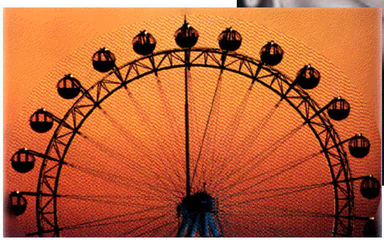
NAAM:

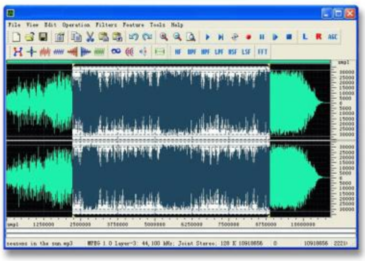
KLAS:

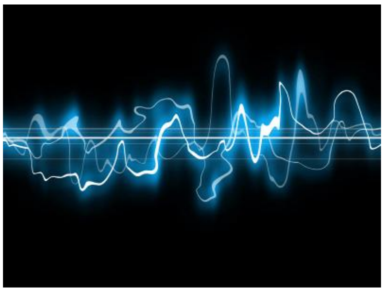
SaLVO!

Lesbrief Geluid

trillingen en sinusfuncties







NATUURKUNDE

KLAS 5 VWO

SaLVO!

Dit lesmateriaal is een onderdeel van het samenwerkingsproject SaLVO! dat als doel heeft om meer samenhangend onderwijs te ontwikkelen in de bètavakken.

Overzicht projectmateriaal

De leerlijn SaLVO! rond verhoudingen, verbanden, formules en grafieken is opgebouwd uit een aantal delen bij verschillende vakken:

biologie = B, economie = E, informatiekunde = I, natuurkunde = N, scheikunde = S en wiskunde = W.

deel	titel	vak(ken)	leerjaar
1	Verhoudingen en evenredigheden	W	2 HV
2	Een verband tussen massa en volume	N	2 HV
3	Vergroten en verkleinen	N, W	2HV
4	Omgekeerd evenredig verband	W	2/3 HV
5	Planeten en Leven	B, N, S, W	2/3 HV
6	Economie en procenten	E, W	3 HV
7	Verhoudingen bij scheikundige reacties	S	3 HV
8	Formules en evenredigheden	N	3HV
9	Vergelijkingen in de economie	E, W	3 HV
10	Exponentiële verbanden	I, N, W	3 HV
11	Evenredigheden en machten	W	4 HV
12	Verbanden beschrijven	N	4 HV
13	Exponentiële functies	B, N, S, W	5 V
14	Periodieke functies	N, W	5 V

Colofon

Project SaLVO! (Samenhangend Leren Voortgezet Onderwijs)

Auteur Kees Hooyman
Versie december 2009

M.m.v. St. Bonifatiuscollege, Utrecht
Geref. Scholengemeenschap Randstad, Rotterdam
Freudenthal Inst. for Science and Mathematics Education, Univ. Utrecht

Voorwoord

De lesbrief ‘Geluid, trillingen en sinusfuncties’ is geschreven voor 5 vwo en hoort bij het vak natuurkunde. In de natuurkunde vormen goniometrische verbanden slechts een klein onderdeel van het vak, daardoor wordt in het middelbaar onderwijs vaak weinig aandacht besteed aan de oorzaak van een dergelijk verband. Extra aandacht voor het ontstaan van zo’n verband en de wiskundige achtergrond daarbij kan leerlingen helpen zich een beter beeld te vormen van het natuurkundig proces. Tegelijk worden de wiskundige vaardigheden van de leerlingen versterkt.

Deze lesbrief behandelt een deel van de examenstof bij het onderwerp geluid en is bedoeld ter vervanging van een deel van het hoofdstuk van de reguliere onderwijsmethoden. De lesbrief beslaat in totaal ongeveer vier lessen.

Deze lesbrief besteed aandacht aan het proces waardoor bij een harmonische trilling een goniometrisch verband ontstaat. Aan de hand van de eigenschappen van een massa-veersysteem wordt een dynamisch model gebouwd dat het ontstaan van sinusfuncties kan beschrijven/verklaren. Daarnaast worden wiskundige instrumenten toegepast om deze relatie analytisch te bewijzen.
In de lesbrief wordt ook aandacht besteed aan het ontstaan van de formule voor de trillingstijd van een massa-veersysteem: $T = 2\pi\cdot\sqrt{(m/C)}$ en de formule voor de slingertijd: $T = 2\pi\cdot\sqrt{(l/g)}$.
In de laatste paragraaf wordt onderzocht hoe het geluid van een muziekinstrument is opgebeouwd uit de som van sinusfuncties.

Dit katern maakt deel uit van een lessenreeks rondom verbanden, formules en grafieken. In deze reeks wordt de samenhang tussen wiskunde en de andere bètavakken versterkt.

Samenhang met deel 14

In deel 14 van het SaLVO-materiaal komen de eigenschappen van periodieke functies in een veel breder kader aan bod. Deel 14 is dan ook zo geschreven dat het door meerdere vakken samen uitgevoerd kan worden. De samenhang tussen de vakken wordt op die manier veel sterker neergezet.
Deze lesbrief is een meer bescheiden vorm van samenhang, waarbij enkel in de natuurkundeles een duidelijk stuk wiskunde aan bod komt. Het kan ook de aanleiding vormen voor een mooi gesprek tussen docenten wiskunde en natuurkunde.

SaLVO! - Lesbrief Geluid
1 Trillingen & frequentie

Een geluidsbron is een voorwerp dat trilt, bijvoorbeeld een gitaarsnaar of de lucht in een blaasinstrument. Die trillingen worden door de lucht doorgegeven en dat noemen we geluid.

Kernvraag	• *Wat bepaalt de frequentie van een geluidsbron?*
Kernvraag	• *Op welke manier trilt de bron? Welke verschillen zijn er tussen een zuivere toon en het geluid van een muziekinstrument?*

Instap

Geluid maken

Een trillende gitaarsnaar maakt geluid. De toonhoogte of frequentie van deze trilling is op verschillende manieren te veranderen.

a. Een hoge toon wordt veroorzaakt door een snelle trilling. Noem twee manieren waarop je een gitaarsnaar hoger kunt laten klinken.

Figuur 1 – De snaren van een gitaar zijn niet allemaal even dik.

Bij een gitaarsnaar zie je vaak zware en lichte snaren.

b. Heb je voor een snelle trilling een zware of licht snaren nodig?

De beweging wordt veroorzaakt door een kracht. Bij een stemvork is het de stijfheid van de benen van de stemvork die voor een *terugdrijvende kracht* zorgt.

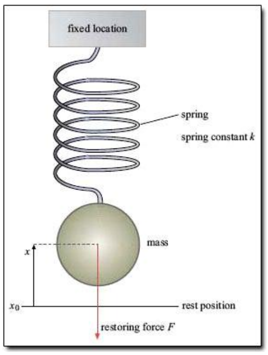
c. Een hoge toon wordt veroorzaakt door een snelle trilling. Heb je voor een snelle trilling een grote of een kleine terugdrijvende kracht nodig?

Als je een gitaarsnaar korter maakt dan wordt de toon hoger.

d. Verander je daarbij de massa, de terugdrijvende kracht of beide?

Figuur 2 – Drie stemvorken

e. Op de foto zie je twee stemvorken. De linker stemvork is dikker en korter. Welke stemvork produceert de hoogste toon? Leg uit.



Figuur 3 – In een massa-veersysteem zorgt de terugdrijvende kracht voor een versnelling of vertraging.

