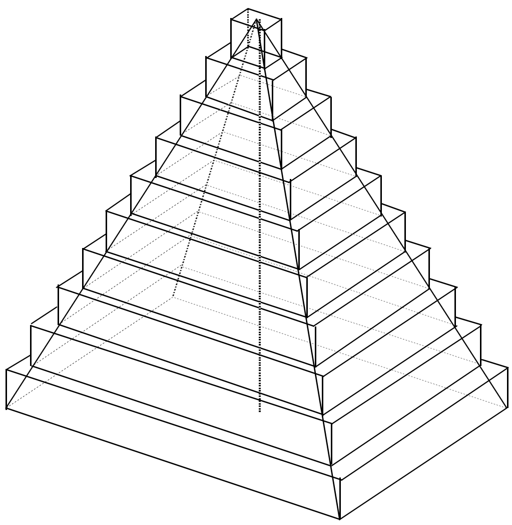
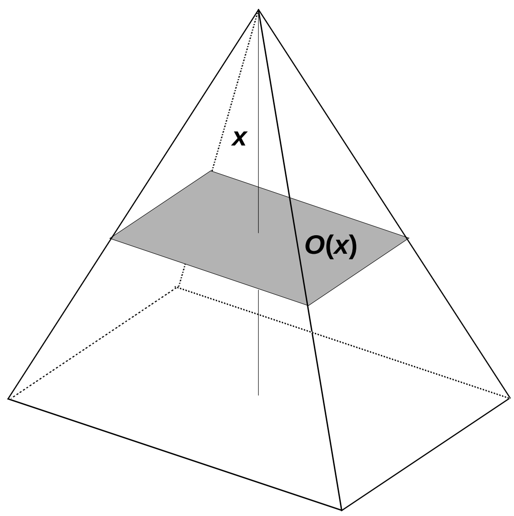
Integreren

Differentiaal- en Integraalrekening
deel 5





Nieuwe wiskunde tweede fase
Profiel N&G en N&T
Freudenthal instituut

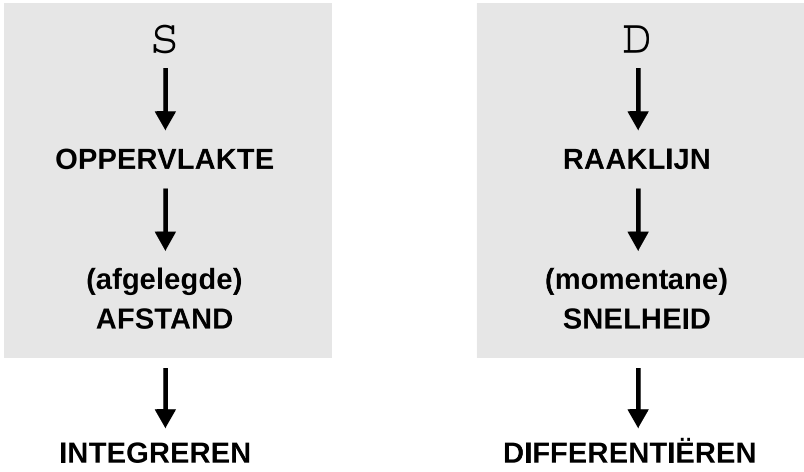
Differentiaal- en Integraalrekening (deel 5: Integreren)

Project:	Wiskunde voor de tweede fase
Profiel:	N&G en N&T
Klas:	vwo 5/6
Staat:	Eerste herzien versie
Ontwerp:	Michiel Doorman, Dédé de Haan, André Holleman & Martin Kindt

Inhoud

Vooraf

In het boekje ‘Som & Verschil, Afstand & Snelheid’ (deel 1 van de Differentiaal- en Integraalrekening) was er sprake van twee ‘rode draden’, namelijk:

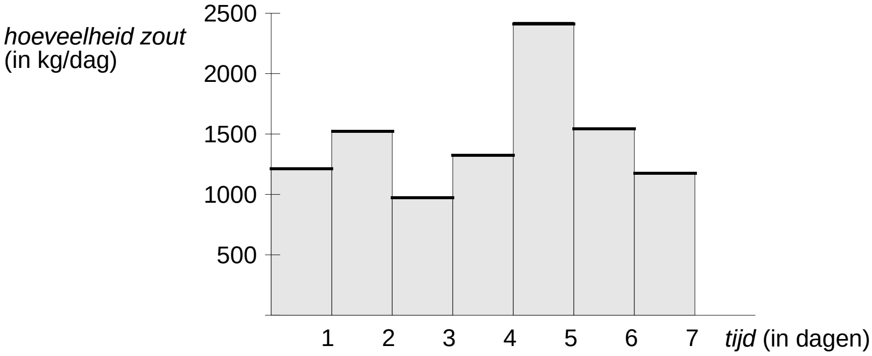


In de vervolgdeeltjes is de draad van het *differentiëren* verder uitgesponnen. Daarbij heb je een heleboel technische regels leren gebruiken. Bovendien heb je gezien dat de differentiaalrekening in uiteenlopende situaties kan worden toegepast. Het wordt nu tijd om ook het *integreren* wat verder te verkennen.
Daarbij gaat het over het begrip ‘integraal’. Een integraal is als het ware een ‘continue som’ en zulke sommen treden op bij berekening van energie, bepaling van een zwaartepunt, berekening van volume, ...
Integralen laten zich soms exact berekenen en daarbij gebruik je dan de techniek die je bij het differentiëren hebt geleerd, maar .... in omgekeerde richting (anti-differentiëren).
De meeste integralen echter zijn *niet* exact te berekenen; van zulke integralen kun je met een computer of met de GR een benadering in de gewenste nauwkeurigheid vinden.
De kunst bij toepassingen is vooral het herkennen en het opstellen van de juiste integraal.

1 Instap: bepaling van zoutgehalte

Dit inleidende hoofdstuk gaat over het sommeren van waarnemingsuitkomsten en over de grafische voorstelling van sommen. Ook het gemiddelde van een aantal waarnemingsuitkomsten speelt een rol.

Bij een riviertje staat een chemische fabriek die een vergunning heeft om per week 10 000 kg afvalzout in het riviertje te lozen. Men wil weten of de fabriek zich aan de normen houdt.
Hiertoe is stroomafwaarts een volautomatisch meetstation bij het riviertje geplaatst. Met vaste tussenpozen wordt een monster van het rivierwater genomen en daarvan wordt het zoutgehalte bepaald. Tegelijkertijd worden de waterhoogte en de stroomsnelheid van het riviertje gemeten.
De meetresultaten worden verwerkt tot een getal dat aangeeft hoeveel kg zout het meetstation in één dag passeert. Er wordt dan gedaan alsof zoutconcentratie, waterhoogte en stroomsnelheid de gehele dag constant zouden blijven. Op deze wijze krijgt men een schatting van de hoeveelheid zout (in kg/dag) die het meetstation passeert.
Aanvankelijk heeft men per dag één meting uitgevoerd, elke dag om 12.00 uur.
De meetgegevens van één week zijn uitgezet in de onderstaande grafiek.

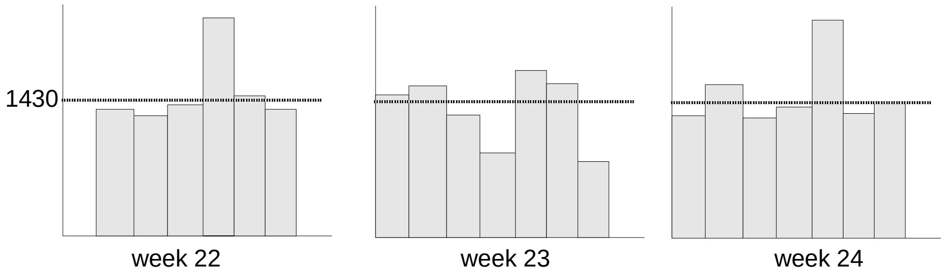


1 De grafiek is gemaakt met behulp van de volgende tabel:

dag	1	2	3	4	5	6	7
zout (kg/dag)	1205	1530	970	1320	2430	1540	1180

a. Ga na of volgens de meetgegevens de fabriek deze week al of niet de norm heeft overschreden.
b. Kun je op grond van deze gegevens een ‘harde’ conclusie trekken?
c. Bereken de gemiddelde hoeveelheid zout die de fabriek per dag mag lozen in tientallen kg nauwkeurig.

2 Hieronder zie je van drie opeenvolgende weken de grafiek. Met een stippellijn is het toegestane gemiddelde aangegeven.

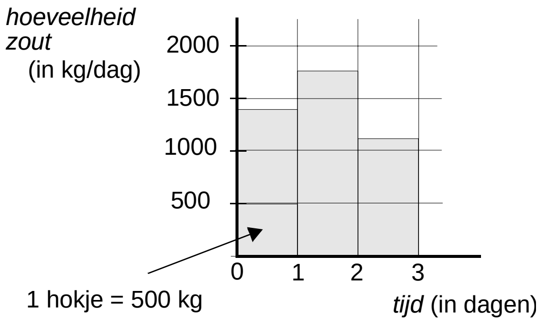


a. Hoeveel dagen van week 22 was de zouthoeveelheid volgens de meetgegevens onder het gemiddelde?
Voldeed de totale hoeveelheid zout aan de norm?

b. Beantwoord beide vragen ook voor week 23 en week 24.

eenheid en oppervlakte

Bij grafieken zoals deze, hebben de *eenheden* op de assen geheel verschillende betekenis.
Kijk naar het beginstuk van zo'n weekgrafiek, waarbij ook een aantal roosterlijnen zijn getekend.
De eenheid op de horizontale as stelt *1 dag* voor en de eenheid op de verticale as *500 kg zout per dag*.



De oppervlakte van een roostercel is gelijk aan lengte · breedte.
Houden we hierbij rekening met de eenheden, dan krijg je:

$$\textit{oppervlakte roostercel} = 1 \text{ dag} \cdot 500 \text{ kg/dag} = 500 \text{ kg}.$$

Eén roostercel stelt dus 500 kg zout voor.
Om een indruk te krijgen van de hoeveelheid zout die het meetpunt is gepasseerd, kun je dus gewoon cellen tellen en dit aantal vermenigvuldigen met 500 kg.

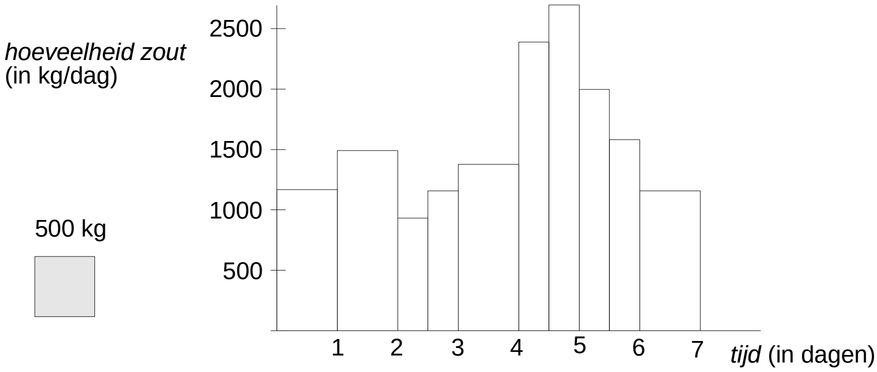
3 Hoeveel kg zout is er volgens de grafiek gedurende de drie aangegeven dagen ongeveer langs het meetpunt gestroomd?

De schatting van de totale hoeveelheid zout die in één week passeert, is gebaseerd op slechts één meting per dag. Als er snelle veranderingen in de zoutconcentratie, de waterhoogte of in de stroomsnelheid zijn, is die schatting onnauwkeurig. In de tabel zie je nu de meetresultaten van één week waarin op drie dagen twee keer is gemeten, om 6 uur en om 18 uur.

dag	1	2	3		4	5		6		7
zout (kg/dag)	1200	1500	900	1200	1400	2400	2700	2000	1600	1200

4 **a.** Reken na dat de fabriek volgens de voorgaande gegevens in die week onder de voorgeschreven 10 000 kg is gebleven.

b. Bij de tabel hoort onderstaande grafiek. Er staat een roostercel (= eenheid van oppervlakte) bij die 500 kg zout voorstelt.



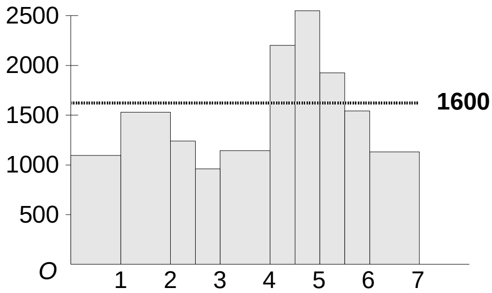
Geldt ook voor de derde dag: aantal kg = oppervlakte $\cdot$ 500?

5 Met behulp van onderstaande grafiek schat iemand de gemiddelde hoeveelheid zout per dag op 1600 kg.
En omdat 7 $\cdot$ 1600 = 11200 concludeert hij dat de fabriek in die week teveel zout heeft geloosd.

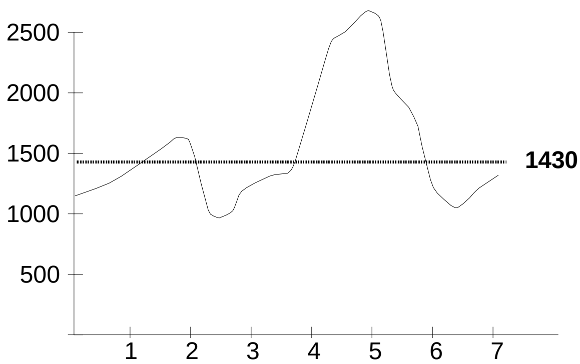
tip

a. Hoe kun je aan de figuur zien dat zijn schatting te hoog is?

b. Geef zelf een betere schatting van het gemiddelde. Heeft de fabriek zich zo op het oog aan de voorschriften gehouden?



Als de fabriek in één week teveel zout heeft geloosd, dan wordt een boete opgelegd. De eigenaar van de fabriek vindt dat één keer per dag meten een schatting oplevert die te onnauwkeurig is om een boete op te baseren. Daarom wordt bij wijze van proef gedurende één week ieder half uur een meting verricht. De resultaten worden weergegeven in de volgende grafiek.



6 **a.** Waarom is er nu geen staafgrafiek getekend, denk je?

b. Verdient de eigenaar wel of geen boete? Verklaar je antwoord.

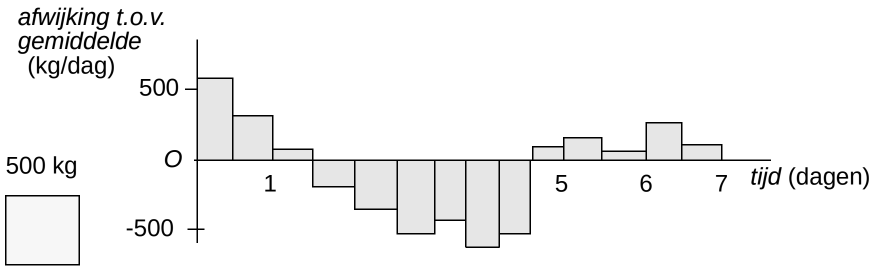
c. Gedurende deze week zijn er 336 metingen geweest.
Noemen we het resultaat van de k-de meting $Z(k)$ (in kg/dag), dan is de totale zouthoeveelheid TZ (in kg) die in deze week het meetpunt passeerde te berekenen met de formule:

$$TZ = \sum_{k=1}^{336} Z(k) \cdot \frac{1}{48}$$

Verklaar deze formule.

d. Geef een formule zoals die hierboven voor het geval dat er om het kwartier een meting wordt verricht. Ook voor het geval er vier keer per dag wordt gemeten met gelijke tussenpozen.

7 Een andere manier om de meetresultaten van één week weer te geven, zie je in de onderstaande grafiek.



Je ziet dat er twee keer per dag is gemeten.
Op de verticale as is nu de afwijking van de gevonden meetwaarde ten opzichte van het toegestane daggemiddelde van 1430 kg afgezet. Bij een meetwaarde minder dan 1430, is de afwijking negatief gerekend.

a. Heeft de fabriek in deze week de normen overtreden? Licht je antwoord toe.

b. Het deel van de tabel met de eerste zes metingen staat hieronder.

dag	1		2		3	
metingnummer	1	2	3	4	5	6
afwijking (kg/dag)	600	250	100	-200	-400	-550

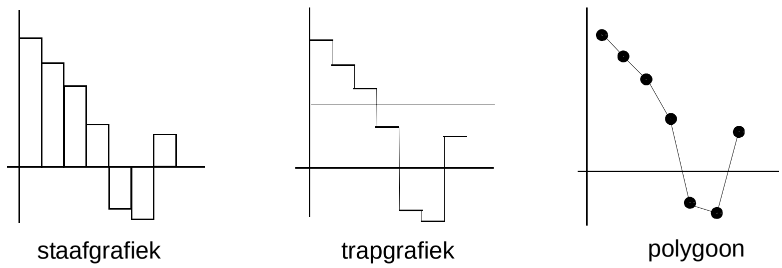
Bereken de totale afwijking van het gemiddelde voor de eerste drie dagen.
Hoeveel kg zout is er die drie dagen in totaal geloosd?

c. Waarom kun je de totale afwijking ten opzichte van de norm van 10 000 kg nu niet krijgen door de *oppervlakten* van alle staven op te tellen?
Hoe kun je de totale afwijking met behulp van deze oppervlakten wel berekenen?

