van die lijnen brengt ons weer op het spoor van allerlei meetkundige verbanden.
Daarbij spelen stootcirkels en deellijnen een grote rol.

20: Iso-afstandslijnen, afstand tot gebieden

Het kleine eiland Mururoa in de Stille Zuidzee was in 1995 geregeld in het nieuws. Een internationale vloot, aangevoerd door twee schepen van Greenpeace, wilde ter plekke protesteren tegen de Franse kernproeven die op dat eiland plaats zouden vinden. Toen rubberbootjes en de heli-copter van de Rainbow Warrior binnen de 12-mijl-zone rond Mururoa opereerden, zag de Franse regering een aanleiding om dit schip te laten enteren. Dat leverde enerzijds dramatische tv-beelden op maar betekende anderzijds een gevoelige klap voor de verdere plannen van Greenpeace.

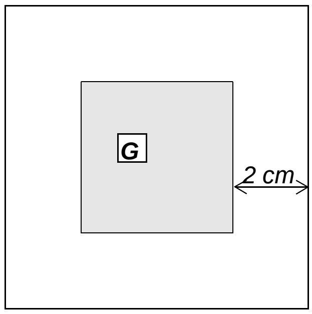
De 12-mijl-zone wordt gerekend tot het overheidsgebied van een land. Het ongeoorloofd overschrijden van de denkbeeldige rand van deze zone betekent een schending van internationaal recht.

iso-afstandslijn

De rand van de 12-mijl-zone is een voorbeeld voor een iso-afstandslijn: elk punt van deze lijn heeft afstand 12 mijl tot de kust. Preciezer: het is de iso-12 mijls-lijn.
Maar hoe weet je waar deze denkbeeldige lijn loopt? Tot welk punt van de kust is de afstand 12 mijl? Wat bepaalt de vorm van zo’n lijn? Over die vragen gaat dit hoofdstuk.

1 Mururoa is een atol. De diameter van dit kleine eiland is een paar honderd meter, heel weinig vergeleken met 12 mijl (1 mijl = 1,61 km).
a. Beschouw Mururoa als een puntvormig gebied.
Welke vorm heeft de rand van de 12-mijl-zone?
b. Beschouw Mururoa als een cirkelvormig gebied met een straal van 680 meter. Wat is dan de iso-12-mijl-lijn?

2 Hiernaast is – verkleind – een vierkant getekend met zijde 4 cm. Dat is het gebied *G* waar we naar kijken. Om het vierkant heen is een tweede vierkant met zijde 8 cm getekend. De rand van dit vierkant is *niet* de iso-2 cm-lijn van *G*.
De tekening staat op werkbare grootte op werkblad C, bladzijde 125.



a. Geef op de rand van het grote vierkant vijf punten aan die wel tot de iso-2 cm-lijn van *G* behoren en vijf punten die daar niet bij behoren.
b. Schets nu zelf de iso-2 cm-lijn van *G*.
Schets ook de iso-1 cm-lijn, de iso-3 cm-lijn en de iso-4 cm-lijn van *G*.
c. Is de iso-300 cm-lijn van *G* een cirkel?
Verklaar je antwoord.

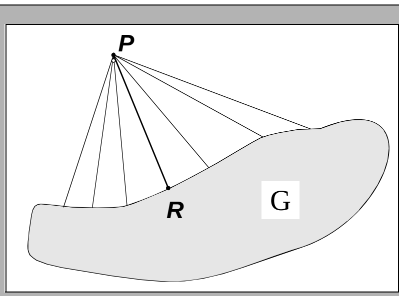
Voordat we iso-afstandslijnen bij ingewikkelder gebieden gaan tekenen, omschrijven we eerst wat we verstaan onder de afstand van een punt *P* tot een gebied *G*.
De omschrijving maakt gebruik van het bekende afstandsbegrip voor twee punten.

omschrijving

Bepaal bij alle punten op de rand van een gebied *G* de afstand tot *P*.
Voor één (of meerdere) van deze punten, zeg *R*, is *d(P, R)* het kleinst.

We noemen dan:
- ***d(P, R)* de *afstand* van *P* tot *G***
- ***R* een *voetpunt* van *P***

De afstand van *P* tot *G* noteren we met *d(P, G)*.

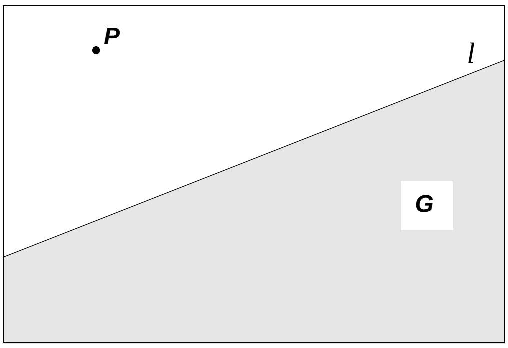


In de omschrijving komen nogal wat woorden voor die niet omschreven worden: gebied, rand. Ook wordt zonder meer aangenomen dat er zo'n kleinste afstand ís.
In dit hoofdstuk zullen we de termen *gebied* en *rand* gebruiken, alsof ze een stevige wiskundige betekenis hebben. Ook dat die minimumafstand er is. Eén ding spreken we wel alvast af: *de rand hoort bij het gebied*.
Verder nog dit: als er geen misverstanden mogelijk zijn, laten we in het vervolg bij afstanden de eenheid weg.

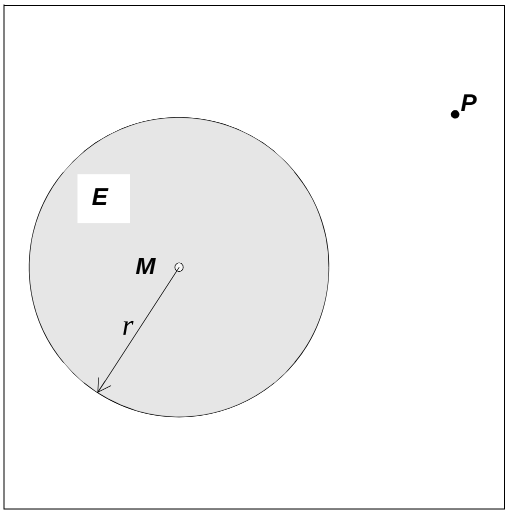
eenvoudige gebieden

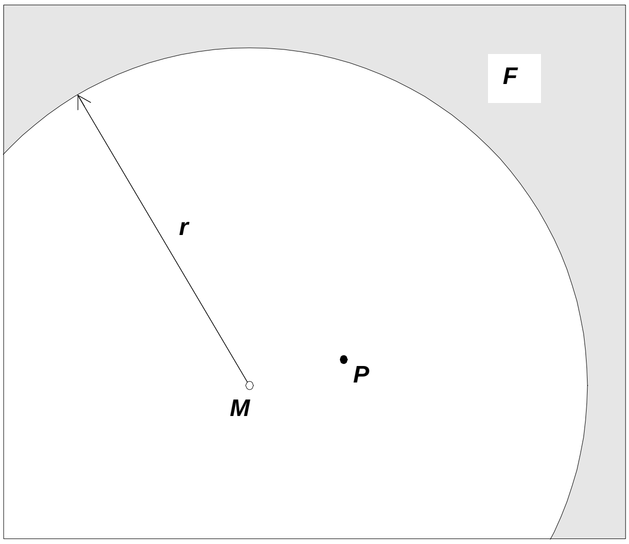
In sommige gevallen zijn voetpunt en afstand makkelijk te bepalen. In die gevallen kunnen we ook nu al volledige bewijzen leveren. Dat wordt in de volgende opgaven gedaan.

3 Hier is het gebied *G* een halfvlak; de rand van *G* is een lijn, zeg *l*.
- **a.** Hoe zijn nu het voetpunt *R* van *P* en de afstand *d(P, G)* direct te bepalen?
- **b.** Op welke manier(en) is eerder bewezen dat dit inderdaad goed is?



4 Een cirkelvormig eiland *E* met middelpunt *M* en straal *r*. Weer is een punt *P* buiten *E* aangegeven.
- **a.** Het voetpunt van *P* op *E* verwacht je natuurlijk op de verbindingslijn *PM*. Teken die lijn en noem dat punt *R*.
- **b.** Neem een punt *Q* op de rand van *E*, ongelijk aan *R*, en bewijs dat nu hier geldt: $d(P, Q) > d(P, R)$.
  Behalve de driehoeksongelijkheid moet je ook je kennis van de cirkel in de strijd werpen.
- **c.** Druk met de *d*-notatie de afstand van *P* tot *E* in de afstand van *P* tot *M* en de straal *r* uit.





5 Hier is het gebied F het buitegebied van een cirkel. M is weer het middelpunt van de cirkel. Bij het gegeven punt P moet weer het voetpunt op F gevonden worden.

a. Teken weer de punten R en Q, (bijna) zoals in de vorige opgave.

b. Ook nu helpt de driehoeksongelijkheid bij het aantonen van $d(P, Q) > d(P, R)$. Je hebt nu beslist ook $d(M, Q) = d(M, R)$ nodig.

c. Druk weer met de d-notatie de afstand van P tot F in de afstand van P tot M en de straal r uit.

Nu we weten hoe bij lijnvormige en cirkelvormige grenzen van gebieden voetpunten van gegeven punten gevonden kunnen worden, is ook duidelijk dat bij gebieden die door een aantal stukken van lijnen en cirkels worden begrensd, voetpunten zijn te vinden. Daarmee is in ieder geval voor dit type gebieden het bestaan van een minimumafstand, die in de omschrijving op bladzijde 60 wordt aangenomen, veiliggesteld.

Nu het begrip afstand tot een gebied bekend is, kun je definiëren wat een iso-afstandslijn is.

definitie iso-afstandslijn

Bij een gegeven positieve afstand *a* is de iso-afstandslijn op afstand *a* van een gebied *G*, de verzameling van alle punten waarvoor geldt: *d*(*G*,*P*) = *a*.
De iso-afstandslijn op afstand *a* wordt aangeduid met iso-*a*-lijn.

6 **a.** Teken bij de opgaven **3**, **4** en **5** de iso-afstandslijn op de afstanden 1, 2 en 3 en ook de iso-afstands-lijn die door punt P gaat.

b. Waaruit volgt direct dat dit bij de gevallen van opgave **4** en **5** inderdaad cirkels zijn?

7 Op de volgende bladzijde is een driehoekig gebied G getekend.

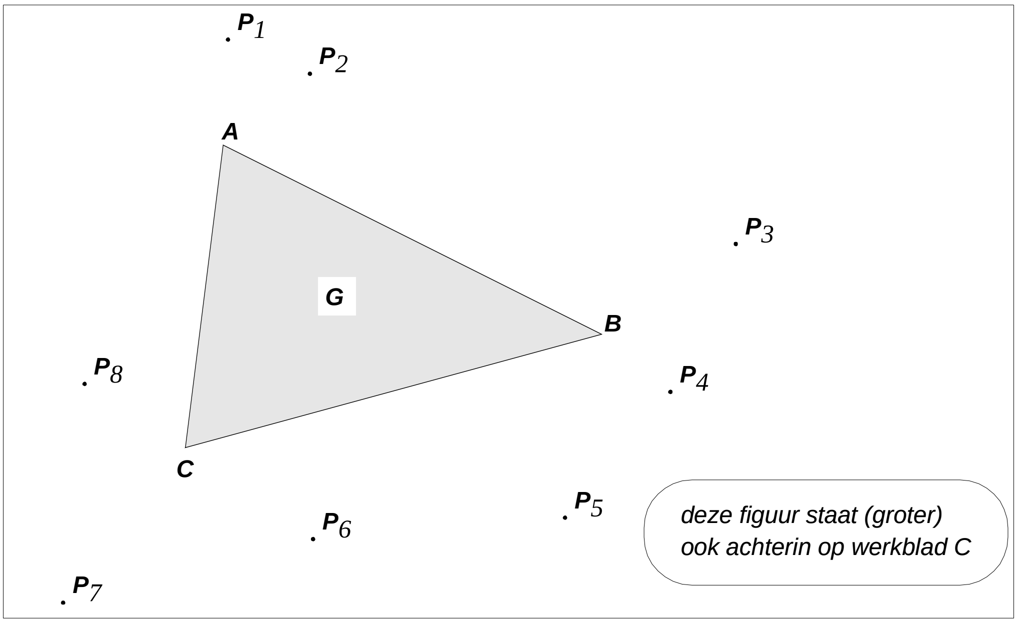
a. Teken bij elk van de punten P_i het bijbehorende voetpunt R_i op de rand van G.

b. De hoekpunten A, B en C van het gebied spelen een bijzondere rol.
Teken in de figuur de ‘zone’ waarvoor punt A het dichtstbijzijnde punt van gebied G is. Teken deze zones ook voor de punten B en C.

c. Het buitengebied van G is nu in zes zones verdeeld.
Beschrijf voor elke zone de vorm van de iso-afstandslijnen.

d. Teken de iso-afstandslijnen voor d=2 cm, d = 4 cm en d = 6 cm. Wat valt op?

e. De iso-afstandslijnen zijn langer dan de omtrek van gebied G. Hoeveel langer?

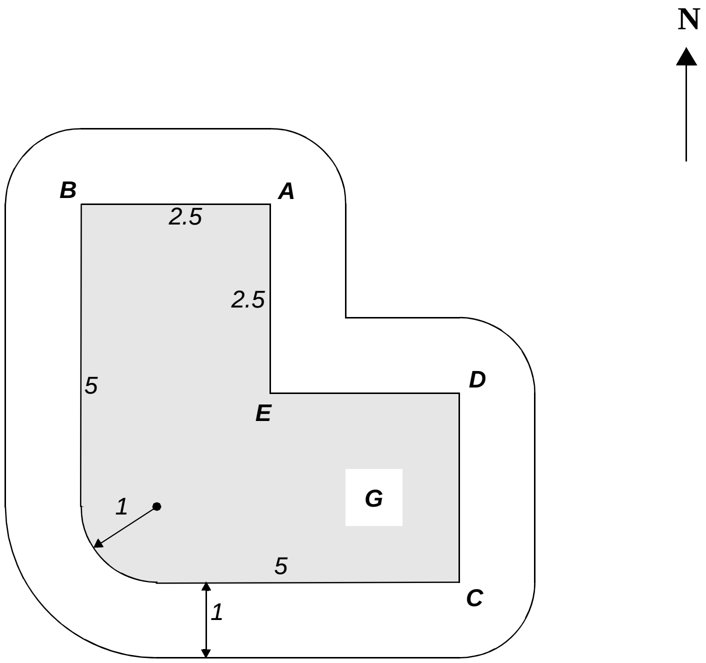


kaap

De punten *A*, *B* en *C* zijn een soort *kapen*. Volgens Van Dale is een kaap *een in zee vooruitstekende hoge landpunt*. Zo een vooruitstekend punt is het voetpunt voor een groot aantal punten: alle punten die in een bepaalde sector liggen.

8 **a.** Verklaar waarom de iso-afstandslijnen in de buurt van een kaap stukken van concentrische cirkels zijn.

b. Hoe vind je de lijnen die de sector van zo'n kaap begrenzen?



9 Hierboven zie je een L-vormig gebied *G* met iso-1-lijn. *A*, *B*, *C*, en *D* zijn kapen.

a. Teken nauwkeurig het noordoost-gedeelte van de iso-afstandslijnen voor de afstanden 0.5, 2, 3 en 4.

Bij de kapen sluiten de cirkelbogen soepel aan op de rechte stukken, maar bij E ligt dat anders. De iso-lijnen maken daar in de buurt een knik.

b. Op welke lijn liggen deze knikken?
c. De iso-1-lijn maakt een knik van 90^o. Hoe groot is de knik bij de andere vier iso-afstandslijnen?
d. Tot welke waarde van d maakt de iso-d-lijn een knik van 90^o? Licht dit toe.
e. Naarmate de afstand groter wordt, wordt de hoek tussen de twee cirkelbogen steeds kleiner. Zal op heel grote afstand de knik helemaal verdwijnen?
Geef een duidelijke redenering.

gebieden met inhammen

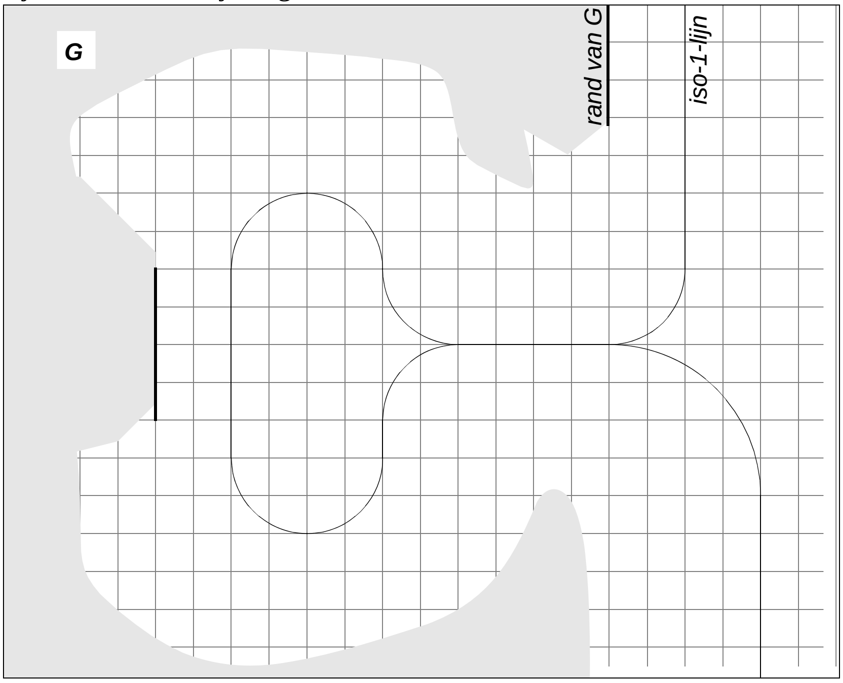
Bij de eenvoudige gebieden die tot nu toe aan de orde zijn geweest, waren de iso-afstandslijnen samengesteld uit cirkelbogen en rechte lijnstukken en konden nauwkeurig getekend worden.
Van het L-vormige gebied van opgave **9** kun je zeggen dat het in het Noordoosten een inham heeft. Bij deze inham vertoonden de iso-afstandslijnen knikken. In de volgende paragraaf gaan we nader in op inhammen met rechtlijnige kusten.
De volgende twee opgaven gaan over inhammen met een smalle doorgang naar de open zee.

10 Bij de baai hierboven heeft de doorgang naar open zee een minimale breedte van 2 kilometer. De schaal van het kaartje is dus:
1 cm op de kaart is 1 kilometer in werkelijkheid.

a. Schets in verschillende kleuren achtereenvolgens de iso-0.2-, iso-0.5-, iso-1-, iso-1.50- en iso-2-lijn. Je hoeft niet heel nauwkeurig te meten, maar de belangrijkste kenmerken die je aan deze iso-afstandslijnen opmerkt, moet je goed zichtbaar maken.

b. Wat is volgens jou het belangrijkste verschil tussen de vorm van de iso-0.2-lijn en die van de iso-1.5-lijn?
c. Geef alle punten op de iso-1-lijn aan die twee voetpunten hebben.
d. Geef op de iso-2-lijn met een extra kleur die stukken aan waarvan de voetpunten op de kust van uitloper *B* liggen.

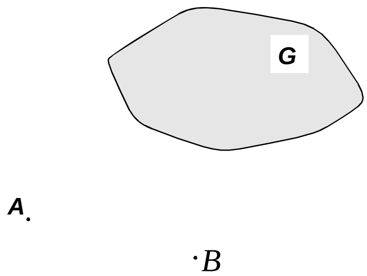
11 Hieronder is een iso-1-lijn getekend en ook twee korte stukken van de rand van het gebied waar het om gaat. De iso-afstandslijn bestaat geheel uit kwartcirkels, halve cirkels en rechte lijnstukken. Maak nauwkeurig de rand van het gebied af. Je kunt daarbij van de roosterlijnen gebruikmaken.



Je ziet aan dit voorbeeld dat de naam iso-afstands-*lijn* niet perfect is: een lijn splitst zich niet halverwege in twee takken. Er ontstaan geen problemen als je weet wat je met het hele begrip *iso-afstands-lijn* bedoelt, namelijk de verzameling punten met ... enzovoort.

extra

12 In de bewijzen die in het begin van deze paragraaf aan de orde kwamen (bij het halfvlak en het cirkelvormige eiland) speelde de driehoeksongelijkheid een grote rol.
De driehoeksongelijkheid geldt voor drie willekeurige *punten*. Nu is het afstandsbegrip uitgebreid met afstanden tot gebieden. Zou de driehoeksongelijkheid ook gelden als je een of meerdere punten vervangt door gebieden? Kortom:



a. Geldt in de getekende situatie *d(A,B)* £ *d(A,G)* + *d(B,G)*?
b. Verplaats *B* zó dat de ongelijkheid niet meer geldt.

21: Deellijnen

In deze paragraaf onderzoeken we iso-afstandslijnen in inhammen die door rechtlijnige kusten begrensd worden. Hierbij spelen deellijnen een belangrijke rol.

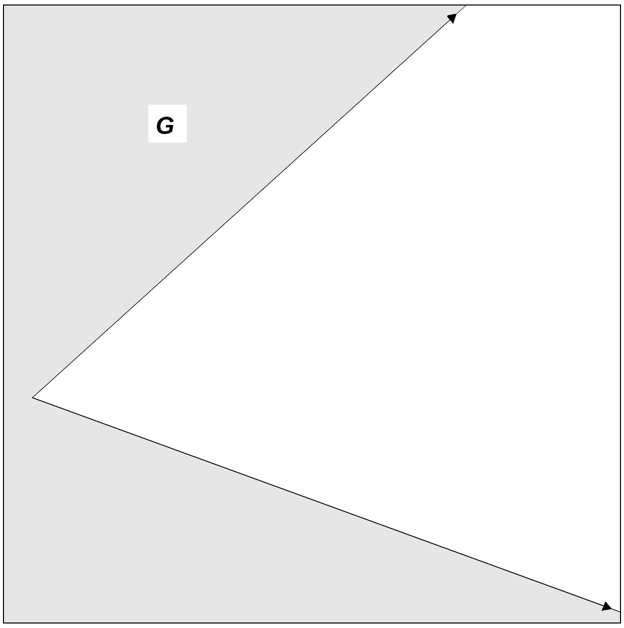
13 Van het gebied *G* zie je hier maar een gedeelte. Stel je er bij voor dat de rechte grenzen van de baai gewoon eindeloos doorlopen. Dat moeten de pijltjes aangeven.

a. Teken in deze inham nauwkeurig
de iso-1-lijn
de iso-2-lijn
de iso-3-lijn
de iso-4-lijn.

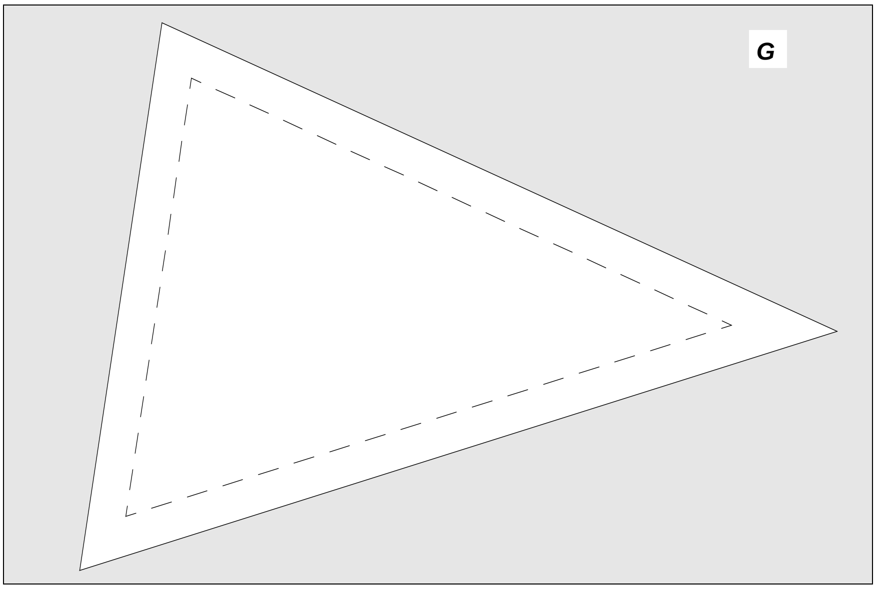
b. Al die lijnen hebben een knik. Welke figuur vormen alle knikken samen?

c. Hoeveel voetpunten heeft het ‘knikpunt’ van een iso-afstandslijn?

d. Teken de voetpunten van het ‘knikpunt’ van de iso-3-lijn.



14 Ook hier is maar een stuk van het gebied te zien. De witte driehoek behoort juist niet tot het gebied en daarbinnen lopen ook iso-afstandslijnen.



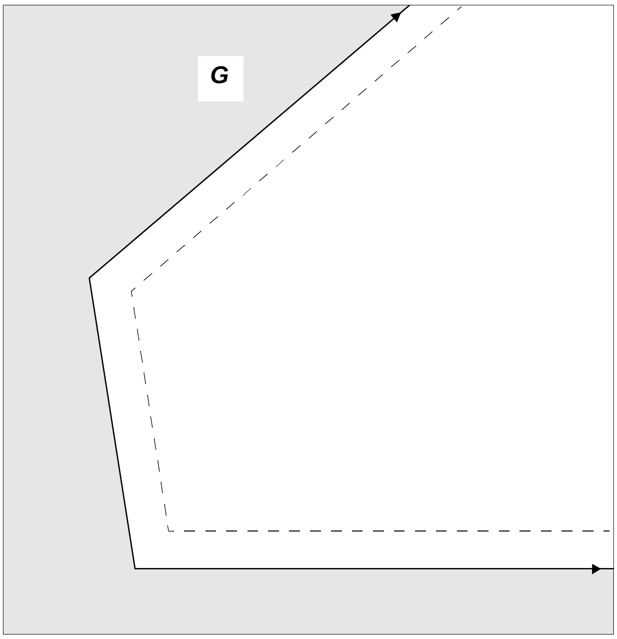
a. De iso-0.5-lijn is getekend. Teken ook de iso-afstandslijnen bij de afstanden 1, 1.5, 2, 2.5, enzovoort.

b. Omschrijf wat je opvalt.