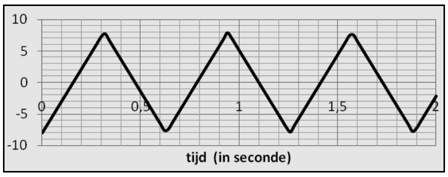
1 Massa-veer-systeem

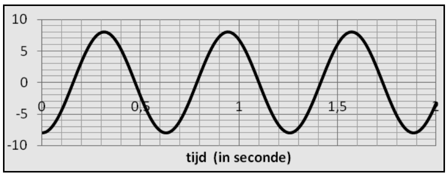
De trilling van een muziekinstrument is te vergelijken met de beweging van een gewichtje aan een metalen veer. Een belangrijke eigenschap van een metalen veer is dat de veerkracht evenredig is met de uitrekking van de veer. Daardoor is bij een massa die aan de veer hangt de resultante kracht *evenredig met de uitwijking* uit de evenwichtsstand. Deze evenredigheid is zichtbaar in de veerconstante *C*, die wordt uitgedrukt in newton per meter (N/m).

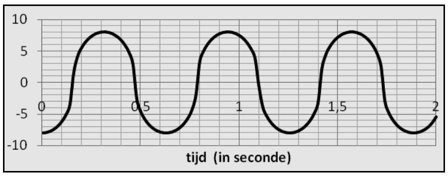
a. Leg uit hoe je met de veerconstante kunt berekenen hoe groot de kracht op de massa is als die bijvoorbeeld 5 cm uit de evenwichtsstand is.

Een gewichtje dat aan een metalen veer hangt wordt een stukje naar beneden getrokken en losgelaten.

b. Op welke manier zal het gewichtje gaan bewegen? Kies tussen een van de onderstaande figuren.







Figuur 4 – Op welke manier beweegt een massa-veersysteem?

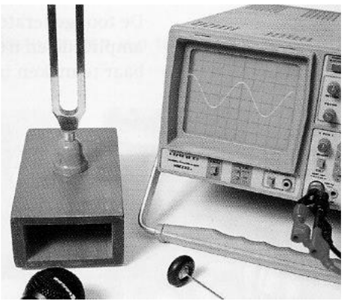
c. Waarom heb je niet gekozen voor een van de andere figuren? Wat 'klopt' er niet aan die afbeeldingen waardoor het niet bij de beweging past?

Tijdens de beweging verandert de snelheid voortdurend, ook de versnelling verandert steeds. Dat wordt veroorzaakt door de kracht.

d. Op welke posities is de snelheid het grootst? Teken die posities in grafiek die je gekozen had.

e. Op welke posities is de versnelling het grootst? Teken ook die posities, maar met een ander symbooltje.

f. Hoe verandert de grafiek als de kracht groter wordt? En als de massa groter wordt? Beschrijf in woorden hoe de grafiek dan verandert.



Figuur 5 - Een oscillogram maken

2 Experiment - Trilling in beeld brengen

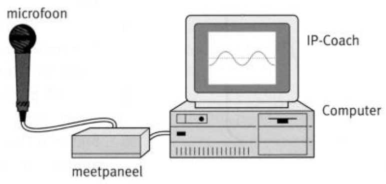
Voor het maken van een oscillogram heb je een microfoon nodig en een oscilloscoop (of een computer met meetpaneel).

a. Lijkt het oscillogram van een stemvork op de grafiek die je gekozen hebt?

b. Wat verandert er aan het oscillogram als het geluid harder of zachter wordt? En als de toon hoger of lager gemaakt wordt?

Maak ook een oscillogram van verschillende muziekinstrumenten.

c. Noteer minstens één verschil tussen een oscillogram van een stemvork en een oscillogram van een muziekinstrument.



Figuur 6 - Een oscillogram maken met de computer. Een sensor registreet de beweging.

d. Maak met een krachtsensor een oscillogram van een massa-veersysteem Lijkt het oscillogram van een massa-veersysteem op dat van een stemvork of van een muziekinstrument?

e. Kun je nu de conclusie trekken dat bij een stemvork de kracht evenredig met de uitwijking is?

3 Onderzoek: Trillingstijd en massa

De frequentie van een trillend voorwerp hangt af van de massa en van de sterkte van de veer. Een grotere massa betekent een tragere trilling, daarbij hoort een grotere trillingstijd en dus een lagere frequentie.
In dit onderzoek is de onderzoeksvraag:

Is de trillingstijd evenredig met de massa?

a. Doe eerst een voorspelling over de uitkomst van het onderzoek.

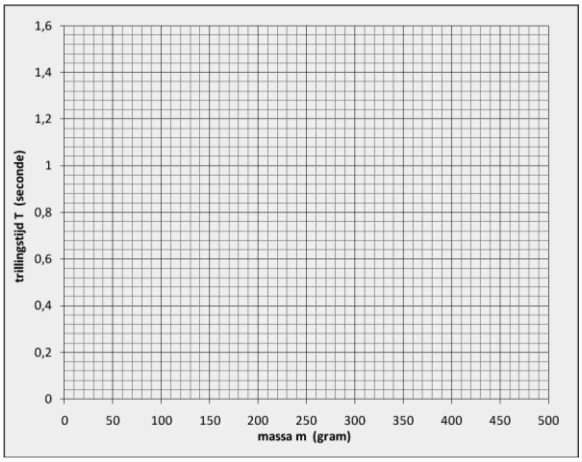
Gebruik voor het onderzoek een veer met veerconstante C = 10 N/m.

b. Start met een massa van 100 gram en meet de tijd voor 5 of 10 trillingen. Bereken daaruit de trillingstijd.

c. Welke trillingstijd verwacht je als m twee keer zo groot wordt? En bij een 4× zo grote massa?

d. Voer het onderzoek uit. Gebruik minimaal vijf en maximaal negen verschillende massa's. Noteer de resultaten in de tabel.

massa *m* (gram)	trillingstijd *T* (seconde)



Figuur 7 – Grafiek van de trillingstijd en de massa.

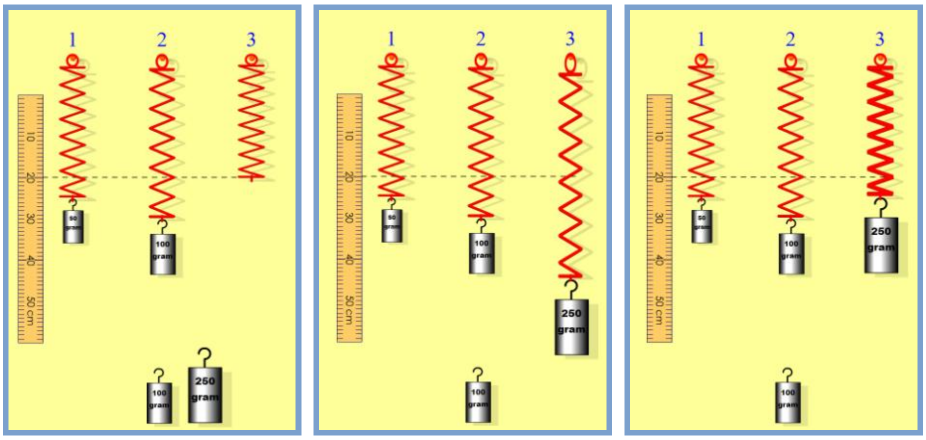
e. Teken een grafiek en beantwoord de onderzoeksvraag.

PhET (Physics Education Technology) is een initiatief van de Colorado University in Boulder, V.S.