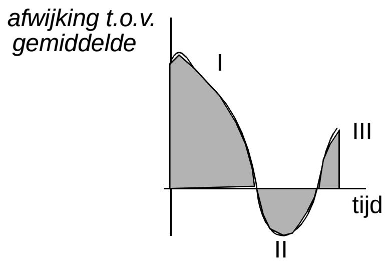
d. Laat nu TA de totale afwijking van het toegestane gemiddelde zijn en $A(k)$ de afwijking op de k-de dag.

Klopt nu de formule $TA = \sum_{k=1}^{14} A(k) \cdot \frac{1}{2}$?

Metingen vinden dikwijls met tussenpozen plaats. Daarom zie je daarbij dikwijls grafieken als hieronder.



De eerste twee grafieken zijn bijna hetzelfde; in de derde zijn eerst de meetresultaten met een stip aangegeven en daarna zijn de stippen via lijnstukken verbonden.
Hoe groter het aantal meetpunten in een periode, des te nauwkeuriger is de schattingsmethode.
Bij een toenemend aantal metingen worden staafgrafiek en trapgrafiek algauw onpraktisch. Het polygoon gaat dan lijken op een 'vloeiende' grafiek zoals bij functies.



Als je de vele staafjes er even bij denkt, dan kun je begrijpen dat de totale afwijking van het gemiddelde weergegeven wordt door:

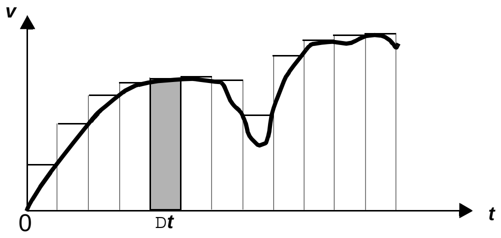
$$\text{opp. I} - \text{opp. II} + \text{opp. III}$$

In veel gevallen kan een bepaalde grootheid vrijwel 'continu' (zonder tussenpozen) worden gemeten. Denk bijvoorbeeld aan elektrische spanning, snelheid van een auto, luchtdruk, ...
Is er aan het meetapparaat een schrijfeenheid gekoppeld, dan krijg je een vrijwel 'continue grafiek' (zoals hierboven). In veel gevallen speelt de oppervlakte tussen grafiek en horizontale as een belangrijke rol, net als bij het bepalen van de zouthoeveelheid.
In de volgende hoofdstukken wordt een aantal problemen onderzocht waarbij het niet over metingen gaat, maar waarbij de grafieken via formules worden gegeven.
Ook bij deze problemen is de oppervlakte van het gebied tussen de grafiek en de horizontale as belangrijk.

2 Riemannsom en oppervlakte

snelheid & afstand

In het boekje 'Som & Verschil, Afstand & Snelheid' (deel 1 van de Differentiaal- en Integraalrekening) heb je gezien dat de oppervlakte onder een tijd, snelheid-grafiek de afgelegde afstand voorstelt. In het laatste hoofdstuk van dit boekje staat:



In de figuur zie je hoe de oppervlakte onder een tijd, snelheid-grafiek wordt benaderd met een bovensom van rechthoekige stroken.
De breedte van zo'n rechthoekje correspondeert met een tijdsintervalletje, zeg met een duur van Δt.
De hoogte van zo'n rechthoekje correspondeert met de (hoogste) snelheid op dat intervalletje, zeg v_{max}
De oppervlakte van zo'n rechthoekige strook (= $v_{max} \cdot \Delta t$) correspondeert met de in dat tijdsintervalletje afgelegde afstand, als... de snelheid constant gelijk zou zijn aan v_{max} .
De som van alle oppervlakten geven nu een bovenschatting van de afgelegde weg in het totale tijdsinterval.
Die som noteren we globaal zó: $\sum v_{max} \cdot \Delta t$
Op soortgelijke manier kom je aan een onderschatting: $\sum v_{min} \cdot \Delta t$
Zo krijg je een inklemming van de afgelegde weg s:

$$\sum v_{min} \cdot \Delta t < s < \sum v_{max} \cdot \Delta t$$

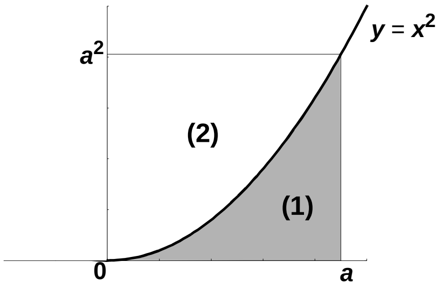
Die inklemming kan 'supernauw' gemaakt worden door de strookbreedte (= Δt) 'superklein' te nemen. Bij zo'n superklein tijdsintervalletje (bijna een moment) benaderen v_{max} en v_{min} elkaar en zijn ze vrijwel gelijk aan de momentane snelheid v op dat moment.
Vandaar dat we (globaal) kunnen schrijven: $\sum v \cdot \Delta t \approx s$ (voor kleine waarden van Δt).
Er is hierbij sprake van een voortschrijdend proces van benadering. De overgang van zo'n benaderingsproces naar een exacte waarde is de kern van de integraal- en differentiaalrekening. Leibniz bedacht voor het exacte resultaat deze notatie:

$$\int v\,\mathrm{d}t = s$$

Het eerste symbool (de 'ouderwetse' S) wordt het integraalteken genoemd. Het geeft aan dat de som gebaseerd is op een 'oneindig fijne' verdeling in 'oneindig dunne' strookjes.
Om dezelfde reden is Δt vervangen door dt de lengte van een 'oneindig klein' tijdsintervalletje.

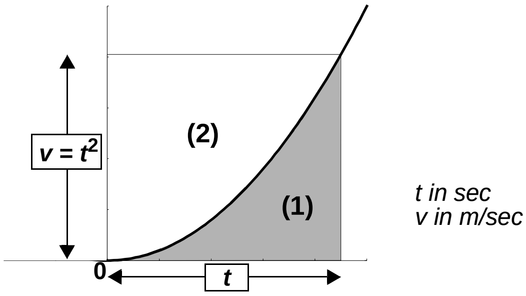
1 Neem aan dat de eenheid op de horizontale as in bovenstaande grafiek 1 sec voorstelt en de eenheid op de verticale as 1 m/sec.
Wat stelt de oppervlakte van een roostercel dan voor?

2 Eveneens in deel 1 heb je gezien dat de oppervlakte onder de parabool $y = x^2$, gerekend vanaf het punt (0, 0) tot een punt (a, a^2), gelijk is aan eenderde van de rechthoek die wordt begrensd door de lijnen $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = a^2$.



a. Heb je nog enig idee hoe dat resultaat is gevonden? Zoek die afleiding eens op.

b. We vatten de grafiek nu op als een snelheidsgrafiek:

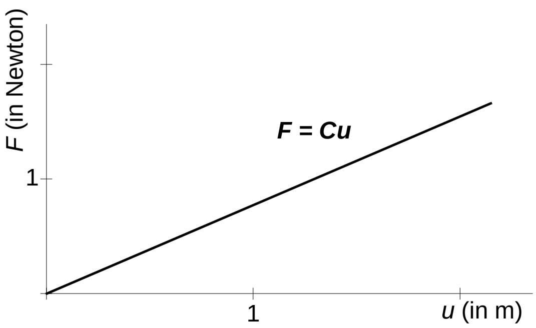


Welke formule hoort er nu bij de afgelegde afstand (= s) in de tijd die verloopt van 0 tot t?

c. Teken de snelheidsgrafiek over en geef met een horizontale lijn de *gemiddelde snelheid* aan op het interval [0, t].

arbeid

In de figuur op de volgende bladzijde zie je tweemaal een veer getekend. In de figuur links is de veer niet gespannen, de veer rechts is u m uitgerekt. Om de veer in deze uitgerekte toestand te houden, moet een kracht F uitgeoefend worden. De benodigde kracht is groter naarmate de uitrekking u groter is: F is afhankelijk van u.
Bij normale veren is F evenredig met de uitrekking u, dus $F = Cu$.
Dit verband tussen kracht en uitrekking bij een veer staat bekend als de wet van Hooke. De constante C wordt de veerconstante genoemd en deze is afhankelijk van de soort veer.



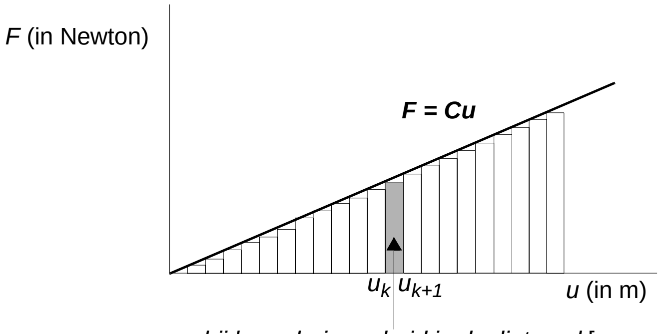
3 Veronderstel dat je te maken hebt met een veer met $C = 0.5$.
Veronderstel ook dat de veer 0.3 m is uitgerekt. Welke kracht moet worden uitgeoefend om de veer in die stand te houden?

Om de veer een uitrekking u te geven, moet er arbeid verricht worden. Deze arbeid wordt als het ware opgeslagen in de gespannen veer en komt weer vrij als de veer wordt losgelaten. De in de gespannen veer opgeslagen arbeid wordt wel de *veerenergie* genoemd. Als de kracht constant zou zijn, kun je voor het berekenen van de arbeid deze formule gebruiken:

$$\textit{arbeid} = \textit{kracht} \cdot \textit{weg} \qquad \text{ofwel} \qquad W = F \quad s\,.$$

Een probleem is, dat de kracht verandert zodra s verandert!
De vraag is nu: *hoeveel arbeid W is nodig om de veer u cm uit te rekken.*
Daarvoor bekijk je de grafiek van F als functie van s.
De waarde van W kan als volgt worden benaderd:

– verdeel het u-interval in superkleine deelintervallen (tussenpunten u_1,u_2, enzovoort) zodat F op zo'n deelinterval nagenoeg als constant mag worden beschouwd;
– bereken bij elk deelinterval de bijbehorende arbeid (in de figuur voorgesteld door de oppervlakte van een rechthoekig strookje!) en tel de uitkomsten op.



bij benadering arbeid in deelinterval [u_k , u_{k+1}]

Deze situatie lijkt erg veel op het verhaal in hoofdstuk 11 van 'Som & Verschil, Afstand & Snelheid' (Galileï en de valwet). Je hebt daar gezien dat de som van de oppervlakten van de strookjes de (driehoekige) oppervlakte onder de grafiek van F willekeurig dicht benaderen.

4 De (exact) te verrichten arbeid W wordt in de voorgaande figuur voorgesteld door de *oppervlakte onder de grafiek van F.*
De arbeid W is een functie van de uitrekking u. Uit de figuur (grafiek van F) kun je een formule voor W als functie van u afleiden.
Geef die formule (stel de veerconstante = C).

5 Bij de gebruikelijke eenheden voor u (meter) en F (Newton) hoort de Joule als eenheid van arbeid. Hoe kun je 1 Joule voorstellen in de grafiek op bladzijde 10?

6 **a.** Een veer met constante 0.5 is 0.4 m uitgerekt. De uitrekking moet toenemen tot 0.7 m. Bereken de hoeveelheid arbeid die voor deze uitrekking nodig is.
b. Die arbeid kan worden voorgesteld door een oppervlakte onder de grafiek van F. Teken die oppervlakte.

Riemannsom & integraal

In de opgaven **2** en **4** gaat het om de bepaling van een *oppervlakte onder een grafiek* ofwel *de limiet van een som*.
Zo'n som heeft de gedaante:

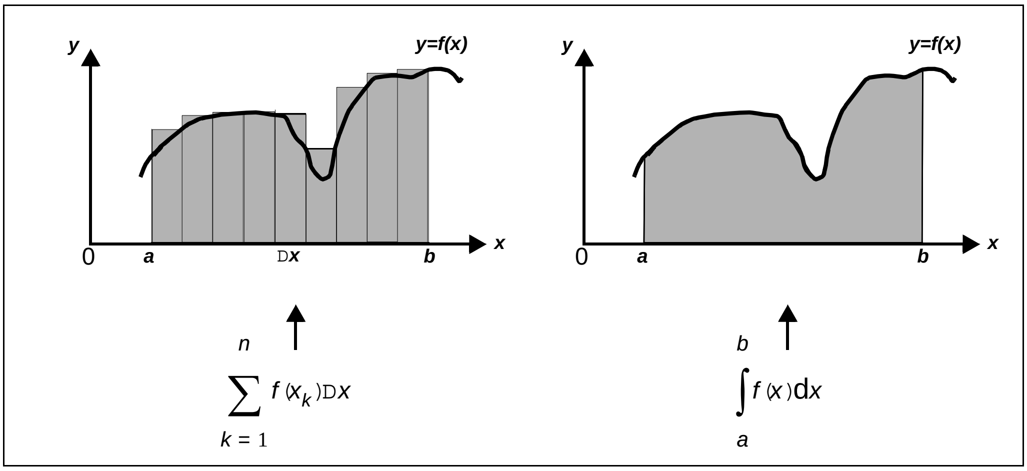
$$\sum f(x_k)\Delta x$$

waarbij f een functie van x is, Δx de lengte van een deelintervalletje van een zeker x-interval en x_k een punt van zo'n deelinterval.
Een som van dit type wordt wel een *Riemannsom* genoemd, naar de wiskundige Riemann (1826 - 1866).
Een preciezere notatie, in het geval van n deelintervalletjes, is:

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

Als $[a , b]$ het bedoelde x-interval is en als $f(x) \geq 0$ op dat interval, dan benadert zo'n Riemannsom de oppervlakte onder de grafiek van f op het interval $[a , b]$.
De exacte oppervlakte is gelijk aan de limiet van de Riemannsom bij onbeperkte toename van n. Deze limiet wordt genoteerd als integraal:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$



7 In de situatie van een beweging (zie opgave **2**) speelt de snelheid v de rol van f en de tijd t de rol van x.
Noemen we de grenzen van een tijdsinterval nu t_0 en t_1 , dan krijgen we de integraal:

$$\int_{t_0}^{t_1} v(t)\,\mathrm{d}t$$

a. Maak een plaatje van het bijbehorende gebied onder de grafiek van v in het geval $v(t) = t^2$ en $0 < t_0 < t_1$

b. Verklaar uit dit plaatje dat deze integraal gelijk is aan: $\frac{1}{3}{t_1}^3 - \frac{1}{3}{t_0}^3$

c. Wat is de betekenis van deze uitkomst in termen van de beweging?

8 In de situatie van opgave **4** speelt de kracht F de rol van f en de uitrekking u de rol van x.

a. Wat is nu de betekenis van:

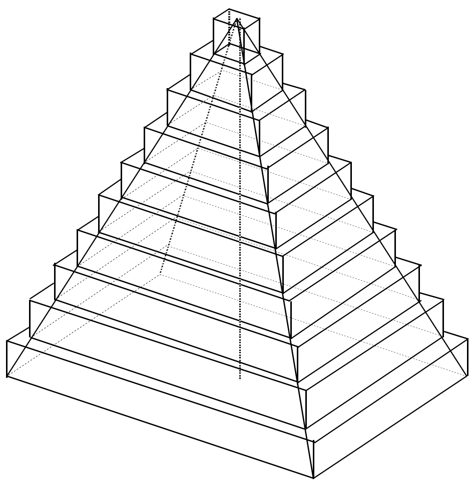
$$\int_{u_0}^{u_1} F(u)\,\mathrm{d}u$$

voor de uitrekking van de veer?

b. Neem de veerconstante C en druk de uitkomst van deze integraal uit in C, u_0 en u_1

inhoud van piramide

Als derde voorbeeld van Riemannsom en integraal, bekijken we een inhoudsberekening.
Je weet waarschijnlijk wel dat de inhoud van een piramide gelijk is aan $\frac{1}{3}hG$; hierbij stelt h de hoogte van de piramide voor en is G de oppervlakte van het grondvlak.
Die formule was al bij de oude Grieken bekend; volgens Archimedes was zij ontdekt door Democritos (ca 400 voor Chr.).
Het bewijs voor de geldigheid van de formule is niet eenvoudig.
Een aanpak die ook al in de Oudheid werd toegepast, is gebaseerd op een benadering van de piramide door middel van een stapel dunne plakjes. Voor het gemak is hieronder een vierzijdige piramide getekend, maar de tekst tot en met opgave **10** is van toepassing op alle soorten piramides (dus met 3, 4, 5, ... zijden). De plakjes hebben dan de vorm van een prisma met 3, 4, 5, ... zijden.



Hoe dunner de plakjes, hoe beter de som van de inhouden van de plakjes de inhoud van de piramide benadert!

9 Stel de hoogte van de piramide *h* en de oppervlakte van het grondvlak *G*.
De prismaplakjes (zeg *n* stuks) hebben een hoogte Δx (= *h/n*) en de oppervlakte van de bodem van zo'n plak op een afstand *x* van de top noemen we *O*(*x*).
Ga na dat de inhoud van de piramide wordt benaderd door de Riemannsom:

$$\sum_{k=1}^{n} O(x_k)\Delta x$$

Bij vergroting van het aantal plakjes en de daarmee gepaard gaande verkleining van de dikte, krijg je een steeds betere benadering van de inhoud van de piramide.
De exacte inhoud wordt gegeven door de integraal:

$$\int_0^h O(x)\mathrm{d}x$$

Deze integraal is als het ware de som van (de inhouden van) oneindig veel oneindig dunne plakjes.