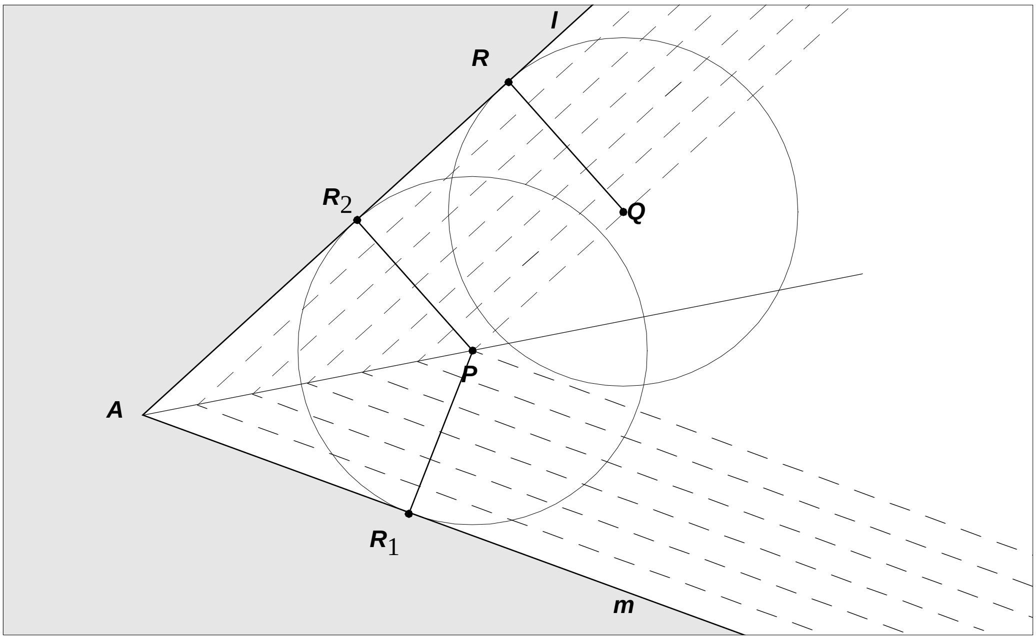
15 Dit gebied heeft een inham met twee knikken. Ook de iso-0.5-lijn vertoont twee knikken.

a. Hebben álle iso-afstands-lijnen twee knikken?

b. Zoek in deze inham een punt *P* dat drie voetpunten op het gebied *G* heeft. Laat zien hoe je *P* gevonden hebt.
Teken ook de cirkel met middelpunt *P* die door de drie voetpunten gaat.



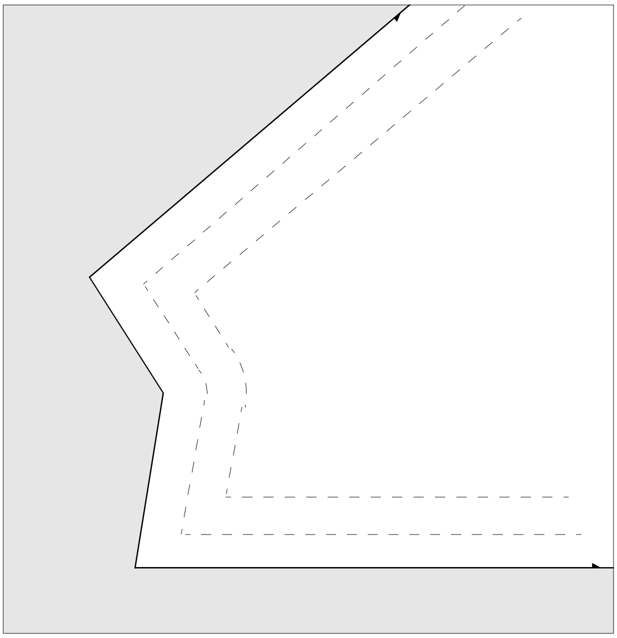
In een inham die door rechte lijnstukken begrensd wordt, maken de iso-afstandslijnen knikken. De knikpunten liggen op een rechte lijn. Elk knikpunt heeft op beide randen van de inham een voetpunt, dat in tegenstelling tot de andere punten op een iso-afstands-lijn.



Een ‘knikkenlijn’ speelt voor de twee lijnen die de inham begrenzen een vergelijkbare rol als de Voronoi-grens bij twee punten.
Voor de punten op de Voronoi-grens van *A* en *B* geldt: $d(P, A) = d(P,B)$
Voor de punten op de ‘knikkenlijn’ geldt: $d(P, l) = d(P,m)$.
In de volgende paragraaf wordt deze analogie verder uitgewerkt.

extra

16 Ook bij de inham hiernaast hebben veel iso-afstandslijnen twee knikken, maar niet alle.
Teken zelf een gebied met inham(men) met rechtlijnige kusten waarbij *alle* iso-afstandslijnen twee knikken hebben.



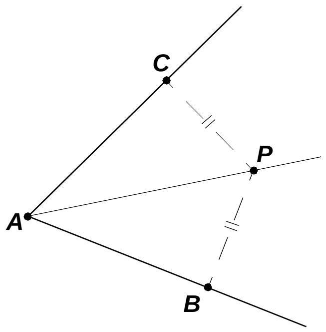
22: Stellingen over deellijnen

Hier is een definitie van *deellijn van een hoek*.

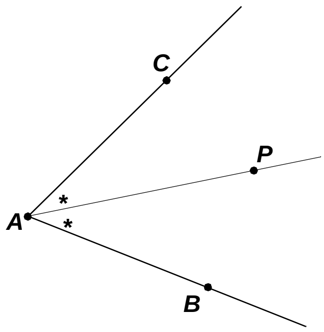
definitie deellijn

> **De deellijn van een hoek *CAB* is de lijn die gelijke hoeken met de benen *CA* en *BA* van die hoek maakt.**

Voor een punt *P* op de deellijn geldt $\angle PAC = \angle PAB$.
In de vorige paragraaf hebben we gevonden dat voor punten op de 'kniklijn' van een inham die door rechte lijnstukken begrensd wordt, geldt: $d(P, C) = d(P, B)$.
Daarbij zijn *B* en *C* de voetpunten van *P* op de benen van de hoek.
De figuur versterkt de indruk dat de 'kniklijn' en de deellijn samenvallen.

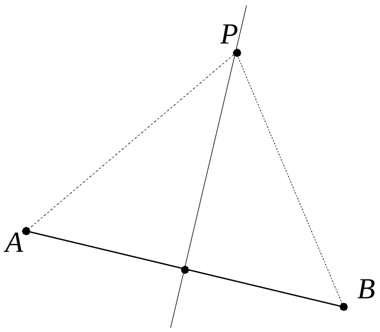


'kniklijn': $d(P, C) = d(P, B)$

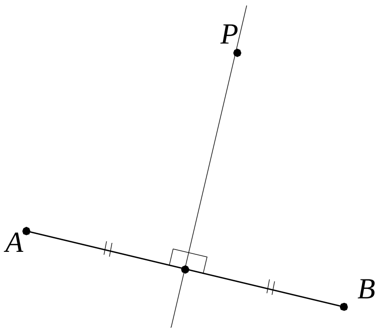


deellijn: $\angle PAC = \angle PAB$

Het lijkt allemaal heel erg op de gelijkheid van Voronoi-grens en middelloodlijn.



Voronoi-grens: $d(P, A) = d(P, B)$



middelloodlijn:
door midden van AB
en loodrecht op AB

In paragraaf 11 van hoofdstuk 2 (blz. 26) hebben we deze gelijkheid bewezen. Dit bewijs bestond uit twee delen.

17 Bewijs nu alleen dat elk punt op de 'kniklijn' ook op de deellijn ligt.

Over de eigenschappen van een middelloodlijn hebben we op bladzijde 26 de volgende stelling geformuleerd.

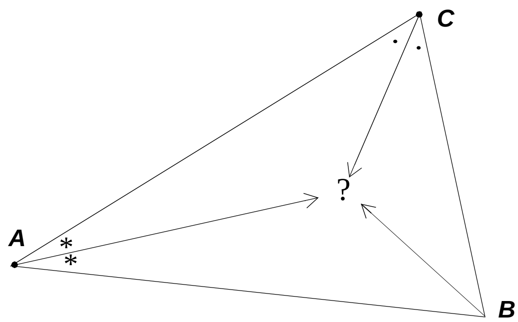
Stelling 3 **De middelloodlijn van lijnstuk *AB* is de verzameling van de punten *P* waarvoor geldt *d(P, A) = d(P, B)*.**
Voor punten *P* buiten de middelloodlijn geldt:
Als *d(P, A) < d(P, B)*, dan ligt *P* aan de *A*-kant van *mll(A, B)*.
Als *d(P, A) > d(P, B)*, dan ligt *P* aan de *B*-kant van *mll(A, B)*.

18 Formuleer een analoge stelling over de deellijn.

Stelling 8 **Deellijnstelling**
....
....

Deze stelling kan net zo fundamenteel bewezen worden als stelling 6, we voeren dat niet in alle details uit. Bij opgave **17** heb je al een gedeelte gedaan.

Er is ook een analogon voor stelling 4, bladzijde 30.
De figuur hieronder suggereert het al.



Stelling 9 **De drie deellijnen van driehoek *ABC* gaan door één punt.**

Bij het bewijs van de middelloodlijnenstelling werd gebruikgemaakt van het begrip afstand. Omdat stelling 8 deellijnen met afstanden in verband brengt, kan dat hier ook.

19 Geef een bewijs van stelling 9; gebruik daarbij de bewijsstructuur op bladzijde 30.

We zetten de analogie nog even voort. Bij het snijpunt van de middelloodlijnen hoorde de *om*geschreven cirkel van de driehoek. Hier hebben we een *in*geschreven cirkel.

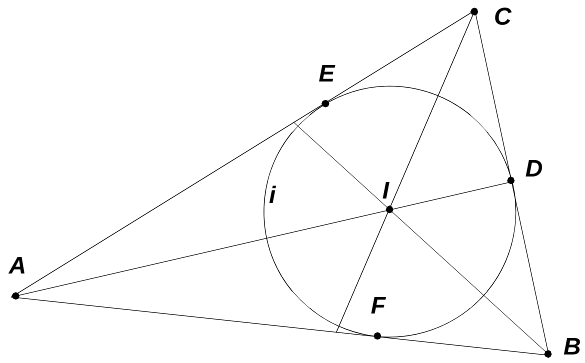
definitie ingeschreven cirkel

Een ingeschreven cirkel van een driehoek is een cirkel die binnen de driehoek ligt en met elk van de drie zijden precies één punt gemeen heeft.

Dit zou de stelling kunnen zijn, die lijkt op stelling 5.

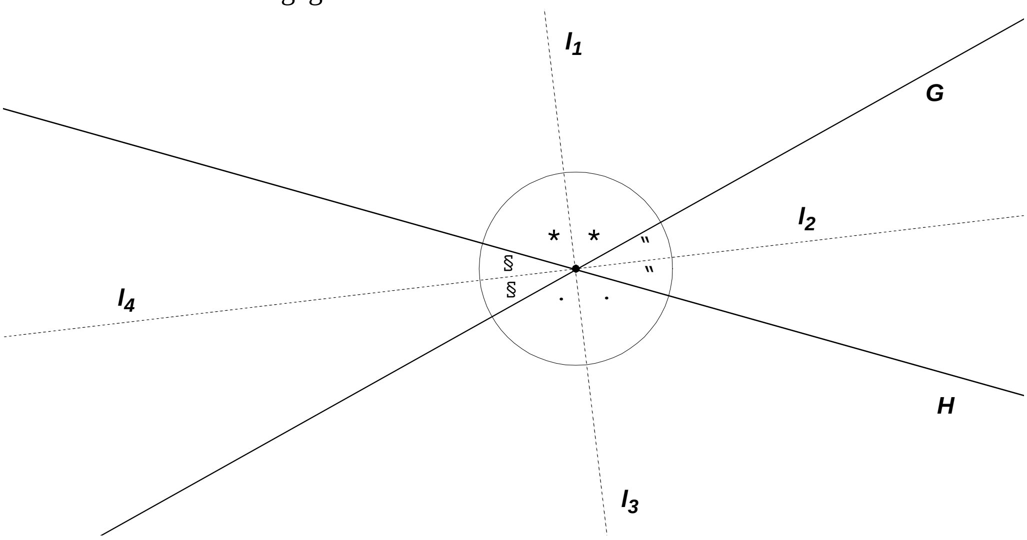
Stelling 10 **Elke driehoek heeft een ingeschreven cirkel. Het middelpunt van de ingeschreven cirkel is het snijpunt van de drie deellijnen van de driehoek.**

blik vooruit In de figuur hiernaast is een driehoek met zijn ingeschreven cirkel getekend.
Het is verleidelijk hier het woord ‘raken’ te gebruiken. Het is niet fout, maar dan moet onderbouwd worden wat *raken* precies is. Daar gaan we later uitvoerig op in.



Zoals de stelling hier geformuleerd werd, is wel alles in orde, de cirkel ligt in zijn geheel aan de juiste kant van alle drie de lijnen, dus binnen de driehoek.

Ter voorbereiding op een stelling over de deellijnen die *geen* analogon heeft bij middelloodlijnen onderzoeken we bij elkaar komende hoeken en hun deellijnen.
Hier zijn twee lijnvormige gebieden *G* en *H* gegeven. (Het snijpunt van de lijnen hoort dus bij beide gebieden, maar dit is niet erg belangrijk). De twee gebieden sluiten vier inhammen in. Voor elk van deze inhammen is de deellijn getekend. Gelijke hoeken zijn met hetzelfde teken aangegeven.



Volgens de definitie op bladzijde 68 moeten we hier van *vier* deellijnen spreken. Eigenlijk hadden we tot nu toe dus alleen *halve* deellijnen. Dat gaan we zo meteen rechtzetten. Je weet natuurlijk dat deze vier halve deellijnen elkaar aanvullen tot twee lijnen. Dat kun je ook bewijzen.

20 Bewijs dat l_2 en l_4 inderdaad één rechte lijn vormen.
Bewijs daarvoor eerst dat l_1 loodrecht op l_4 staat en ook loodrecht op l_2.
Maak daarbij gebruik van de gegevens dat *H* en *G* ‘hele’ lijnen zijn en dat een gestrekte hoek 180 is.

afspraak Voortaan bedoelen we met deellijn een *hele* lijn die door het snijpunt van twee lijnen gaat en gelijke hoeken met die lijnen maakt.

Nu kan het resultaat van opgave **20** als stelling geformuleerd worden.

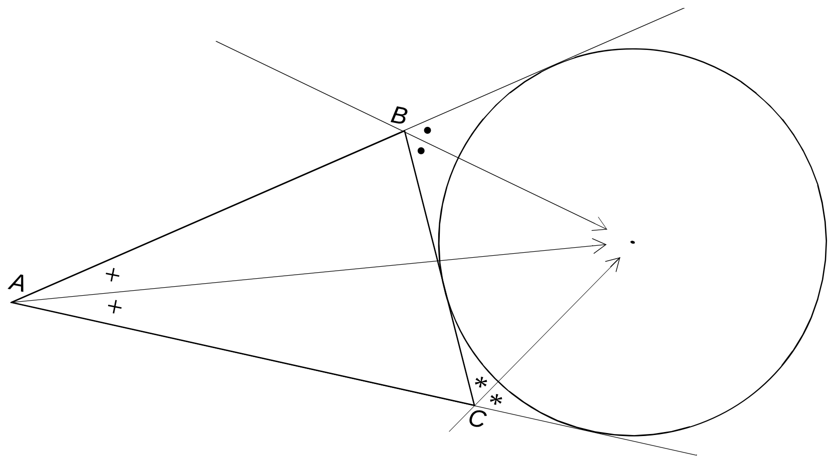
Stelling 11 **De twee deellijnen van twee snijdende lijnen staan loodrecht op elkaar.**

binnen- en buitendeellijnen

Bij een driehoek *ABC* hebben we nu zes deellijnen:

- drie die elkaar binnen de driehoek in één punt snijden; deze heten de *binnendeellijnen*;
- drie andere die, op het hoekpunt waar ze doorgaan na, buiten de driehoek liggen; deze heten de *buitendeellijnen*.

21 Bij deze driehoek zijn de binnendeellijn door *A* en de buitendeellijnen door *B* en *C* getekend.

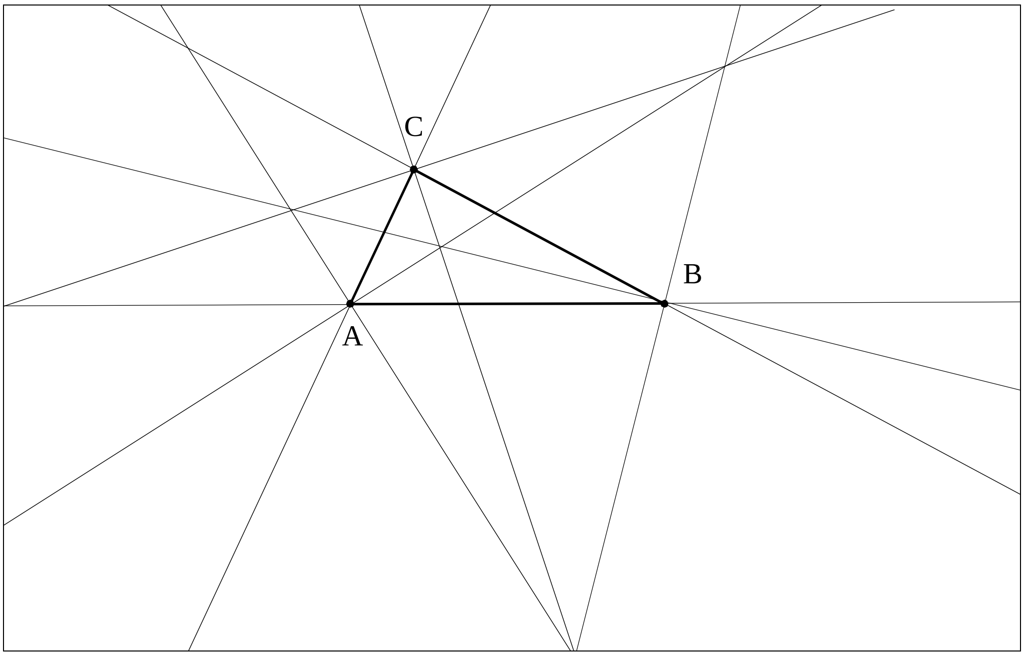


Bewijs dat ook deze drie deellijnen door één punt gaan en dat dit punt middelpunt is van een cirkel die met ieder van de drie lijnen maar één punt gemeen heeft.

aangeschreven cirkel

Zo'n cirkel heet een *aangeschreven* cirkel aan driehoek *ABC*. Elke driehoek heeft drie aangeschreven cirkels.

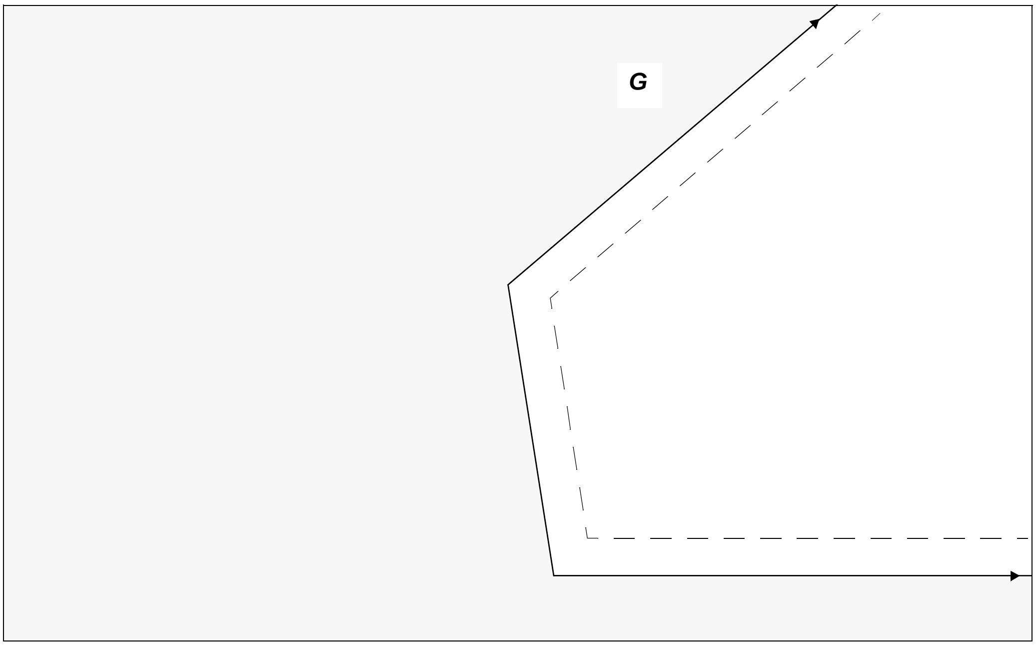
22 In de volgende figuur zie je een driehoek *ABC* en al zijn binnen- en buitendeellijnen. Teken de ingeschreven en de drie aangeschreven cirkels.
Geef ook gelijke en rechte hoeken in de figuur aan.



De volgende stelling vertelt nu niets nieuws meer, het is een samenvatting van al het voorafgaande. Hij herhaalt zelfs de vorige stelling. Daar is eigenlijk niets op tegen bij zo'n samenvatting. Het nog niet geheel meetkundig onderbouwde begrip *raken* laten we er in staan, dat komt straks wel goed. Je kunt nu bij 'raken' denken aan: slechts één punt gemeen hebben.

Stelling 12 **Bij een driehoek gaan de drie binnendeellijnen door één punt. Dat punt is het middelpunt van de ingeschreven cirkel.**
Kiest men bij twee hoekpunten de buitendeellijn en bij het derde hoekpunt de binnendeellijn, dan gaan ook deze drie lijnen door één punt. Dit punt is het middelpunt van een aangeschreven cirkel van de driehoek.

23 In opgave **15** heb je in de inham een punt *P* getekend dat op elk van de drie kustlijnen een voetpunt heeft. Je kunt dat punt nu opvatten als het middelpunt van een aangeschreven cirkel aan een of andere driehoek.
Maar dan moet *P* het snijpunt van twee buitendeellijnen en een binnendeellijn van deze driehoek zijn.
Teken deze drie deellijnen van de driehoek.



extra

24 Hebben bij een driehoek de ingeschreven cirkel en een aangeschreven cirkel hetzelfde punt met een driehoekszijde gemeen?
Zoek uit bij welke driehoeken dat het geval is.
Je hoeft je bewering niet te bewijzen.

23: Stootcirkels

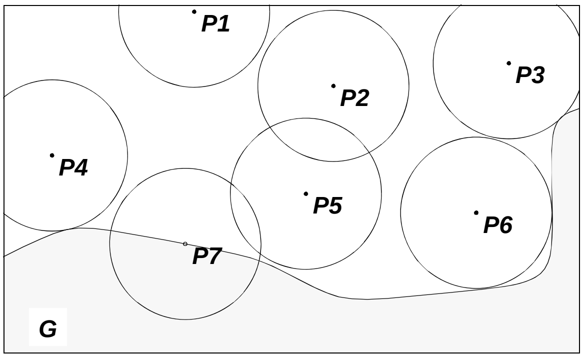
In deze paragraaf komt een betrekkelijk eenvoudige manier van vinden van iso-afstandslijnen om grillige gebieden aan bod.

stootcirkel

We noemen een cirkel rond een punt P buiten G, die met G alleen randpunten gemeen heeft, een *stootcirkel*.

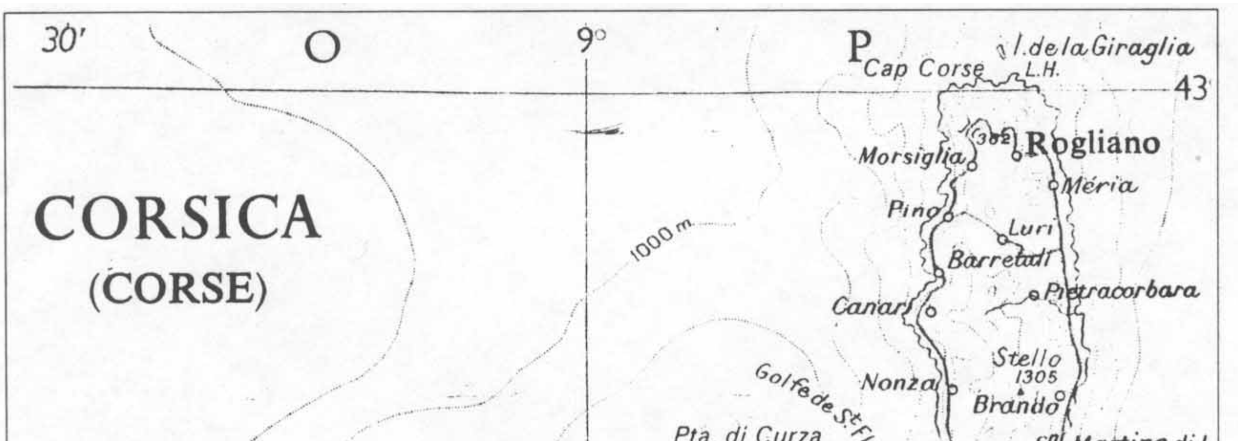
25 a. Hier is een gebied G getekend en een aantal cirkels met straal 1 en middelpunt P_1 tot en met P_7.
Geef aan welke van de punten P tot de iso-1-lijn horen.

b. Als een punt Q op de iso-1-lijn ligt, is er dan ook zeker een stootcirkel met straal 1 en middelpunt Q?