4 Virtueel onderzoek: simulatie van PhET

Het onderzoek naar de invloed van de massa op de trillingstijd kan ook uitgevoerd worden met een simulatie, een virtueel onderzoek.
Op de website van PhET (Physics Education Technology van de Colorado University in Boulder, V.S.) vind je de simulatie 'Masses & Springs' bij het onderdeel 'Motion' van de afdeling 'Physics'.

De onderstaande figuren zijn afkomstig van de simulatie "Masses & Springs'.



Figuur 8 – Beelden uit de simulatie 'Masses & Springs'.

In de simulatie zie je drie identieke veren met een veerconstant C = 10 N/m. Met een liniaal kun je de uitwijking uit de evenwichtsstand meten.

a. Vergelijk de eerste en tweede afbeelding. Controleer dat de uitrekking overeen komt met de veerconstante en de zwaartekracht.

In de simulatie kun je massa's van 50, 100 en 250 ophangen aan de veer. Bij 100 gram is de tijd voor 5 trillingen 3,14 s.

b. Voorspel de tijd voor vijf trillingen bij 100 en 250 gram. Controleer je voorspelling met de simulatie (gebruik de stopwatch).

In de derde afbeelding is de veerconstante van een van de drie veren (veer 3) ongeveer 5× zo groot geworden (de maximale waarde).

c. Hoe groot zal nu de tijd voor vijf trillingen zijn? Doe een voorspelling en controleer met de simulatie.

De trillingstijd hangt af van de massa m en de veerconstante C.

d. Leg uit dat de trillingstijd gelijk blijft zolang de *verhouding* tussen m en C hetzelfde blijft.

e. Hoe zal de trillingstijd veranderen als de massa m 10x zo groot wordt gekozen en de veerconstante C 10× zo klein?

Met de simulatie kun je het proefje ook uitvoeren op de maan of op Jupiter (dat is het voordeel van een virtueel experiment).

f. Ga na hoe de trillingstijd verandert op Jupiter en op de maan. Verklaar het resultaat.

5 Een formule voor trillingstijd

De formule voor de trillingstijd van een massa-veersysteem is:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{C}}$$

a. Hoe kun je aan de formule zien dat de trillingstijd gelijk blijft zolang de verhouding tussen m en C hetzelfde blijft?

b. Volgens de formule is de trillingstijd evenredig met de wortel van de massa. Klopt dat met het experiment?

c. Bereken met de formule de trillingstijd bij m = 0,100 kg en C = 10 N/m.

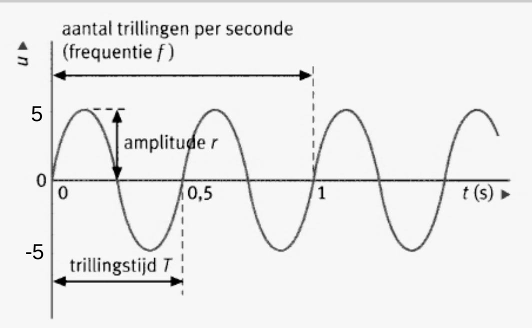
d. Controleer of de andere metingen kloppen bij de formule.

In de formule staat een factor 2π. Dat lijkt op het eerste gezicht vreemd. Waar komt die factor vandaan?

e. Heb je al een idee waardoor de factor 2π veroorzaakt wordt?

De frequentie van een geluidsbron

Een geluidsbron is een trillend voorwerp. De massa en de terugdrijvende kracht bepalen hoe snel het voorwerp trilt.



De frequentie f is het aantal trillingen per seconde (Hz = hertz), de trillingstijd is de tijd (in seconde) van één volledige trilling. Er geldt:

$$f = \frac{1}{T}$$

Harmonische trilling

Bij een massa-veersysteem is de kracht *evenredig* met de uitwijking uit de evenwichtsstand.

$$F_t = -C \cdot u$$

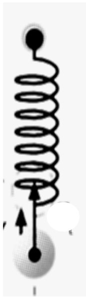
De beweging die daardoor ontstaat noemen we een *harmonische trilling*. Een stemvork is een voorbeeld van een harmonische trilling. Het geluid van een stemvork noemen we een *zuivere toon*.

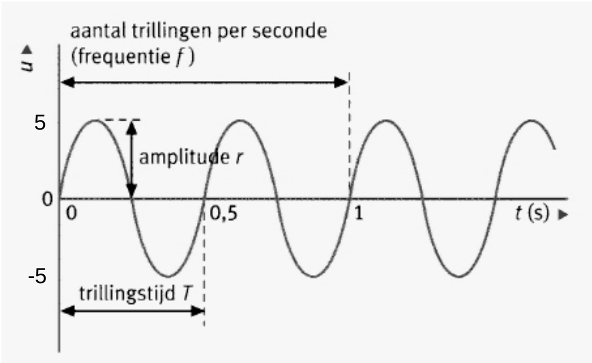
Trillingstijd
De trillingstijd T van een massa-veersysteem hangt alleen af van de massa m (in kilogram) en de veerconstante C (in newton per meter).

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{C}}$$

6 De frequentie meten met een oscillogram

Het onderstaande oscillogram geeft de trilling van een massa-veersysteem weer.





a. Lees in de grafiek de trillingstijd T af.

b. Bereken daarmee de frequentie f.

c. Hoe kun je de frequentie aflezen in de grafiek?

De veer heeft een veerconstante van 75 N/m.

d. Bereken de massa.

SaLVO! - Lesbrief Geluid

2 Een model voor de beweging

De beweging van een trillend voorwerp lijkt op een sinusfunctie. In deze les gaan we aan de hand van een dynamisch model en een stukje wiskunde onderzoeken welke argumenten daarvoor te vinden zijn.

Kernvraag	• *Hoe kun je de beweging van een trillend voorwerp nabootsen met een dynamisch model?*
Kernvraag	• *Wanneer is de beweging van een trillend voorwerp een sinusfunctie van de tijd?*

Harmonische trilling
Bij het bouwen van een model voor een trilling gaan we uit van een massa-veersysteem zonder wrijvingskrachten. Zo'n systeem is te beschrijven met één kracht die evenredig is met de uitwijking uit de evenwichtsstand.

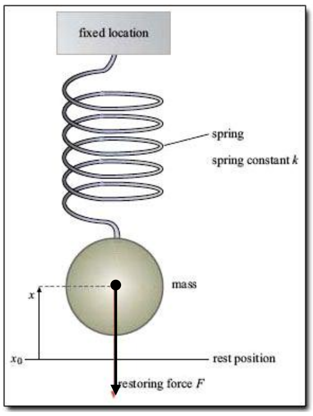
$$F = -C \cdot u$$

De beweging van dit systeem wordt een *harmonische trilling* genoemd.

Instap

De beweging analyseren
Het model gaat uit van slechts twee gegevens: een kracht die evenredig is met de uitwijking (de veerconstante C) en een massa m. Het model is opgebouwd rond het onderstaande schema.

kracht → versnelling → snelheid verandert → positie verandert



Figuur 9 – In een massa-veersysteem zorgt de terugdrijvende kracht voor een versnelling of vertraging.

a. Tijdens de beweging verandert de kracht voortdurend. Leg uit dat je de kracht kunt berekenen als je de positie kent.

b. De kracht zorgt voor een versnelling. Met welke formule kun je de versnelling berekenen?

De versnelling geeft aan hoeveel de snelheid per seconde verandert. Als de snelheid een functie van de tijd is, dan is de versnelling de afgeleide van die functie.

c. Leg uit dat je aan de formule $a = \Delta v / \Delta t$ kunt je zien dat de versnelling de *afgeleide* is van de snelheid.