10 Het gaat er nu om de bovenstaande integraal te berekenen. Daarvoor zoeken we een formule voor *O* als functie van *x*.

tip

a. Verklaar de formule:

$$O(x) = \frac{x^2}{h^2}G \qquad \text{ofwel} \qquad O(x) = \frac{G}{h^2}\,x^2$$

b. Bedenk dat *h* en *G* constanten zijn. De grafiek van *O* als functie van *x* is dus een parabool. Schets die grafiek en geef het gebied aan onder de grafiek dat correspondeert met bovenstaande integraal.

c. Gebruik de op bladzijde 12 genoemde eigenschap van de parabool om die oppervlakte te berekenen en ... je krijgt de formule voor de inhoud van de piramide.

integraal op de GR

Met de GR kun je integralen berekenen. De uitkomst is dan meestal een benadering van de exacte waarde. De GR maakt bij de berekening gebruik van een variant op Riemannsommen, waar we hier niet verder op ingaan. In 'Som & Verschil, Afstand & Snelheid' kun je vinden op welke manieren je dit bij de TI-82/83 kunt doen. In deze opgave pas je de methode toe die gebruikmaakt van het menu CALC.

11 a. Teken op de GR met venster [–1 , 1] bij [0 , 1] de grafiek van $y = x^2$

b. Kies in het menu CALC de optie $\int f(x)\mathrm{d}x$.
Neem Lower Limit X = –1 en Upper Limit X = 1 (via de pijltjestoetsen).
Na ENTER krijg je een benadering van de gevraagde integraal.

c. Had je de uitkomst kunnen voorspellen?

12 a. Teken op de GR (met hetzelfde venster als in **11**) de grafiek van $y = \sqrt{1-x^2}$.
Toets Zoom Square in. Wat voor een kromme is de grafiek die je nu krijgt?

b. Neem weer Lower Limit X = –1 en Upper Limit X = 1 en noteer het resultaat.

c. Ook in dit geval kun je op grond van meetkundige kennis zeggen wat de exacte waarde is en zo de gevonden benadering verifiëren. Doe dat.

Samenvatting

Riemannsom

Bij uiteenlopende problemen speelt het berekenen van een som van de vorm:

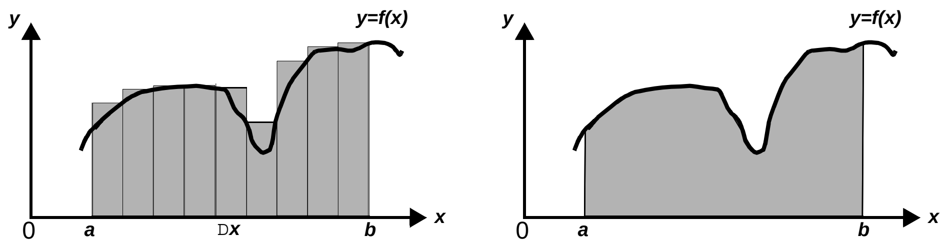
$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

een belangrijke rol.

Hierbij is een x-interval, zeg $[a\ ,\ b]$, verdeeld in n deelintervalletjes, elk met lengte Δx .
De waarden van f op het k-de deelinterval worden benaderd door $f(x_k)$.
Hierbij is x_k een getal uit dat intervalletje, bijvoorbeeld de linker- of rechtergrens daarvan.
Zo'n som wordt een Riemannsom van f op het interval $[a\ ,\ b]$ genoemd.

oppervlakte

Als $f(x) \geq 0$ voor $a \leq x \leq b$, dan geeft de Riemannsom van f op het interval $[a\ ,\ b]$ een benadering van het gebied dat wordt begrensd door de grafiek van f, de x-as en de verticale lijnen $x = a$ en $x = b$.



integraal

Bij onbeperkte verfijning van de verdeling van $[a\ ,\ b]$, nadert de Riemannsom tot de exacte waarde van de oppervlakte van het bedoelde gebied.
Die limietwaarde noemt men de integraal van f op het interval $[a\ ,\ b]$.
Notatie:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

3 Primitieve functies

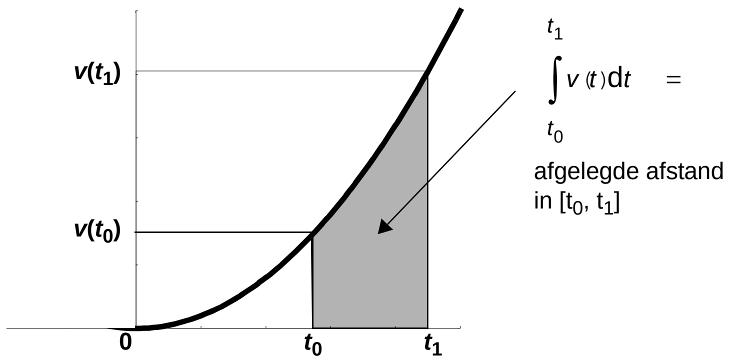
We keren even terug naar het voorbeeld dat gaat over de beweging met de formule:

$$v(t) = t^2$$

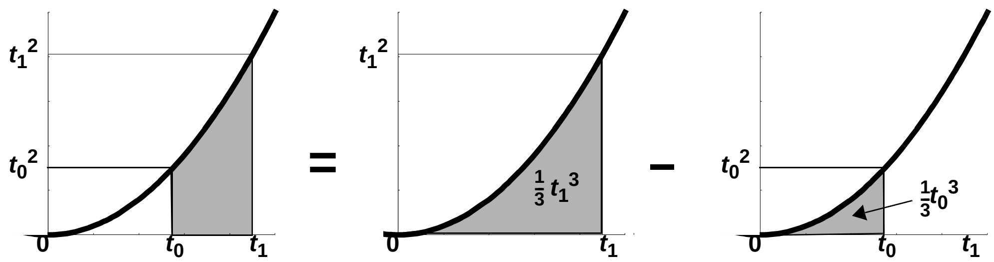
De afgelegde afstand op t seconden na het tijdstip 0 noteren we als $s(t)$.
De afgelegde afstand gedurende het tijdsinterval $[t_0, t_1]$ is dan gelijk aan:

$$s(t_1) - s(t_0)$$

Die afgelegde weg kan worden voorgesteld door een oppervlakte onder de tijd, snelheid-grafiek:



Uit:



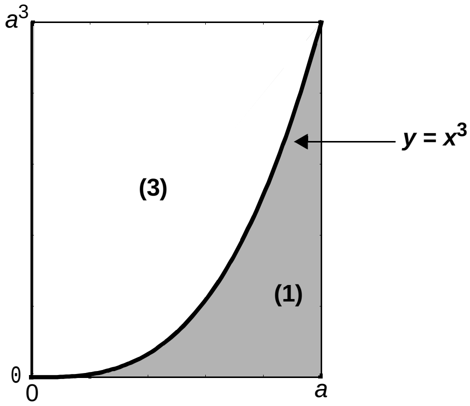
volgt:

$$\int_{t_0}^{t_1} t^2 \mathrm{d}t = \tfrac{1}{3}t_1^3 - \tfrac{1}{3}t_0^3$$

Daarbij is een eigenschap van de parabool gebruikt die is afgeleid in hoofdstuk 9 van het boekje ‘Som & Verschil, Afstand & Snelheid’. De afleiding daarvan was gebaseerd op een Riemannsom (al werd dat daar niet zo genoemd) en op een formule voor de som van kwadraten.

1 Aan het eind van genoemd boekje is ook een tweede manier genoemd.
Omdat geldt: $s'(t) = v(t)$ en $v(t) = t^2$, kun je via ‘anti-differentiëren’ een formule voor s(t) vinden.
Welke formule vind je voor $s(t)$? En hoe volgt hieruit de waarde van bovenstaande integraal?

De grafiek van $y = x^3$ verdeelt de rechthoek begrensd door de lijnen $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ en $y = a^3$ in stukken met verhouding 1 : 3.



Deze eigenschap kan worden aangetoond met behulp van een Riemannsom en een formule voor de som van derdemachten. (Zie weer hoofdstuk 9 van 'Som & Verschil, Afstand & Snelheid').

2 Beschouw een beweging met $v(t) = t^3$.

a. Gebruik bovengenoemde eigenschap om een uitdrukking in t_0 en t_1 te vinden voor:

$$\int_{t_0}^{t_1} t^3 \mathrm{d}t$$

b. Laat zien dat je diezelfde uitdrukking ook kunt vinden door gebruik te maken van het feit: $s'(t) = v(t)$.

integraal als toename

In de vorige twee opgaven heb je gezien dat een integraal soms bepaald kan worden door 'anti-differentiëren'.
Dit idee gaan we nu wat algemener bekijken.
Het komt hier op neer:

> Als je $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ wilt berekenen,
>
> en als je een functie F weet met de eigenschap $F' = f$,
> dan kun je de integraal berekenen zonder Riemannsommen te gebruiken.
> De waarde van de integraal is dan namelijk gelijk aan de *toename van F op het interval* $[a , b]$, ofwel gelijk aan: $F(b) - F(a)$.

hoofdstelling

Deze wetenswaardigheid staat bekend als de 'hoofdstelling van de differentiaal- en integraalrekening'. Als je bij f aan een snelheidsfunctie denkt, dan is de hoofdstelling duidelijk. Maar ook los van de interpretatie in termen van snelheid en afgelegde weg, kan de hoofdstelling worden verklaard. Aan het eind van dit hoofdstuk wordt die stelling beredeneerd. In de volgende opgaven kun je als het nodig is de hoofdstelling alvast gebruiken.

3 Ga na of de resultaten van de opgaven **8** en **10** van het vorige hoofdstuk, in overeenstemming zijn met de hoofdstelling.

4 Teken de grafiek van $y = \sqrt{x}$ en beschouw de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door deze grafiek, de x-as en de lijn $x = a$ ($a > 0$).

Deze oppervlakte is gelijk aan $\frac{2}{3}$ van de oppervlakte van de rechthoek met zijden langs de x-as, de y-as, de lijn $y = \sqrt{a}$ en de lijn $x = a$. Verklaar dit uit de oppervlakte-eigenschap van de parabool en ga na of dit klopt met de hoofdstelling.

primitieve

Een functie F met de eigenschap $F' = f$, zou je een anti-gedifferentieerde (of anti-afgeleide) van f kunnen noemen. In de Engelse taal spreekt men van 'anti-derivative'. In Nederlandse boeken wordt meestal het woord *primitieve functie* gebruikt. Soms spreekt men ook van *integraalfunctie*.

Zo geldt bijvoorbeeld dat de functie F gegeven door $F(x) = \frac{1}{4}x^4$ een primitieve functie (kortweg *primitieve*) of integraalfunctie is van f gegeven door $f(x) = x^3$.

5 Merk op dat je wel kunt spreken van ***de*** afgeleide van een functie, maar niet van ***de*** primitieve van een functie. Als je van een functie één primitieve weet, dan weet je er meteen oneindig veel meer. Verklaar dat.

6 Je kunt de primitieve van een functie vastleggen door een extra eis te stellen. Bijvoorbeeld de eis dat de grafiek door een gegeven punt moet gaan. Zoek bij elk van de volgende functies f de primitieve F waarvan de grafiek door de oorsprong gaat.

a. $f(x) = x^4$

b. $f(x) = e^x$

c. $f(x) = e^{x+1}$

d. $f(x) = \cos x$

e. $f(x) = \sin x$

f. $f(x) = \sqrt{x}$

7 Bereken met de hoofdstelling de volgende integralen (gebruik de primitieve functies die je in **6** gevonden hebt).

a. $\int_0^{10} x^4 dx$

b. $\int_0^{\ln 3} e^x dx$

c. $\int_1^2 e^{x+1} dx$

d. $\int_0^{\frac{1}{2}p} \cos x dx$

e. $\int_0^{\frac{1}{2}p} \sin x dx$

f. $\int_1^4 \sqrt{x} dx$

8 Bij opgave **6** moest de primitieve F voldoen aan de voorwaarde: $F(0) = 0$. Stel nu dat er in plaats hiervan was geëist: $F(0) = 1$.
Wat zou er dan in de antwoorden van opgave **6** veranderen?
En in de uitkomsten van opgave **7**?

Je hebt inmiddels wel gezien dat je bij een primitieve functie van f een constante kunt optellen om een andere primitieve functie te vinden.

Zo geldt bijvoorbeeld dat voor elke waarde van c de functie F met $F(x) = \frac{1}{6}x^6 + c$

een primitieve is van de functie f met $f(x) = x^5$
Je kunt je nu afvragen of je daarmee *alle* primitieve functies van f hebt.
Met andere woorden, of het zo is dat twee primitieve functies van dezelfde functie f noodzakelijk een constante verschillen.
Dit is inderdaad het geval, mits ... het domein van de functie overeenkomt met een niet-onderbroken deel van de x-as! Ter toelichting de volgende opgave.

9 De functie f is voor $x \neq 0$ gegeven door $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Dit is een voorbeeld van een functie f waarvan het domein een onderbreking heeft.

a. Ga na dat de functie F_1 met $F_1(x) = -\frac{1}{x}$ een primitieve is van f.

b. De functie F_2 is als volgt gedefinieerd:

$$F_2(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} + 1 & \text{voor } x > 0 \\ -\frac{1}{x} + 2 & \text{voor } x < 0 \end{cases}$$

Ga na dat ook F_2 een primitieve functie is van f.

c. Schets de grafieken van F_1 en F_2. Is het zo dat F_1 en F_2 een constante verschillen?

Van een op een interval I gedefinieerde functie kun je wél zeggen dat twee primitieves een constante verschillen. Voor het bewijs hiervan gebruiken we een regel die je in het boekje ‘Techniek van het differentiëren’ bent tegengekomen, namelijk:

als $F'(x) = 0$ voor iedere x in het interval I, dan is F constant op I

Veronderstel nu dat de functies F_1 en F_2 beide primitieve functies zijn van de op een interval I gedefinieerde functie f.
Dat betekent dat voor ieder getal x binnen het interval geldt:

$$\begin{array}{rcl} F_2'(x) & = & f(x) \\ F_1'(x) & = & f(x) \\ \hline F_2'(x) - F_1'(x) & = & 0 \end{array} \; -$$

$$\downarrow$$

$$F_2(x) - F_1(x) = c$$

$$\downarrow$$

$$F_2(x) = F_1(x) + c$$

Hieruit volgt :

stelling

Als F_1 en F_2 primitieve functies zijn van een op het interval I gedefinieerde functie f, dan verschillen zij een constante.

Voorbeeld

Gegeven de functie f door $f(x) = x^3 + x$. Deze functie is gedefinieerd voor alle reële getallen. De verzameling primitieve functies van f wordt beschreven door:

$$F(x) = \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{2}x^2 + c$$

Of in de notatie van Leibniz:

$$\int (x^3 + x)\mathrm{d}x = \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{2}x^2 + c$$

10 Beschrijf de verzameling primitieven van de functie f met:

a. $f(x) = x^3 - 1$

b. $f(x) = (x-1)^3$

c. $f(x) = \mathrm{e}^{x+2}$

d. $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$

11 Bepaal:

a. $\int \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x$

b. $\int (3x^2 + 2x)\mathrm{d}x$

c. $\int 2\cos x\,\mathrm{d}x$

d. $\int \cos(2x)\mathrm{d}x$

de constante speelt geen rol

Een gevolg van de stelling op de vorige bladzijde is dat het er, bij het berekenen van een integraal met behulp van een primitieve functie, niet toe doet wélke primitieve je kiest. Immers: laat f een functie zijn gedefinieerd op $[a, b]$ en laten F en F^* twee primitieve functies zijn van f, dan geldt: $F^*(x) = F(x) + c$. Met als gevolg:

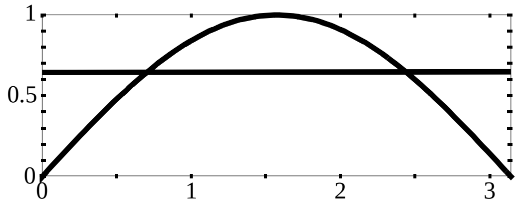
$$F^*(b) - F^*(a) = (F(b) + c) - (F(a) + c) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

12 a. Teken op de GR met venster [0 , 1] bij [0 , 5] de grafiek van $y = \frac{1}{x^2}$

b. Bereken met de GR de integraal $\int_1^2 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$

c. Ga met behulp van de hoofdstelling na dat de GR in dit geval de exacte uitkomst geeft.

13 Bekijk de grafiek van $y = \sin x$ op het interval [0 , p].



De horizontale lijn boven de x-as geeft aan wat de gemiddelde waarde van $\sin x$ op het interval [0 , p] is. Dat betekent dat de oppervlakte tussen de grafiek van $y = \sin x$ en de x-as op het interval [0 , p] gelijk is aan de oppervlakte tussen die horizontale en de x-as, eveneens op [0 , p].

Bereken het exacte gemiddelde van $\sin x$ op het interval [0 , p].

14 Bereken het (exacte) gemiddelde van:

a. x^3 op [0 , 1]

b. x^4 op [0 , 2]

c. $\frac{1}{x^2}$ op [1 , 10]

d. $\cos x$ op $[0 , \frac{1}{2}\pi]$

tip

15 Bekijk de grafiek van $f(x) = x(2 - x)$ op het interval [0 , 2].
Toon aan dat het gemiddelde van $f(x)$ op dit interval gelijk is aan $\frac{2}{3}$.