Met behulp van één bewegende stootcirkel kun je de rand van een gebied aftasten en zo snel een iso-afstandslijn tekenen.

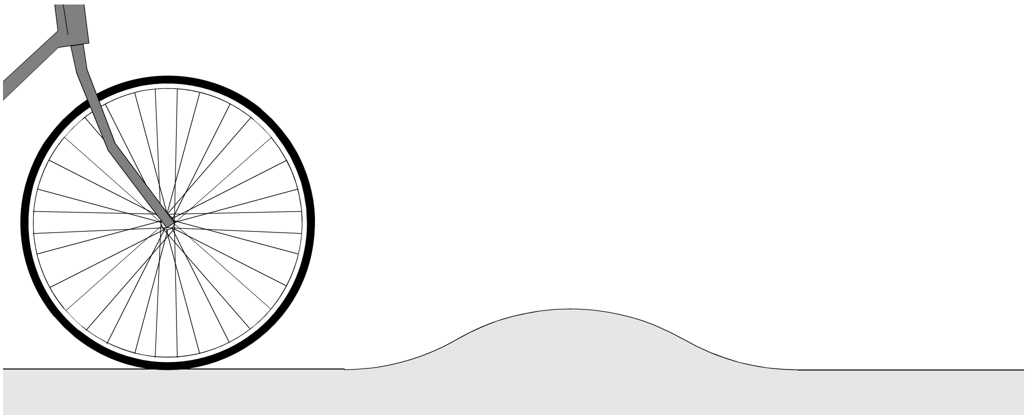
26 Hieronder zie je een kaart van een deel van Corsica; de kust van Corsica is zeer grillig. Maak een kartonnen cirkel met straal 2 met een gaatje in het midden. Met een potlood, dat door dat gaatje steekt, kun je nu snel de iso-2-lijn tekenen. De schaal van de kaart is 1 : 600000; je tekent dus eigenlijk de iso-12 km-lijn.



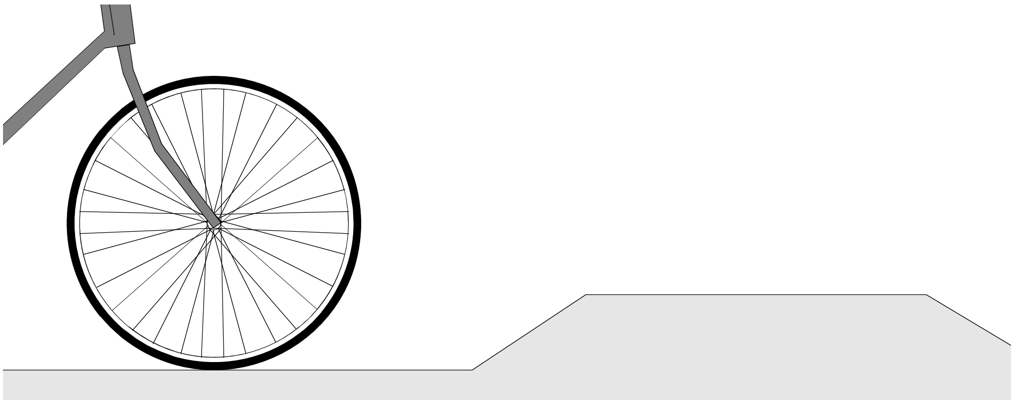
27 Beschouw een rollend fietswiel als een bewegende stootcirkel.
In de volgende drie figuren zie je verschillende obstakels.

a. Teken voor elk geval de baan die het midden van het wiel beschrijft.

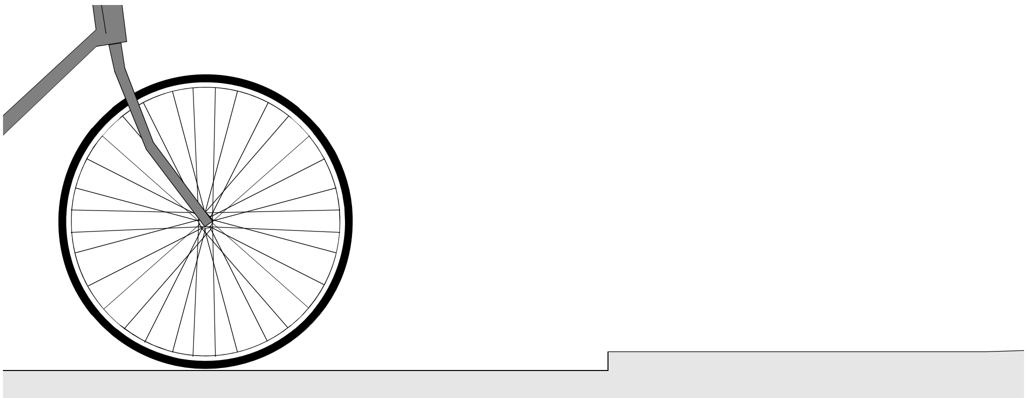
1. bobbel



2. verkeersdrempel



3. lage stoep



Als de baan van het midden van het wiel een knik maakt, voelt de fietser een klap. De klap is groter naarmate de hoek groter is tussen de richting vóór en na de knik.

b. Hoeveel klappen voelt de fietser bij de verkeersdrempel?

c. In welk geval voelt de fietser de hardste klap: bij de verkeersdrempel of bij de lage stoep?

de stelling van de stotende cirkel

Stelling 13 **De middelpunten van alle stootcirkels met straal *a* van een gebied *G* vormen de iso-*a*-lijn van dat gebied.**

28 Dat houdt twee dingen in:
- elk middelpunt van een stootcirkel met straal *a* ligt op de iso-*a*-lijn
- elke punt van de iso-a-lijn is middelpunt van een stootcirkel met straal *a*.

Hebben we die stelling wel bewezen? Waar en hoe?

29 De volgende bewering is *niet* algemeen juist:

Als een stootcirkel met straal a in twee of meer punten tegen de rand van een gebied stoot, dan heeft de iso-a-lijn een knik.

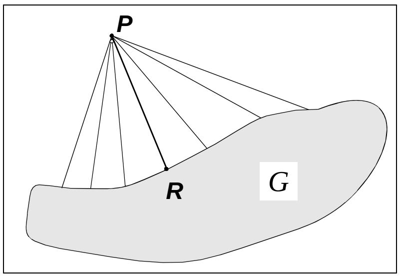
Zoek in paragraaf 20 een voorbeeld en een tegenvoorbeeld bij deze bewering.

Samenvatting van hoofdstuk 5

gebied, rand

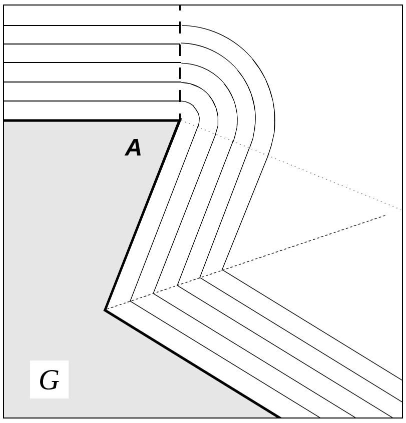
Wat een gebied en een rand precies zijn, hebben we niet in het algemeen afgesproken. Dat zou kunnen, maar dat voert te ver.
Er ontstaan geen moeilijkheden als we ons hier aan houden:
– Een gebied in het platte vlak is niets anders dan een stuk van het vlak waar we in werken. Het kan begrensd of onbegrensd zijn. Een stukje rechte lijn is ook een gebied.
– De rand van een gebied hoort altijd bij het gebied.

afstand van een punt tot een gebied, voetpunt



Het begrip afstand tussen punten is in dit hoofdstuk uitgebreid tot afstanden van punten tot gebieden. De afstand van een punt *P* tot een gebied is de kleinst mogelijke afstand van *P* tot randpunten van het gebied. Zo'n randpunt is dan een voetpunt van *P*.
P kan meerdere voetpunten hebben.
Als we met gebieden te maken hebben die door een aantal cirkelbogen en lijnstukken begrensd zijn, dan zijn we er zeker van dat elk punt buiten het gebied een of meer goed bepaalde voetpunten op de rand van het gebied heeft.

iso-afstandslijn



De iso-*a*-lijn van een gebied *G* bestaat uit alle punten die op afstand *a* van het gebied *G* liggen.
In de sector die bij een kaap *A* hoort, zijn de iso-afstandslijnen stukken van concentrische cirkels met middelpunt *A*.
Als de voetpunten op een rechte lijn liggen, dan zijn de iso-afstandslijnen zelf ook rechtlijnig.
Bij inhammen die door rechte lijnstukken begrensd worden, bestaan de iso-afstandslijnen uit daaraan evenwijdige lijnstukken die met een knik aan elkaar zitten. De 'knikpunten' hebben twee voetpunten. Ze liggen op de deellijn van de hoek die de rechte grensstukken met elkaar maken.

deellijn

Een deellijn van een hoek is een lijn die gelijke hoeken maakt met de benen van de hoek.

overeenkomsten tussen deellijnen en middelloodlijnen

Deellijnen delen hoeken middendoor, middelloodlijnen delen lijnstukken middendoor.
We hebben een aantal stellingen over deellijnen gevonden, deels in analogie met de stellingen over de middelloodlijn.
Een driehoek heeft drie middelloodlijnen, hun snijpunt is het middelpunt van de omgeschreven cirkel. Een driehoek heeft drie binnendeellijnen en drie buitendeellijnen. Er zijn vier punten waar drie van deze lijnen elkaar snijden. Dat zijn de middelpunten van de ingeschreven cirkel en de drie aangeschreven cirkels.

stellingen over deellijnen

Omdat we in de volledige formuleringen van stelling 8 en 12 veel opnemen, hoeven 9 en 10 hier niet meer te staan.

Stelling 8 **(Eigenschappen van de deellijn)**

De twee deellijnen van een snijdend paar lijnen l en m vormen de verzameling van de punten P waarvoor geldt d(P, l) = d(P, m).
Als twee halve lijnen a en b in een eindpunt S samenkomen en daar een hoek van minder dan 180 maken, is de verzameling van punten waarvoor geldt
d(P, a) = d(P, b) een halve lijn c vanuit S die gelijke hoeken maakt met a en b.
Voor punten P binnen de hoek ASB geldt: (A en B zijn hier punten op respectievelijk a en b, ongelijk aan S)
als d(P, a) < d(P, b), dan geldt –ASP < –BSP
als d(P, a) = d(P, b), dan geldt –ASP = –BSP
als d(P, a) > d(P, b), dan geldt –ASP > –BSP.

Stelling 11 **(Loodrechte stand van twee deellijnen)**

De twee deellijnen van twee snijdende lijnen staan loodrecht op elkaar.

Stelling 12 **(Deellijnen in en buiten de driehoek)**

Bij een driehoek gaan de drie binnendeellijnen door één punt. Dat punt is het middelpunt van de ingeschreven cirkel.
Kiest men bij twee hoekpunten de buitendeellijn en bij het derde hoekpunt de binnendeellijn, dan gaan ook deze drie lijnen door één punt. Dit punt is het middelpunt van een aangeschreven cirkel van de driehoek.

stootcirkels

Een stootcirkel heeft alleen een of meer randpunten met een gebied gemeen.
Twee stellingen beschrijven de rol van deze cirkels.
Bij het tekenen van iso-afstandslijnen bij ingewikkelde gebieden kun je van stootcirkels gebruikmaken.

Stelling 13 **(Stelling van de stootcirkels)**

De middelpunten van alle stootcirkels met straal a aan een gebied G vormen de iso-a-lijn van dat gebied.

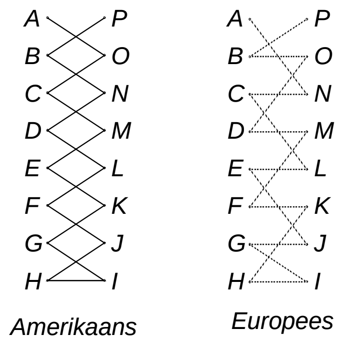
Hoofdstuk 6
Kortste wegen

In dit hoofdstuk komt een ander type meetkunde-problemen aan de orde: het zoeken naar kortste wegen.
Met het zoeken naar zuinige manieren van veterstrikken wordt begonnen.
Er wordt veel gebruikgemaakt van spiegelen en het werken met hoeken. Je hebt je geodriehoek dus vaak nodig.
Het karakter van dit hoofdstuk is vrij praktisch. Bij veel opgaven moet getekend worden.

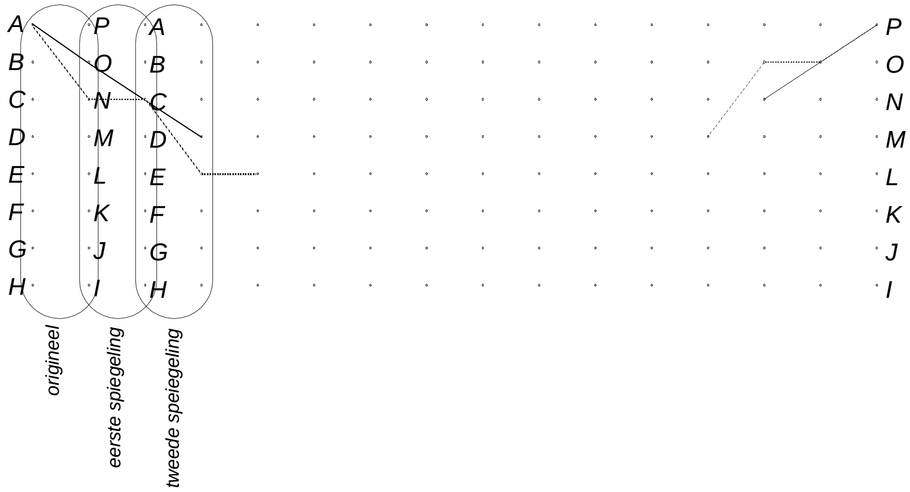
24: Van schoenveters naar kortste wegen

Op de foto's op de eerste pagina van dit hoofdstuk zie je twee verschillende manieren van veters strikken. De sjieke schoenen zijn Europees gestrikt, de cowboy-boots Amerikaans
We gaan de methodes eens vergelijken op efficiency van vetergebruik en hanteren daarbij een methode die aanleiding geeft tot interessant meetkundig onderzoek: optimaliseren met behulp van spiegelen.

1 Hier zijn de twee methoden op dezelfde sportschoen toegepast. Ernaast is alles geschematiseerd weergegeven. Welke methode gebruikt volgens jou de kortste veterlengte tussen A en P? (Ga uit van de schematisering en beperk je tot een eerste schatting.)



2 Hieronder zijn begin en eind van de veterpatronen getransformeerd weergegeven; er zijn spiegelingen gebruikt, zodat de kruisingen niet meer op treden.



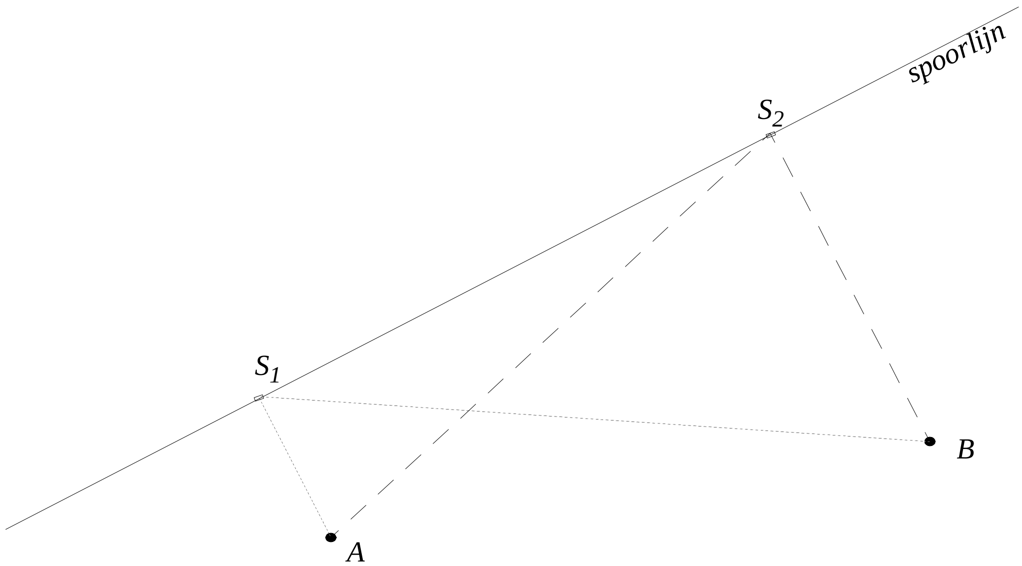
a. Maak de beide patronen eerst af.
b. Waarom zijn in deze weergave de veterlengtes gelijk gebleven aan die in de eerdere schematische voorstelling?
c. Beslis nu nogmaals welk patroon de kleinste veterlengte nodig heeft. Beargumenteer je keuze.

kortste weglengte

Bij het veter-probleem heb je gezien dat met behulp van spiegelen soms makkelijk een kortste weg bepaald kan worden, die aan bepaalde voorwaarden moet voldoen.
We hebben al eerder een situatie gezien waarin die methode ook toepasbaar is.

oud probleem

De rechte lijn hieronder stelt een spoorweg voor; *A* en *B* zijn plaatsen die op enige afstand van de spoorlijn liggen. Er moet één station gebouwd worden en er moeten uiteraard wegen van het station naar beide plaatsen aangelegd worden.



De afzonderlijke gemeenteraden van de steden *A* en *B* hebben S_1 en S_2 voorgesteld. De voor beide voorstellen noodzakelijke wegen zijn gestippeld aangegeven.

3 Na overleg wordt uiteindelijk besloten tot in totaal de goedkoopste oplossing:

de positie S van het station moet zó gekozen worden, dat de totaal benodigde weglengte $|AS| + |SB|$ *minimaal is.*[*)]

a. Bepaal het punt *S* dat aan die voorwaarde voldoet exact.
(Dit heb je al eerder gedaan! Maar nogmaals een tip: als de plaatsen aan verschillende kanten van de spoorlijn lagen, zou het niet zo moeilijk te beslissen zijn waar *S* moest komen.)

b. Toon nu ook aan dat voor het punt *S* geldt: $\angle S_1SA = \angle S_2SB$.

even vooruit denken

Strikt genomen heb je in dit boekje niet geleerd waaróm dat laatste zo is! Je hebt er enige kennis van hoeken voor nodig, maar niet bepaald veel. In het volgende boekje over meetkunde zal veel meer met hoeken gewerkt worden, en met bewijzen van zoiets als dit zul je dan weinig moeite hebben. In dit hoofdstuk doe je alvast weer enige ervaringen op met gebruik van hoeken.
Gebruik in dit hoofdstuk gewoon wat je allang weet over:
– overstaande hoeken bij snijdende lijnen (zoals hier gebruikt)
– *F*- en *Z*-hoeken
– de hoekensom van 180 graden in de driehoek.

[*)] Hier wordt dus de notatie $|XY|$ voor de lengte van lijnstuk *XY* gebruikt. Zie desnoods bladzijde 23.

We vatten wat gevonden is samen in de vorm van een stelling.

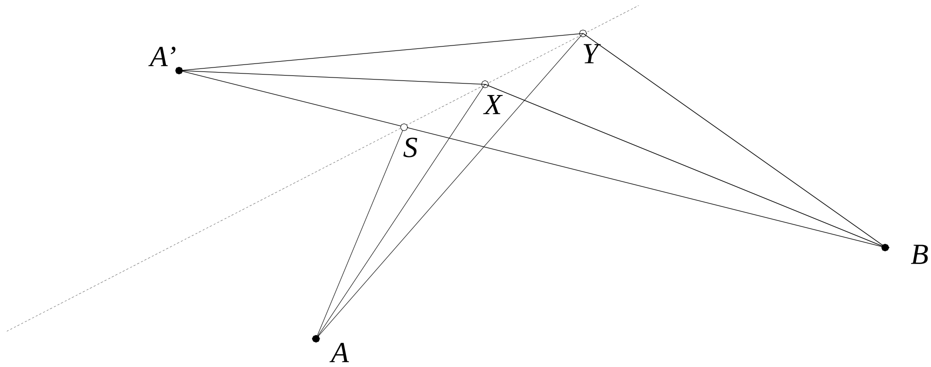
Stelling 14 **Als een lijn *l* gegeven is en twee punten *A* en *B* aan dezelfde kant van de lijn, dan is er precies één punt *S* op de lijn *l* waarvoor |*AS*| + |*SB*| minimaal is. Voor dat punt *S* geldt:**
- ***S* ligt op de verbindingslijn van *B* en het spiegelbeeld van *A* in *l*,**
- ***AS* en *BS* maken gelijke hoeken met *l*.**

extra

Als je een bewegend punt X van S_1 naar S_2 zou laten lopen, dan zou de totale lengte

$$|XA| + |XB|$$

variëren.



Je weet nu eigenlijk alleen, dat deze grootheid een minimum aanneemt als $X = S$.
Het is inderdaad ook nog zo, dat de totale lengte voortdurend daalt als X van S_1 naar S loopt en daarna voortdurend stijgt. Plat gezegd: als je nog verder omloopt, is het nog langer. Het wiskundig bewijs hiervan is echter subtiel.

plat, maar subtiel

Aan de stelling zou je dus nog kunnen toevoegen:

Verder geldt: als P een punt is dat van S af beweegt langs l,
dan wordt $|AP| + |PB|$ *voortdurend groter.*

Het bewijs van deze bewering past wel binnen het kader van het bewijzen met behulp van de *driehoeksongelijkheid*. Het is echter niet eenvoudig!
Bij de figuur zou je moeten aantonen dat:

$$|A'Y| + |YB| > |A'X| + |XB|.$$

Vervelend genoeg lijkt het er wél op dat:

$$|A'Y| > |A'X|$$

maar ook, en dat zit tegen, dat:

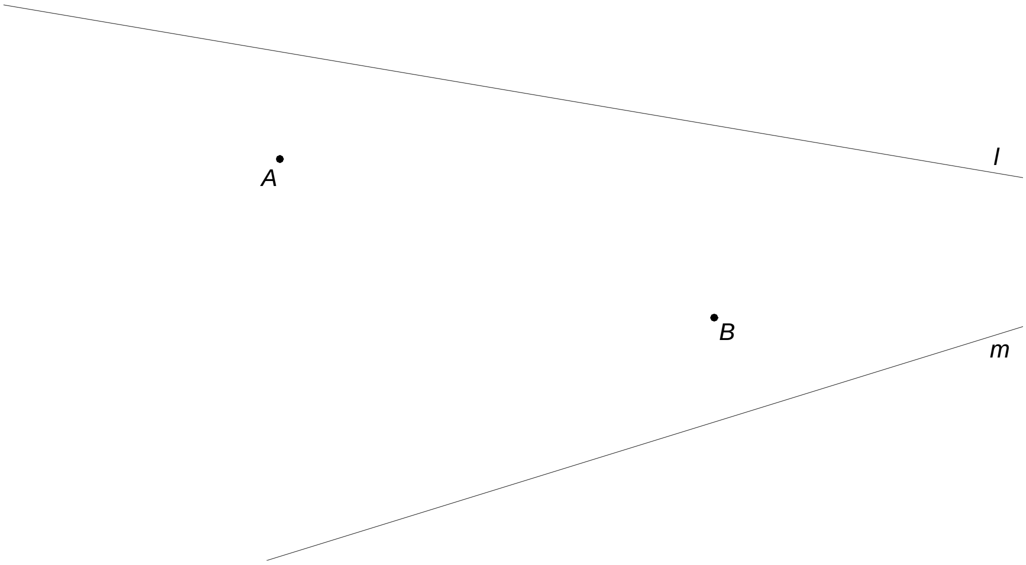
$$|YB| < |XB|.$$

4 Vind tóch een bewijs!

Tip voor het vinden van een bewijs:
Breng een derde route van *A'* naar *B* in het spel! Loop eerst gedeeltelijk via de *Y*-route en ga, als je op de *lijn* door *X* en B bent aangekomen recht naar *B*. Vergelijk die route met beide andere.