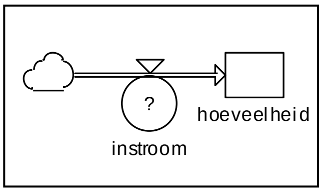
d. Op welke manier kun je uit de grafiek van de snelheid de versnelling bepalen? Wat heeft dat met de afgeleide te maken?

De snelheid geeft aan hoeveel de positie per seconde verandert.

e. Leg aan de hand van de grafiek van de snelheid of aan de hand van een formule uit dat de snelheid de *afgeleide* is van de positie.

7 Een dynamisch model bouwen

In de onderstaande figuur zie je het model voor een harmonische trilling. Het model kent twee constante waarden, de massa m en de veerconstante C. Daaruit wordt de kracht F en de versnelling a berekend.



Figuur 10 – In een dynamisch model wordt het veranderingsproces weergegeven door stroompijlen.

De instroom geeft de toename van de hoeveelheid per tijdstap aan.

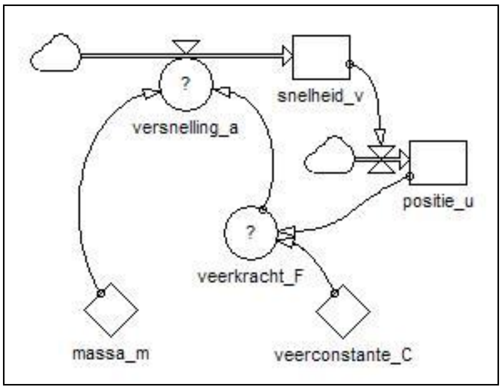
In het dynamisch model is de versnelling de instroompijl van de snelheid. De versnelling is dan wat er per tijdstap $\Delta t = 1$ bij komt. Bij kleinere tijdstappen berekent het model zelf met hoeveel de snelheid toeneemt.

a. Met welke formule berekent het model de snelheidsgroei bij een kleinere tijdstap Δt?

In het model zie je ook een instroompijl bij de positie. De instroompijl geeft aan hoeveel de positie elke seconde verandert.

b. Welke grootheid is de instroompijl van de positie? Leg uit waarom.

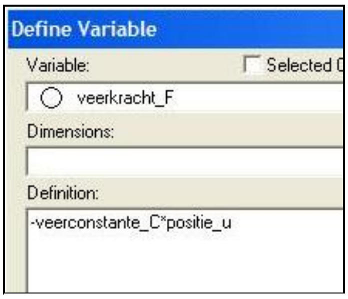
Het dynamisch model ziet er als volgt uit:



Figuur 11 – Dynamisch model van een harmonische beweging.

Open het model TRILLING.SIM. Installeer indien nodig eerst het programma PowerSim. In het model moeten twee formules ingevuld worden:

$$F = -C \cdot u \quad \text{en} \quad a = \frac{F}{m}$$



Figuur 12 – Beeld van de editor in PowerSim.

c. Vul de twee formule op de juiste plekken in. Gebruik in de EDITOR de LINKED VARIABLES

In de formule voor de veerkracht staat een min-teken, dat heeft te maken met de richting van de kracht.

d. Een uitwijking naar beneden is negatief, b.v. u = -0,05 m bij de start. Is de kracht dan positief of negatief? Welke richting hoort daarbij?

Het model wordt gebruikt om de beweging te onderzoeken van een massa van 100 gram aan een veer met C = 10 N/m. De massa wordt 8,0 cm naar beneden getrokken en op tijdstip t = 0 s losgelaten.

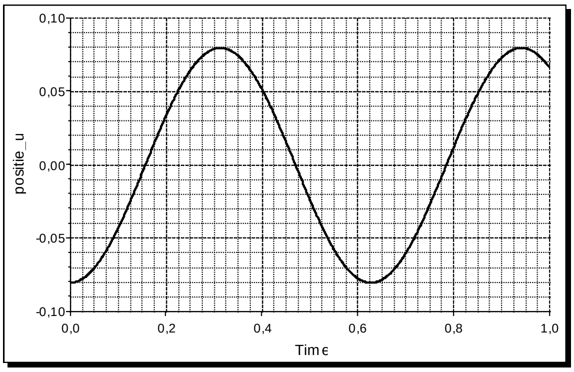
e. Noteer van alle grootheden in het model de waarde op t = 0 s. Noteer bij elke grootheid ook de eenheid (gebruik alleen standaardeenheden)

m =	F =
C =	a =
u =	v =

f. Verander de massa en de veerconstante en onderzoek hoe de trillingstijd verandert.

8 Resultaten van het model

In de onderstaande grafiek zie je het resultaat van het model bij een massa van 100 gram, een veerconstante van 10 N/m en een beginuitwijking van 8,0 cm naar beneden.



Graden en radialen
Bij het gebruik van sinus- en cosinusfuncties wordt de 'hoek' altijd in radialen genomen. Het gaat immers niet om een hoek, maar om een proces dat in de tijd verloopt.
Het programma PowerSim rekent ook in radialen.

a. Klopt de trillingstijd met het experiment (of de simulatie)?

b. Geef in de grafiek aan op welke posities de snelheid maximaal is.
c. Geef in de grafiek aan op welke posities de versnelling maximaal is.

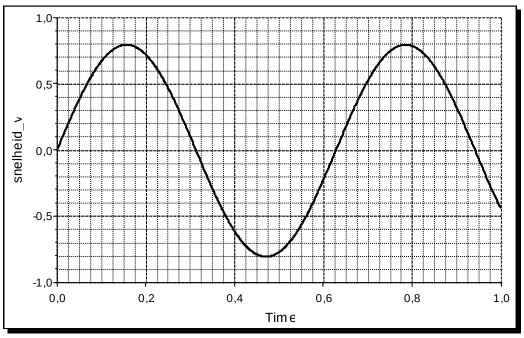
De grafiek van de beweging lijkt in elk geval sprekend op een cosinusfunctie, maar hoe weet je nu zeker of dat zo is? Laten we eerst een formule opstellen.
De algemene formule is: $u(t) = a \cdot \cos(b \cdot t)$

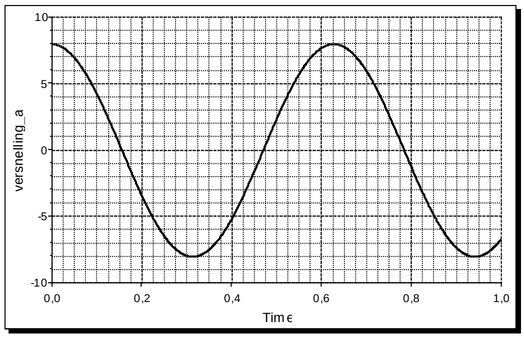
d. Hoe groot is in dit voorbeeld *a*?

e. Laat zien dat in dit voorbeeld geldt: $b = 10\ s^{-1}$.

9 Snelheid en versnelling

Het model berekent bij elke stap ook de snelheid en de versnelling. Het resultaat van de berekeningen van het model zijn de twee onderstaande grafieken van de snelheid en de versnelling.





Als de grafiek van de positie inderdaad een sinusfunctie is dan moet de snelheid de afgeleide van deze sinusfunctie zijn.

a. Lijken deze grafieken op een sinus- of een cosinusfunctie?

b. Lees in beide grafieken de maximale waarde af.

Als de grafiek van de positie een cosinusfunctie is dan moeten de functies voor de snelheid en de versnelling te vinden zijn met de afgeleide.

c. Wat is de afgeleide van $u(t) = -0{,}08 \cdot \cos(10 \cdot t)$?

d. Bij welke van de twee grafieken past die functie?

e. Neem opnieuw de afgeleide van deze functie. Bij welke grafiek past dat?