16 Bereken:

a. $\int_0^1 2^x \mathrm{d}x$

b. $\int_1^2 10^x \mathrm{d}x$

c. $\int_1^2 10^{x+1} \mathrm{d}x$

d. $\int_{-1}^1 \mathrm{e}^{2t} \mathrm{d}t$

e. $\int_0^5 \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$

f. $\int_1^6 e^{1-t} \mathrm{d}t$

17 a. Toon door een berekening aan dat:

$$\int_a^{a+1} \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^a \int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$$

b. Hoe kun je deze regel verklaren uit de grafiek van $y = \mathrm{e}^x$?

18 a. Maak op de GR met venster [0 , 1] bij [0 , 1] de grafieken van $y_1(x) = x^3$ en $y_2(x) = \sqrt[3]{x}$. Toets vervolgens Zsquare in.

b. Het gebied ingesloten door beide grafieken kun je ‘schaduwen’.

> Kies menu DRAW en daarin de optie Shade.
> Zorg nu dat er Shade (Y_1 , Y_2 , 0 , 1) op je scherm komt en druk op ENTER.

c. Toon aan dat de oppervlakte van het donker gemaakte gebied precies de helft is van het vierkant met hoekpunten (0 , 0) , (1 , 0) , (1 , 1) en (0 , 1).

19 Het resultaat van opgave **18** kan worden gegeneraliseerd.

Stel n is een natuurlijk getal groter dan 1 en $y_1(x) = x^n$ en $y_2(x) = \sqrt[n]{x}$

a. Toon aan: $\int_0^1 y_1(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$ en $\int_0^1 y_2(x)\mathrm{d}x = \frac{n}{n+1}$

b. Laat vervolgens zien dat de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafieken van y_1 en y_2 gelijk is aan: $\frac{n-1}{n+1}$

In hoofdstuk 1 heb je gezien dat het verstandig kan zijn om de oppervlakte van een gebied tussen een grafiek en de x-as negatief te rekenen als de grafiek onder de x-as ligt. De uitkomst van de bijbehorende integraal is dan automatisch ook negatief.
Als de grafiek op het integratie-interval $[a\ ,\ b]$ afwisselend boven en onder de x-as ligt, worden de positieve en de negatieve oppervlakten met elkaar verrekend.

20 a. Bereken met de hoofdstelling achtereenvolgens:

$$\int_0^{p} \sin x \, dx \ ; \ \int_{p}^{2p} \sin x \, dx \ ; \ \int_0^{2p} \sin x \, dx$$

b. De uitkomst van de laatste twee integralen had je ook zonder berekening kunnen geven. Verklaar.

21 Teken de grafiek van $f(x) = 4 - x^2$

a. Bereken: $\int_0^3 f(x)\,dx$ en $\int_0^4 f(x)\,dx$

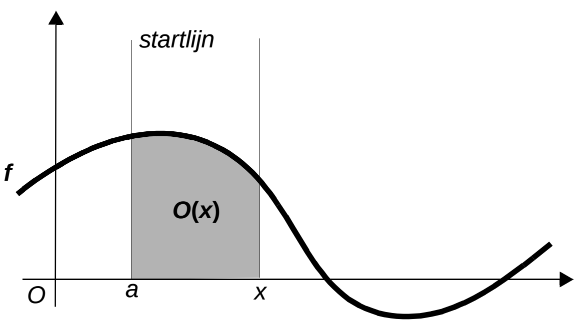
b. Je kunt je voorstellen dat er tussen 3 en 4 precies één getal a bestaat zodanig dat:

$$\int_0^a f(x)\,dx = 0$$

Bereken dat getal.

bewijs van de hoofdstelling

Je hebt nu in een aantal gevallen de hoofdstelling gebruikt om integralen te berekenen.
Zoals beloofd volgt er nog een bewijs van die hoofdstelling.
Daartoe bekijken we de volgende situatie.
f is een functie waarvan de grafiek een niet-onderbroken kromme lijn is; men zegt dan dat f een *continue* functie is.
Neem aan dat de verticale lijn door $(a\ ,\ 0)$ de grafiek snijdt; in het verdere verhaal noemen we die lijn de ‘startlijn’.
Beschouw nu de oppervlakte van het gebied dat begrensd wordt door de startlijn, de grafiek van f, de x-as en een verticale lijn rechts van de startlijn. Als de tweede verticale lijn de x-as in $(x\ ,\ 0)$ snijdt, noemen we de oppervlakte van het gebied $O(x)$.

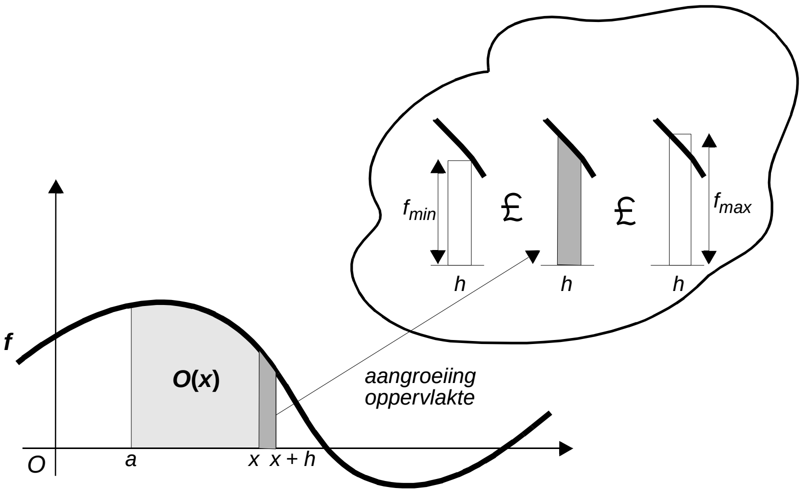


Op deze wijze is bij f een nieuwe functie O (‘oppervlaktefunctie’) gedefinieerd.
We bewijzen nu dat deze functie een primitieve is van f, ofwel dat geldt: $O'(x) = f(x)$.

Het komt er dus op aan om te beredeneren dat:

$$\lim_{h \to 0} \frac{O(x+h) - O(x)}{h} = f(x)$$

Laat h een klein positief getal zijn. Dan stelt $O(x + h) - O(x)$ de aangroeiing van de oppervlakte voor bij een kleine verschuiving naar rechts van de verticale lijn door $(x , 0)$. Die aangroeiing is de oppervlakte van een strook met breedte h.



De oppervlakte van die strook kan worden ingeklemd tussen twee rechthoekige stroken, eentje met breedte h en hoogte *de minimale waarde van f* op het interval $[x , x + h]$ en de tweede met breedte h en hoogte *de maximale waarde van f* op dat interval.
We schrijven kortweg:

$$h \cdot f_{min} \le O(x+h) - O(x) \le h \cdot f_{max}$$

Delen door h geeft:

$$f_{min} \le \frac{O(x+h) - O(x)}{h} \le f_{max}$$

Als h tot 0 nadert, dan naderen f_{min} en f_{max} beide tot de waarde $f(x)$. Gevolg:

het door f_{min} en f_{max} ingeklemde differentiequotiënt $\frac{O(x+h) - O(x)}{h}$ nadert ook tot $f(x)$.

In schema:

$$\boldsymbol{h \to 0}$$

$$\boldsymbol{f_{min} \le \frac{O(x+h) - O(x)}{h} \le f_{max}}$$

nadert tot

$$\boldsymbol{f(x) \qquad O'(x) \qquad f(x)}$$

In de figuur is een situatie gekozen waarbij de waarde $f(x)$ positief is. De redenering gaat met een paar aanpassingen ook op als dit niet zo is, mits oppervlakten *onder* de x-as *negatief* worden gerekend. Ook bij een negatieve keuze van h is de redenering van kracht.

22 a. De functie O is dus een primitieve van f. Welke waarde heeft die primitieve voor $x = a$?

b. Laat F een willekeurige primitieve van f zijn en stel $b > a$.
Waarom volgt nu: $F(b) - F(a)$ is gelijk aan de oppervlakte tussen de grafiek van f en de x-as op het interval $[a , b]$?

Uit de hoofdstelling volgen nu direct twee eenvoudige eigenschappen van de integraal. Die eigenschappen zijn:

(1) $$\int_a^b cf(x)\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

(2) $$\int_a^b (f(x)+g(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

De eerste eigenschap zegt dat je een constante factor van de te integreren functie, vóór de integraal kunt plaatsen. De tweede eigenschap beweert dat de integraal van de som van twee functies, de som van de integralen van die functies is.
Het bewijs van deze regels volgt onmiddellijk uit twee regels voor het differentiëren, namelijk $(cF)' = cF'$ en $(F + G)' = F' + G'$.
Bewijs van regel (2).
Volgens de hoofdstelling geldt:

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\mathrm{d}x = ((F(b)+G(b)) - (F(a)+G(a)))$$

en

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x = (F(b)-F(a)) + (G(b)-G(a))$$

De uitdrukkingen rechts van het =-teken zijn volgens de wetten van de algebra aan elkaar gelijk.

23 a. Bewijs zelf regel (1).
b. Ga na dat een soortgelijke regel als (2) ook voor het verschil van twee functies geldt.

24 a. Maak op de GR met venster [–1 , 1] bij [0 , 3] de grafieken van $y_1(x) = x^2 + 2$ en $y_2(x) = x^4 + x^2 + 1$.
b. De twee grafieken sluiten een vlakdeel in. De oppervlakte van dit vlakdeel is gelijk aan de integraal:

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^4)\mathrm{d}x$$

Verklaar dit.
c. Bereken die oppervlakte.

Samenvatting

primitieve Een primitieve F van functie f op een interval I heeft de eigenschap dat voor iedere x binnen het interval I geldt: $F'(x) = f(x)$.

constante Als F een primitieve functie is van f, dan is de functie die een constante c van F verschilt, dat ook.
Maar het is nog sterker:
Twee verschillende primitieve functies van dezelfde functie *f* op een interval *I* verschillen een constante.

Primitieve functies kunnen worden gebruikt om integralen te berekenen. Daarbij gebruik je:

hoofdstelling

ALS *F* een primitieve is van *f* op het interval [*a* , *b*]

DAN $$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

drie regels Voor integralen gelden de rekenregels:

(1) $$\int_a^b c f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

(2) $$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

(2') $$\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

4 De techniek van het integreren

Voor het differentiëren heb je een aantal algemene regels geleerd waarmee je in principe van elke functie die samengesteld is uit standaardfuncties (zoals machtsfuncties, exponentiële functies, logaritmische functies, goniometrische functies) de afgeleide kunt berekenen. Daarvoor heb je een aantal regels geleerd zoals de productregel en de kettingregel. Het is dan wel de kunst om op het juiste moment de goede regels toe te passen en natuurlijk om geen rekenfouten te maken.

puzzelen

Bij het integreren is dat veel minder eenvoudig. Je hebt in het vorige hoofdstuk wel gemerkt dat je af en toe een beetje moest puzzelen om een primitieve functie te vinden. Sommige typen functies hebben hun eigen regels en trucs, die erg ingewikkeld kunnen zijn. De techniek van het integreren is een vak apart. Er bestaan boeken waarin van allerlei typen functies de primitieve vermeld staat, een soort encyclopedie voor het integreren. Maar... het is niet zo dat van iedere functie uit het ‘standaardrepertoire’ een primitieve te vinden is die zelf ook weer samengesteld is uit standaardfuncties.

numeriek

Bij het berekenen van moeilijke integralen gebruikt men verschillende benaderingstechnieken waarbij de computer het rekenwerk op zich neemt. Men spreekt dan van *numerieke* oplossingen. Je hebt gezien hoe je dat bijvoorbeeld op de TI 83 kunt doen via het menu CALC.
Een andere manier op de TI 83 is via het menu MATH optie fnInt.

1 Die laatste manier ga je nu toepassen op een functie waarvan een primitieve lastig te vinden is, namelijk:

$$f(x) = \sqrt{1+x^2}$$

a. Toets in Y_1 = fnInt($\sqrt{(1+\text{T}^2)}$, T, 0, X). (T via de ALPHA - toets).

Dat betekent: integraal van de functie $f(t) = \sqrt{1+t^2}$ waarbij t loopt van 0 tot x.
Ofwel:

$$y_1(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

Maak een grafiek van y_1 op de GR.

b. y_1 kun je opvatten als de oppervlaktefunctie bij f met startlijn $x = 0$. Wat gebeurt er met de grafiek van y_1 als je een andere startlijn kiest?

c. Bereken met fnInt de waarde van de integraal:

$$\int_2^5 \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

d. Iemand beweert:

bij $f(x) = \sqrt{1+x}$ hoort een primitieve $F(x) = \frac{2}{3}(1+x)\sqrt{1+x}$,

dus bij $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ vind ik $F(x) = \frac{2}{3}(1+x^2)\sqrt{1+x^2}$.

Wat klopt er niet en waarom?

computer-algebra

Er bestaan tegenwoordig computerprogramma's die *symbolisch* kunnen rekenen: zij kunnen haakjes uitwerken, veeltermen ontbinden in factoren, differentiëren en nog veel meer.
Dergelijke programma's kunnen bij allerlei functies, indien mogelijk, een formule voor de primitieve geven.
Zo'n programma heet een *computeralgebra*-programma.
Een bekend programma dat op vrijwel elke PC kan draaien is DERIVE.
Als je met DERIVE een primitieve laat vinden van de functie uit opgave **1,** komt er:

$$\#1:\quad \int \sqrt{(1+x^2)}\,dx = \frac{\mathrm{LN}(\sqrt{(x^2+1)}+x)}{2} + \frac{x\cdot\sqrt{(x^2+1)}}{2}$$

Rechts van het =-teken staat de formule waarmee je een primitieve van $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ kunt beschrijven.
Je ziet: het resultaat ligt zeker niet voor de hand. Als je het niet vertrouwt, kun je het controleren door differentiëren.
Een wat eenvoudiger voorbeeld is dit:

$$\#1:\quad \int \mathrm{SIN}(x)^2\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\mathrm{SIN}(x)\cdot\mathrm{COS}(x)}{2}$$

2 **a.** Misschien zou je denken dat $F(x) = \frac{1}{3}\sin^3 x$ een primitieve is van $f(x) = \sin^2 x$
Ga na dat dit niet juist is.

Je gaat nu zelf een primitieve van $f(x) = \sin^2 x$ opsporen. Dat is best te doen, als je deze twee formules (zie het boekje 'Periodieke Bewegingen') gebruikt!

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$$
$$\cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t$$

b. Maak eerst de grafiek van $f(x) = \sin^2 x$ op de GR. Zij lijkt op een sinusoïde. Met welke amplitude en met welke periode?

c. Dat de grafiek van *f* inderdaad een sinusoïde is, kun je bewijzen door bovenstaande twee formules handig te combineren. Hoe?

d. Als het goed is, heb je nu een nieuwe formule voor *f* gevonden. Daarmee kun je vrij eenvoudig een primitieve vinden. Welke primitieve functie krijg je dan?

tip

e. Jouw antwoord verschilt vermoedelijk van dat van DERIVE. Laat zien dat dit verschil maar schijn is.

3 Gebruik bovenstaande formules ook om een primitieve te vinden van $f(x) = \cos^2 x$.

4 **a.** De grafiek van $f(x) = \sin x \cos x$ is een sinusoïde. Controleer dit op de GR en laat dit vervolgens zien met behulp van een van de formules uit 'Periodieke Bewegingen'.

b. Geef een primitieve van *f*.

Bij machtsfuncties is het vinden van een primitieve niet moeilijk.
Voor machten met een natuurlijke exponent, geldt:

functie $f(x) =$	**primitieve** $F(x) =$
x	$\frac{1}{2}x^2$
x^2	$\frac{1}{3}x^3$
x^3	$\frac{1}{4}x^4$
x^4	$\frac{1}{5}x^5$
enz.	enz.

In het algemeen geldt:

functie	**primitieve**
$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$

Deze regel geldt ook voor gebroken en voor negatieve exponenten, met uitzondering dan van $n = -1$!

5 **a.** Maak een rijtje met functies en primitieven (zoals boven) met $n = \frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}$.

b. Bereken de exacte waarde van $\int_0^{25} x\sqrt{x}\,dx$

6 **a.** Maak een rijtje met functies en primitieven (zoals boven) met $n = -2, -3, -4, -5$.

b. Bereken de exacte waarde van $\int_1^{10} \frac{1}{x^4}\,dx$

Zoals gezegd geldt bovenstaande regel niet voor $n = -1$.
In het boekje 'De techniek van het differentiëren' (blz. 64) was er sprake van 'de ontbrekende schakel'. Je hebt daar gezien dat de natuurlijke logaritme de leemte opvult.
We hebben:

functie	**primitieve**
$f(x) = x^{-1}$	$F(x) = \ln x$

7 **a.** Als voorwaarde bij deze regel geldt $x > 0$. Waarom?
b. Bedenk een primitieve van f met $f(x) = x^{-1}$ voor $x < 0$.