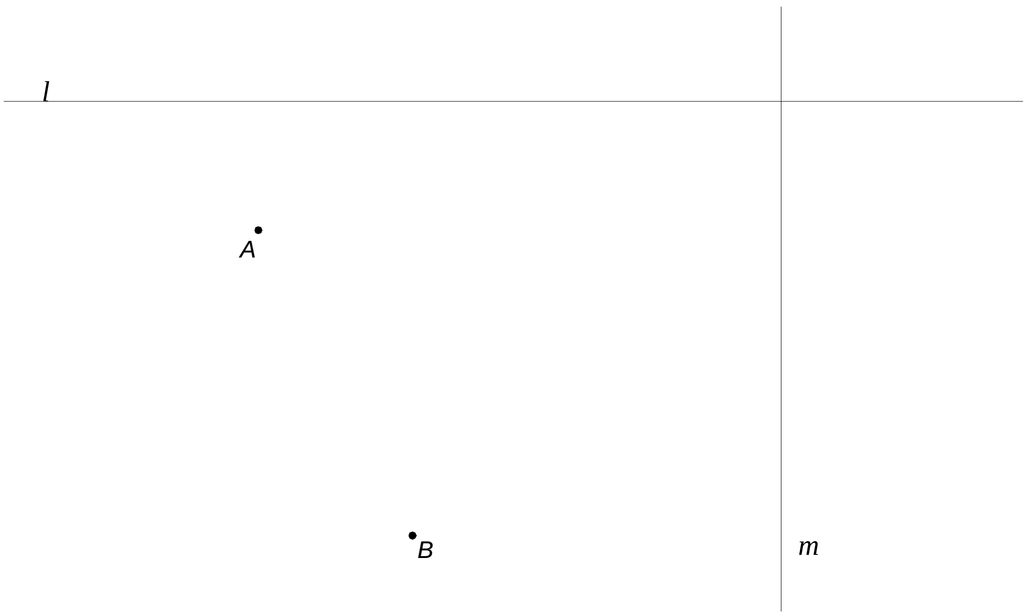
meer lijnen

5 Hier zijn twee lijnen *l* en *m* gegeven en twee punten *A* en *B*.



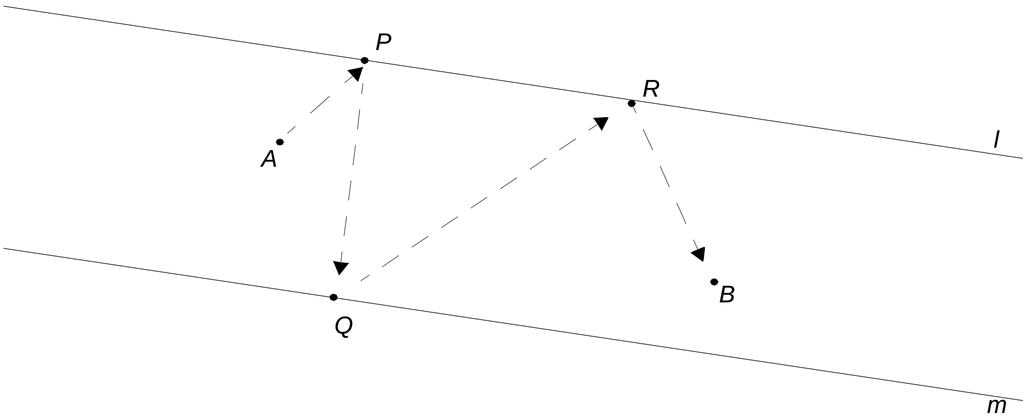
a. Bepaal de kortste weg van *A* via *l* en *m* naar *B*, in deze volgorde; maak eerst een schets en bedenk dan hoe je het spiegelen kunt gebruiken.
b. Construeer ook de weg van *A* via *m* en daarna via *l* naar *B*.
c. Tot slot: de kortste weg van *A* via *l* en *m* naar *A* terug.

6 In deze situatie staan de lijnen *l* en *m* loodrecht op elkaar.



a. Construeer weer de minimale route *APQB* met *P* op *l* en *Q* op *m*.
b. Wat valt je op aan de richtingen van *AP* en *QB*?

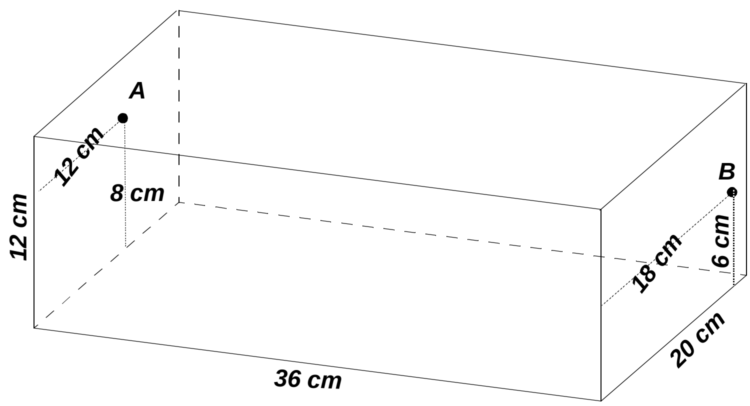
7 In onderstaand geval zijn *l* en *m* evenwijdig.
Er is een route geschetst om het kortste pad van *A* naar *l*, naar *m*, nogmaals naar *l* en dan pas naar *B* op te zoeken.
De achtereenvolgende contactpunten met *l* en *m* zijn *P*, *Q* en *R*.



a. Op welk punt moet het lijnstuk *QR* (voorbij *R*) eigenlijk gericht zijn?
b. En waarop moet dus *PQ* gericht zijn?
c. Denk nog even door, en terug aan de schoenveters; construeer nu het kortste pad exact.
d. Geef aan waarom in de uiteindelijke oplossing *AP* en *QR* evenwijdig zijn en *PQ* en *BR* ook.

kortste route op schoenendoos

8 Op deze (schoenen)doos van 12 bij 20 bij 36 cm zit op de achterkant 'bij *A* een mier.



Bepaal voor deze mier de snelste route van *A* naar *B*, via de buitenkant van de doos.

Probeer eerst zelf een manier te vinden, vóór je de volgende tip gebruikt.

tip *Op werkblad E (bladzijde 129) vind je een mogelijke uitslag van een deel van de doos getekend. Nu lijkt het op eerdere problemen. Het is een idee; maar deze uitslag helpt je misschien toch niet aan de kortste route.*

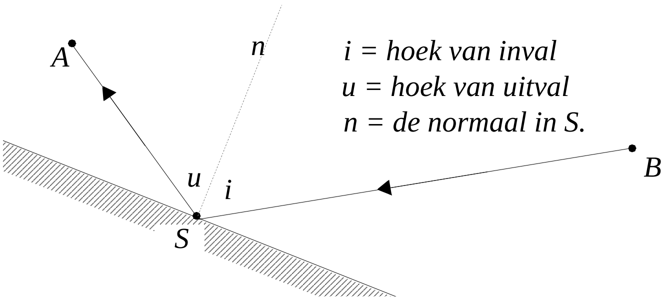
het principe van Fermat

Bij kortste wegen via een rechte lijn gold het spiegelingsprincipe en je trof gelijke hoeken aan.
Er zijn ook situaties waarin je weet dat er gelijke hoeken zijn en dan juist de andere kant uit kunt werken.

Je weet dat bij het weerkaatsen van een lichtstraal in een spiegel het principe van

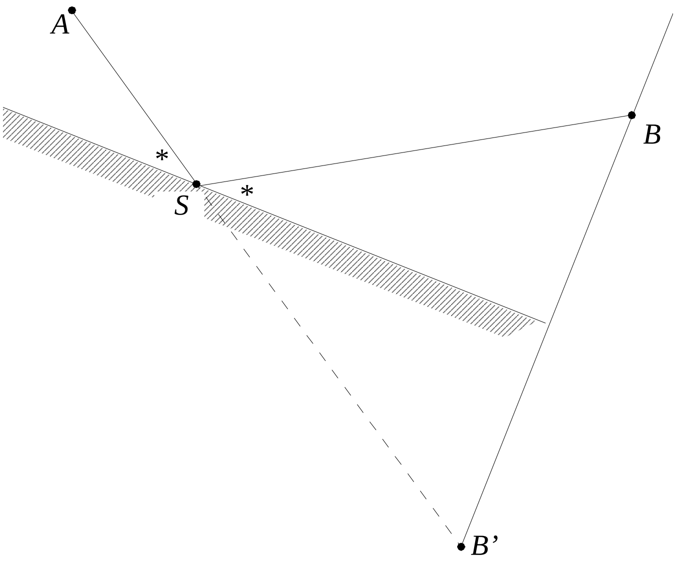
hoek van inval
is hoek van uitval

geldt.
Zie de illustratie.
De *normaal* is de lijn loodrecht op de spiegel.



In onze figuren leek het meer op de afbeelding hiernaast, waarin ook aangegeven is hoe je de spiegelende lijn van *A* naar *B* kunt vinden.
We keken naar de hoeken die *AS* en *SB* met de *spiegel* maakten, niet naar die met de *normaal* op de *spiegel*.

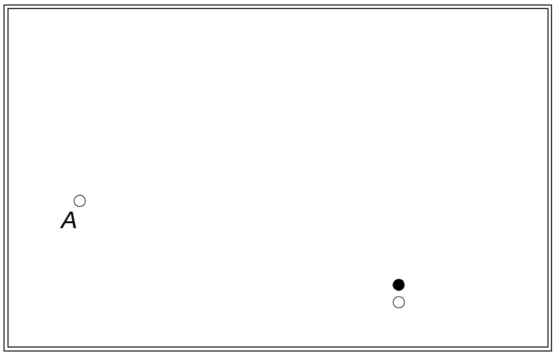
Je ziet dat het licht om van *B* naar *A* te gaan via de spiegel ook *de kortste weg kiest*:
dit is het zogenaamde principe van Fermat.



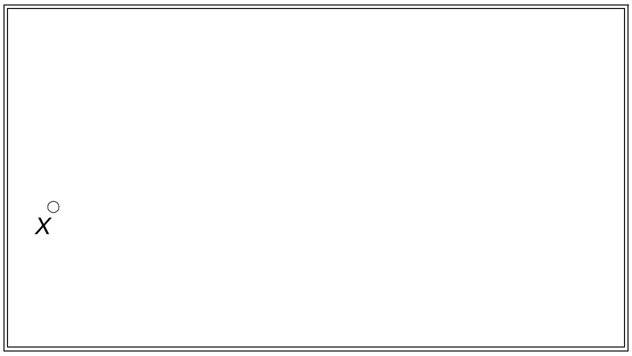
biljartproblemen

Bij biljarten stoten de ballen tegen de zogenaamde *banden* (de randen om het groene laken) en gaan daarna verder.
In dit gedeelte nemen we aan dat dit volgens het spiegelingsprincipe gaat. Dat is niet juist volgens de biljarters, met name als er *effect* (draaien van de bal) wordt gegeven of effect ontstaat door raken van de band.
Als je vind dat het daardoor wat theoretisch wordt, kun je in plaats van aan het biljart nog denken aan een kamer met spiegelende wanden.

9 Hier is een biljart in bovenaanzicht getekend. Jouw stootbal is *A*. Het is driebandenspel, dat wil zeggen dat je vóór je met *A* de derde bal raakt, drie banden naar keuze moet raken. Twee keer dezelfde band mag ook, als er maar drie keer een band wordt geraakt. Wanneer je de tweede bal raakt, doet er niet toe; in dit geval liggen twee en drie zo dicht bij elkaar dat je eerst de drie banden zult raken en dan de andere ballen praktisch tegelijk. Construeer nu *twee* verschillende mogelijke routes voor bal *A*.



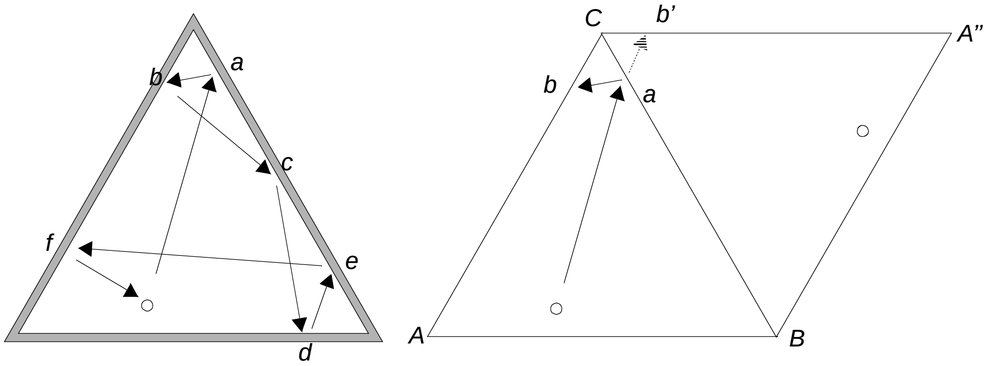
10 Biljarten met één bal! Laat zien dat je de bal zó kunt stoten dat hij na alle vier banden geraakt te hebben, weer op dezelfde plaats terugkeert en in dezelfde richting doorgaat.



Tip: spiegel het biljart herhaaldelijk naar alle kanten. Zet *A*, *B*, *C*, *D* op de hoekpunten en spiegel deze letters mee. Dan is het makkelijker de gespiegelde *X*-posities aan te geven.

extra

11 Op dit driehoekig biljart willen we het geschetste pad exact tekenen. Ernaast is een begin van een oplossing gesuggereerd. Maak het geheel af, gebruik eventueel werkblad F (bladzijde 131).



samenvatting van hoofdstuk 6

kortste verbinding

In dit hoofdstuk heb je gebruikgemaakt van het feit dat de kortste verbinding tussen twee punten de rechte lijn is.

principe van Fermat

Je hebt gemerkt dat je bij het vinden van kortste verbindingen via een of meer lijnen het spiegelingsprincipe kon toepassen. Dat principe staat bekend onder de naam *principe van Fermat.*

redeneren met hoeken

In diverse situaties moest je daarbij ook met hoeken redeneren.
Het wordt tijd dat we weer verdergaan met het hoe en waarom van dat redeneren.
Dat gebeurt in deel twee van de Voortgezette Meetkunde.
Daar komen dan ook enkele andere *optimaliseringsproblemen* aan bod.

Voorbeelduitwerkingen

Algemene opmerkingen

- Bij veel opgaven zijn verschillende uitwerkingen mogelijk. Daarom zal jouw antwoord vaak afwijken van wat hieronder staat aangegeven, zonder dat het daarom fout is. In de meeste gevallen zul je aan de voorbeelduitwerkingen wel voldoende hebben om te toetsen of jouw uitwerking ook acceptabel is.

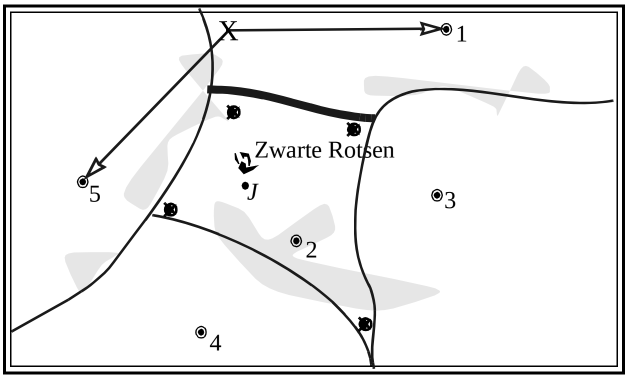
- Sommige opmerkingen bij deze uitwerkingen geven een nadere toelichting bij de opgave. Je ziet dat vanzelf als je die uitwerkingen tegenkomt.

- In deze uitwerkingen wordt gebruikgemaakt van de originele tekeningen uit het boekje. Daardoor zien de uitwerkingen er fraaier uit dan van jou verwacht wordt. Zelf zul je veelal tekeningen opnieuw maken en dan alleen de noodzakelijke delen tekenen. Blijf wel zelf zorgdragen voor duidelijkheid in de tekeningen.

- Een enkele keer vind je geen uitwerking. Dat is bijvoorbeeld zo, als gevraagd wordt om het maken van een figuur met de computer. Soms vind je in zulke gevallen hier toch een schermbeeld. Dat helpt je controleren of je op de goede weg zit, maar je hoeft zulke beelden natuurlijk niet in je schrift op te nemen, tenzij dat echt nodig is.

Hoofdstuk 1: Voronoi-diagrammen

1: In de woestijn

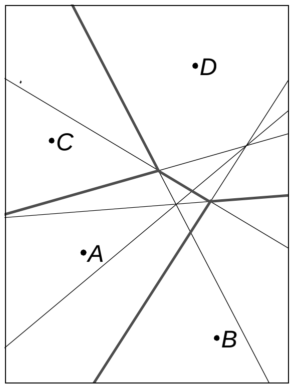


1 **a.** 2
b.
c. Zie figuur.
(Het hoeft nog niet heel precies te zijn, dat gaat straks wel gebeuren.)
d. Kiezen naar welke bron je gaat.
e. Ja. Zie punt *X*. De pijlen zijn evenlang en de afstanden tot bron 2,3 en 4 zijn groter.
f. Ja. Heel ver naar het zuidoosten.
g. Nee. Bij 3 en 4 geldt het niet. (Het geldt wel voor het verlengde van de grens.)
h. Recht. (Dit wordt straks nauwkeurig onderzocht.)

2: De grens tussen twee gebieden

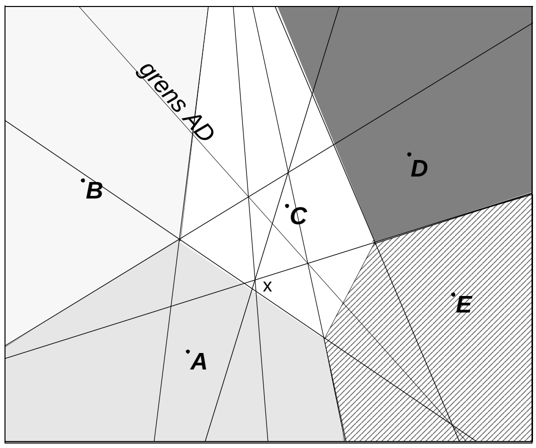
2 Dat is een goede naam. Als het om een indeling van bijvoorbeeld olievelden zou gaan, zou je op de grens beslist conflicten krijgen omdat de punten op de grens bij beide gebieden horen.

3: Meer punten, meer grenzen

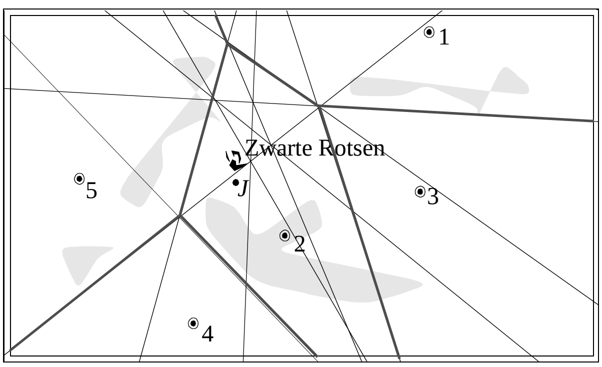


3
a. 6. Voor iedere paar punten een. Dus 3 + 2 + 1 = 6.
b. Door sommige snijpunten gaan 3 vouwlijnen. Door andere 2.
c. Alleen die tussen *B* en *C*.

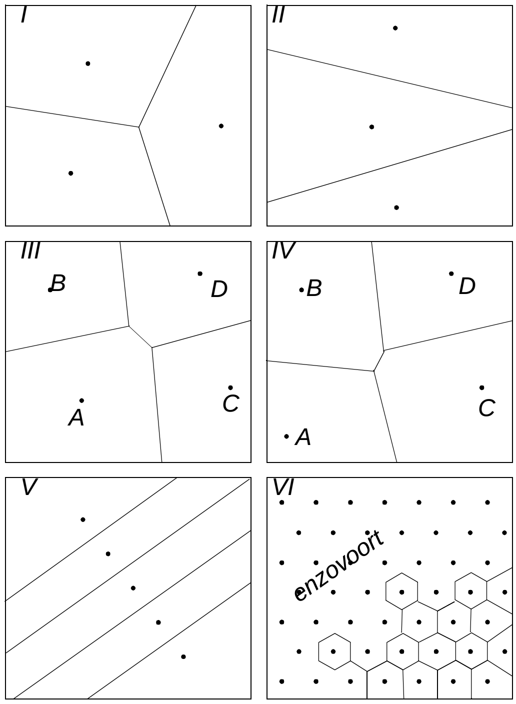
4 **a.** 4 + 3 + 2 + 1 = 10.
b. Het ligt dichterbij *D*; dat zie je aan grenslijn *BD*.
c. Het kan niet bij *A* horen (grens *AC*).
Ook niet bij *D* (grens *AD*) en niet bij *E* (grens *AE*). Blijft over *C*.
Pas op: Niet bij *B* horen vanwege grens *BD* betekent alleen: de afstand tot *D* is kleiner dan die tot *B*. Dat betekent niet dat de afstand tot *D* de kleinste is.
d.



5

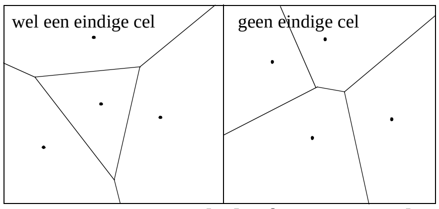


4: Voronoi-diagram, centra, grenzen



6 **a.**
b. Dat punt ligt op gelijke afstanden van de centra.
c. Ja, maar dat ligt buiten de figuur.
d. Bij IV ligt punt *A* verder weg. Daardoor komen de cellen rond *B* en *C* tegen elkaar te liggen in plaats van die rond *A* en *D*.
e. De grenslijnen zijn evenwijdig. Lintdorpen in Noord-Holland hebben zulk achterland.
f. De honingraat.
Basalt (gestolde lava) heeft vaak ook van die zeshoeken. Beroemde voorbeelden zijn de Giants Causeway in Noord Ierland en het eiland Staffa in Schotland.

7
a. 4.
b.

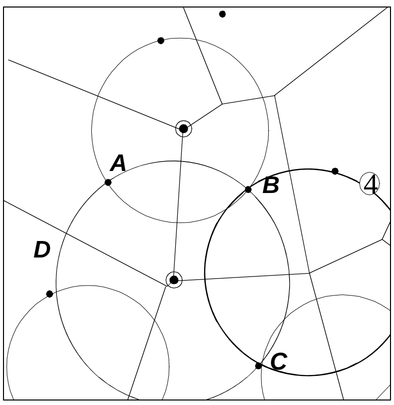


c. 20 punten op een cirkel of op een rechte lijn. Of op een andere figuur die geen inhammen heeft zoals bijvoorbeeld een ovaal. Het doet er niet toe hoe ze verder op die cirkel, lijn of kromme figuur liggen.
d. Op de randen. (Later onderzoeken we dit verder).

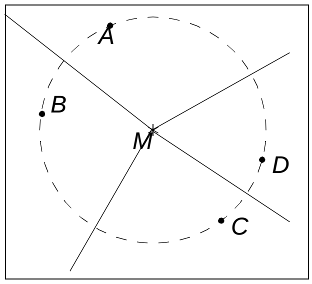
5: Drielandenpunten, lege cirkels

8 **a.** Het heeft gelijke afstanden tot die drie steden.
b.
c.

9 **a.** Zie



b. Zie figuur.
c. Dat zijn er altijd drie.



10 a. *D* ligt dichterbij *M*. De cirkel door *A*, *B* en *C* is dus geen grootste lege cirkel.

b.

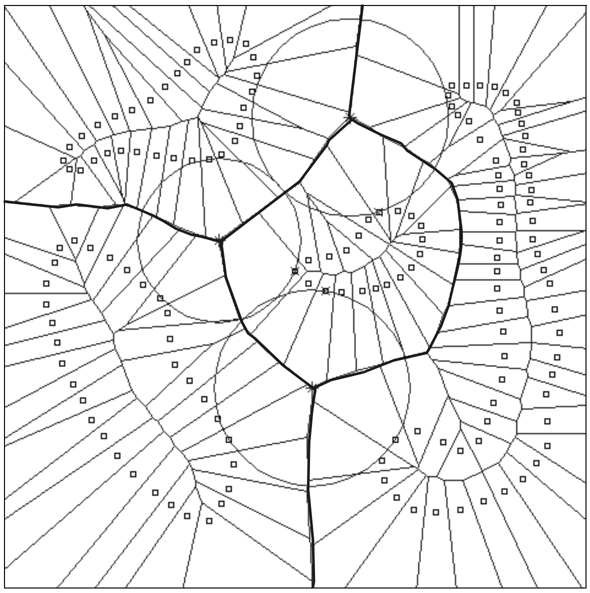
c.

d. Als er drie centra zijn, is er altijd een drielandenpunt (behalve als ze op één lijn liggen).
Als er een vierlandenpunt moet ontstaan, dan moet het vierde centrum precies op de cirkel door de drie andere punten liggen. Het is maar heel toevallig als dat het geval is. Het is dus iets bijzonders.

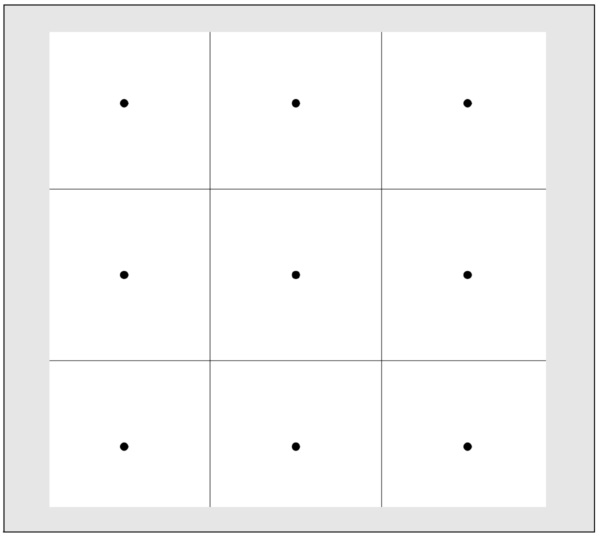
11

a.

b. Waar die gekleurde grenzen met drie bij elkaar komen.



12



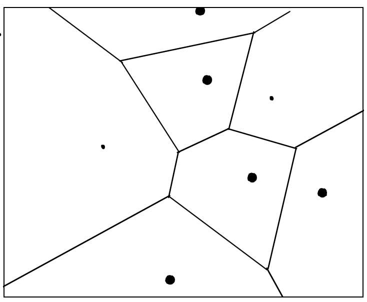
6: Hunebedden in Drente; spiegelen

13 a. De centra liggen even ver van de grenslijn en de grenslijn staat loodrecht op de verbindingslijn.

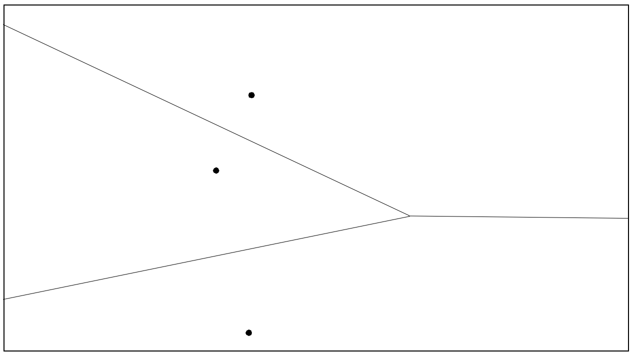
b. Het klopt niet overal, maar het zou eigenlijk wel moeten.

c. De ronde stip die het dichtst bij de oostgrens ligt.