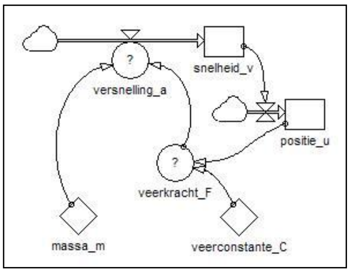
f. Klopt de maximale waarde van de snelheid en de versnelling?

10 Achtergrond (pittige wiskunde!)

Het model voor een harmonische trilling kent slechts twee formules:

$$F = -C \cdot u \qquad \text{en} \qquad a = \frac{F}{m}$$

a. Laat zien dat je uit deze twee formules kunt afleiden: $a = -\frac{C}{m} \cdot u$



Figuur 13 – Dynamisch model voor de harmonische beweging.

Daarnaast heeft het model twee veranderingsprocessen, weergeven door:

$$a(t) = v'(t) \qquad \text{en} \qquad v(t) = u'(t)$$

b. Laat zien dat je hieruit kunt afleiden: $a(t) = u''(t)$

Dat betekent dat de versnelling de *tweede afgeleide* is van de uitwijking. Combinatie met de derde formule levert op:

$$u''(t) = -\frac{C}{m} \cdot u(t)$$

Dit wordt een *tweedegraads differentiaalvergelijking* genoemd. Er staat in feite dat de tweede afgeleide van de functie $u(t)$ weer dezelfde functie is, maar dan met een constante en een min-teken ervoor.

c. Laat zien dat voor $u(t) = a \cdot \cos(b \cdot t)$ geldt dat de tweede afgeleide weer dezelfde functie is, maar dan met een constante en een min-teken ervoor.

d. Leg uit dat nu ook moet gelden: $b^2 = \frac{C}{m}$

De waarde van b bepaalt ook de trillingstijd T. Er geldt: $T = \frac{2\pi}{b}$

e. Leid hiermee de formule voor de trillingstijd van een massa-veersysteem af.

Harmonische trilling
Bij een massa-veersysteem is de kracht *evenredig* met de uitwijking uit de evenwichtsstand.

$$F_t = -C \cdot u$$

De beweging die daardoor ontstaat noemen we een *harmonische trilling*. De beweging van een harmonische trilling is te beschrijven met een sinus- of cosinusfunctie.
Als op tijdstip $t = 0$ het voorwerp in positieve richting door de evenwichtsstand gaat dan geldt voor de beweging:

$$u(t) = r \cdot \sin(b \cdot t)$$

Hierin is r de amplitude (in m). De trillingstijd T hangt af van b:

$$T = \frac{2\pi}{b} \quad \text{wat hetzelfde is als} \quad b = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f$$

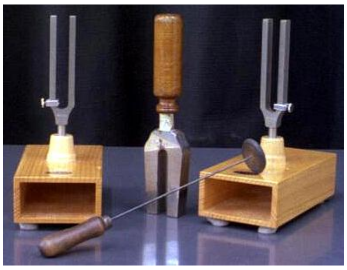
Een stemvork is een voorbeeld van een harmonische trilling. Het geluid van een stemvork noemen we een *zuivere toon*.

Trillingstijd
De trillingstijd T van een massa-veersysteem hangt alleen af van de massa m (in kilogram) en de veerconstante C (in newton per meter).

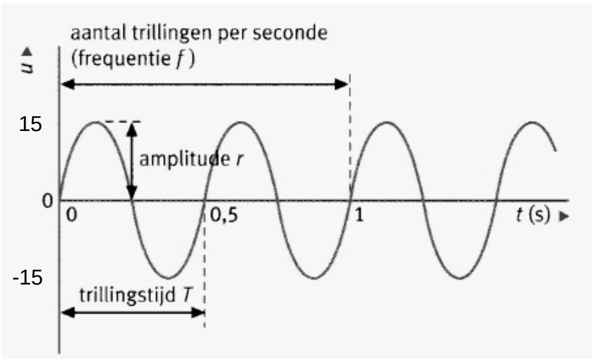
$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{C}}$$

11 Een trilling op de GR

De grafiek van een zuivere toon heeft een sinus-vorm, met amplitude r en periode T.



Figuur 14 – Drie stemvorken.



De bovenstaande grafiek kan getekend worden met een grafische rekenmachine. Bij wiskunde wordt een sinusfunctie vaak geschreven als:

$$u(t) = r \cdot \sin(b \cdot t)$$

In het voorbeeld is r makkelijk af te lezen uit de grafiek.

a. Bepaal aan de hand van de grafiek de waarde van b.

Kies: MODE = RADIAN WINDOW: X op [0, 1.7] en Y op [-25, 25]

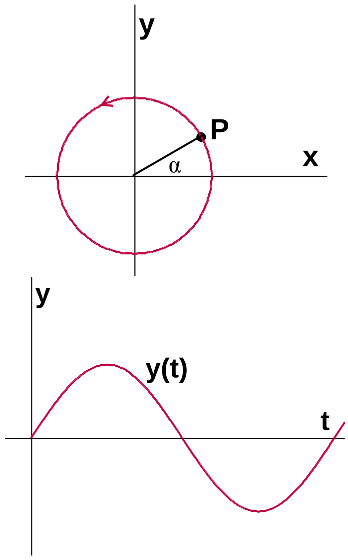
b. Teken met je grafische rekenmachine de grafiek $y = 15\sin(4\pi x)$

In BINAS staat bij een harmonische trilling: $u = A \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t)$

c. Leg uit dat dit dezelfde formule is.

12 De eenheidscirkel en trillingen

In de wiskunde wordt vaak een eenheidscirkel gebruikt om sinus- en cosinusfuncties te beschrijven. De afbeelding in de kantlijn laat zien hoe een punt P met constante snelheid langs een cirkel met straal 1 beweegt. De y-coördinaat van punt P verandert als functie van de tijd zoals te zien is in het diagram.



Figuur 15 – Bij een cirkelbeweging is de vertical postie een sinusfunctie van de tijd.

a. Leg uit dat de y-coördinaat van punt P gelijk is aan sinα.

Neem aan dat de straal van de cirkelbaan 1,0 m is en dat de snelheid waarmee punt P beweegt 1,0 m/s is.

b. Hoe lang duurt dan één volledig rondje?

Een harmonische beweging is dus te vergelijken met de verticale beweging van een punt dat een constante cirkelbeweging uitvoert. Dat kun je zien door van de zijkant tegen een reuzenrad aan te kijken en de beweging van een gondel te volgen of door naar het ventiel op een draaiend fietswiel te kijken.


Figuur 16 – De verticale positie van een cirkelbeweging is een sinusfunctie.

Als je de beweging van een gondel vanaf de zijkant volgt dan is de verticale snelheid niet constant.


Figuur 17 - Reuzenrad

c. In welke punten is de verticale snelheid het grootst?

d. Leg aan de hand van de cirkelbeweging uit dat voor de maximale verticale snelheid geldt: $v_{\max} = \dfrac{2\pi \cdot r}{T}$

Een formule voor de snelheid $v(t)$ op elk tijdstip kan afgeleid worden door gebruik te maken van de afgeleide: $v(t) = u'(t)$.

Gebruik: $u(t) = r \cdot \sin(b \cdot t)$ en $b = \dfrac{2\pi}{T}$

e. Stel de afgeleide u'(t) op en leid daarmee de formule voor $v_{\max}$ af.