8 **a.** Bereken de oppervlakte onder de grafiek van $y = \frac{1}{x}$ op het interval $[1, e]$.
b. Op het interval $[5, b]$ is de oppervlakte onder de grafiek van $y = \frac{1}{x}$ gelijk aan 1.
Bereken b.

rol van constante

9 Laat F een primitieve zijn van f
In de notatie van Leibniz (en met weglating van de integratie-constante):

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)$$

Laat a een constante $\neq 0$ zijn.
Druk uit in F, x en a (je mag de integratie-constante weglaten):

a. $\int f(x+a)\,\mathrm{d}x$

b. $\int (f(x)+a)\,\mathrm{d}x$

c. $\int f(ax)\,\mathrm{d}x$

d. $\int af(x)\,\mathrm{d}x$

10 Bereken de exacte waarde van:

a. $\int_1^5 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

b. $\int_1^5 \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x$

c. $\int_1^5 \frac{1}{3x}\,\mathrm{d}x$

d. $\int_1^5 (\frac{1}{x}+4)\,\mathrm{d}x$

Het opsporen van de formule voor een primitieve bij een gegeven functie komt neer op ‘terugzoeken’. Een mooi voorbeeld daarvan vind je in de volgende opgave.

11 Gezocht een primitieve van $f(x) = xe^x$

Isabel gokt op $F(x) = xe^x$
Natuurlijk controleert zij dit door te differentiëren. Helaas ....
Maar niet getreurd; op grond van deze afgeleide kan zij, na een correctie, een goede primitieve vinden. Doe haar dat na.

12 Bepaal:

a. $\int e^{-x}\,\mathrm{d}x$

b. $\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x$

In het begin van dit hoofdstuk is opgemerkt dat bij een functie die een combinatie van standaardfuncties is, niet altijd een primitieve te vinden is die eveneens in standaardfuncties is uit te drukken.
Een beroemd voorbeeld daarvan is de functie f met $f(x) = e^{-x^2}$

13 a. Maak met venster [–5 , 5] bij [0 , 2] de grafiek van laatstgenoemde functie op de GR. Welke bijzonderheden merk je op?

b. Maak ook op de GR (zelfde venster) een grafiek van de primitieve F van deze functie die voldoet aan $F(-5) = 0$ (de GR tekent nu heel erg traag!).

c. Hoe kun je zeker weten dat de tweede grafiek een buigpunt heeft op de lijn $x = 0$?

Probeer maar niet een ‘gewone’ formule voor F te vinden. Als je het aan DERIVE vraagt, komt er:

$$\#1: \quad \int \hat{e}^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}\cdot \mathrm{ERF}(x)}{2}$$

normale kromme

In het antwoord is een ‘nieuwe’ functie verwerkt: ERF. De afkorting staat voor Error Function. De functie f en zijn primitieve F spelen namelijk een rol in de statistiek en in de foutenrekening.
De grafiek van f is een zogenaamde Gausskromme of normale kromme.

De grafiek van F lijkt een beetje op een S of , zo je wilt, op het integraalteken; zij wordt wel S-kromme of sigmoïde genoemd.

14 Heb je even gedacht dat $F(x) = -e^{-x^2}$ een primitieve is van $f(x) = e^{-x^2}$?
De grafieken van opgave **13** helpen je uit deze droom.

a. Als je F correct differentieert, zie je trouwens ook dat dit niet klopt. Ga maar na.

b. Laat g de functie zijn met $g(x) = xe^{-x^2}$
Het blijkt nu dat je wél met behulp van standaardfuncties een primitieve G van g kunt beschrijven. Hoe?

tip

c. Teken op de GR met venster [-4 , 4] bij [-1 , 1] de grafiek van g en van een primitieve G van g. Probeer de vorm van de tweede grafiek uit de eerste te verklaren.

Samenvatting

Als je een integraal wilt berekenen met behulp van de hoofdstelling van de differentiaal- en integraalrekening, zoek je een primitieve van de te integreren functie.
Het kan heel lastig zijn om zo'n primitieve te vinden en vaak is het zelfs onmogelijk om bij f (uitgedrukt in standaardfuncties) een primitieve F te vinden die zelf ook in standaardfuncties is uitgedrukt.

rol van constante

Als het bij een functie f wel lukt om een primitieve in standaardfuncties uit te drukken, dan lukt het ook bij de functies g gegeven door:
$g(x) = f(x+c)$, $f(x)+c$, $f(cx)$, $cf(x)$, met c als constante $\neq 0$.
Er geldt dan:

functie g met $g(x)$ =	**primitieve G met $G(x)$ =**
$f(x+c)$	$F(x+c)$
$f(x)+c$	$F(x)+cx$
$f(cx)$	$\frac{1}{c}F(cx)$
$cf(x)$	$cF(x)$

machts-functies

Van functies van het type $f(x) = x^n$ is een primitieve F gegeven door:

functie f met $f(x)$ =	**primitieve F met $F(x)$ =**
x^n $(n \neq -1)$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
x^{-1} $(x > 0)$	$\ln x$
x^{-1} $(x < 0)$	$\ln(-x)$

exponentiële functies

Van functies van het type $f(x) = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$ is een primitieve F gegeven door:

functie f met $f(x)$ =	**primitieve F met $F(x)$ =**
a^x $(a > 0, a \neq 1)$	$\frac{1}{\ln a}a^x$

sin en cos

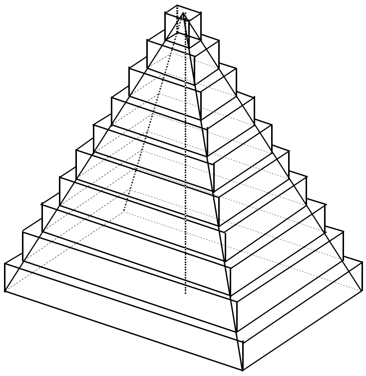
Van de goniometrische functies sinus en cosinus wordt een primitieve gegeven door:

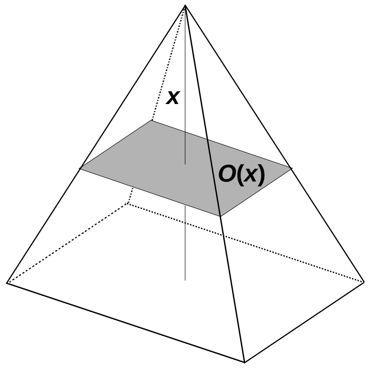
functie f met $f(x)$ =	**primitieve F met $F(x)$ =**
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$

5 Inhoudsberekeningen

doorsnede-functie

In hoofdstuk 2 heb je gezien hoe met behulp van een integraal de formule voor de inhoud van een piramide kan worden gevonden. De aanpak daarbij was: benader de inhoud door middel van een serie dunne plakjes (in de vorm van een prisma); de bodem van zo’n plakje is een horizontale doorsnede van de piramide.





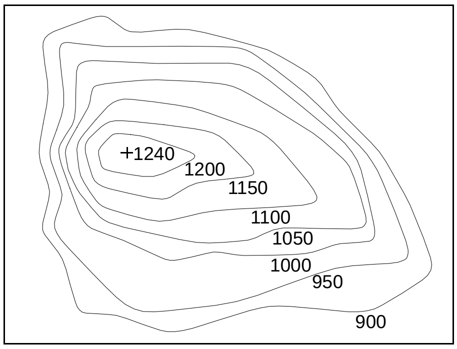
Om de inhouden van de plakjes te kunnen berekenen, moet je de oppervlakte van die doorsneden weten; die oppervlakten variëren met de hoogte en je kunt spreken van een *doorsnede-functie*. De som van de inhouden van die plakjes is dan een Riemannsom die past bij de doorsnede-functie en dat leidt ten slotte tot een integraal.

hoogtekaart

Deze strategie beperkt zich niet tot de piramide, maar is toepasbaar op allerlei ruimtelijke vormen.

Zo kun je bijvoorbeeld uit de hoogtekaart van een berg een schatting maken voor het volume via de volgende procedure:

– benader de oppervlakte van de gebieden omsloten door de hoogtelijnen (vanaf de voet van de berg tot de top);
– vermenigvuldig die oppervlakten met het hoogteverschil tussen opvolgende hoogtelijnen, je krijgt dan de inhouden van een serie ‘plakken’;
– sommeer deze inhouden.

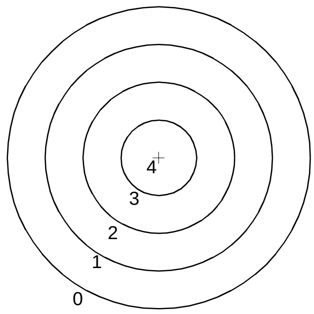


Je kunt je voorstellen dat de berekening van het volume des te nauwkeuriger is naarmate een fijner net van hoogtelijnen wordt gebruikt.
Deze methode met hoogtelijnen kan worden toegepast in de medische wetenschap. Door middel van echografie wordt bijvoorbeeld een scan gemaakt van een inwendig abces. Uit een serie parallelle doorsneden kan dan een schatting van het volume van zo’n abces worden gemaakt.
Zo’n schatting kan worden geschreven als:

$$\sum_{k=1}^{n} O(z_k)\mathrm{D}z$$

Hierin stelt $O(z_k)$ de doorsnee-oppervlakte op ‘hoogte’ z_k voor, en $\mathrm{D}z$ de afstand tussen twee opvolgende doorsneden.

1 Regelmatige vormen hebben regelmatige hoogtekaarten.
Hiernaast zie je een hoogtekaart van een kegel. De hoogte van de kegel en de straal van de grondcirkel zijn beide gelijk aan 4.



a. Teken een zijaanzicht van de kegel (met daarin de hoogtelijnen 0, 1, 2, 3).
b. Ga na dat de oppervlakte van de doorsnede op hoogte z gelijk is aan $\pi(4-z)^2$.
c. De exacte inhoud van de kegel is de limiet van de Riemannsom $\sum_{k=1}^{n} \pi(4-z_k)^2 \Delta z$. Welke integraal levert dit op?
d. Laat nu met behulp van integraalrekening zien dat de inhoud gelijk is aan $21\frac{1}{3}\pi$.
e. Net als bij een piramide kun je de inhoud van een kegel berekenen met de regel:

$$\text{inhoud} = \tfrac{1}{3} \cdot \text{hoogte} \cdot \text{oppervlakte grondvlak.}$$

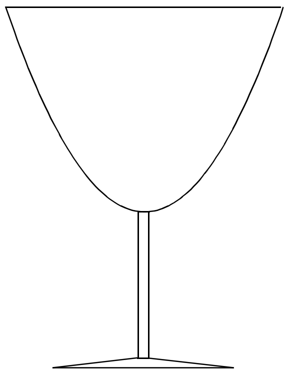
Controleer nog even dat bovenstaande uitkomst daarmee in overeenstemming is.

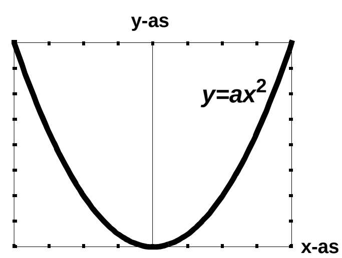
2 **a.** Maak een hoogtekaartje van een halve bol met straal 4 en met doorsneden op hoogten 0, 1, 2, 3, 4. Gebruik daarbij een zijaanzicht.
Waarin verschilt dit hoogtekaartje van het hoogtekaartje van een kegel?
b. Veronderstel nu dat je straal van de halve bol gelijk is aan R.
Laat zien dat de oppervlakte van de doorsnede op hoogte z gelijk is aan:

$$\pi(R^2 - z^2)$$

c. Bewijs nu met behulp van een integraal dat de inhoud van een halve bol met straal R gelijk is aan $\frac{2}{3}\pi R^3$

3 Als je een parabool wentelt om zijn symmetrie-as, ontstaat een zogenaamde *paraboloïde*. De paraboloïde wordt vanwege zijn meetkundige eigenschappen veelvuldig toegepast in de techniek. Schotelantennes en radiotelescopen hebben de vorm van een paraboloïde. Maar daarover meer in een van de meetkundeboekjes.
Op deze plaats zijn we geïnteresseerd in de inhoud van een paraboloïde.
Stel je voor een ijscoupe of wijnglas van deze vorm.





Als je het pootje en de voet van het glas buiten beschouwing laat, kun je de vorm van het glas laten ontstaan door de grafiek van $y = ax^2$ te wentelen om de y-as.
a. Laat zien dat de oppervlakte van de doorsnede op de hoogte y gelijk is aan $\frac{\pi}{a}y$.
b. Stel de hoogte van de paraboloïde gelijk aan h. Druk de inhoud uit in a en h.
c. De paraboloïde past precies in een cilinder met straal r en hoogte h. Laat zien dat de inhoud van de paraboloïde gelijk is aan de helft van de cilinder.

4 Bekijk op de GR met venster [-1 , 1] bij [0 , 1] de grafiek van $y = 1 - x^2$

a. Laat door een berekening zien dat de inhoud van de paraboloïde die ontstaat door deze grafiek te wentelen om de y-as gelijk is aan $\frac{1}{2}\pi$.

b. Als je de grafiek om de x-as wentelt, ontstaat een geheel andere figuur. De inhoud van die figuur is gelijk aan de integraal:

$$\int_{-1}^{1} \pi y^2 \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \pi (1 - x^2)^2 \mathrm{d}x$$

Verklaar dit.

tip

c. Laat door een berekening zien dat de inhoud van het tweede omwentelingslichaam meer dan 2 keer zo groot is als de inhoud van het eerste.

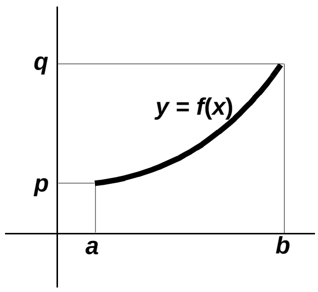
5 Als de grafiek van $y = \sin x$ wordt gewenteld om de x-as ontstaat een (oneindig lange) ‘parelketting’.

a. Bereken met behulp van de GR de inhoud van één parel.

b. Toon aan dat die inhoud exact gelijk is aan $\frac{1}{2}\pi^2$.

inhoud van omwentelingslichamen

Hieronder zie je de grafiek van een stijgende functie f op het x-interval $[a , b]$.

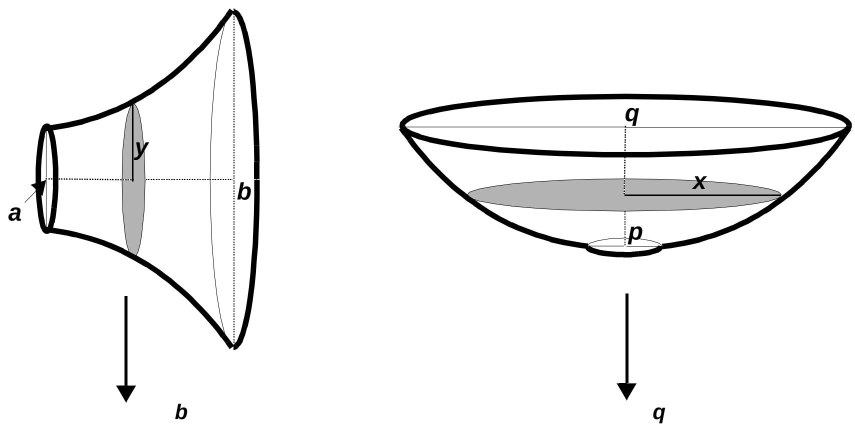


Het y-interval dat bereikt wordt is $[p , q]$.
Het achtereenvolgens wentelen van de grafiek om de x-as en om de y-as geeft in het algemeen twee verschillende *omwentelingslichamen*, zeg L_x en L_y
Nu geldt:

de oppervlakte van een doorsnede loodrecht op de omwentelings-as van L_x is gelijk aan πy^2

de oppervlakte van een doorsnede loodrecht op de omwentelings-as van L_y is gelijk aan πx^2

Daaruit volgt:



inhoud $L_x = \int_a^b \pi y^2 \mathrm{d}x$

inhoud $L_y = \int_p^q \pi x^2 \mathrm{d}y$

6 Beschouw het deel van de grafiek van $y = x\sqrt{x}$ tussen de lijnen $x = 1$ en $x = 4$.

a. Maak een schets van de omwentelingslichamen L_x en L_y die ontstaan door deze kromme te wentelen respectievelijk om de x-as en de y-as.

tip **b.** Bereken de inhoud van L_x en van L_y

7 Het verhaal op de vorige bladzijde over de inhoud van omwentelingslichamen is ook geldig voor dalende functies.

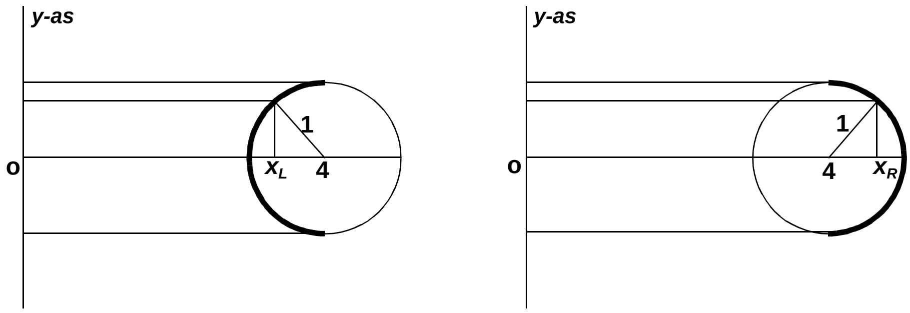
Bekijk de grafiek van $y = \frac{1}{x^2}$ op het x-interval [1 , 2].