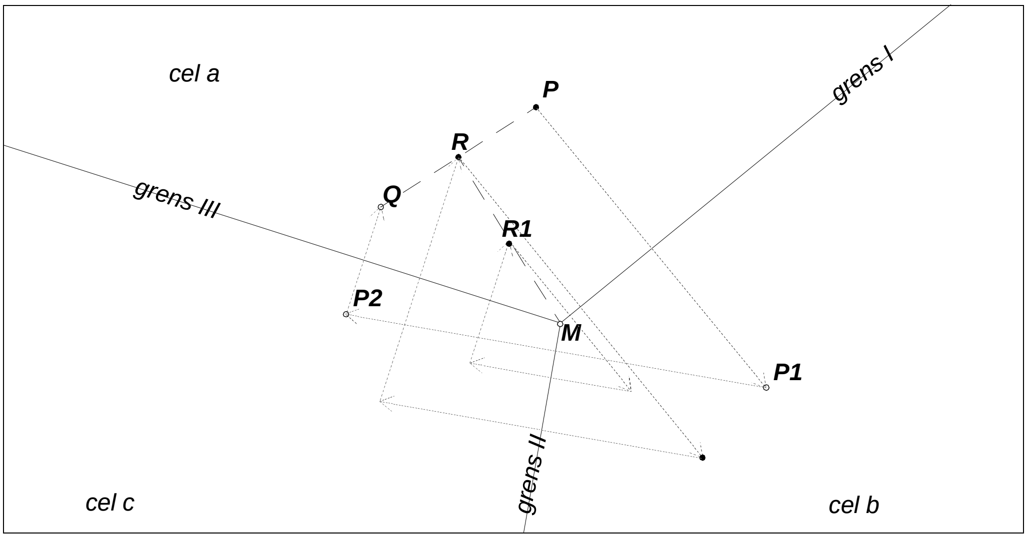
14 .



15



16



a. *P* en *Q* zijn verschillend. Als *P* centrum van cel a was, zou P_2 dat van cel c moeten zijn. Dat kan dus niet.
b. *S* is wel gelijk aan *R*.
c. Zie R_1.

Hoofdstuk 2: Redeneren met afstanden en hoeken

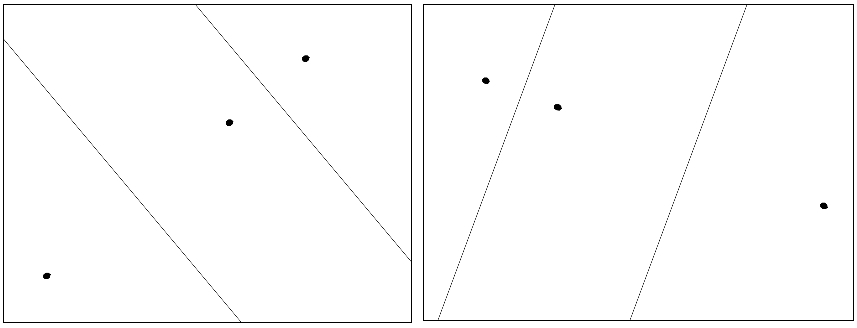
7: Inleiding: meetkundig redeneren

1 **a.** Dat het een lijn is en geen stukje oppervlak. Dat het een rechte lijn is. Dat de punten symmetrisch ten opzichte van de lijn liggen. (Er is vast nog meer!)
b. De symmetrie werd gebruikt om ontbrekende centra te vinden.

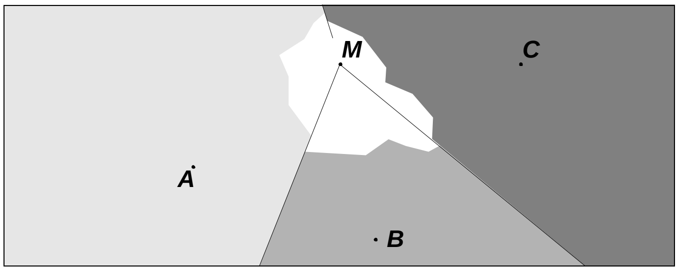
8: Een redenering met drielandenpunten en cirkels

2 **a.**

b. De drie centra liggen op één lijn.



3



a.

b. (afstand *M* tot *A*) = (afstand *M* tot *B*)
(afstand *M* tot *B*) = (afstand *M* tot *C*)
Hier volgt direct uit:
(afstand *M* tot *A*) = (afstand *M* tot *C*).

c. Dus *M* ligt ook op de Voronoi-grens van *A* en *C*.

d. Ja, alle drie de grenzen gaan door *M*.

4

a. De afstanden van *M* tot *A*, *B* en *C* zijn alle drie gelijk. Dus de cirkel met middelpunt *M* die door *A* gaat, gaat ook door *B* en *C*.

b. Dat was de grootste lege cirkel rond het drielandenpunt *M*.

5

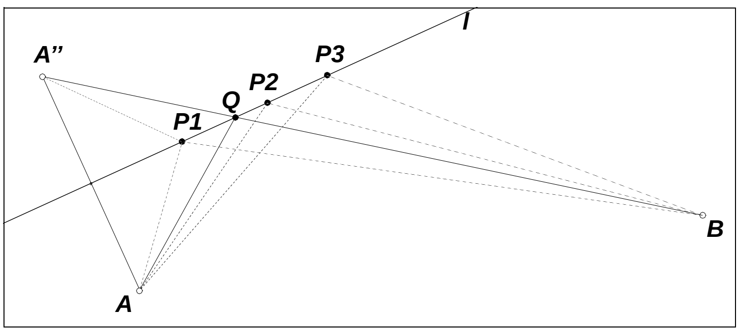
a. Dat de twee grenzen inderdaad een snijpunt hebben.

b. Nee, zo te zien niet. Als het snijpunt van de *AB*-grens en de *BC*-grens *bestaat*, dan ligt het ook op de *AC*-grens. De vorm van de grens doet er niet toe in de redenering, alleen de afstandsgelijkheden. (Dát het snijpunt bestaat, dat volgt uit de rechtlijnigheid en de niet-evenwijdigheid.)

c.

9: Kortste wegen en driehoeksongelijkheid

6



a. Via P_2. Maar het scheelt heel weinig.

b. Omdat $d(A, P_1) = d(A', P_1)$.

c. Trek de rechte lijn A’B. Het snijpunt met *l* is *Q*.

d. *Voorbeeld een*: Het halen van water in rivier *l* dat naar *B* gebracht moet worden.
Voorbeeld twee: l is een spoorlijn. De steden *A* en B krijgen samen een station.

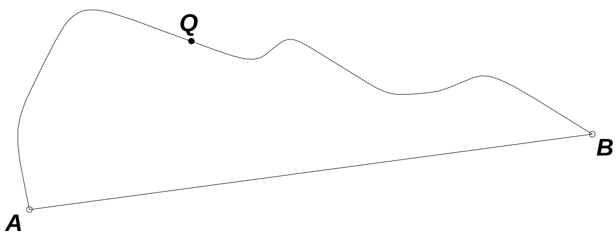
7

a. Van *P* naar *Q* is even ver als van *Q* naar *P*.

8

a. Bijvoorbeeld op $A'P_1B$.
b. $d(A', Q) + d(Q, B) = d(A', B)$.

9



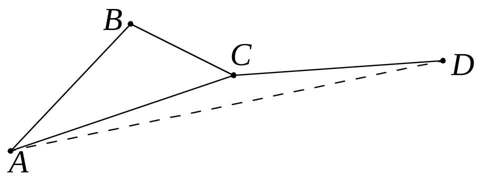
a. Iets met een route die niet uit rechte stukken bestaat.
b. Het gaat alleen over afstanden.

10

a. Je zou kunnen denken aan de stelling van Pythagoras.
b. Waarop is die stelling van Pythagoras gebaseerd?
Maar ook: hoe volgt in ‘s hemelsnaam de driehoeksongelijkheid uit de stelling van Pythagoras?

11 Trek *AC* en pas de driehoeksongelijkheid twee keer toe: op *AD* met omweg via *C* en op *AC* met omweg via *B*:

$|AD|$ £ $|AC| + |CD|$ £ $|AB| + |BC| + |CD|$



10: Afstandsbegrip, stelling van Pythagoras

12 Als in driehoek *ABC* hoek *B* recht is, geldt:

$$d(A, C)^2 = d(A, B)^2 + d(B, C)^2.$$

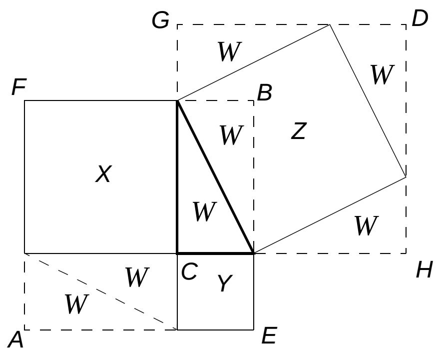
13 a. $d(A, Q)^2 = d(A, P)^2 + d(P, Q)^2$.
b. Omdat $d(P, Q)^2 > 0$, is $d(A, Q)^2 > d(A, P)^2$ en omdat afstanden niet negatief zijn: $d(A, Q) > d(A, P)$.

14 a. Er zijn vele manieren om dit te doen. Zet ook letters in de oppervlaktes van de vierkanten en driehoekige gebieden.
Oppervlakte(AEBF) = Oppervlakte(CHDG)
Dus*:*

$$X + Y + 4 \cdot W = Z + 4 \cdot W$$

Dus

$$X + Y = Z$$



b. Dat de zijden gelijk zijn en loodrecht op elkaar staan.

15 Je doet dan hetzelfde als in opgave **6**, voor het geval dat *A* en *B* samenvallen.

11: Eigenschappen van de middelloodlijn

16

a. ——— = groen. Gelijke lijnstukken en hoeken van 90 .

b. ⟷ = rood. Gelijkheid van de twee lijnstukken moet bewezen worden.

c. Omdat –*PQA* = 90 :

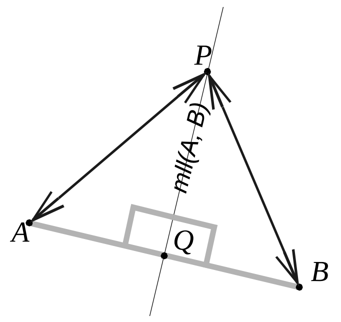
$$d(P, A)^2 = d(P, Q)^2 + d(Q, A)^2$$

Omdat –*PQB* = 90 :

$$d(P, B)^2 = d(P, Q)^2 + d(Q, B)^2$$

Omdat we mogen gebruiken dat $d(Q, A) = d(Q, B)$, volgt hier uiteindelijk uit:

$$d(P, A) = d(P, B).$$



d. Ja, de loodrechtheid is bij Pythagoras gebruikt, en de gelijkheid van de lengtes *AQ* en *BQ* is bij de herleiding gebruikt.

17

a. Te bewijzen is:

$$d(Q, A) \text{ „ } d(Q, B) .$$

Maar we bewijzen eigenlijk:

$$d(Q, A) < d(Q, B).$$

b. *R* ligt op de middelloodlijn, dus:

$$d(R, A) = d(R, B).$$

c. Driehoeksongelijkheid voor *Q*, *R*, *A*. *R* ligt niet op *QA*, dus is er echte ongelijkheid:

$$d(Q, A) < d(Q, R) + d(R, A).$$

d.

$$d(Q, A) < d(Q, R) + d(R, A) =$$
$$d(Q, R) + d(R, B) = d(Q, B).$$

De laatste gelijkheid geldt omdat *R* wél op *QB* ligt.

18 Aan het vinden van de kortste route via een lijn. Hier zou je van *A* naar *Q* gaan via de middelloodlijn van *AB*.

12: Van onderzoek naar logische opbouw

19

a. *Te bewijzen:*

$$d(P, A) + d(P, B) + d(P, C) + d(P, D) < d(Q, A) + d(Q, B) + d(Q, C) + d(Q, D)$$

b. *Bewijs*:

Gebruik de driehoeksongelijkheid in driehoeken *ACQ* en *DBQ*.

$$d(P, A) + d(P, C) = d(A, C) \text{ £ } d(Q, A) + d(Q, C).$$

en

$$d(P, B) + d(P, D) = d(B, D) \text{ £ } d(Q, B) + d(Q, D).$$

In minstens een van de gevallen geldt ongelijkheid, want anders was *Q* gelijk aan *P*.
Door optellen volgt nu direct wat te bewijzen was.

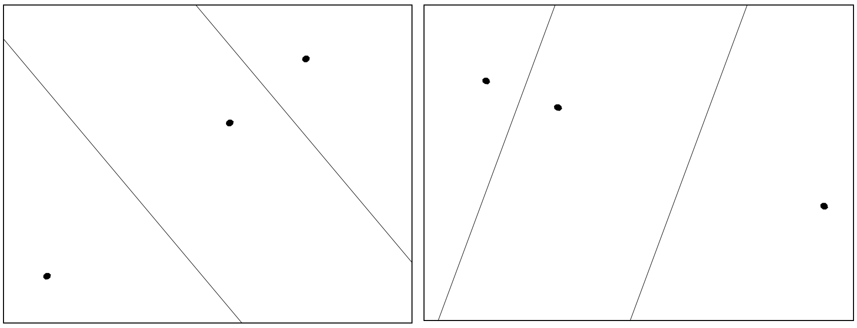
20 *Idee*: Gebruik dat *B* en D ***op*** de ‘Voronoi-grens’ van *A* en *C* liggen.

Bewijs:

$d(A, B) = d(B, C)$ (dat is gegeven). Dus *B* ligt op *mll(A, C)* volgens stelling 3.
$d(A, D) = d(D, C)$ (dat is gegeven). Dus *D* ligt op *mll(A, C)* volgens stelling 3.
Samennemen: De lijn door *B* en *D* *is* de *mll(A, C)*. Dus staat *BD* loodrecht op *AC*.

21 a. Door te eisen dat *A*, *B* en *C* een driehoek vormen.

b. De middelloodlijnen staan loodrecht op die lijn en zijn dus evenwijdig. Hergebruik van een oude figuur.



c. Dan zijn de middelloodlijnen niet evenwijdig en snijden ze elkaar dus wel.

22

a.

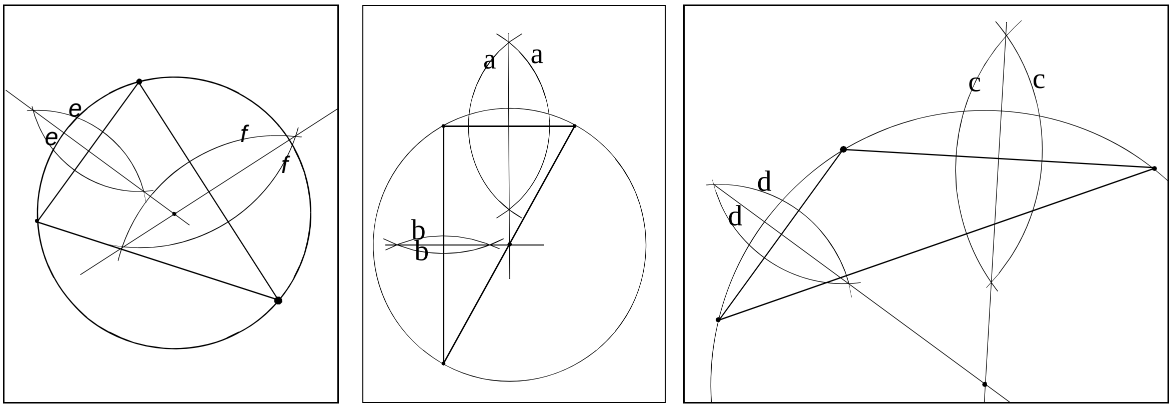
3b, opschrijven van de gelijkheden in afstand	<>	stap 1 en stap 1bis
3b, derde gelijkheid concluderen	<>	verbindingsstap
3c conclusie dat M op de derde Voronoi-grens ligt	<>	conclusiestap.

b. Stap 1 en 1bis: van o*p middelloodlijn* naar *gelijkheid van afstanden*,
Conclusiestap is andersom: van *gelijkheid van afstanden* naar *op middelloodlijn*.

23 *P* en *Q* liggen op gelijke afstanden van *A* en *B* en dus op de middelloodlijn van *A* en *B*. Stelling 3.

24 Dürer construeert met de techniek van de twee cirkels de middelloodlijnen van *a* en *b*, en ook die van *b* en *c*. Het snijpunt heet bij hem *d*. Dat snijpunt is middelpunt van de cirkel door *a*, *b* en *c*.

25 Drie voorbeelden van de constructie: (Cirkels met gelijke letters zijn even groot.)

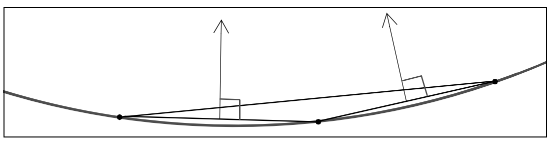


Scherphoekige driehoek: middelpunt omgeschreven cirkel ligt *binnen de driehoek.*

Rechthoekige driehoek: middelpunt omgeschreven cirkel ligt *op de driehoek*

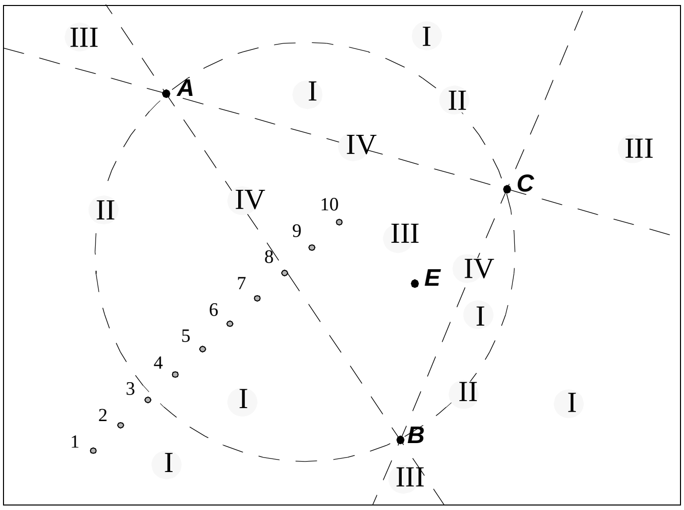
Stomphoekige driehoek: middelpunt omgeschreven cirkel ligt *buiten de driehoek*

26 Kies drie punten op de cirkel. Construeer de omgeschreven cirkel van die driehoek. De cirkel heb je al, maar de constructie levert natuurlijk ook het middelpunt.



Hoofdstuk 3: Computerpracticum Voronoi-diagrammen

13: Inleiding



1 **a.**
b.

2 **a.**
b. De deellijn van de hoek van de twee lijnen door de punten.
c.

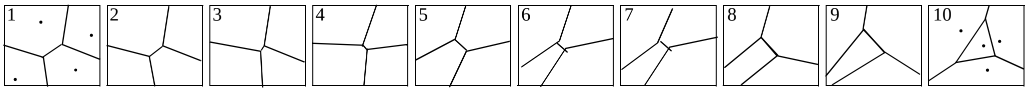
3

14: De invloed van het vierde punt

4
- **a.** Bijvoorbeeld punt *E* hier rechtsboven.
- **b.** De opdracht `cirkel(A, B, C)` doet dat precies.
- **c.** Dan zijn er twee evenwijdige grenzen. Dus moeten er drie punten op één lijn liggen. Dus de drie lijnen *AB*, *CB* en *AC*. In hun geheel!
- **d.** Type III.

5 **a.**

Voronoi:



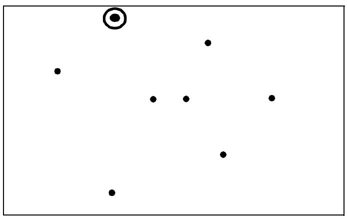
Type:	I	I	I	I	I	I	I	IV	III	III

- **b.** Als *D* over de cirkel gaat.

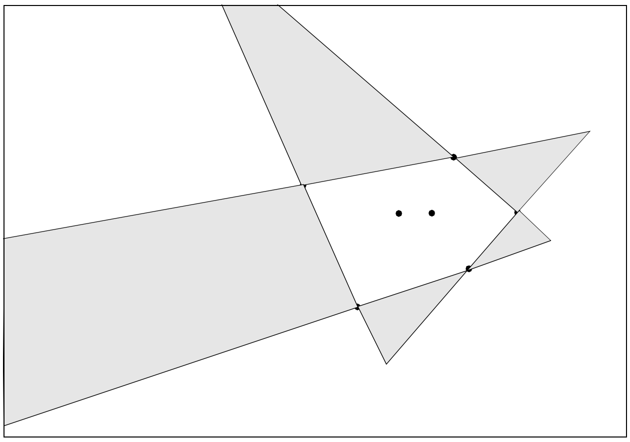
6
- **a.** Zie boven.
- **b.** Type II en IV treden alleen op als *D* op bepaalde lijnen ligt. Dat is zeldzaam.

15: Oneindig grote cellen

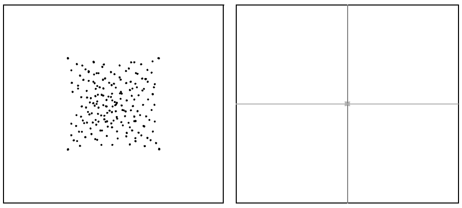
7 **a.**
- **b.** Vijf stralen uit één punt.
- **c.** Een elastiekje.
- **d.** Geen nieuwe oneindig grote cellen.
- **e.** Bijvoorbeeld:



f.



8



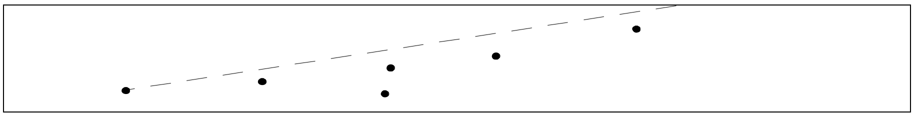
9 **a.** Ze grenzen aan elkaar.

b. Die middelpunten liggen op gelijke afstanden van *A* en van *B*.

c. Die cellen blijven aan elkaar grenzen. De middelloodlijn van AB loopt voorbij het middelpunt van de cirkel door *A*, *B* en *E* gewoon door. Daar is hij Voronoi-grens van *A* en *B*. Ook als je nog meer punten neemt in het halfvlak van de lijn *AB* aan de kant van *C* en *D*, blijft gelden dat er ver op de middelloodlijn van *AB* punten liggen waarvoor de meest nabije centra *A* en *B* zijn.

10

11



16: Extra opdrachten Voronoi-diagrammen

12 Nee, de rekentijd loopt sneller op.

13

a. De Voronoi-cellen rond Maastricht en Assen grenzen aan elkaar.
Ze liggen naast elkaar op de omhulling. Dat kun je ook zien door de lijn door die twee centra te trekken.

14 **a.**

b.

15 **a.**

b. Op enkele plaatsen ontstaat een nieuw spoortraject dat weinig routeverkorting geeft. Bijvoorbeeld Assen-Maastricht. Leeuwarden-Haarlem via Alkmaar is niet zo’n gek idee; over de afsluitdijk moet dat toch kunnen. Assen-Leeuwarden: niet doen, het is een mooi rustig gebied en veel voordeel op de omweg via Groningen levert het niet op. Voronoi vraagt ook niet om een HSL door het Groene Hart!

16

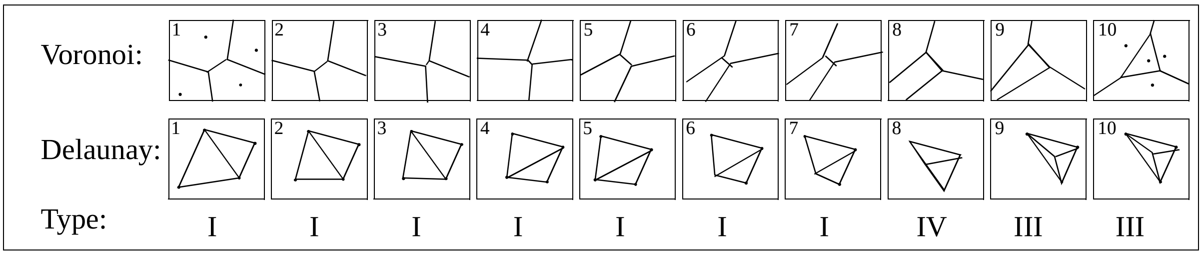
a. Een verbindingslijn tussen twee centra in de Delaunay-triangulatie zegt per definitie: deze centra hebben aan elkaar grenzende cellen. Dus is er een Voronoi-grens. En andersom ook.

b. De Voronoi-grens is een stuk van de middelloodlijn van de verbindingslijn der centra, dat is juist het verbindingslijnstuk in de Delaunay-triangulatie. Omdat de grens meer een stuk van de middelloodlijn kan zijn, hoeft het snijpunt er niet te zijn. In het kaartvoorbeeld: Arnhem-Maastricht, Den Bosch-Den Haag.

c. Rond een hoekpunt vind je drie cellen die buren zijn. Daar hoort dus precies een driehoek van Delaunay-verbindingen bij. En andersom. Dus zijn er evenveel van die driehoeken als hoekpunten.

d. Aangrenzende centra op de omhulling hebben aangrenzende cellen om zich heen. Dat is eerder vastgesteld. Dus liggen de lijnstukken van de omhulling zeker in de Delaunay-triangulatie.

17



18

a. Je ziet de lijn die ongeveer even ver van beide oevers loopt. Die wordt zo op een handige manier gevonden.

b. De punten die op gelijke afstanden van beide oevers liggen.

19

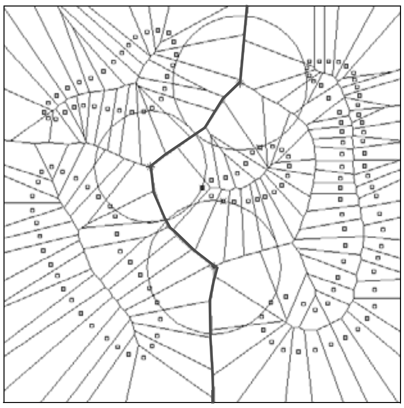
a.

b.