SaLVO! - Lesbrief Geluid

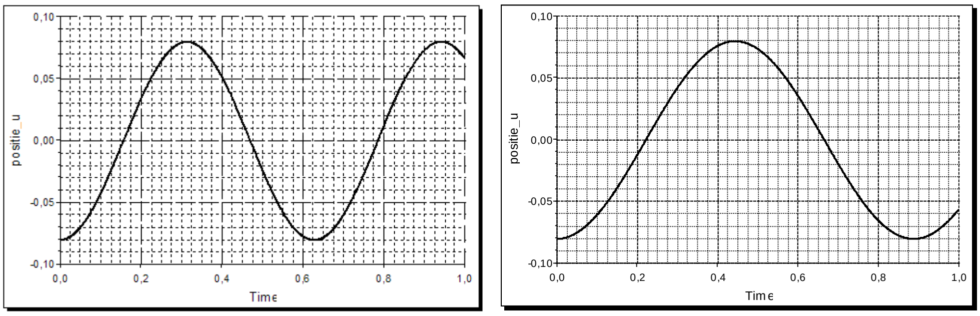
3 De trillingstijd verklaard

De beweging van een harmonische trilling is dus een sinusfunctie, de factor 2π in de formule voor de trillingstijd past bij de periode van de sinus. Om het wortelverband te bewijzen is pittige wiskunde nodig. In deze les gaan we onderzoeken of we dat verband ook op een andere manier kunnen verklaren.

Kernvraag	• *Hoe kun je het wortelverband in* $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{C}}$ *verklaren?*
Kernvraag	• *Hoe kun je een formule afleiden voor de beweging van een slinger?*

Instap **Wortelverband**

De formule voor de trillingstijd laat zien dat T evenredig is met $\sqrt{m}$. Bij een twee keer zo grote massa wordt t dus $\sqrt{2}$ keer zo groot. In de onderstaande afbeeldingen zie je de trilling bij m = 100 gram en m = 200 gram.



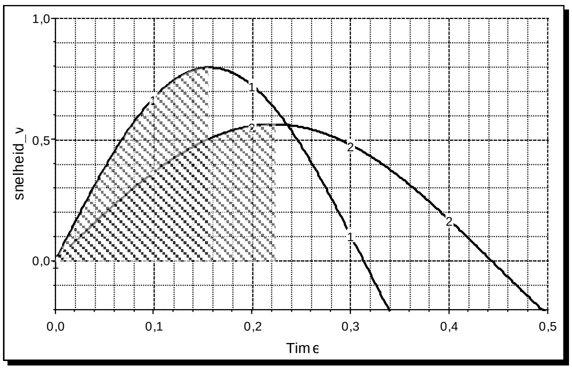
Figuur 18 – Trilling bij 100 gram en bij 200 gram.

a. Ga na dat de trillingstijd met een factor √2 toeneemt.

De twee trillingen hebben dezelfde maximale uitwijking van 8,0 cm.

b. Ga na of de maximale snelheid bij beide figuren trillingen gelijk is. Zo niet, ga dan na met welke factor de maximale snelheid is veranderd.

In de onderstaande figuur is de snelheid van beide voorwerpen gedurende de eerste 0,5 s weergegeven.



Figuur 19 – Snelheid en tijd

c. Als de massa 2× zo groot wordt dan moet de versnelling bij het loslaten 2× zo klein zijn geworden. Hoe zie je dat in de grafiek?

d. Bepaal uit deze grafiek met welke factor de maximale snelheid afneemt als de massa 2× zo groot wordt.

Het gearceerde oppervlak in de grafiek is de afgelegde afstand.

e. Leg uit dat de twee oppervlaktes even groot moeten zijn.

f. Toon hiermee aan dat de trillingstijd met een factor √2 is toegenomen.

13 Hartslag en slingertijd

Lang geleden (nog ver voor het opwindhorloge) gebruikte de dokter een slinger om de hartslag te meten. Hij veranderde de lengte van de slinger totdat de tijd tussen twee hartslagen gelijk was aan één beweging van de slinger tussen de twee uiterste standen (je kunt het zelf proberen). Aan de hand van een tabel is de hartslag dan te bepalen.

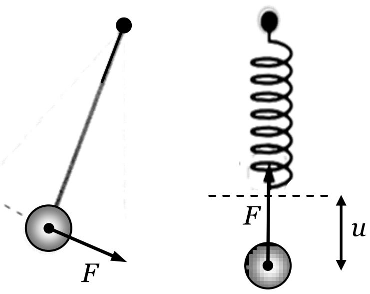
Figuur 20 – Schilderij van Jan Steen: Doktersbezoek

slingerlengte (cm)	hartslag (per minuut)
100	60
75	70
60	86
50	83
40	95
30	110
25	120

Kennelijk hebben de massa en de uitwijking geen invloed op de slingertijd. Het verband tussen hartslag en slingerlengte is niet lineair of evenredig.

a. Hoe kun je aan deze gegevens zien dat de hartslag ook niet omgekeerd evenredig is met de lengte van de slinger?

b. Wat voor soort verband past bij deze situatie?



Figuur 21 – Kracht en uitwijking bij een slinger en een massa-veersysteem.

Het bewegen van een slinger lijkt op een massa-veersysteem. In de afbeelding zijn beide situaties getekend. Bij een veer is de kracht F evenredig met de uitwijking u uit de evenwichtstand.

c. Geef bij de slinger de evenwichtsstand en de uitwijking (de afgelegde afstand vanaf de evenwichtsstand) aan.

d. Leg uit waardoor de kracht F bij de slinger groter wordt als de uitwijking groter is.

e. Leg uit waardoor de trillingstijd van een slinger niet verandert als de massa bijvoorbeeld 2× zo groot wordt.

14 Een formule voor de slingertijd.

Bij een slinger is wordt de terugdrijvende kracht bepaald door de zwaartekracht en de hoek α van het touw met de verticaal. Er geldt:

$$F_t = m \cdot g \cdot \sin\alpha$$

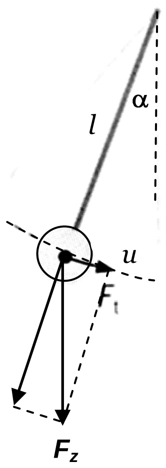
Voor de uitwijking u (de booglengte van het deel van de cirkel) geldt:

$$u = l \cdot \alpha \qquad \text{(met } \alpha \text{ in } \textbf{radialen)}$$

a. Ga met de rekenmachine na dat bij kleine hoeken ongeveer geldt:

$$\sin\alpha = \alpha \qquad \text{(met } \alpha \text{ in } \textbf{radialen)}$$

b. Leg daarmee uit dat de kracht F_t evenredig is met de uitwijking u.



Figuur 22 – De component van de zwaartekracht levert de terugdrijvende kracht.

Daarmee is aangetoond dat een slinger ongeveer een harmonische trilling uitvoert. Om een formule voor de trillingstijd af te leiden is het dan alleen nog nodig om de veerconstante $C = F/u$ te bepalen.

c. Leid af dat geldt: $C = \dfrac{m \cdot g}{l}$

d. Leid hiermee af dat voor een slinger geldt: $T = 2\pi \cdot \sqrt{\dfrac{l}{g}}$

Een slinger als harmonische trilling

Bij een slinger is de terugdrijvende kracht bij benadering evenredig met de uitwijking uit de evenwichtsstand. Die benadering geldt eigenlijk alleen bij een kleine hoek met de verticaal. De formule voor de slingertijd is een speciaal geval van een harmonische trilling.