L_x en L_y zijn weer de omwentelingslichamen die je krijgt als je deze kromme wentelt om respectievelijk de x-as en de y-as.
Bereken van beide omwentelingslichamen de inhoud.

8 In het Oxy-vlak ligt een cirkel met middelpunt (4 , 0) en straal 1.

a. Als je deze cirkel wentelt om de x-as krijg je een bol.
Hoe groot is de exacte inhoud van die bol?

Als je de cirkel om de y-as wentelt, ontstaat een ringvormige figuur (denk bijvoorbeeld aan de binnenband van een fiets); in de wiskunde heet zoiets een *torus.*
Het berekenen van de inhoud van de torus is lastig, omdat de kromme die gewenteld wordt, gesloten is. Een methode die werkt is om de inhoud te berekenen als het verschil van twee omwentelingslichamen:
het ene (zeg R_y) dat ontstaat als je de rechterhelft van de cirkel om de y-as wentelt, het andere (L_y) dat beschreven wordt door de linkerhelft van de cirkel.



Een horizontale lijn op hoogte y tussen –1 en 1 snijdt de rechterhelft in een punt met x-coördinaat x_R en de linkerhelft in een punt met x-coördinaat x_L.

b. Verklaar nu de formule:

$$\text{inhoud torus} = \int_{-1}^{1} \pi x_R^2 \, dy - \int_{-1}^{1} \pi x_L^2 \, dy$$

tip **c.** Verklaar (meetkundig) dat geldt:

$$x_R = 4 + \sqrt{1 - y^2}$$

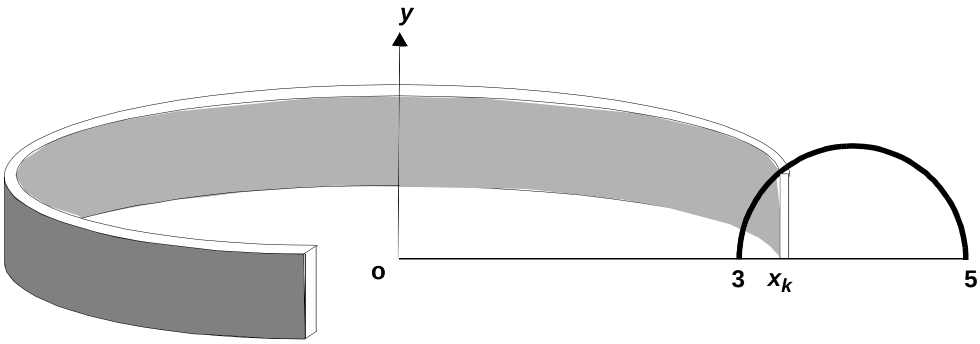
$$x_L = 4 - \sqrt{1 - y^2}$$

Om de berekening te vereenvoudigen, schrijven we het verschil van de twee integralen in **b** als één integraal:

$$\pi \int_{-1}^{1} (x_R^2 - x_L^2) dy = \pi \int_{-1}^{1} (x_R + x_L)(x_R - x_L) dy$$

d. Vul de resultaten van **c** in en bereken met de GR de inhoud van de torus.

9 Nog een andere aanpak voor het berekenen van de torus is de volgende.
We beperken ons eerst tot de bovenste helft van de torus, dus we berekenen de inhoud van het lichaam dat ontstaat door de bovenste helft van de cirkel te wentelen om de y-as. Achteraf hoef je dan alleen nog het resultaat te verdubbelen om de torusinhoud te vinden.
De methode is nu om de halve torus op te vullen met ‘cilinderwandjes’:



De inhoud van zo’n (hyperdun) cilinderwandje, dikte Δx, kan worden benaderd door de inhoud van een rechte plak. De plak die met het k-de wandje correspondeert, heeft de dikte Δx, de hoogte y_k en de lengte $2\pi x_k$
Zo wordt de som van n cilinderwandjes benaderd door de Riemannsom:

$$\sum_{k=1}^{n} 2\pi x_k y_k \Delta x$$

De limiet hiervan is gelijk aan de integraal:

$$\int_3^5 2\pi x y \, dx$$

en die moet dan gelijk zijn aan de inhoud van de halve torus.

a. Verklaar de benaderingsformule $2\pi x_k y_k \Delta x$ voor de inhoud van het k-de cilinderwandje.

b. Om bovenstaande integraal te berekenen, moet y worden uitgedrukt in x.
Dat levert op:

$$y = \sqrt{1 - (4 - x)^2}$$

Verklaar deze formule. (Merk op: de formule geldt ook voor $x > 4$).

c. Bereken de inhoud van de halve torus met behulp van de GR en bovenstaande integraal. Ga na of het resultaat in overeenstemming is met wat je in **8d** vond.

Ten slotte nog een derde manier om de inhoud van een torus te vinden.
Die is gebaseerd op een oude rekenregel die hier verder niet verklaard wordt.
Het volume van een omwentelingslichaam is gelijk aan het product van de oppervlakte van het roterende vlakdeel en de baanlengte die het zwaartepunt van dat vlakdeel bij die rotatie aflegt.
Dit is de zogenaamde regel van Guldin (naar de Zwitsers-Oostenrijkse wiskundige Paul Guldin (1577 - 1643).

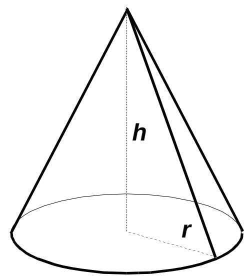
10 De regel van Guldin kun je gemakkelijk toepassen bij een torus, omdat het zonneklaar is dat het zwaartepunt van het roterende vlakdeel in het middelpunt van de cirkel moet liggen.
Verklaar nu dat de inhoud van de torus uit de vorige opgaven volgens Guldin gelijk moet zijn aan $8p^2$ en vergelijk dit met het eerdere gevonden resultaat.

11 Vervang de roterende cirkel door een roterend vierkant. Laat in de uitgangspositie de hoekpunten van het vierkant (5 , 1), (3 , 1) , (3 , –1) en (5 , –1) zijn.

a. Bereken de exacte inhoud van het omwentelingslichaam volgens Guldin.

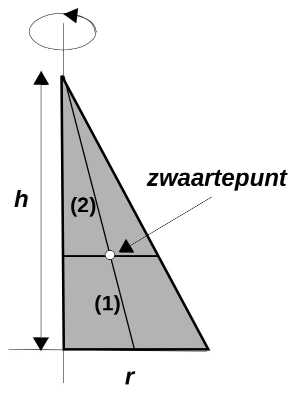
b. Je kunt deze inhoud ook berekenen door het verschil te nemen van de inhouden van twee cilinders. Ga na of dit hetzelfde resultaat geeft.

12 De inhoud van een kegel waarvan de hoogte gelijk is aan *h* en waarvan de grondcirkel de straal *R* heeft, is gelijk aan $\frac{1}{3}pr^2h$.
Bewijs deze formule met behulp van een integraal.



13 Bovenstaande formule kun je ook begrijpen als je de kegel opvat als de limietfiguur van een serie piramides P_n (n = 3, 4, 5, ...), waarvan de top samenvalt met de top van de kegel, waarvan de hoogte gelijk is aan *h* en waarvan het grondvlak een regelmatige *n*-hoek is met de hoekpunten op de grondcirkel. Als *n* onbeperkt groot wordt, nadert de oppervlakte G_n van het grondvlak van P_n tot de oppervlakte van de grondcirkel.
Verklaar nu opnieuw de formule voor de inhoud van de kegel.

14 Als je weet waar het zwaartepunt van een driehoek ligt, kun je de inhoudsformule voor een kegel ook vinden met behulp van de regel van Guldin.
Het zwaartepunt van een driehoek ligt op de zwaartelijn uit de top (dat is de lijn van de top naar het midden van de basis) en wel zó dat het zwaartepunt die zwaartelijn verdeelt in stukken met verhouding 2 : 1.
Laat nu zien dat de regel van Guldin bovenstaande formule voor de inhoud van een kegel oplevert.



Samenvatting

inhoud als integraal

Stel je voor een lichaam dat ingeklemd is tussen twee horizontale vlakken, waarvan we er een als grondvlak beschouwen. De afstand tussen die vlakken is de *hoogte* (zeg h) van het lichaam.
Als de doorsnede van een horizontaal vlak op hoogte x ten opzichte van het grondvlak gelijk is aan $O(x)$, dan wordt de inhoud van dat lichaam gegeven door de integraal:

$$\int_0^h O(x)\,\mathrm{d}x$$

omwentelingslichaam

Een omwentelingslichaam ontstaat door een stuk van een rechte of kromme lijn in een Oxy-vlak te wentelen (roteren) om een as in het Oxy-vlak.
Laat de roterende kromme een stijgende (of dalende) grafiek zijn, passend bij de formule $y = f(x)$.
Stel $[a\,,\,b]$ en $[p\,,\,q]$ zijn respectievelijk het x-interval en het y-interval bij die grafiek.
Als L_x en L_y de omwentelingslichamen zijn die beschreven worden door de grafiek bij wenteling om respectievelijk de x-as en de y-as, dan geldt:

$$\textbf{inhoud } L_x = \int_a^b \pi y^2\,\mathrm{d}x$$

$$\textbf{inhoud } L_y = \int_a^b \pi x^2\,\mathrm{d}y$$

cilinder, kegel, bol

Bovenstaande stellingen berusten op het idee dat de inhoud van een cilinderachtig lichaam gelijk is aan de hoogte $\cdot$ de oppervlakte van het grondvlak.
In het bijzonder geldt voor een cilinder waarvan het grondvlak een cirkel is met straal R en de hoogte h, de formule:

$$\textbf{inhoud cilinder} = \pi R^2 h$$

Voor een kegel waarvan het grondvlak een cirkel is met straal R en waarvan de hoogte h is, geldt dat de inhoud gelijk is aan $\frac{1}{3}$ $\cdot$ de hoogte $\cdot$ de oppervlakte van het grondvlak, ofwel:

$$\textbf{inhoud kegel} = \tfrac{1}{3}\pi R^2 h$$

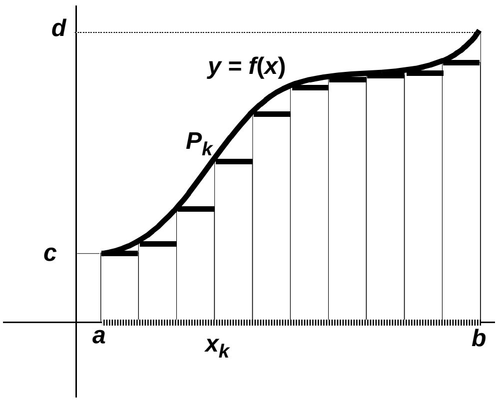
De inhoud van een bol met straal R wordt gegeven door de formule:

$$\textbf{inhoud bol} = \tfrac{4}{3}\pi R^3$$

6 Gevarieerde toepassingen van de integraalrekening

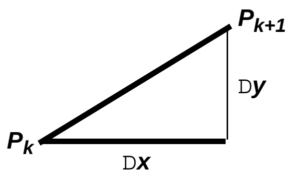
lengte van een kromme

Beschouw de grafiek van een (differentieerbare) functie f van x op het interval $[a\ ,\ b]$.
Je hebt gezien dat je de oppervlakte onder zo'n grafiek kunt benaderen met de oppervlakte onder een 'trapgrafiek'.
Door de 'treden' onbeperkt te verkleinen, wordt de oppervlakte onbeperkt dicht benaderd.
In het verleden hebben we dat beredeneerd door de oppervlakte in te klemmen tussen een 'ondersom' en een 'bovensom' en te laten zien dat het verschil tussen die beide onbeperkt klein wordt.



Je zou kunnen denken dat je met zo'n trapgrafiek ook de lengte van de grafiek, tussen de punten $(a\ ,\ c)$ en $(b\ ,\ d)$ kunt vinden, maar dat is per se niet waar!
Hoe fijn je de verdeling ook kiest, de totale lengte van de 'treden' is en blijft gelijk aan de lengte van het interval $[a\ ,\ b]$, dus aan het getal $b - a$. En onze intuïtie zegt dat de kromme een stuk langer is ...

Laat P_k een deelpunt zijn op de grafiek waarin de raaklijn niet horizontaal is.
Als je inzoomt op een klein stukje van de grafiek rechts van P_k , dan ontstaat het beeld van een schuin lijntje, en dat is (volgens de stelling van Pythagoras) langer dan het bijbehorende horizontale stukje.
Bij een fijne verdeling is er geen verschil waarneembaar tussen de grafiek van P_k tot P_{k+1}, de koorde P_kP_{k+1} en een stukje raaklijn in P_k



Laat nu Δx en Δy de verschillen zijn tussen de x - en y -coördinaten van P_k en P_{k+1}, dan geldt:

$$\Delta y \approx f'(x_k)\Delta x$$

en uit de stelling van Pythagoras volgt dan:

$$\text{lengte } P_kP_{k+1} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \approx \sqrt{1 + f'(x_k)^2}\ \ \Delta x$$

De totale lengte van de kromme kan nu worden benaderd door de som van de lengten van superkleine koorden, namelijk door:

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + f'(x_k)^2}\ \ \Delta x$$

Dit herkennen we als een Riemannsom en het is nu aannemelijk dat de lengte van de kromme exact gelijk is aan de integraal

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

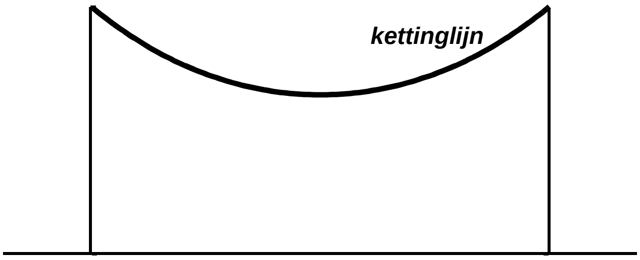
1 Maak op de GR met venster [0 , 1] bij [0 , 1] de grafieken van $y_1 = x$, $y_2 = x^2$ en $y_3 = x^3$
Omdat je naar de lengte gaat kijken, kun je nu Zsquare intoetsen.
Van de drie verbindingen tussen (0 , 0) en (1 , 1) is de grafiek van y_1 natuurlijk de kortste en lijkt de grafiek van y_3 de langste.
In deze opgave ga je kijken hoeveel dat scheelt.

a. Om de lengte van de y_1-verbinding te vinden, heb je natuurlijk geen integraal nodig, maar het is toch aardig om even na te gaan dat de formule onderaan de vorige bladzijde ook in dit geval klopt. Doe dit.

b. Bereken de lengte van de y_2-verbinding met behulp van de GR (het werkt het gemakkelijkst met fnInt).

c. Doe hetzelfde voor de y_3-verbinding.

2 Een (homogeen) snoer wordt met zijn uiteinden aan de toppen van twee even hoge palen bevestigd. Als het snoer langer is dan de afstand tussen de palen en weer niet zo lang dat het op de grond hangt, vormt het een zogenaamde *kettinglijn*.



De vorm van de kettinglijn ten opzichte van een *Oxy*-stelsel kan worden beschreven met de formule:

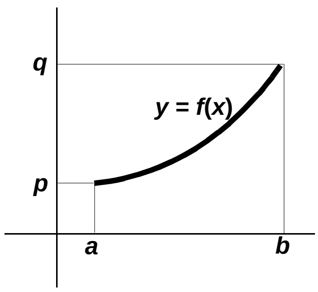
$$y = \frac{1}{2a}\left(e^{ax} + e^{-ax}\right)$$

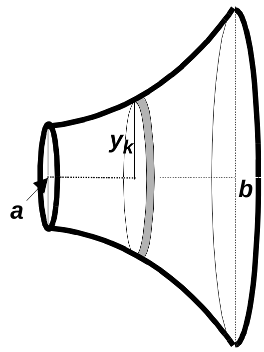
Hierin is a een positieve constante.

a. Teken een kettinglijn op de GR. Laat de palen bij $x = 1$ en bij $x = -1$ staan.
Kies a zó, dat het laagste punt van de kettinglijn zich op hoogte 1 boven de x-as bevindt.

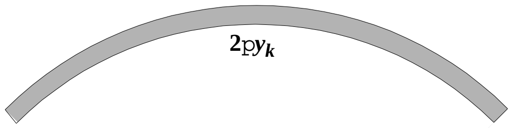
b. Bereken de lengte van die ketting.

oppervlakte Van omwentelingslichamen kun je niet alleen de inhoud, maar ook de oppervlakte uitrekenen met behulp van een integraal. Daartoe beschouwen we het ‘reepje’ beschreven door een minuscuul stukje van de grafiek van $y = f(x)$.





Het stukje grafiek dat het reepje voortbrengt, kan worden benaderd door de bijbehorende koorde. Het reepje wordt dan benaderd door het reepje voortgebracht door die koorde en dat is een reepje van een kegelvlak. Dit nu kun je doorknippen en platleggen:



Je krijgt dan een vlakke figuur begrensd door twee bogen; de onderste boog heeft de lengte $2\pi y_k = 2\pi f(x_k)$. De bovenste boog is een klein beetje langer (verschil = $2\pi\,\Delta y$).