– Dat scheelt natuurlijk heel veel. Je zou hieruit kunnen afleiden dat aan zulke kleine eilanden een te grote invloed wordt toegekend. Een enkele verlaten rotspiek verandert de hele indeling. Vaak zijn die ver weg liggende eilanden dan ook van groot militair belang.

– Dat geeft minder verschil, maar in het verre noorden toch nog wel heel wat.

20



a.

b. Langs de lijnen die zover mogelijk van de eilanden liggen: volg steeds de grenslijnen van cellen die bij twee eilanden horen. Je hebt een keus, maar kies west-om om het middeneiland, want bij oost-om kom je langdurig dichtbij het langgerekte eiland.

21

a.

b. Oneindig groot. Gebogen aan de linkerkant.

c. De cel wordt smaller.

d. Het lijkt op een *parabool*.

e. De middens van die lijnstukken. Want de lijn staat dan loodrecht op de verbinding van zo'n midden met het centrum links op de lijn.

f. Dat volgt uit **e**. Want de raaklijn staat loodrecht op de straal.
(Later komen we hier op terug!)

g. Die staat loodrecht op de verbindingslijn der centra.

22

a. Een ovale vorm ontstaat, of iets wat op een parabool lijkt maar veel wijder is. (De juiste namen zijn ellips en hyperbool; we komen daar nog op terug).

b. Als F dichtbij de cirkel komt, zijn de figuren smal.

23

a. Een fijnere honingraat ontstaat.

b.

24

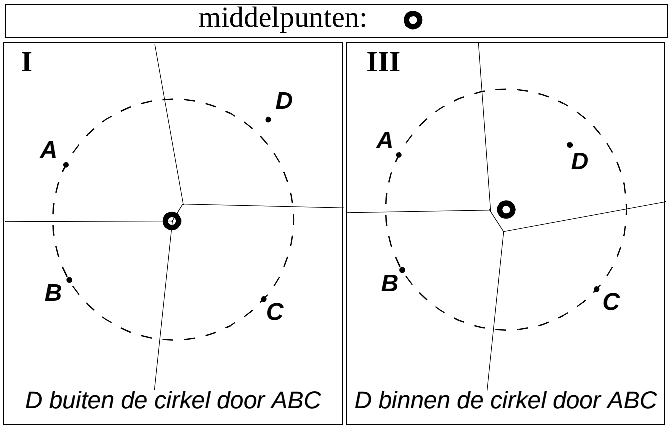
Hoofdstuk 4: Een speciale vierhoek

17: Koordenvierhoeken

1 **a.** Het middelpunt van de cirkel ligt op gelijke afstanden van A, B, C en D. Dat punt hoort bij alle vier de cellen.

b. ⊙

c. D ligt binnen de cirkel door A, B en C; daarom ligt het middelpunt van die cirkel in de cel van D.

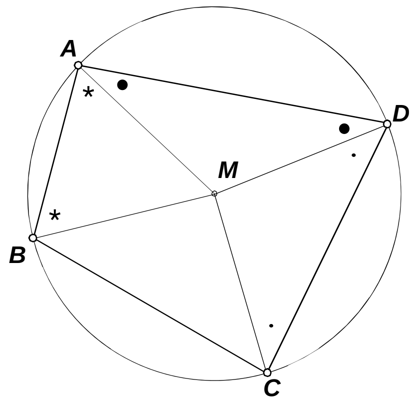


2

a.

b. De vier driehoeken zijn gelijkbenig.

c. Bij A en C samen staan dezelfde tekens als bij B en D samen. Dus – A + – C = – B + – D.



18: Bewijzen onder de loep

3 **a.** M ligt hier niet binnen de vierhoek.

b. Bij het vergelijken van de tekens in de hoeken. Dat gaat gewoon niet meer.

4

a. – *ADC*. Voor de grootte van de hoeken geldt: – *ADC* = – D_1 – – D_2.

(Zulke motiveringen als bij de laatste twee overgangen hoef je niet altijd echt aan te geven!)

– D_1 = – A_1, – A_2 = – B_1, – B_2 = – C_1, – C_2 = – D_2
(omdat de driehoeken *DMA*, *AMB*, *BMC* en *CMD* gelijkbenig zijn)

– *A* + – *C*
= (precisering hoeken)
– *BAD* + – *DCB*
= (hoeken onderverdelen)
(– A_1 + – A_2) + (– C_1 – – C_2)
= (gelijke hoeken gebruiken, daarbij van *A* en *C* naar *B* en *D* werken)
(– D_1 + – B_1) + (– B_2 – – D_2)
= (omschikken om op *B* en *D* uit te komen)
(– D_1 – – D_2) + (– B_2 + – B_1)
= (onderverdeling gebruiken)
– *ADC* + – *ABC*
= (terug naar de bedoelde hoeken)
– *D* + – *B*
= (rekenstap: $x+y = y+x$)
– *B* + – *D*.

5 De mintekens door plustekens vervangen is genoeg.

6 **a.** *M kan nog op* de vierhoek liggen.

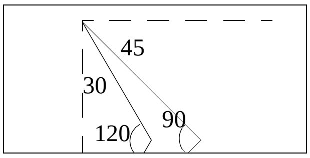
b. Neem als voorbeeld *M* op *DC*.
In dat geval werken beide bewijzen.
(Eigenlijk komt dat doordat dan $-C_2$ en $-D_2$ gelijk aan 0 zijn. Dan maakt het ook helemaal niet uit of er mintekens of plustekens voor staan.)

7

a. Uitkomsten zijn 180 of liggen daar heel dichtbij.
b. Een redelijk vermoeden is: de som van twee overstaande hoeken in een vierhoek is 180 .

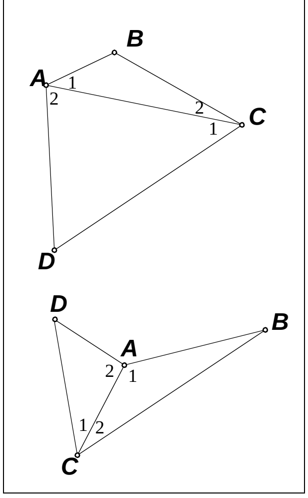
8 Allevier 360 :

a. $4 \cdot 90 = 360$
b. $60 + 120 + 60 + 120 = 360$
c. $2 \cdot 90 + 45 + 135 = 360$
d. De scherpe hoeken zijn (zie figuurtje) $90 - 30 - 45 = 15$.
$90 + 2 \cdot 15 + (360 - 120) = 360$



9 **a.**
b.
c.

bij en 9 a en b



Bewijs EEN

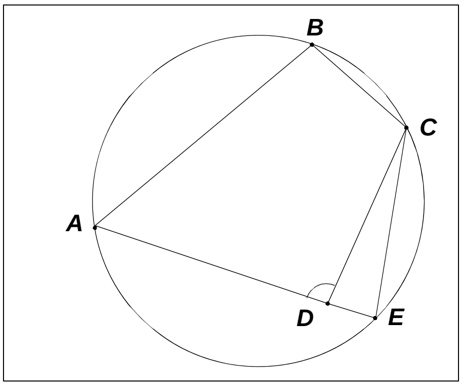
$-A + -B + -C + -D$
= (onderverdelen van de hoeken)
$-A_1 + -A_2 + -B + -C_1 + -C_2 + -D$
= (omschikken naar driehoeken)
$-A_1 + -B + -C_2 + -C_1 + -D + -A_2$
= (hoekensom in driehoek is 180×, twee keer)
$180 + 180$
$= 360$

Bewijs TWEE

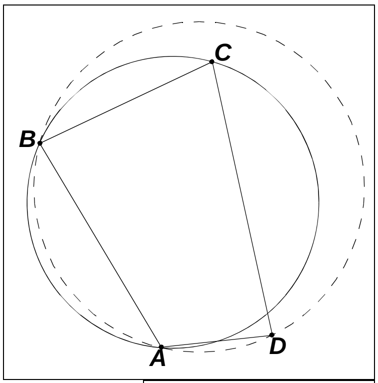
$-A_1 + -B + -C_2 = 180$	(hoekensom in driehoek *ABC* is 180)
$-C_1 + -D + -A_2 = 180$	(hoekensom in driehoek *ADC* is 180)
$-A_1 + -B + -C_2 + -C_1 + -D + -A_2 = 180 + 180$	(samennemen)
$-A + -B + -C + -D = 360$	(herschikken)

10

a.
b. $-DCE + -CED + -EDC = 180$.
Maar ook geldt: $-ADC + -EDC = 180$.
Dan moet dus gelden: $-ADC = -DCE + -CED$
c. $-ADC > -CED$.
d. Omdat $-B + -E = 180$ volgens de voorlopige stelling van de koordenvierhoek, geldt nu wegens de ongelijkheid bij **b**:
$-B + -D > 180$.

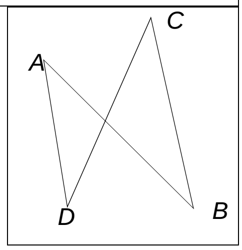


11



- **a.** Er kunnen geen andere punten dan *A* en *B* op zowel de gestippelde cirkel als de getekende cirkel liggen. Want dan zouden die cirkels geheel samenvallen, volgens stelling 5. Dus als *D* buiten cirkel *ABC* ligt, ligt de hele boog *BAD* buiten cirkel *ABC* en ligt *C* binnen cirkel *ABD*.
- **b.** $-A + -C > 180$.
- **c.** Omdat de vier hoeken samen 360   zijn, moet nu gelden: $-B + -D < 180$.

12 *CD* snijdt dan *AB*; bijvoorbeeld zo:

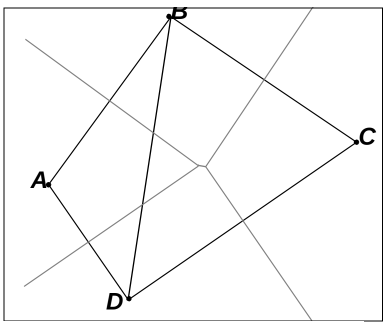


Een **definitie** van een hier bruikbaar soort vierhoek zou kunnen zijn:
Een vierhoek ABCD bestaat uit vier punten, en de vier lijnstukken AB, BC, CD en DA, waarbij

er geen drie punten op één lijn liggen,
de lijnstukken AB en CD elkaar niet snijden
en de lijnstukken AD en BC elkaar niet snijden.

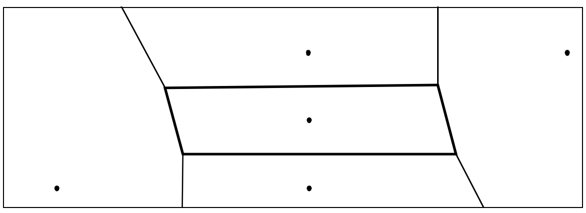
19: Koordenvierhoeken gebruiken

13



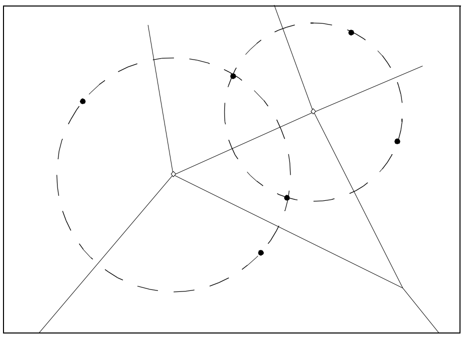
- **a.** Volgens de geodriehoek is $-B + -D = 183$ .Dus ligt *D* binnen de cirkel door *A*, *B* en *C*. Cellen *B* en *D* grenzen aan elkaar.
- **b.**
- **c.**
- **d.** Je wist al welke cellen aan elkaar grensden.

14 Dat is een vergissing en hier is een tegenvoorbeeld.



15

16



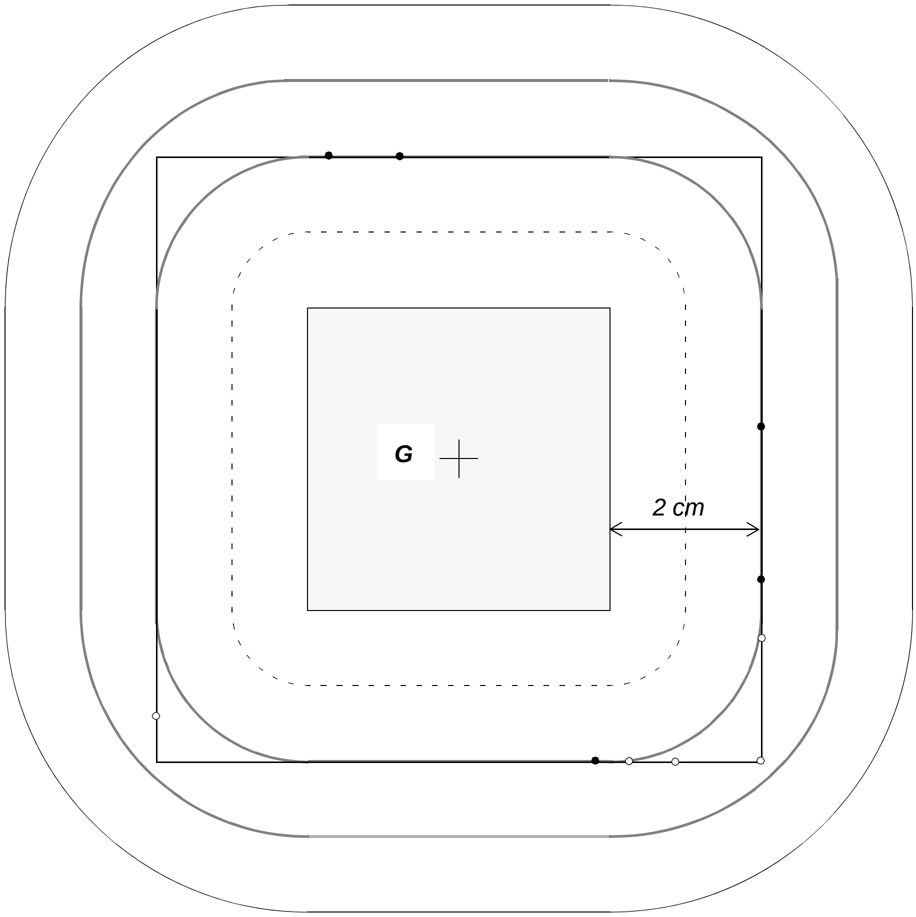
Hoofdstuk 5: Verkenning iso-afstandslijnen

20: Iso-afstandslijnen, afstand tot gebieden

1

a. Een cirkel met een straal van 12 mijl.
b. Een cirkel met een straal van 12 mijl + 680 meter.

2



a. wel : • niet: ◦
b. iso-1 cm-lijn - - - -; iso-2 cm-lijn ―― ; iso-3 cm-lijn ――; iso-4 cm-lijn ――.
c. *De iso-300-lijn is geen cirkel want er zitten vier rechte stukken van elk 4 cm lang in.*

3

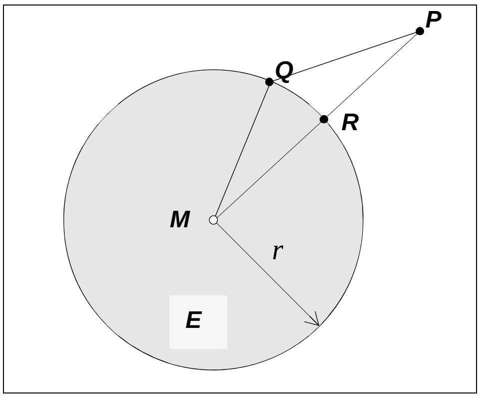
a. Teken de lijn door *P* loodrecht op *l*. Die snijdt *l* in *R*. *d(P, G) = d(P, R)*.
b. Met de driehoeksongelijkheid en met Pythagoras.

4

a. Op het snijpunt van *MP* met de cirkel.

b. *d(P, Q) + d(M, Q) > d(P, M).*
Omdat *Q* en *R* op de cirkel liggen, geldt*:*
d(R, M) = d(M, Q).
d(P, M) = d(P, R) + d(M, R) omdat *R* op *PM* ligt.
Invullen geeft *d(P, Q) + d(M, R) > d(P, R) + d(M, R).*
Dus*: d(P, Q) > d(P, R).*

c. Omdat *d(P, E) = d(P, R)* geldt:
d(P, E) = d(P, M) - r.

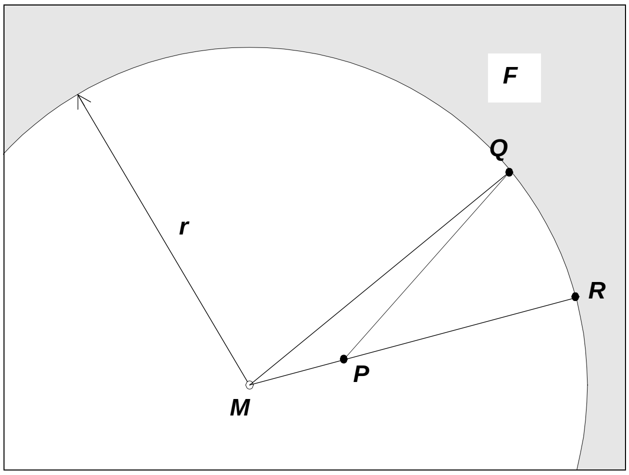


5

a.

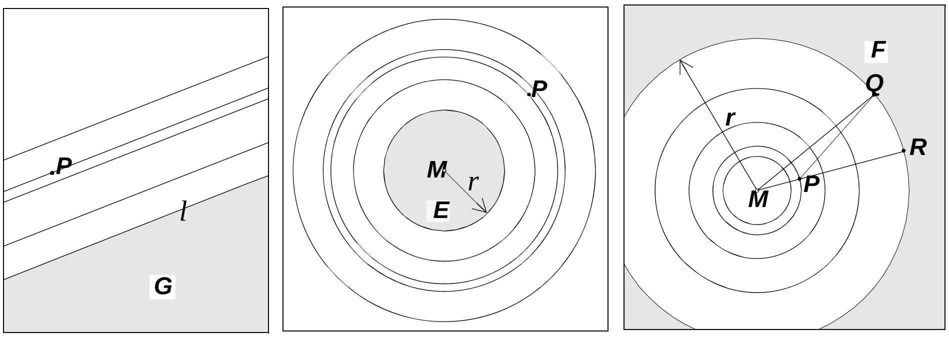
b. De driehoeksongelijkheid in driehoek *MPQ* zegt*:*
d(M, R) = d(M, Q) < d(M, P) + d(P, Q) .
Omdat ook geldt:
d(M, R) = d(M, P) + d(P, R)
moet dus gelden:
d(P, Q) > d(P, R).

c. *d(P, F) =r - d(P, M) .*



6 **a.** Verkleind, schaal 1 : 2.

b. Uit de uitdrukkingen voor de afstand in de **c**-vragen. Uit die formules volgt dat de punten op een vaste afstand van de cirkel ook op een vaste afstand van het middelpunt *M* liggen.
Wat uitvoeriger bij bijvoorbeeld opgave 4:



(1)		*d(P, E) = d(P, M) - r*	*(opgave 4 c)*
(2)	**Als** *P* op de iso-*a*-lijn ligt:		
		d(P, E) = a	*(definitie iso-a-lijn)*
(3)		*d(P, E) = d(P, R)*	*(volgens opgave 4a)*

Uit 1, 2 en 3 volgt:

d(P, M) = d(P, R) + d(R, M) = a + r

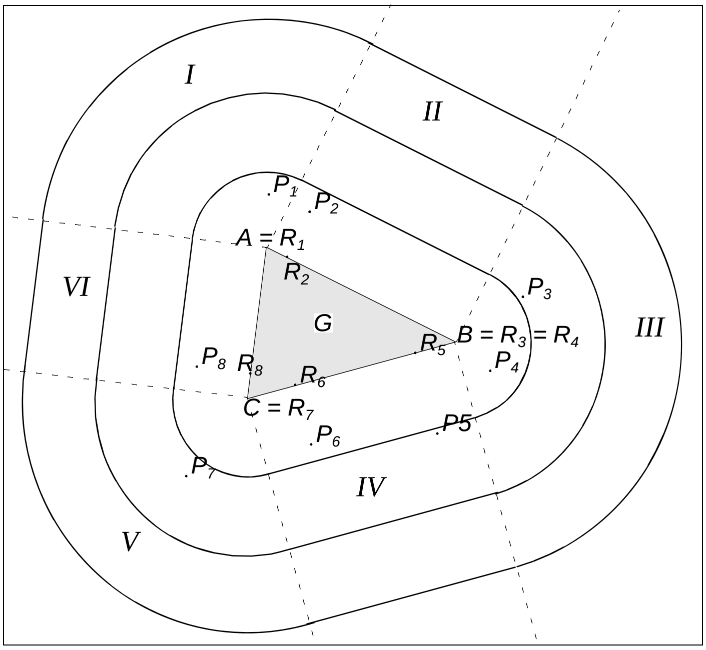
a + r is constant, dus:

dan ligt *P* op een cirkel met straal *a + r* en middelpunt *M.*

Nu moet ook aangetoond worden: *elk punt op de cirkel met straal a + r en middelpunt M, ligt op de iso-a-lijn van E.*
Dat gaat zó (wat korter genoteerd dan de eerste helft van het bewijs):
Als $d(P, M) = = a + r,$
en R is het punt op de cirkel op het lijnstuk PM, geldt ook:
$$d(P, E) = d(P, R) = d(P, M) – d(R, M) = a + r – r = a,$$
dus P op de iso-a-lijn van E.

7 Schaal 1 : 2.

a.



b. De stippellijnen zijn de grenzen van de zones.

c. Zone I, III en V (de zones bij de hoekpunten): stukken van de cirkel om het hoekpunt.
Zone II, IV en IV (de zones voor de lijnstukken): stukken rechte lijn evenwijdig aan de zijden.

d. Dat de rechte stukken even lang zijn. Dat de cirkels glad overlopen in de rechte stukken.

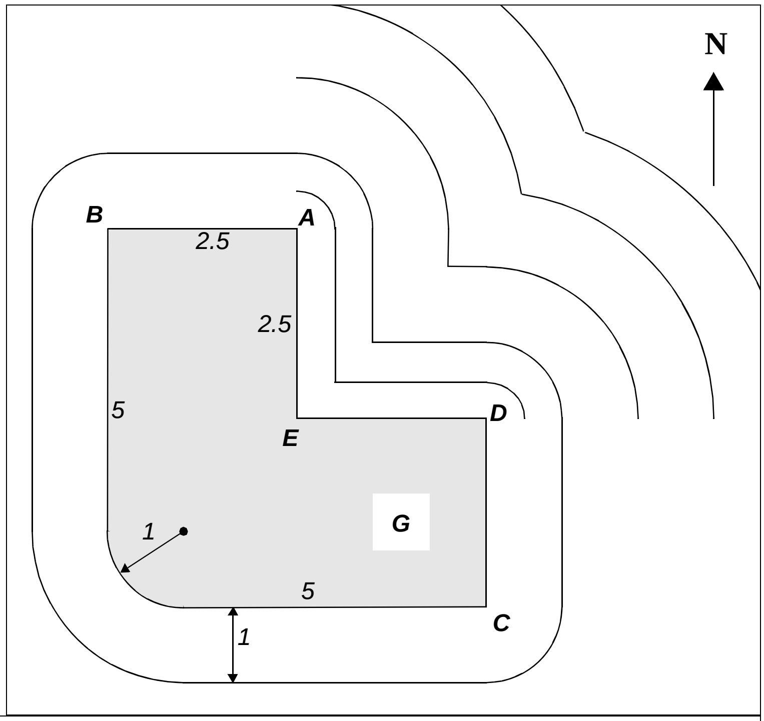
e. Alleen de cirkelbogen zijn extra vergeleken met de driehoek zelf. Van elke iso-afstandslijn kunnen de drie bogen samengelegd worden tot een cirkel. De extra lengtes zijn dus: 4p, 8p, 16p.

8 **a.** De punten op de iso-afstandslijnen in de buurt van een kaap liggen allemaal op dezelfde afstand van de kaap. De kaap is dus het midden van de cirkel waar dat stuk iso-afstandslijn op ligt.

b. Deze lijnen staan loodrecht op de stukken rand die naast de kaap liggen.

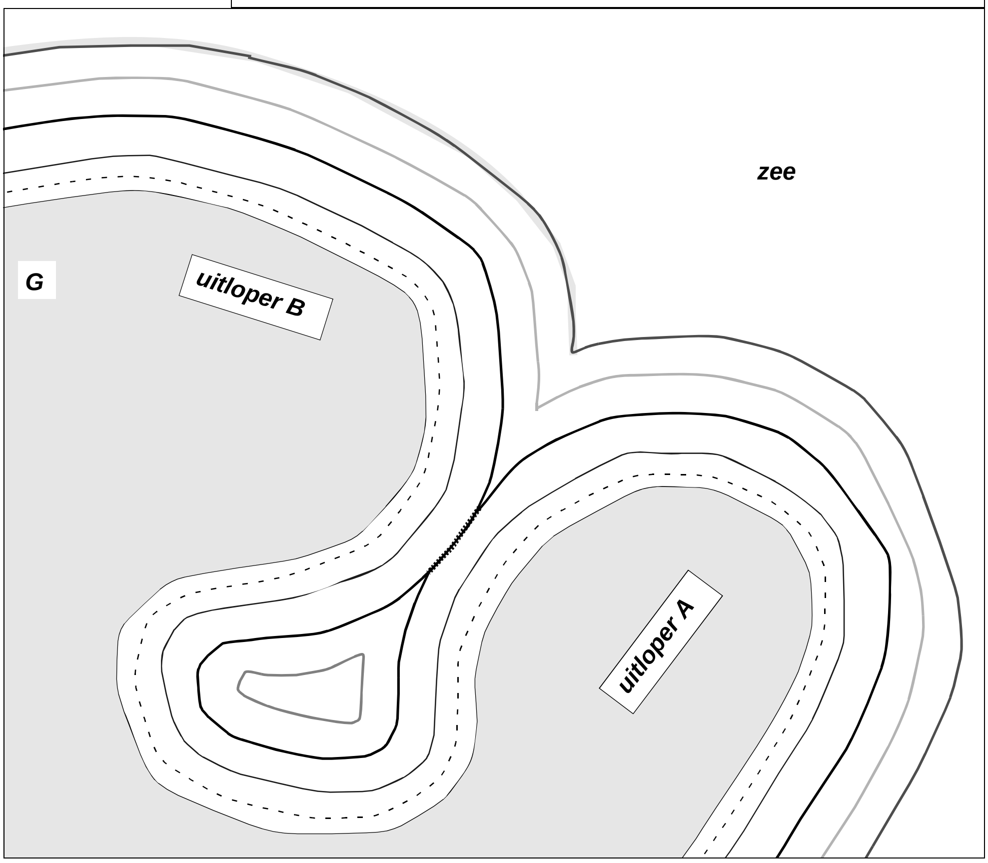
9

a.
b. Op de deellijn van hoek *AED*
c. In de iso-0.5-lijn en de iso-2-lijn zit een knik van 90^{o}. De iso-3 en iso-4-lijn hebben knikken van ongeveer 108^{o} en 128^{o}.
d. Tot 2.5. Want tot dan wordt de knik gevormd door de twee stukken rechte lijn die onder 90^{o} met elkaar staan.
e. Omdat de knik gevormd wordt door snijding van twee cirkels en de iso-afstandslijn in de knik van de ene cirkel op de andere overgaat, zal er altijd een knik zijn.