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

In deze formule is l de lengte (in meter) en g de gravitatieconstante (in N/m)

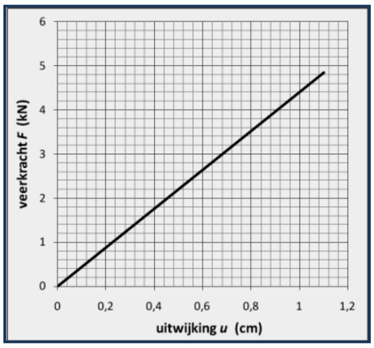
Opgaven

15 Veerconstante

Een massa-veersysteem bestaat uit een massa m van 50 g aan een veer. In het diagram van figuur 23 zie je het verband tussen de veerkracht F en de uitrekking u van deze veer.

a. Bepaal de veerconstante C van de veer.

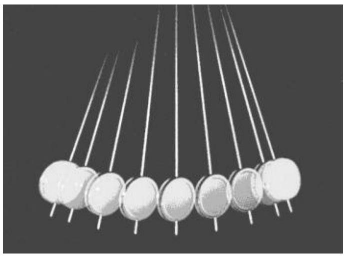
b. Bereken de frequentie waarmee dit massaveersysteem trilt.



Figuur 23 – Veerkracht en uitrekking

16 Stroboscoopfoto

Hiernaast zie je een stroboscoopfoto van de slinger van een klok. Op de foto beweegt de slinger van links naar rechts. De stroboscoop heeft een frequentie van 10 Hz. De foto is niet op ware grootte afgebeeld.
Op de foto beweegt de slinger van de uiterst linkse positie naar de uiterst rechtse positie. Op de foto zijn negen beeldjes te zien.



Figuur 24 – Stroboscoopfoto van de slinger van een klok.

a. Bereken de tijd tussen twee flitsen van de stroboscoop.

b. Bepaal met behulp van de foto zo nauwkeurig mogelijk de slingertijd.

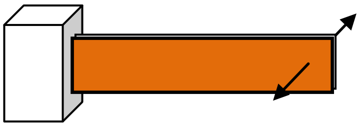
c. Bereken met het antwoord de lengte van de slinger.

De slingertijd hangt af van de lengte van de slinger.

d. Op welke manier moet je de lengte van de slinger veranderen zodat de slinger in dezelfde tijd als op de foto een volledige trilling uitvoert?

17 Bladveer

Een metalen strip wordt aan een uiteinde vastgeklemd zodat het uiteinde horizontaal kan bewegen. Aan het uiteinde van de strip worden verschillende massa's bevestigd. Daardoor verandert de trillingstijd. Els en Wim meten hoe de trillingstijd afhangt van de totale massa van de strip plus de massa's die aan het uiteinde worden bevestigd. De resultaten van hun metingen staan in de tabel.



Figuur 25 – Trillende metalen strip

massa (kg)	trillingstijd (seconde)
0,015	0,30
0,035	0,458
0,055	0,574
0,075	0,671
0,095	0,755

a. Laat zien dat het een wortelverband is: $T = c \cdot \sqrt{m}$

b. Bepaal de waarde van de constante *c* in de formule.

c. Bereken de veerconstante van het trillende systeem.

SaLVO! - Lesbrief Geluid
4 Klankkleur en sinusfuncties

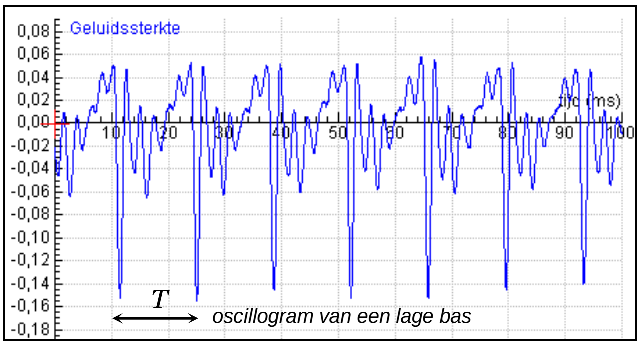
Het oscillogram van een muziekinstrument heeft een duidelijk andere vorm dan dat van een stemvork of een massa-veersysteem.

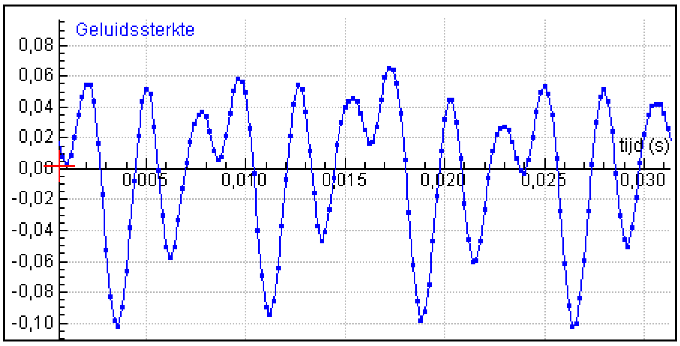
Kernvraag	• *Wat heeft de vorm van het oscillogram te maken met de klankkleur?*
Kernvraag	• *Is het oscillogram van een muziekinstrument te beschrijven met sinusfuncties?*

Instap

Oscillogram van een zangstem

Als je een muziekinstrument of een stem gebruikt dan is het oscillogram geen mooie sinusfunctie. In de onderstaande afbeeldingen zie je twee keer een oscillogram, in beide gevallen van een zangstem. Als je goed kijkt zie je dat er meerdere trillingen door elkaar lopen.





In de linker afbeelding is de periode *T* duidelijk herkenbaar. Zes periodes duren in dit geval 82 ms.

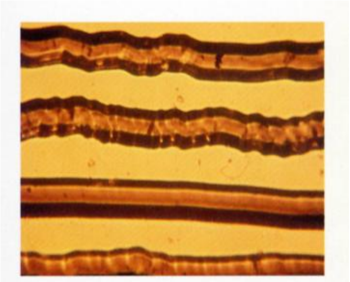
a. Bereken de frequentie van dit geluid.

b. Geef in de rechter afbeelding aan wat één periode is.

c. Bepaal de frequentie van dit geluid.

In de rechter afbeelding zie je duidelijk een snellere trilling door de beweging heen lopen.

d. Leg uit dat de frequentie van deze snellere trilling drie keer zo hoog is als de 'grondfrequentie' van het geluid.



Figuur 26 – In de groeven van een LP (sterk vergroot) is te zien dat er meerdere trillingen door elkaar lopen.

In de linker afbeelding zie je een snellere trilling die zes keer zo snel tilt als de grondfrequentie. Daarnaast zijn er nog meer trillingen. Kennelijk wordt de klankkleur veroorzaakt door een menging van boventonen.

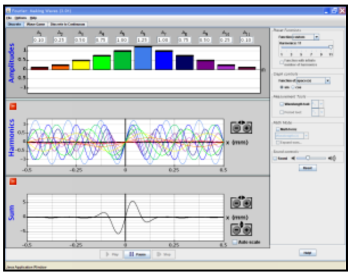
e. Leg uit dat de frequentie van de boventonen altijd een veelvoud moet zijn van de grondtoon.

18 Trillingen mixen

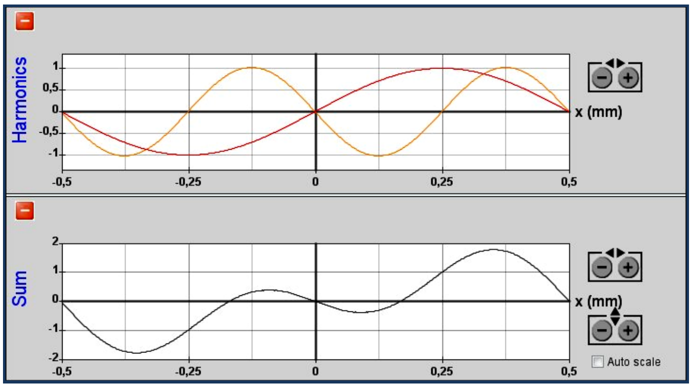
De klankkleur van het geluid van een muziekinstrument ontstaat doordat het geluid een mix is van de grondtoon met een aantal boventonen. Het mixen van grond- en boventonen kan met een simulatieprogramma uitgevoerd worden.