De breedte van het reepje ≈ lengte stukje grafiek van $f \approx \sqrt{1 + f'(x_k)^2}\ \Delta x$

De oppervlakte van het reepje ≈ lengte · breedte ≈ $2\pi f(x_k) \cdot \sqrt{1 + f'(x_k)^2}\ \Delta x$

De som van de oppervlakten van de reepjes is bij benadering gelijk aan:

$$\sum_{k=1}^{n} 2\pi f(x_k)\sqrt{1 + f'(x_k)^2}\,\Delta x$$

De limiet van deze Riemannsom geeft de oppervlakte van het gebogen vlak en die is dan gelijk aan de integraal:

$$\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

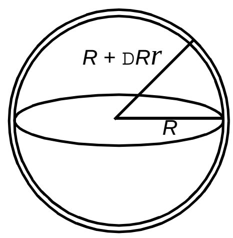
3 Bekijk de grafiek van $y = 4\sqrt{x}$ op het interval [0 , 4]. Als deze grafiek wordt gewenteld om de x-as, ontstaat een paraboloïde.
Gebruik bovenstaande formule om de oppervlakte van de paraboloïde te berekenen.

oppervlakte bol

4 Een bol met straal R ontstaat door wenteling van de grafiek van $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ op het interval $[-R , R]$ te wentelen om de x-as. Laat met behulp van een integraal zien dat de oppervlakte van de bol gelijk is aan $4\pi R^2$.

tip

5 Er zijn ook andere manieren om een formule af te leiden voor de oppervlakte van een bol met straal R. Uitgaande van de in het vorige hoofdstuk genoemde formule voor de inhoud van de bol, kan de oppervlakteformule worden gevonden. Het idee is als volgt.

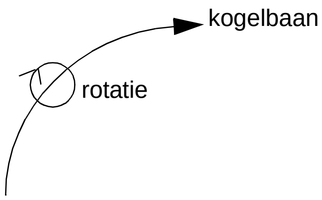


Bedek een bol met straal R met een ‘schil’ die overal dezelfde dikte heeft. Als de schil hyper dun is, dan is de oppervlakte van binnenkant en buitenkant praktisch gelijk. Het volume van deze schil is dan vrijwel *oppervlakte bol* maal *dikte schil*. De oppervlakte van de bol is dus te verkrijgen door het volume van de schil te delen door de dikte van de schil en te onderzoeken wat er gebeurt als de dikte van de schil tot 0 nadert. Voer dit uit. Misschien herken je hierbij dat je eigenlijk aan het differentiëren bent!

Als je een bal gooit of omhoog schopt, dan krijgt de bal twee verschillende bewegingen. De bal draait om zijn middelpunt en gaat via een ‘kogelbaan’ door de lucht. Ook als je een stok weggooit, zie je deze twee bewegingen: een draaiing of rotatie om een punt en de kogelbaan die de stok als geheel aflegt.

zwaartepunt

Het punt waarom de bal roteert, is het *zwaartepunt* van de bal. Vaak is het handig om de bal te beschouwen als een puntvormige massa: alle massa geconcentreerd in één punt, het zwaartepunt. Ook de stok heeft een zwaartepunt. Voor de baanbeweging is bij bal en stok alleen de beweging van het zwaartepunt van belang.

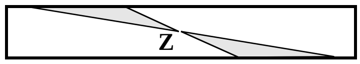


Het zwaartepunt van een lichaam is het aangrijpingspunt van het gewicht van dat lichaam. Het is het punt waaromheen de massa van het lichaam gelijkelijk verdeeld is. Een betere naam is misschien: het massamiddelpunt.

homogeen

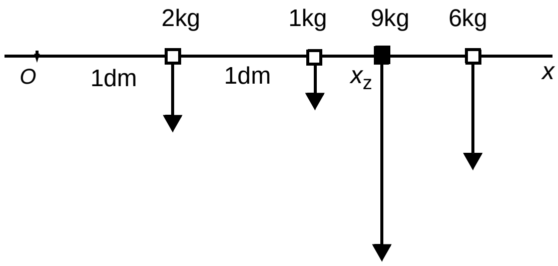
Tenzij anders vermeld, beschouwen we in het vervolg *homogene* lichamen, dat zijn lichamen waarbij de soortelijke massa overal gelijk is, dus bijvoorbeeld massieve lichamen van één soort materiaal.

Bij een puntsymmetrisch lichaam zoals een bol of een balk, is het symmetriecentrum tevens het zwaartepunt. De massa is immers ten opzichte van dit punt ‘gelijkelijk verdeeld’.



Bij lichamen die *niet* puntsymmetrisch zijn, zoals een halve bol of een driehoekige schijf, is de plaats van het zwaartepunt niet altijd gemakkelijk te vinden. Het berekenen van de plaats van het zwaartepunt gaat dikwijls met behulp van integreren.

Eerst een eenvoudig voorbeeld.
Op de x-as bevinden zich drie puntmassa’s op 1 dm van elkaar.
Het totale moment van deze puntmassa’s ten opzichte van O is:
$2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 6 \cdot 3 = 22$
Het moment van het zwaartepunt ten opzichte van O is $9 \cdot x_Z$
Omdat Z het zwaartepunt is, moeten beide momenten gelijk zijn.



6 **a.** Bereken x_Z .
b. Kies de oorsprong 2 dm verder naar links en laat zien dat deze andere keuze van O geen invloed heeft op de plaats van het zwaartepunt.

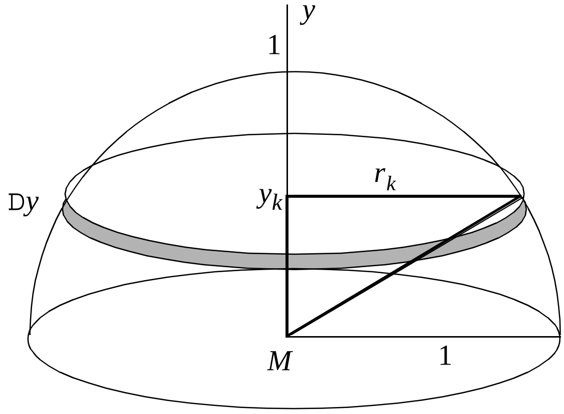
Voor een systeem van n massapunten op de x-as geldt:

$$x_Z = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k m_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}$$

Hierbij is x_k de x-coördinaat en m_k de massa van het k-de massapunt, $\sum_{k=1}^{n} m_k$ de totale massa.

zwaartepunt halve bol

In de figuur is de helft van een bol met straal 1 getekend.



Neem aan dat de soortelijke massa van de halve bol 1 is.
Het y-interval [0, 1] is in n deelintervalletjes verdeeld met lengte Dy.
De bol wordt benaderd met n cilinderschijfjes, het k-de schijfje is getekend.
Wegens de symmetrie ligt het zwaartepunt van zo'n schijfje op de y-as. Het zwaartepunt van het k-de schijfje ligt op hoogte y_k. Je kunt dus net doen alsof alle massa van dit schijfje geconcentreerd is in het punt $(0, y_k)$.

7 **a.** Druk r_k uit in y_k
Druk de massa van het k-de schijfje uit in y_k en Dy.
b. Druk het moment van het k-de schijfje ten opzichte van M uit in y_k en Dyh.
c. Bereken de inhoud en daarmee de massa van de halve bol.
d. y_Z is de hoogte van het zwaartepunt van de halve bol.

Beredeneer: $$y_Z = \frac{\sum_{k=1}^{..} p\,(y_k - y_k^3)\ \mathrm{D}y}{\frac{2}{3}p}$$

e. Welke integraal heb je nodig om y_Z exact te kunnen berekenen?
f. Bereken y_Z.

zwaartepunt kegel

8 Van een omwentelingskegel met hoogte h en straal grondcirkel r ligt het zwaartepunt op de omwentelingsas op drie kwart van de hoogte, gerekend vanaf de top.

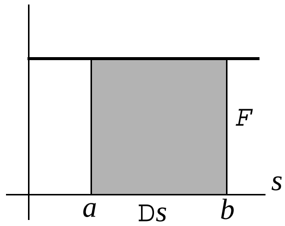
tip

Laat zien dat dit zo is met behulp van integraalrekening.

ontsnappings-snelheid

De arbeid W die door een kracht F verricht wordt over een afstand s kan berekend worden met de formule $W = F \cdot s$. Hierbij is aangenomen dat de hoek die kracht en weg met elkaar maken $0°$ is.

Als de kracht constant is, dan is het berekenen van de verrichte arbeid een kwestie van vermenigvuldigen.



Zie figuur: $W = F \cdot \Delta s = F \cdot (b - a)$

Als de kracht (in grootte) varieert als functie van s, dan krijgen we op de bekende manier:

$$W \approx \sum F(s)\Delta s$$

De exacte waarde van de verrichte arbeid kan dus berekend worden met de integraal

$$W = \int_a^b F(s)\,\mathrm{d}s$$

Als voorbeeld nemen we de arbeid die nodig is om een voorwerp met massa m vanaf het aardoppervlak tot hoogte h te brengen.

tip

9 In de buurt van het aardoppervlak is de versnelling g die door de zwaartekracht veroorzaakt wordt als constant te beschouwen.
Schrijf W als integraal. Laat g in het antwoord staan.
Laat zien dat integreren hier de bekende formule geeft voor de potentiële energie van een massa m op hoogte h.

10 De versnelling die door de zwaartekracht veroorzaakt wordt, is omgekeerd evenredig met de afstand r tot het middelpunt (eigenlijk het zwaartepunt) van de aarde. In het MKS-stelsel is de formule voor de valversnelling g als functie van r als volgt:

$$g = \frac{4 \cdot 10^{14}}{r^2} \text{ m/s}^2$$

In deze opgave houden we geen rekening met de luchtweerstand.

a. De straal van de aarde is ongeveer $6{,}37 \cdot 10^6$ m.
Gebruik dit om te controleren dat g in de buurt van het aardoppervlak inderdaad de bekende waarde heeft.

tip

b. Bereken de energie die nodig is om een voorwerp met een massa van 1 kg vanaf het aardoppervlak naar een hoogte van $6{,}37 \cdot 10^6$ m te brengen.
Je zou het voorwerp de nodige hoeveelheid kinetische energie kunnen geven door het bijvoorbeeld met behulp van een kanon de juiste verticale beginsnelheid te geven. Bereken deze beginsnelheid in m/s nauwkeurig.

c. Druk de energie E die nodig is om een voorwerp met een massa van 1 kg tot hoogte h te brengen uit in h.
Tot welke waarde nadert E als h ‘oneindig groot’ wordt?
Welke beginsnelheid in km/s hoort bij deze waarde van E?

d. De beginsnelheid die je bij **c** berekend hebt, heet de ontsnappingssnelheid. Kun je deze naam verklaren?

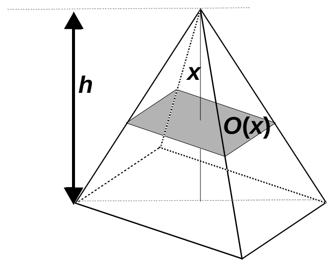
Tips bij de opgaven

1 Instap: bepaling van zoutgehalte

5 **a.** Vergelijk de oppervlakte van de rechthoek onder de horizontale lijn (en tussen de ver5ticale lijnen bij 0 en 7) met de totale oppervlakte van de grijze rechthoekjes,

2 Riemannsom en oppervlakte

10 **a.** De doorsnede van een horizontaal vlak met de priramide is gelijkvormig met het grondvlak,
De gelijkvormigheidsfactor is $\frac{x}{h}$



3 Primitieve functies

15 $x(2 - x) = 2x - x^2$

4 De techniek van het integreren

2 **a.** Zoek een geschikte formule in het boekje Periodieke Bewegingen (hoofdstuk 5)

7 **b.** Bedenk: $\frac{1}{x} = -\frac{1}{-x}$ en: als $x < 0$, dan $-x > 0$

14 **c.** Let onder andere op de symmetrie van beide grafieken.

5 Inhoudsberekeningen

4 **c.** Werk $(1 - x^2)^2$ eerst uit tot een veelterm.

6 **b.** Voor de inhoudsberekening van L_y moet je x^2 uitdrukken in y.

8 **c.** Gebruik de stelling van Pythagoras.

6 Gevarieerde toepassingen van de integraalrekening

5 Het volume van de schil kun je krijgen door van de inhoud van een bol met straal $R + \text{D}R$ de inhoud van een bol met straal R af te trekken. Dat is wel veel rekenwerk. Handiger is: beschouw de inhoud van een bol als functie van de straal Rr.
Het volume van de schil is dan een differentie en de benadering van oppervlakte van de bol een differentiequotiënt. Vervolgens laat je $\text{D}R$ naar nul naderen en ...

8 Stel de hoogte van een dun cilinderschijfje tot de top gelijk aan x en druk de massa van het schijfje uit in x (de soortelijke massa kun je voor het gemak weer 1 nemen).

9 Kracht = massa x versnelling dus $F = mg$.

10 **b.** De kinetische energie van een voorwerp met massa m en snelheid v wordt gegeven door $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$.

Antwoorden

1 Instap: bepaling van zoutgehalte

1 **a.** 1205 + 1530 + 970 + 1320 + 2430 + 1540 + 1180 = 10175 kg.

b. Als op andere tijdstippen gemeten was, of vaker, dan had dat andere getallen op kunnen leveren die totaal mogelijk minder dan 10000 kg opgeleverd zouden hebben.

c. $\frac{1000}{7}$ » 1428 kg. Dit zou je kunnen afronden op 1420 kg per dag of op 1430 kg.

per dag: het hangt er maar net van af of je vanuit de fabriekseigenaar redeneert, of vanuit de degenen die de normen controleren.

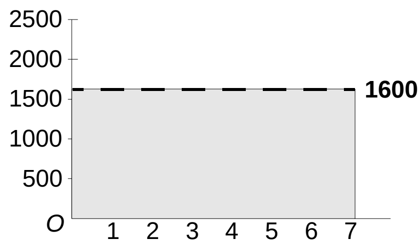
2 **a.** week 22 : 5 dagen; totale hoeveelheid meer dan de toegestane hoeveelheid
week 23 : 3 dagen; totale hoeveelheid minder dan de toegestane hoeveelheid
week 24 : 4 dagen; totale hoeveelheid meer dan de toegestane hoeveelheid.

3 8.5 · 500 » 4250 kg

4 **a.** 1200 + 1300 + 900/2 + 1200/2 + 1400 + 2000/2 + 2300/2 + 2000/2 + 1600/2 + 1000 = 900 kg

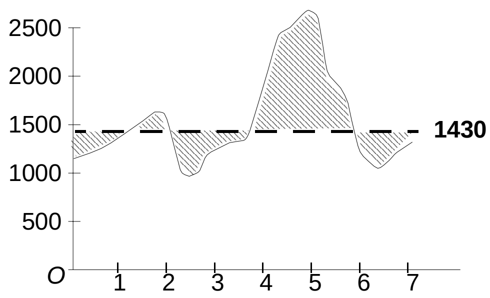
b. Ja, dat blijft gelden.

5 **a.** Als je de oppervlakte onder de horizontale lijn bij 1600 (zie figuur) vergelijkt met de totale oppervlakte van de grijze staafjes, dan zie je dat zijn schatting zeker te hoog is; want er ligr meer 'wit' onder de 1600-lijn ligt dan er 'grijs' boven ligt. Het totale grijze oppervlak is minder dan het oppervlak van de rechthoek.



b. Een betere schatting van het gemiddelde is ca. 1420 kg. Zo op het oog is het oppervlak net iets minder dan 20 hokjes, dus heeft de fabriek zich wel aan de voorschriften gehouden.

6 **a.** Het worden dan hele dunne staafjes en dat is praktisch moeilijk te tekenen.



b. Het oppervlak boven het gemiddelde lijkt groter dan het oppervlak onder het gemiddelde, dus dat betekent dat de eigenaar wel een boete zou verdienen.

c. De totale zouthoeveelheid is de som van alle metingen, maar je moet deze som delen door 48, omdat er 48 halve uren in één dag zitten.

d. Bij metingen om het kwartier komt er: $TZ = \sum_{k=1}^{672} Z(k) \frac{1}{96}$

en bij metingen om de 6 uur: $TZ = \sum_{k=1}^{28} Z(k) \frac{1}{4}$

7 **a.** Groter oppervlak onder het gemiddelde dan erboven, dus: neen.

b. $\frac{1}{2}(600 + 250 + 100 - 200 - 400 - 550) = -100$

In totaal is er 1430 x 3 - 100 kg zout geloosd, dit is 4190 kg.

c. Als je alle oppervlakten op zou tellen, dan zou een *negatieve* afwijking van het gemiddelde *positief* meetellen, omdat een oppervlakte van een staaf in principe een positief getal is.
Je kunt de totale afwijking wel berekenen, door een afwijking als *negatief* mee te tellen zodra hij *onder* het gemiddelde zit.

d. Ja.

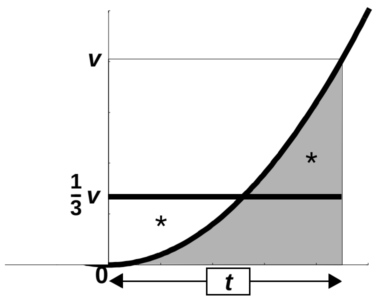
2 Riemannsom en oppervlakte

1 1 meter

2 **a.** Zie 'Som & Verschil, Afstand & Snelheid' hoofdstuk 9

b. $s(t) = \frac{1}{3}vt$ ofwel: $s(t) = \frac{1}{3}t^3$

c.



Merk op: de oppervlakten van de met * aangegeven vlakdelen zijn blijkbaar aan elkaar gelijk.