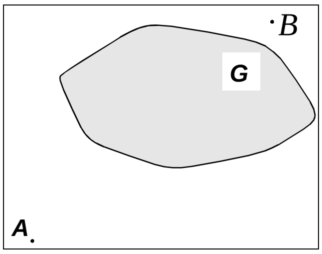
10

a. Ongeveer als in de figuur.
b. De iso-1.5-lijn valt in twee stukken uiteen; de iso-0.2-lijn niet.
c.
d.

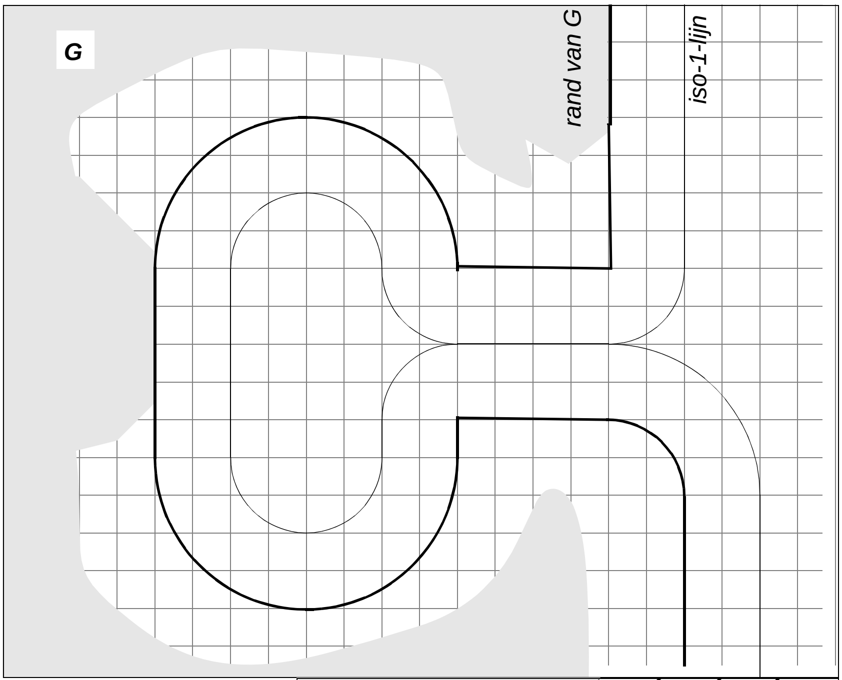


11

12

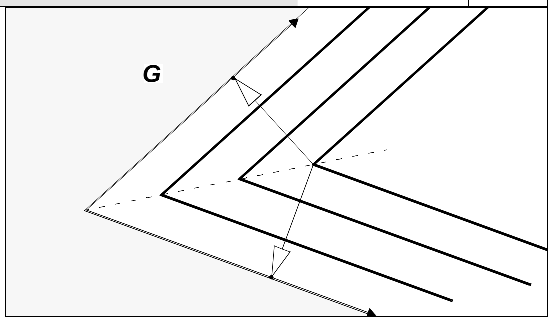


a. Ja.
b.



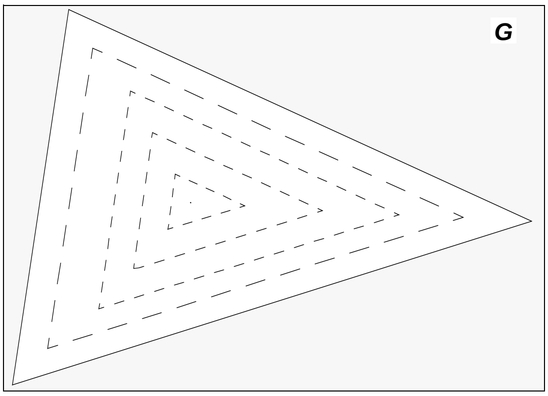
21: Deellijnen

13 (schaal 1:2)



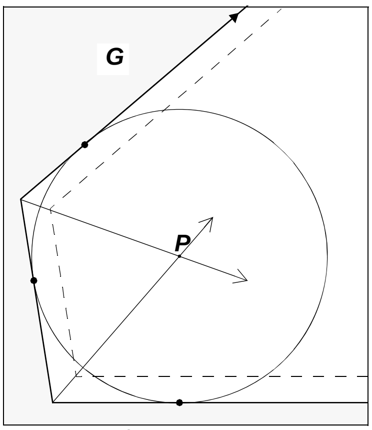
a.
b. De deellijn van de hoek.
c. In dit geval steeds 2.
d.

14



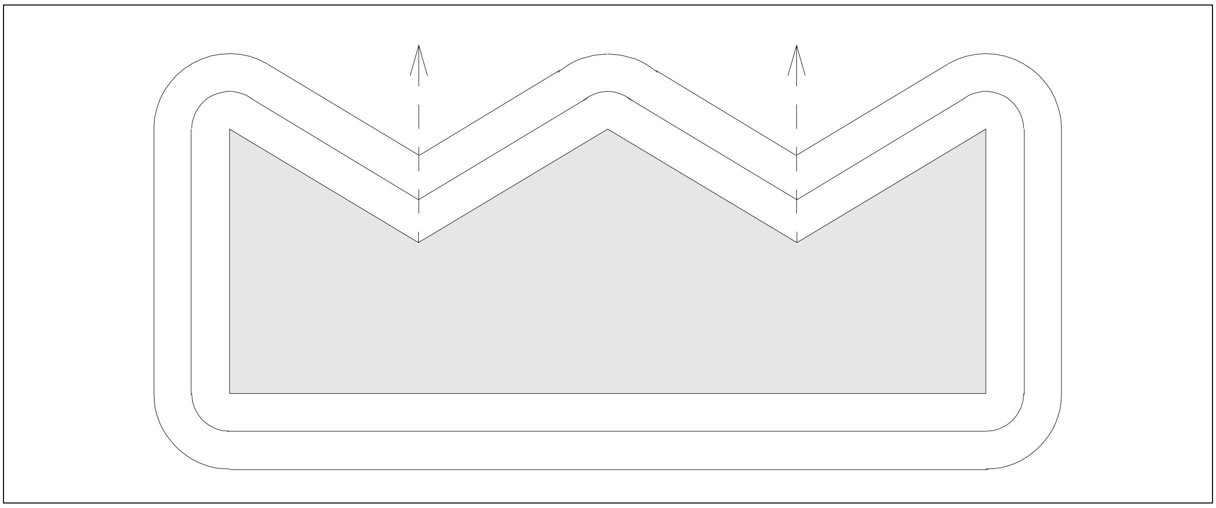
a.
b. Het zijn allemaal driehoeken met dezelfde vorm.
De laatste driehoek wordt één punt.

15



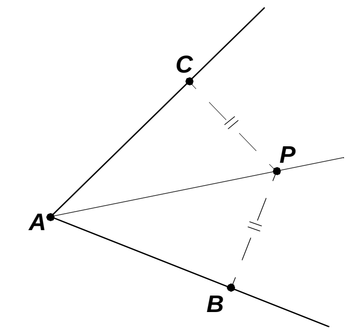
a. Nee. Bij grote afstanden is er maar één knik.
b. Teken de deellijnen vanuit beide hoeken. Als een punt op één deellijn ligt, heeft het voetpunten op twee zijden. Als het punt op beide deellijnen ligt, heeft het voetpunten op alle drie de zijden.

16



22: Stellingen over deellijnen

17 *Gegeven:* *P* ligt op de kniklijn van –*CAB*.
Te bewijzen: De lijn *AP* deelt –*CAB middendoor.*
Bewijs: Omdat *P* op de kniklijn ligt, zoals in de linkerfiguur, waarin *C* en *B* de voetpunten van *P* zijn, zijn de driehoeken *APC* en *APB* rechthoekig. Omdat de schuine zijden gelijk zijn en ook *PC* en *PB* even lang zijn, zijn de driehoeken geheel gelijk. Dus –*CAP* = –*BAP*.



‘kniklijn’: d(P, C) = d(P, B)

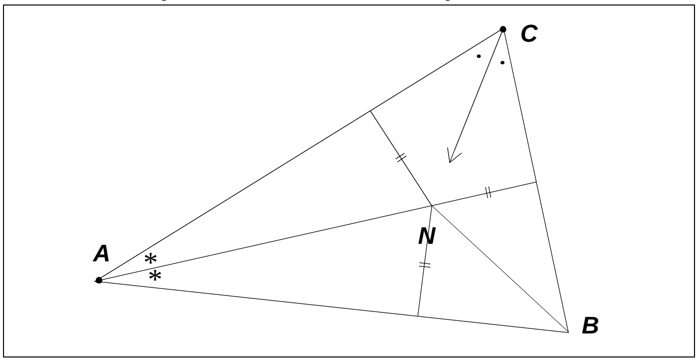
18 Als twee halve lijnen *a* en *b* in een eindpunt *S* samenkomen en daar een hoek van minder dan 180 maken, is de verzameling van punten waarvoor geldt:

d(P, a) = d(P, b)

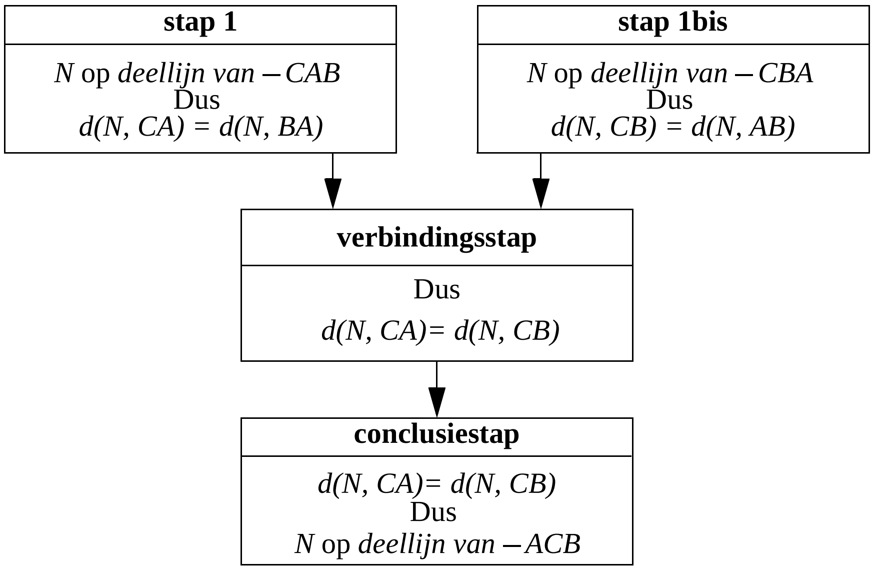
een halve lijn *c* vanuit *S* die gelijke hoeken maakt met *a* en *b*.
Voor punten *P* binnen de hoek *ASB* geldt: (*A* en *B* zijn hier punten op respectievelijk *a* en *b*, ongelijk aan *S*)

als *d(P, a) < d(P, b)*, dan geldt –*ASP* < –*BSP*
als *d(P, a) = d(P, b)*, dan geldt –*ASP* = –*BSP*
als *d(P, a) > d(P, b)*, dan geldt –*ASP* > –*BSP*.

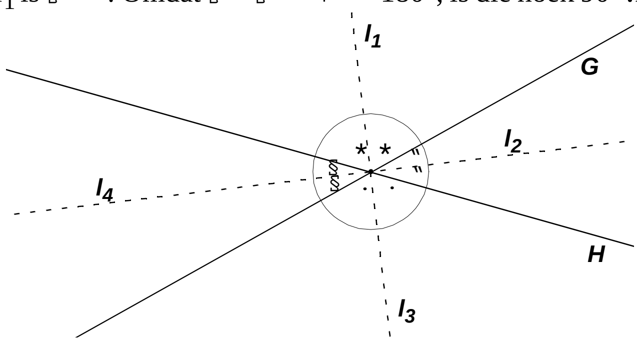
19 Laat *N* het snijpunt van de deellijnen uit *A* en die uit *B* zijn.



Het bewijs dat *N* ook op de deellijn uit *C* ligt, past precies in het schema.

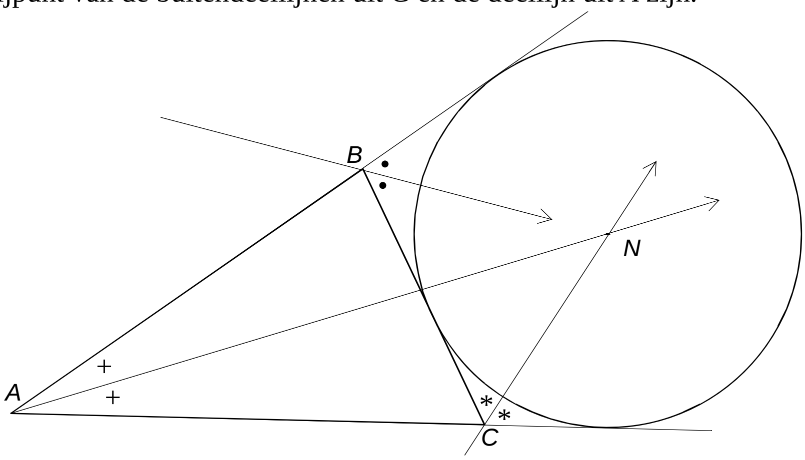


20 De hoek tussen l_4 en l_1 is § + *. Omdat § + § + *+ * = 180 , is die hoek 90 .Evenzo is de hoek tussen



l_1 en l_2 90 . In totaal is de hoek tussen l_4 en l_2 dus 180 .De twee halve l_4 en l_2 lijnen vormen dus één rechte lijn.

21 Laat *N* het snijpunt van de buitendeellijnen uit *C* en de deellijn uit *A* zijn.



Dan geldt weer:

$$d(N, \textit{lijn } AC) = d(N, \textit{lijn } BC)$$

en ook:

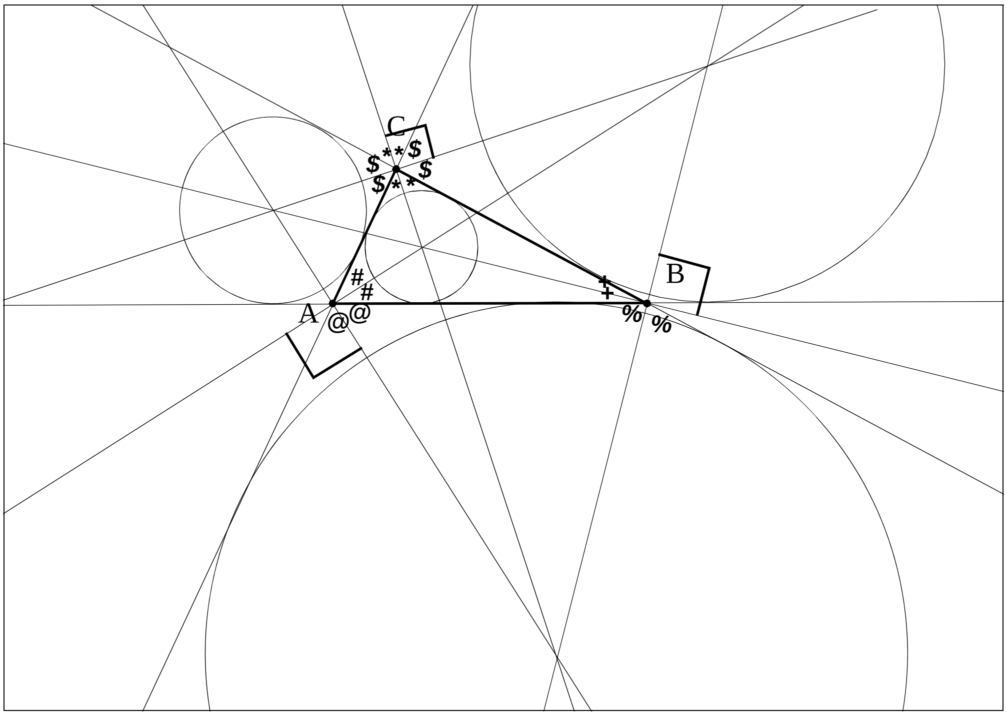
$$d(N, \text{lijn } AC) = d(N, \text{lijn } AB)$$

Daaruit volgt:

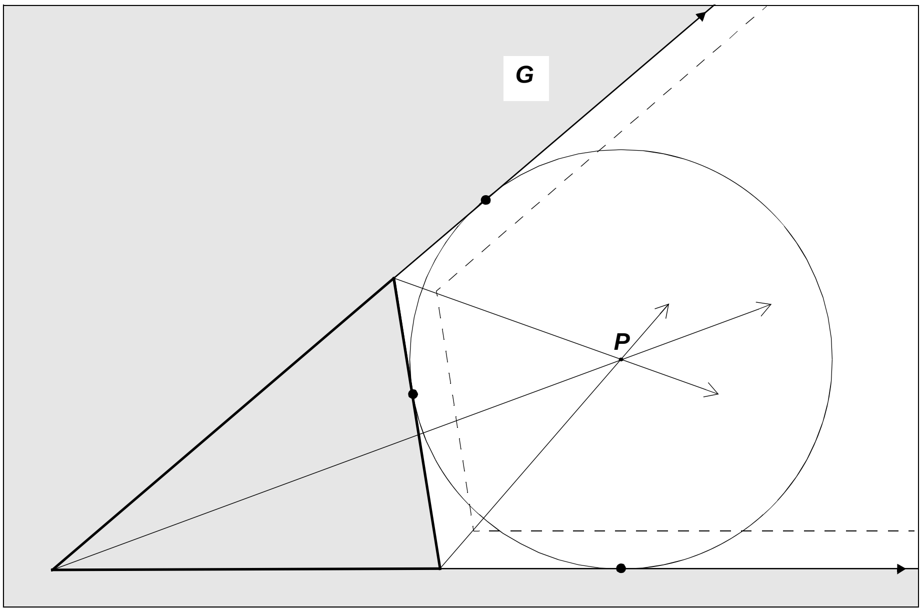
$$d(N, \text{lijn } BC) = d(N, \text{lijn } AB).$$

N ligt dus ook op de buitendeellijn uit *B*. (*N* ligt immers buiten de driehoek).

22



23



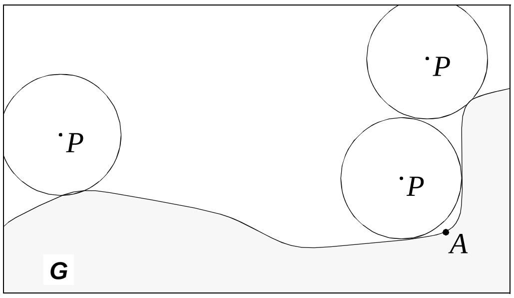
24 Meestal niet.
Bij gelijkbenige driehoeken gaat de deellijn tussen de gelijke zijden wel door het raakpunt op de derde zijde. Bij gelijkzijdige driehoeken gebeurt het dus drie keer.

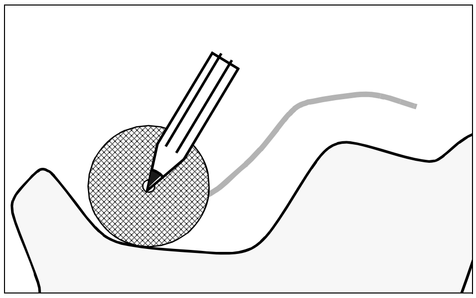
23: Stootcirkels

25 a.

b. Ja.

26

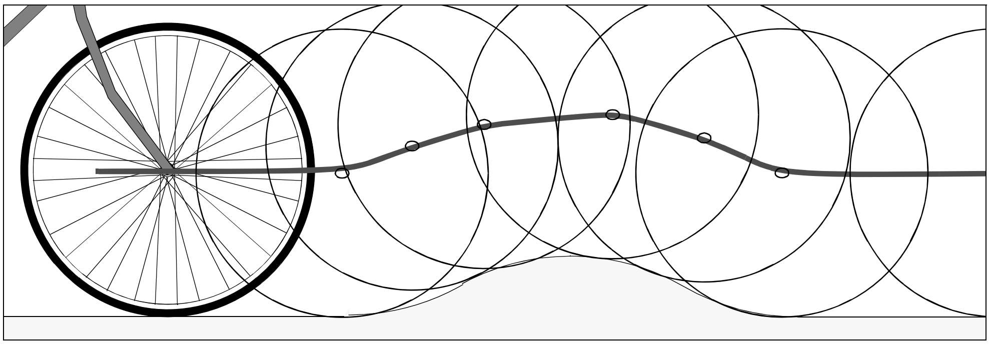




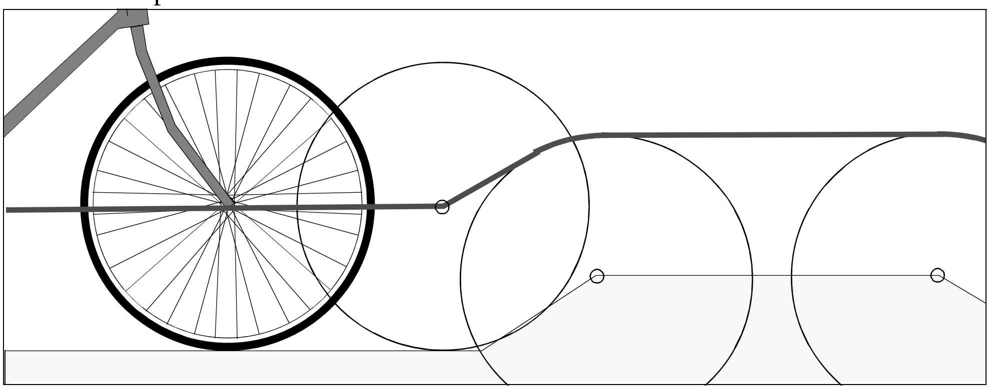
27

a.

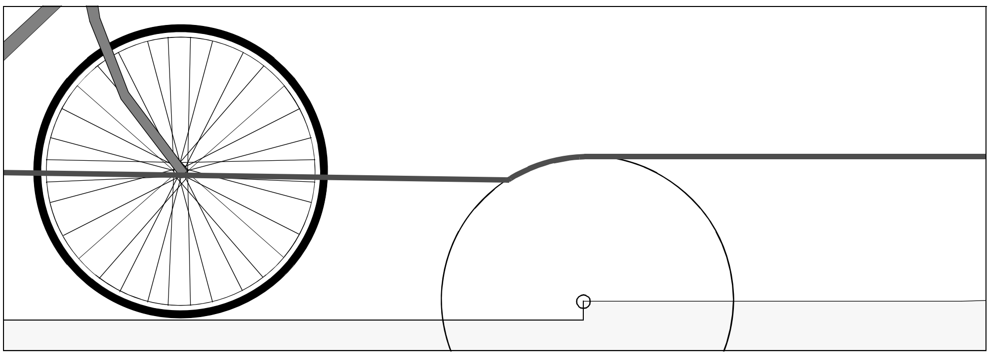
1. bobbel



2. verkeersdrempel



3. lage stoep



b. Twee. Bij begin en einde.

c. Het maakt niet zoveel uit als je naar de knikhoeken kijkt. Als de stoep wat lager was, zou de klap op de verkeersdrempel harder zijn.