De onderstaande afbeeldingen zijn afkomstig van de simulatie **Fourier: Making Waves** van de website van PhET (Physics Education Technology van de Colorado University in Boulder, V.S.). De simulatie vind je bij de afdeling 'Physics' onder 'Sound & Waves'.

PhET (Physics Education Technology) is een initiatief van de Colorado University in Boulder, V.S.



Figuur 27 – De simulatie Fourie: Making Waves van PhET (Physics Education Technology).



In de bovenstaande afbeelding zie je hoe de simulatie twee trillingen bij elkaar optelt. In het bovenste diagram zie je twee sinusfuncties, dat zijn de grondtoon en de eerste boventoon. De grondtoon heeft een frequentie van 1 Hz en een amplitude van 1.

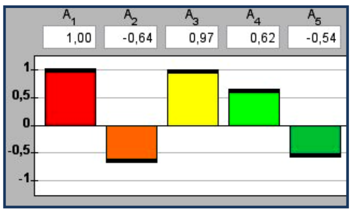
a. Lees de amplitude en frequentie van de boventoon af.

In het onderste diagram zie je de som van de twee trillingen.

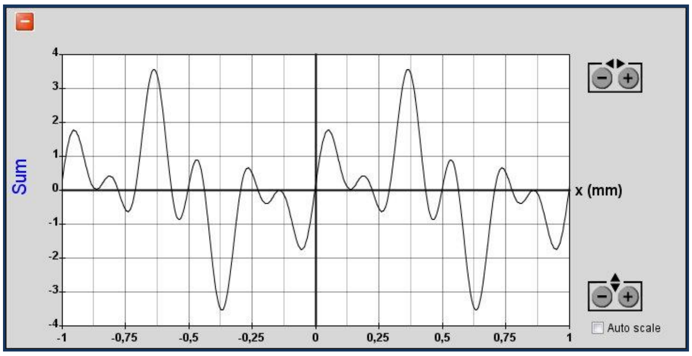
b. Leg uit waardoor de amplitude van de somfunctie kleiner dan 2 is.

c. Start de simulatie en zet het geluid aan. Verhoog de amplitude A_2 totdat het beeld overeen komt met bovenstaande figuur.

d. Mix nog meer boventonen door het geluid heen. Hoe veranderen de toonhoogte en de klankkleur?



Figuur 28 – Elke toon heeft een eigen amplitude.

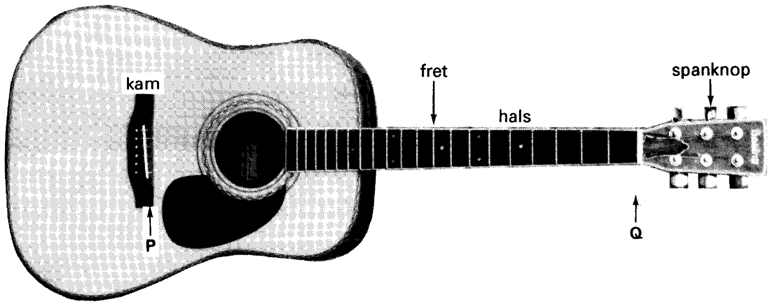


De bovenstaande afbeelding is de som van de grondtoon en vijf boventonen. De amplitudes van de grondtoon en de eerste vier boventonen zijn zichtbaar in de afbeelding in de kantlijn.

e. Hoe groot is de amplitude van de vijfde boventoon? Gebruik de simulatie om het antwoord te vinden.

19 Gitaar

Een gitaar heeft zes snaren. Elke snaar is gespannen tussen de kam op de klankkast (punt P) en één van de spanknoppen aan het eind van de hals (punt Q). De bovenste snaar in de figuur is de e-snaar, met een lengte van 65,0 cm en een grondtoon van 330 Hz.



De toon van de snaar kan veranderd worden door spanknop te draaien.

a. Wat verandert er in de snaar als de spanning groter wordt?

b. Leg met behulp van een formule uit of de frequentie hoger of lager wordt als de snaar strakker gespannen wordt.

Andere snaren op de gitaar geven, bij gelijke lengte en spanning, een andere toon.

c. Welk verschil is er tussen die snaren dat het verschil in toon veroorzaakt?

Op de hals van de gitaar zitten metalen ribbels. Zo'n ribbel noemt men een fret. Door de e-snaar met een vinger tegen een fret te duwen, wordt de lengte van het trillende deel van de snaar kleiner. De toonhoogte is omgekeerd evenredig met de lengte van de snaar.

d. Geef in de figuur met een pijl de fret aan die bij een toon van 494 Hz hoort. Licht je antwoord toe. (De figuur is weergegeven in schaal 1:10.)

Door de snaar korter te maken veranderen zowel de massa als de veerconstante.

e. Gebruik de formule voor de trillingstijd en laat zien dat de trillingstijd twee keer zo klein wordt als de lengte van de snaar gehalveerd wordt.

20 Trillingen

Bij een auto met een massa van $1{,}2 \cdot 10^3$ kg is de vering zo ingesteld dat bij een trilling na een hobbel in de weg de trillingstijd 1,8 s is.

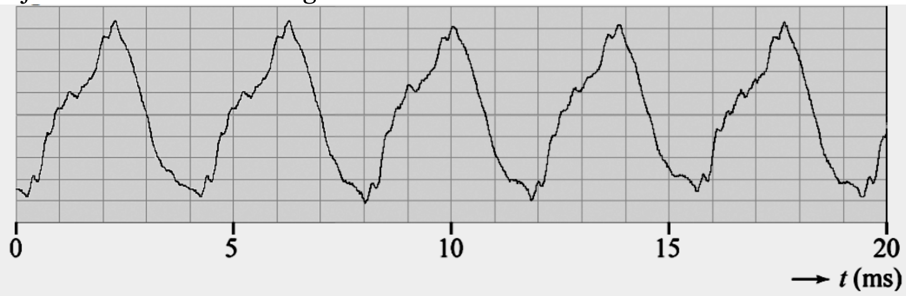
a. Bereken de veerconstante van het veersysteem van de auto.

Bij een lange schommel is de tijd waarin de schommel van links naar rechts beweegt 1,75 s.

b. Bereken de lengte van de schommel.

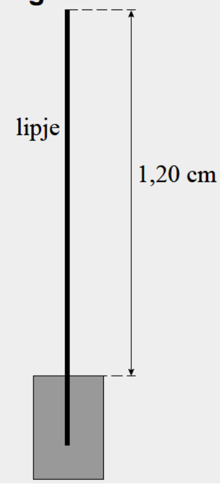
21 Mondharmonica

Een mondharmonica heeft tien gaatjes. Onder elk gaatje zit een metalen lipje. Als een speler lucht door een gaatje blaast, ontstaat in het lipje onder dat gaatje een staande golf. Het lipje trilt dan in de grondtoon. Met behulp van een microfoon en een computer is een opname gemaakt van het geluid bij het aanblazen van één gat.



a. Bepaal nauwkeurig de frequentie van deze toon.

figuur 4



Als het lipje van figuur 4 in de grondtoon trilt, ontstaat een toon van 392 Hz. Een soortgelijk lipje heeft een lengte van 1,60 cm. De veerconstante van het lipje is omgekeerd evenredig met de lengte.

b. Bereken de frequentie van de toon van het lipje van 1,60 cm lengte.