28 Ja, in opgave **25**. Maar niet heel formeel.

29 Bij de twee baaien met nauwe ingangen gaat het niet op. Opgave **10** en **11**.

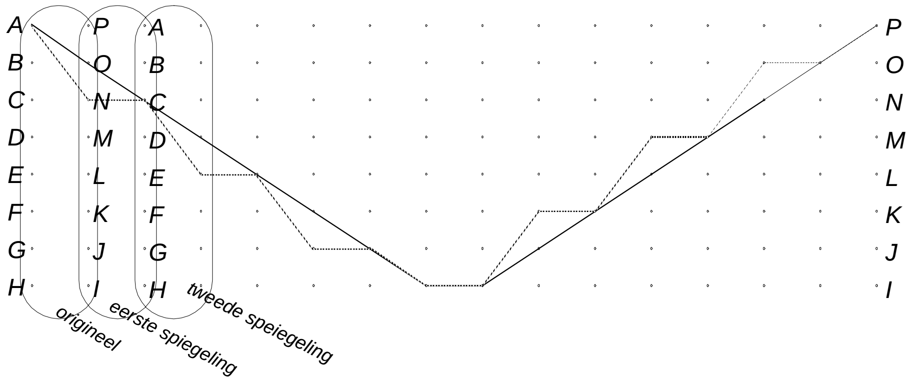
Hoofdstuk 6: kortste wegen

24: Van schoenveters naar kortste wegen

1

2

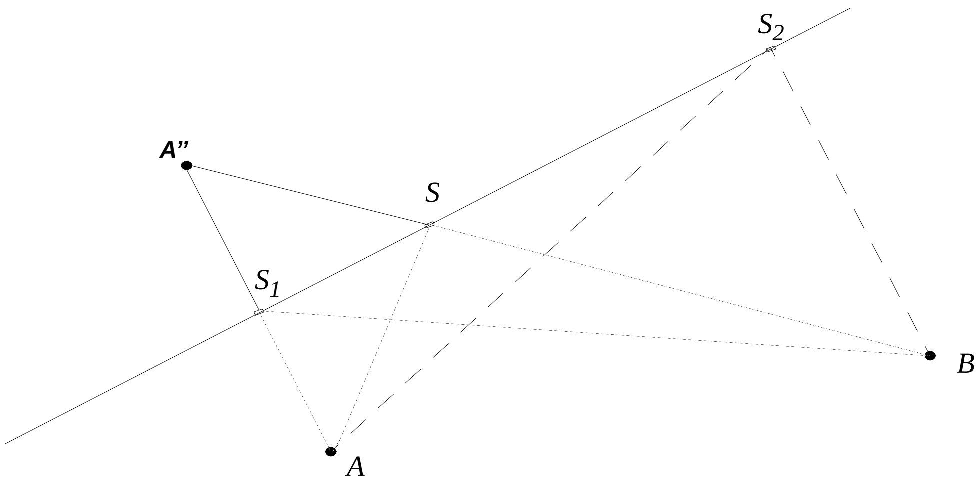
a.



b. De leng-
tes blijven gelijk bij spiegelen.

c. De Amerikaanse. Want die gebruikt de kortste weg van *A* naar het laagste punt *I* en weer terug van *H* naar *P* ook.

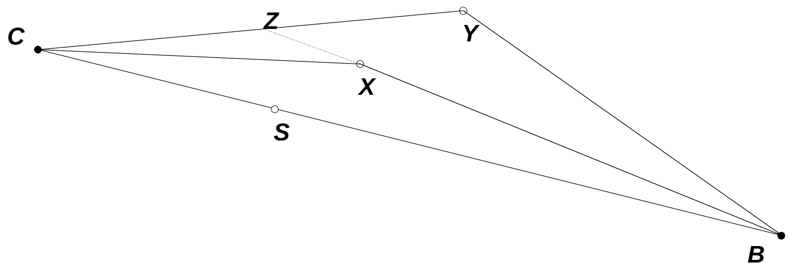
3



a.

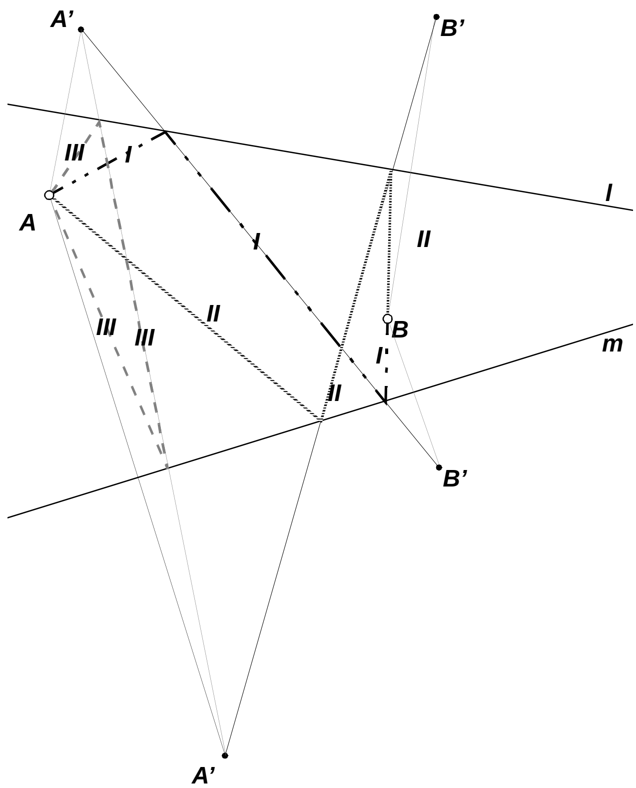
b. *$-A'SS_1 = -S_2SB$ (Overstaande hoeken bij snijdende lijnen zijn gelijk).*
$-A'SS_1 = -ASS_1$ (Omdat de driehoeken gelijk zijn, vanwege het spiegelen).
Dus $-ASS_1 = -S_2SB$.

4 Alleen wat nodig is, staat in de figuur en *A*' is tot *C* hernoemd.



Gegeven: *X* ligt binnen de driehoek *CBY.*
Te bewijzen: *d(C, X) + d(X, B) < d(C, Y) + d(Y, B)*
Bewijs:
Vergelijk de *X*- route met de route via *Z*:
d(C, X) + d(X, B) < d(C, Z) + d(Z, X) + d(X, B) = d(C, Z) + d(Z, B)
Vergelijk de *Z*- route met de route via *Y*:
d(C, Z) + d(Z, B) < d(C, Z) + d(Z, X) + d(X, B) < d(C, Z) + d(Z, Y) + d(Y, B) = d(C, Y) + d(Y, B)
Klaar!

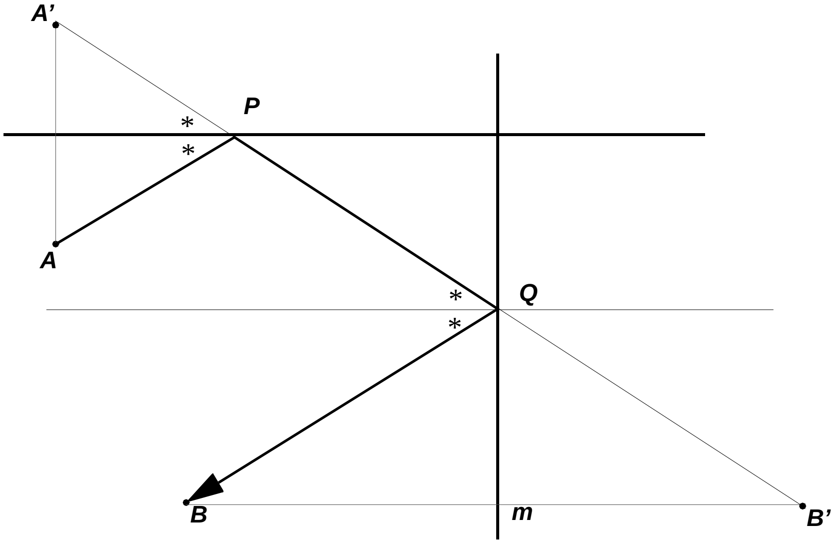
5
- **a.** route I - I - I.
- **b.** route II - II - II
- **c.** route III - III - III.



6

a.

b. AP en QB zijn evenwijdig. In de figuur zijn alle hoeken met * gelijk.



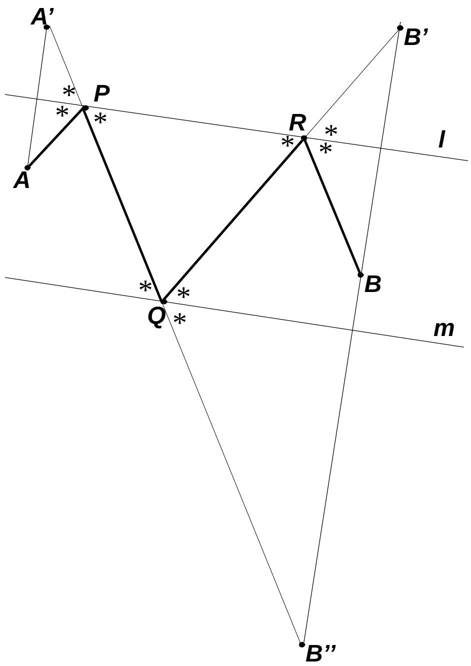
7

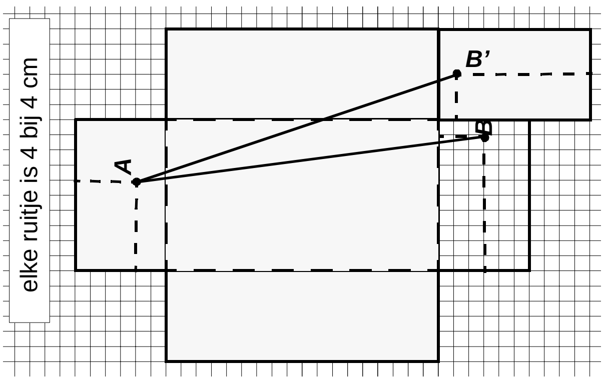
a. Op het spiegelbeeld van B in l. Noem dat B'.

b. Op het spiegelbeeld van B' in m. Noem dat B''.

c. A' is het spiegelbeeld van A in l. $A'B''$ is getrokken. Je vind P en Q.
Trek dan QB'. Je vindt R.

d. Omdat alle hoeken met een * gelijk zijn. Er zijn vele Z-hoeken!

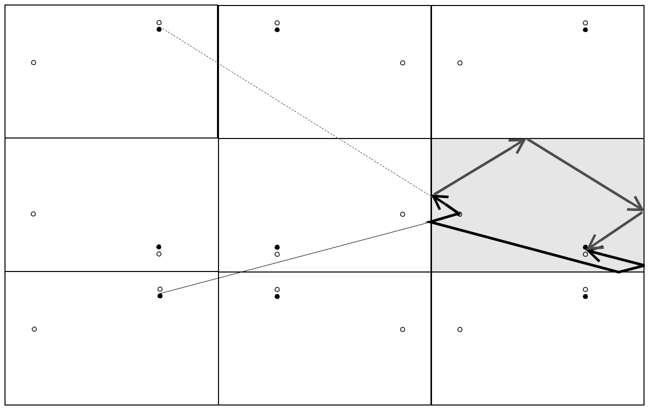




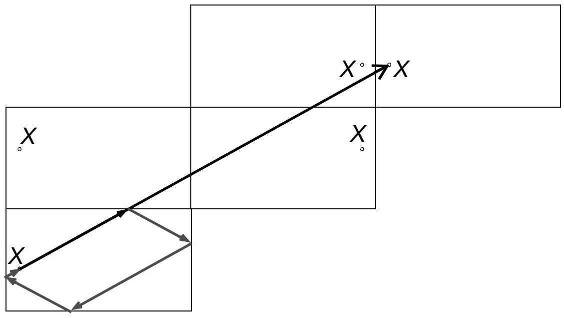
8 Op de uitslag kunnen kortste routes als rechte lijnen worden getekend.
Er zijn echter meerdere manieren om de uitslag te maken.
In de figuur wordt gering voordeel behaald door het vlakje met mier B aan de lange kant vast te maken.

$$|AB] = \sqrt{46^2 + 6^2} = 46{,}389 \qquad |AB'| = \sqrt{42^2 + 14^2} = 44{,}271$$

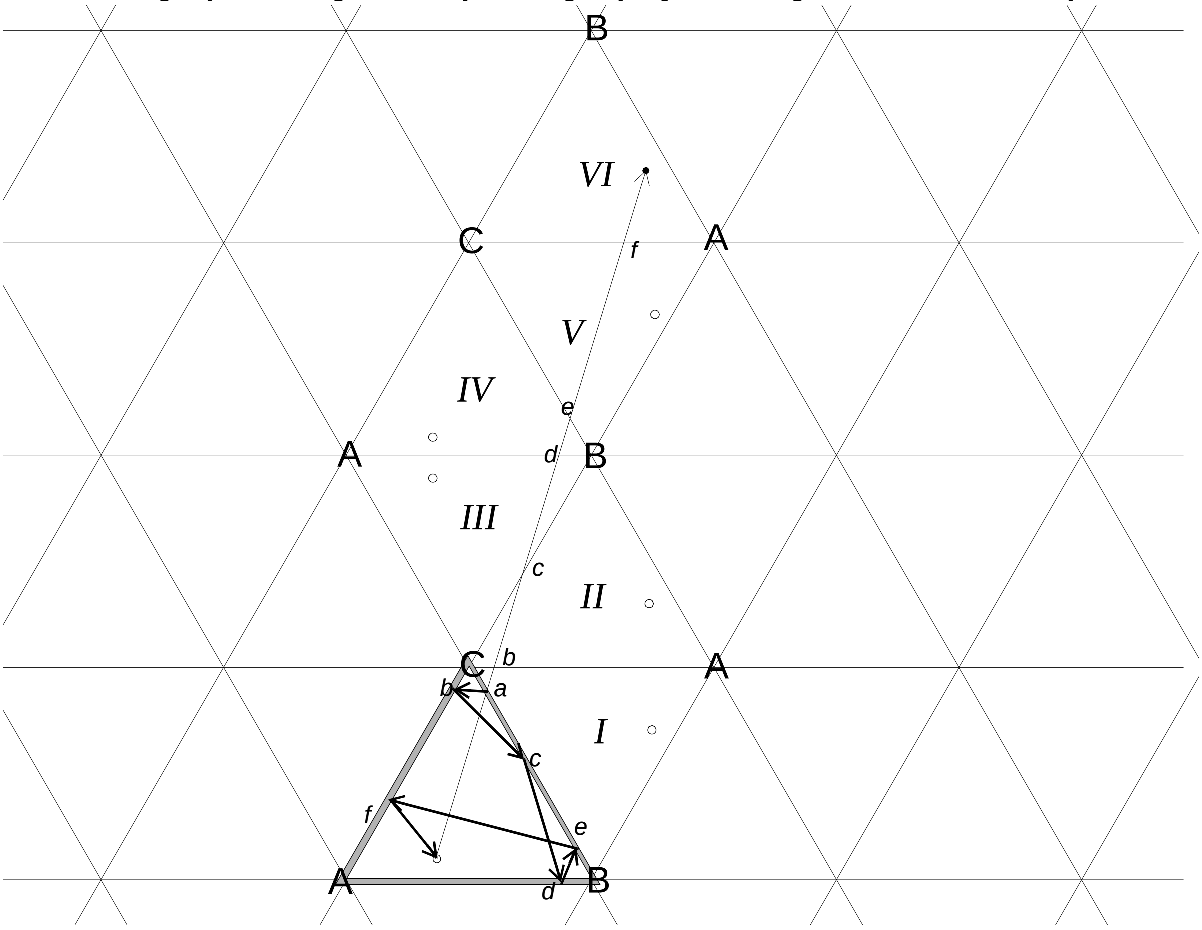
9 In de figuur is het biljart gespiegeld, gespiegeld, gespiegeld, gespiegeld.
Elke lijn van *A* naar een spiegelbeeld van het doel, dat via drie banden wordt bereikt is goed. Een voorbeeld is uitgewerkt.



10 Uitwerking van deze vraag is praktisch gelijk aan die van de vorige.
Er zijn natuurlijk nog andere mogelijkheden die je vindt door op een ander spiegel-spiegel-spiegel-spiegel-beeld van *X* te richten.

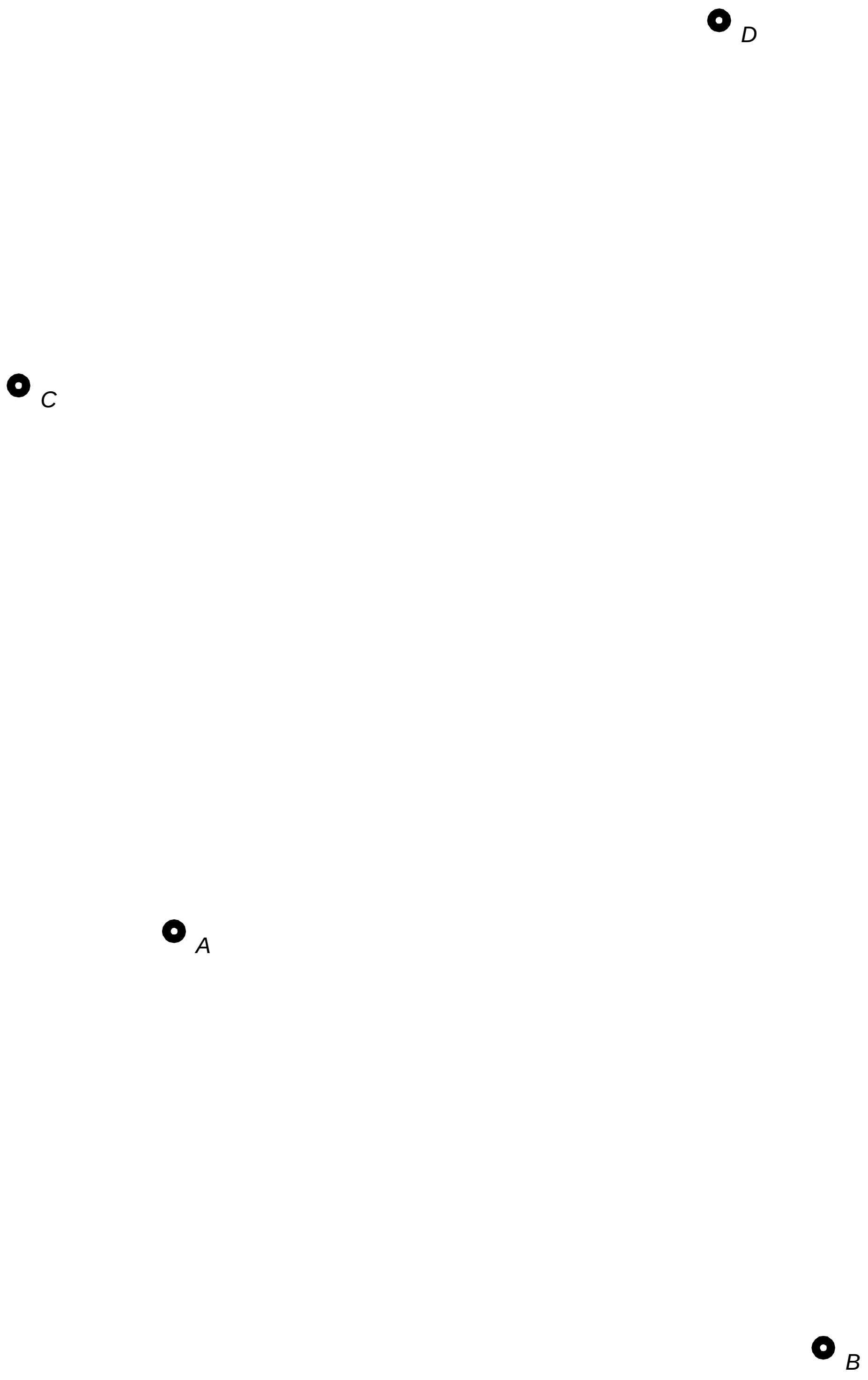


11 Met werkblad F erbij valt het wel mee. Letters zetten op de hoeken van de spiegelbeelden van de driehoek helpt de koers te vinden. De spiegelbeelden zijn genummerd I, II, III enzovoort.
Van de lange lijn naar de gebroken lijn: stuksgewijs opmeten langs de banden van dit biljart.



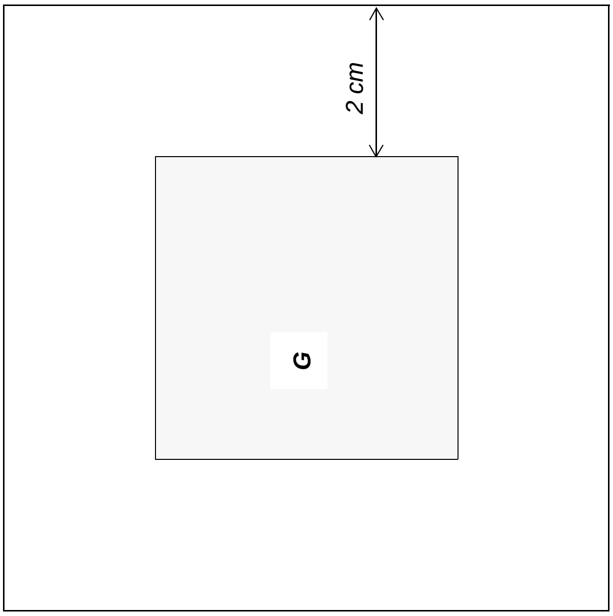
Werkbladen

werkblad A: Vouwen naar Voronoi (bij hoofdstuk 1, opgave 3)

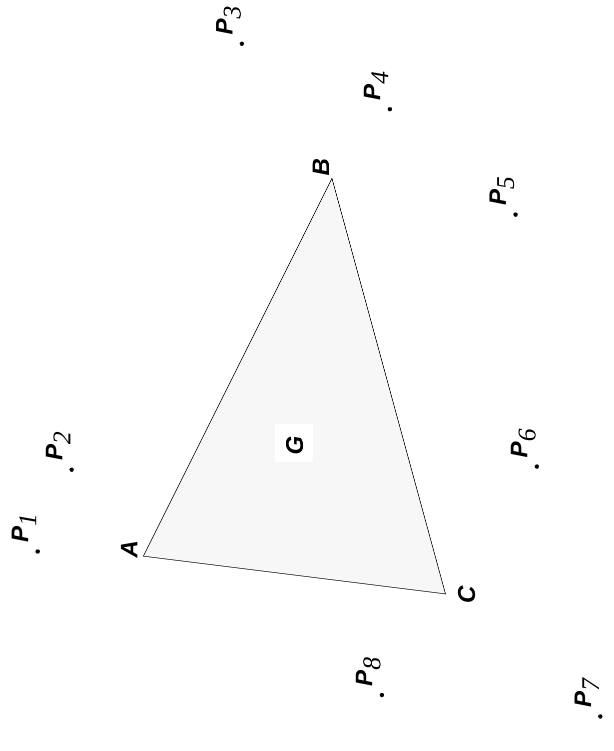


werkblad B: Nederland (bij hoofdstuk 3, opgave 13)

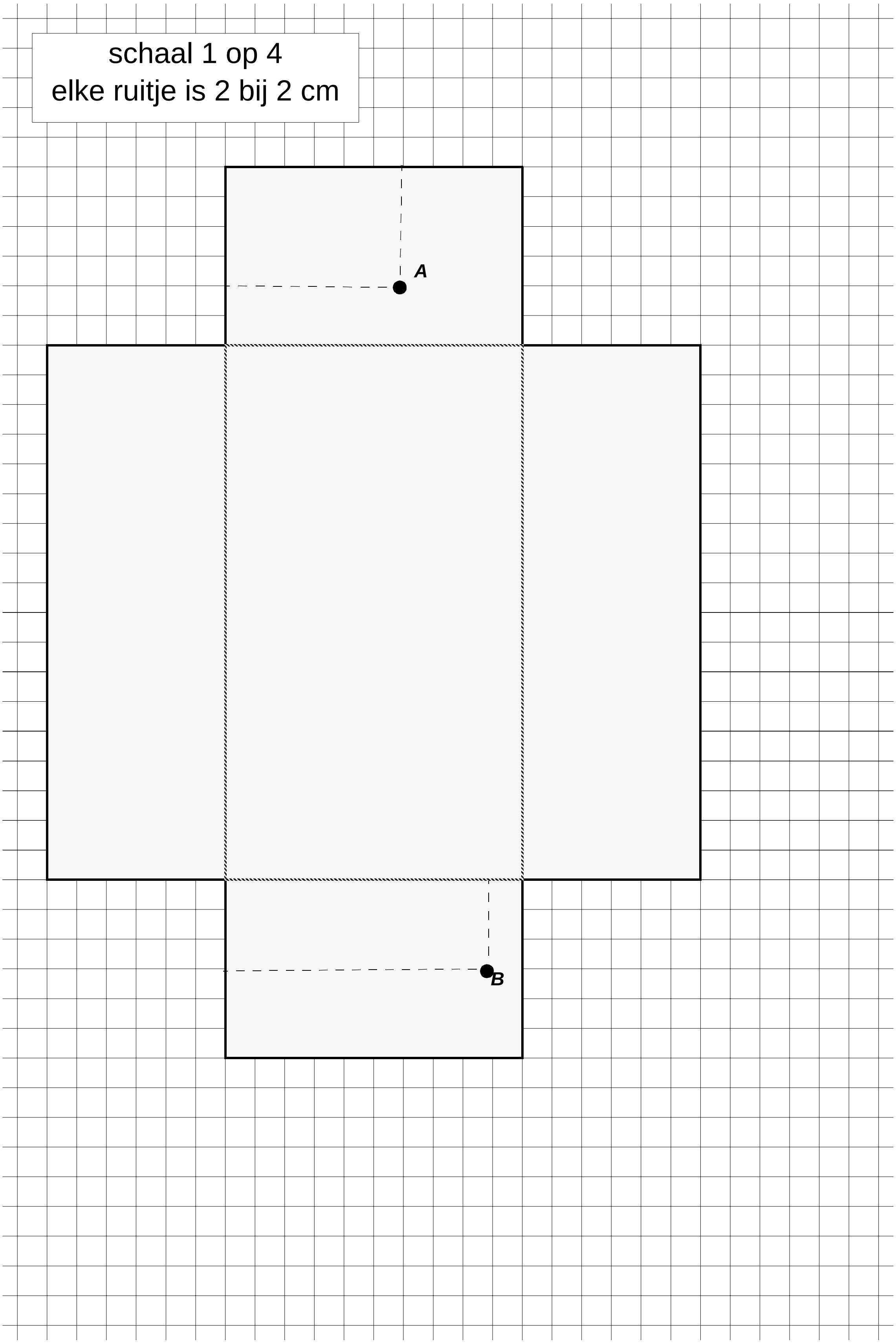
werkblad C: Iso-afstandslijnen om vierkant. (bij hoofdstuk 5, opgave 2)



werkblad D: Driehoek, voetpunten, sectoren (bij hoofdstuk 5, opgave 7)



werkblad E: Mier op schoenendoos (bij hoofdstuk 6, opgave 8)



werkblad F: Driehoeken (bij hoofdstuk 6, opgave 11)