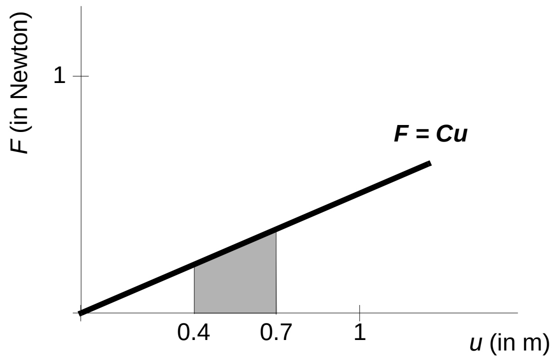
3 0.15 N

4 $W = \frac{1}{2}Cu^2$

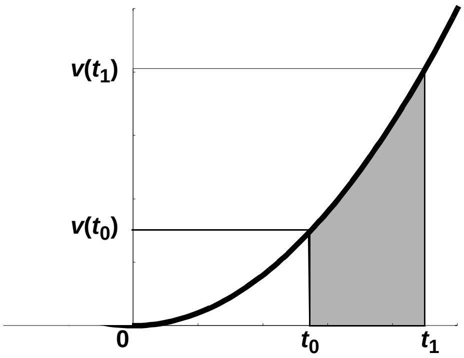
5 Als de oppervlakte van een rechthoek met zijden van 1 m en 1 N.

6 **a.** $W = \frac{1}{2} \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7^2 - \frac{1}{2} \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}4^2 = 0{,}0825$ Joule

b.



7 a.



b. Oppervlakte onder de parabool tussen 0 en $t_1 = \frac{1}{3}t_1 \ \ v(t_1) = \frac{1}{3}t_1^3$

Oppervlakte onder de parabool tussen 0 en $t_0 = \frac{1}{3}t_0 \ \ v(t_0) = \frac{1}{3}t_0^3$

Oppervlakte van grijze gebied = het verschil van deze oppervlakten (dat wil zeggen: de eerstgenoemde oppervlakte min de tweede)

c. De afstand die wordt afgelegd gedurende het tijdsinterval $[t_0, t_1]$.

8 a. De arbeid die nofig is om een tot u_0 meter uitgerekte veer verder uit te rekken tot u_1 meter.

b. $\frac{1}{2}Cu_1^2 - \frac{1}{2}Cu_0^2$

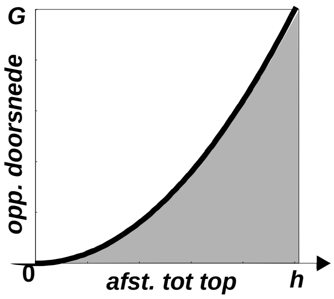
9 De inhoud van het k-de prismaplakje = *opp. bodem* $\cdot$ *hoogte* = $O(x_k)\Delta x$
Sommatie van alle plakjes geeft de inhoud van de benaderende ‘trappiramide’.

10 a. De doorsnede parallel met het grondvlak, op een afstand x van de top, is gelijkvormig met het grondvlak. De gelijkvormigheidsfactor = de verhouding van de afstanden tot de top = $\frac{x}{h}$

De oppervlakten van doorsnede en grondvlak verhouden zich als het *kwasdraat* van de gelijkvormigheidsfactor en dus:

$$O(x) = \left(\frac{x}{h}\right)^2 G = \frac{x^2}{h^2}G = \frac{G}{h^2}x^2$$

b.



c. Opp. grijze vlakdeel = $\frac{1}{3}$ van opp. rechthoek met zijden h en G = $\frac{1}{3}Gh$

11 b. 0.66666667

c. Met de eigenschap van de parabool: de oppervlakte van het ‘geschaduwde’ vlakdeel is gelijk aan $2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = 0{,}66666...$

12 a. Een halve cirkel (straal 1, middelpunt in oorsprong). Dit kun je bewijzen met behulp van de stelling van Pythagoras!

b. Uitkomst = 1.5708344

c. Opp. cirkel met straal 1 is gelijk aan p $\cdot$ 1^2 = p, dus opp. halve cirkel = $\frac{1}{2}$p.

3 Primitieve functies

1 $s(t) = \frac{1}{3}t^3$, want: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{3}t^3\right) = t^2$

$s(t_1) - s(t_0) = \frac{1}{3}t_1^3 - \frac{1}{3}t_0^3$

2 a. Opp. grijze gebied in plaatje op blz 18 = $\frac{1}{4} \cdot a \cdot a^3 = \frac{1}{4}a^4$
Nu volgt:

$$\int_{t_0}^{t_1} t^3 \mathrm{d}t = \int_0^{t_1} t^3 \mathrm{d}t - \int_0^{t_1} t^3 \mathrm{d}t = \frac{1}{4}t_1^4 - \frac{1}{4}t_0^4$$

b. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{4}t^4\right) = t^3$, dus $s(t) = \frac{1}{4}t^4$ en dus $s(t_1) - s(t_0) = \frac{1}{4}t_1^4 - \frac{1}{4}t_0^4$

3 Opgave **8** : $F(u) = Cu$ is de afgeleide van $G(u) = \frac{1}{2}Cu^2$;

de toename van G op $[u_0, u_1]$ is gelijk aan $\frac{1}{2}Cu_1^2 - \frac{1}{2}Cu_0^2$

Opgave **10 :** $O(x) = \frac{G}{h^2}x^2$ is de afgeleide van $P(x) = \frac{G}{h^2} \; \frac{1}{3}x^3$ **;**

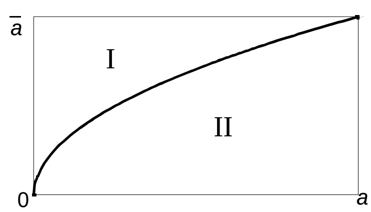
toename van P op $[0, h]$ is gelijk aan $\left(\frac{G}{h^2} \; \frac{1}{3}h^3\right) - \left(\frac{G}{h^2} \; \frac{1}{3}0^3\right) = \frac{1}{3}Gh$

4 Opp I = $\frac{1}{3}$ opp. rechthoek = $\frac{1}{3}a\sqrt{a}$

Opp II = $\frac{2}{3}$ opp. rechthoek = $\frac{2}{3}a\sqrt{a}$

$f(x) = \sqrt{x}$ is afgeleide van $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$ en

$F(a) - F(0) = \frac{2}{3}a\sqrt{a}$



5 Als je een willekeurige constante bij een functie optelt, verandert de afgeleide niet

6

a. $F(x) = \frac{1}{5}x^5$

b. $F(x) = e^x - 1$

c. $F(x) = e^{x+1} - e$

d. $F(x) = \sin x$

e. $F(x) = -\cos x + 1$

f. $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$

7

a. 20000

b. 2

c. $e^3 - e^2 \approx 12{,}696$

d. 1

e. 1

f. $4\frac{2}{3}$

8 Alle functies die je vond bij **6** worden met 1 vermeerderd, dus

$F(x) = \frac{1}{5}x^5 + 1, e^x, e^{x+1} - e + 1, \sin x + 1, -\cos x + 2, \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 1$

De uitkomsten van **7** veranderen niet,

9 **a.** $F_1(x) = -x^{-1}$, $F_1'(x) = -(-1)x^{-2} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

b. De constan 1 en 2 hebben geen effect op de afgeleide, dus $F_2'(x) = \frac{1}{x^2}$ voor $x > 0$ en ook voor $x < 0$.

c. Nee, niet als je het domein $x \neq 0$ beschouwt.
Je kunt wel zeggen dat F_1 en F_2 een constante 1 verschillen op het gebied $x > 0$ en een constante 2 verschillen op het gebied $x < 0$.

10

a. $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - x + c$

b. $F(x) = \frac{1}{4}(x-1)^4 + c$

c. $F(x) = e^{x+2} + c$

d. $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + c$

11

a. $\int \sqrt[3]{x}\,dx = \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + c$

b. $\int (3x^2 + 2x)\,dx = x^3 + x^2 + c$

c. $\int 2\cos x\,dx = 2\sin x + c$

d. $\int \cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\sin 2x + c$

12 b. uitkomst = 0.5

c. $f(x) = \frac{1}{x^2}$ heeft als primitieve $F(x) = -\frac{1}{x}$ (zie **9**),

$F(2) - F(1) = -\frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2}$

13 Opp. onder de grafiek van $y = \sin x$ op het interval $[0\ ,\ \pi]$ =

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = (-\cos\pi) - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2$$

Omdat de breedte van de rechthoek gelijk is aan π, is de hoogte gelijk aan $\frac{2}{\pi}$ en dat is de gemiddelde waarde van $\sin x$ op het interval $[0\ ,\ \pi]$.

14

a. $\frac{1}{4}$

b. $1\frac{3}{5}$

c. $\frac{9}{10}$

d. $\frac{2}{\pi}$

15 $f(x) = x(2-x) = 2x - x^2$ heeft als primitieve $F(x) = x^2 - \frac{1}{3}x^3$

$\int_0^2 f(x)\,dx = F(2) - F(0) = \frac{4}{3}$ dus de gemidelde waarde van $f(x)$ op $[0\ ,\ 2]$ = $\frac{2}{3}$.

16

a. $\frac{1}{\ln 2}2^1 - \frac{1}{\ln 2}2^0 = \frac{1}{\ln 2} \approx 1{,}4427$

b. $\frac{1}{\ln 10}10^2 - \frac{1}{\ln 10}10^1 = \frac{9}{\ln 10} \approx 3{,}9087$

c. $\frac{1}{\ln 10}10^3 - \frac{1}{\ln 10}10^2 = \frac{90}{\ln 10} \approx 39{,}087$

d. $\frac{1}{2}(e^2 - e^{-2}) \approx 3{,}6269$

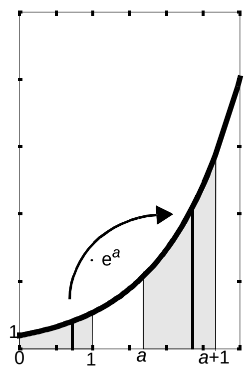
e. $(-e^{-5}) - (-e^0) \approx 0{,}9933$

f. $(-e^{-5}) - (-e^0) \approx 0{,}9933$

17 $\int_a^{a+1} e^x\,dx = e^{a+1} - e^a = e^a(e-1)$ en $\int_0^1 e^x\,dx = e^1 - e^0 = e - 1$

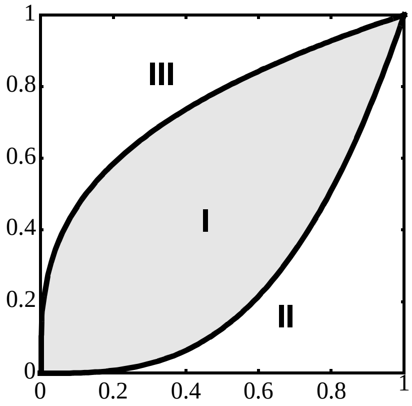
Dus: $e^a\int_0^1 e^x\,dx = e^a(e-1)$ = eerste integraal.

Elke verticaal lijnstuk in het gebied I tussen $x = 0$ en $x = 1$ correspondeert met één verticaal lijnstuk in het gebied II tussen $x = a$ en $x = a + 1$.
Elke verticaal lijnstuk in in gebied II is e^a keer zo lang als het daarmee coresponderende lijnstuk in gebied I.
Daarom is ook de oppervlakte van II precies e^a keer zo groot als de oppervlakte van I.



18 c. Uit een eigenschap van de grafiek van $y = x^3$ volgt:
Opp. II = $\frac{1}{4}$
II en III zijn elkaars spiegelbeeld t.o.v. de lijn $y = x$, dus ook opp. III = $\frac{1}{4}$.
Blijft over: opp. I = $1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$
Andere manier via:

Opp. I + opp. II = $\int_o^1 y_2(x)\,dx = \frac{3}{4}$



19 a. $Y_1(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ is een primitieve van y_1, dus geldt:

$$\int_0^1 y_1(x)\,dx = \frac{1}{n+1}(1^{n+1} - 0^{n+1}) = \frac{1}{n+1}$$

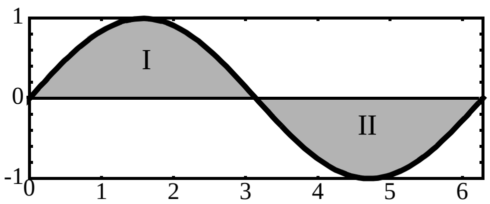
$$Y_2(x) = \frac{1}{\frac{1}{n}+1}x^{\frac{1}{n}+1}$$ is een primitieve van y_2, dus geldt:

$$\int_0^1 y_2(x)\,dx = \frac{1}{\frac{1}{n}+1}(1-0) = \frac{n}{n+1}$$

b. de oppervlakte van het gebied ‘tussen’ de grafieken van y_2 en y_1 is gelijk aan: $\frac{n}{n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n-1}{n+1}$

20 a. 2 ; -2 ; 0

b. I en II zijn symmetrisch t.o.v. het punt (p , 0).
Uit opp. I = 2 volgt: opp. II = -2;
Omdat de oppervlakten van I en II tegengesteld zijn, is hun som gelijk aan 0.



21 a. $F(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3$ is een primitieve van f.

$$\int_0^3 f(x)\,dx = F(3) - F(0) = 3 - 0 = 3 \text{ en}$$

$$\int_0^4 f(x)\,dx = F(4) - F(0) = -5\tfrac{1}{3} - 0 = -5\tfrac{1}{3}$$

b. $$\int_0^a f(x)\,dx = F(a) - F(0) = (4a - \tfrac{1}{3}a^3) - 0 = 4a - \tfrac{1}{3}a^3$$

Uit $4a - \frac{1}{3}a^3 = 0$ volgt: $a = 0$ of $a^2 = 12$;

omdat $3 < a < 4$ geldt: $a = \sqrt{12} \approx 3{,}4641$

22 a. $O(a)0 = 0$

b. $F(x) = O(x) + c$, dus: $F(b) - F(a) = O(b) - O(a) = O(b) - 0 = O(b)$

23 a. $\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = cF(b) - cF(a) = c(F(b) - F(a)) = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

b. De regel luidt: $\int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

en volgt uit de hoofdstelling en uit:

$(F(b) - G(b)) - (F(a) - G(a)) = (F(b) - F(a)) - (G(b) - G(a))$

24 b. Opp, vlakdeel = $\int_{-1}^{1} y_1(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} y_2(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} (y_1(x) - y_2(x))\,\mathrm{d}x$ en

$y_1(x) - y_2(x) = (x^2 + 2) - (x^4 + x^2 + 1) = 1 - x^4$

c. primitieve F van $y_1 - y_2$ wordt beschreven door: $F(x) = x - \frac{1}{5}x^5$

en $F(1) - F(-1) = \frac{4}{5} - (-\frac{4}{5}) = 1\frac{3}{5}$ is de waarde van de integraal.

4 De techniek van het integreren

1 b. Dan verschuift de grafiek in verticale richting

c. 10.94588224 (via $Y_1(5) - Y_1(2)$ of via fnInt$(\sqrt{1 + T^2}, T, 2, 5)$

d. eerste regel is goed:

als $F(x) = \frac{2}{3}(1 + x)^{3/2}$, dan $F'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot (1 + x)^{1/2} = \sqrt{1 + x}$

tweede regel is fout:

als $F(x) = \frac{2}{3}(1 + x^2)^{3/2}$, dan $F'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot (1 + x^2)^{1/2} \cdot 2x = 2x\sqrt{1 + x^2}$

2 a. als $F(x) = \frac{1}{3}\sin^3 x$, dan $F'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3\sin^2 x \cdot \cos x$ (volgens de kettingregel),

dus $F'(x) = \sin^2 x \cos x$

b. amplitudo $\frac{1}{2}$ en periode π.

c.

$$
\begin{array}{rl}
\cos^2 x + \sin^2 x &= 1 \\
\cos^2 x - \sin^2 x &= \cos 2x \\
\hline
2\sin^2 x &= 1 - \cos 2x \\
\downarrow & \\
\sin^2 x &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x
\end{array}
\;-
$$

Hiermee is aangetoond dat de grafiek van *f* een sinusoïde is (evenwichtstand $\frac{1}{2}$, amplitude $\frac{1}{2}$, periode p.

d. $F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x$

e. sin 2*x* = 2sin *x* cos *x*, dus $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x \cos x$

3

$$\begin{array}{rcl} \cos^2 x + \sin^2 x & = & 1 \\ \cos^2 x - \sin^2 x & = & \cos 2x \\ \hline 2\cos^2 x & = & 1 + \cos 2x \quad + \\ & \downarrow & \\ \cos^2 x & = & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x \end{array}$$

Primitieve van $f(x) = \cos^2 x$ is dus: $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x \cos x$

4 a. $f(x) = \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$, dus sinusoïde met evenwichtsstand 0, amplitudo $\frac{1}{2}$, periode p.

b. $F(x) = -\frac{1}{4}\cos 2x$

5 a.

functie $f(x) =$	primitieve $F(x) =$
$x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{2}{3}x^{1\frac{1}{2}}$
$x^{1\frac{1}{2}}$	$\frac{2}{5}x^{2\frac{1}{2}}$
$x^{2\frac{1}{2}}$	$\frac{2}{7}x^{3\frac{1}{2}}$
$x^{3\frac{1}{2}}$	$\frac{2}{9}x^{4\frac{1}{2}}$

b. $\int_0^{25} x\sqrt{x}\,dx = \frac{2}{5} \cdot \left(25^{2\frac{1}{2}} - 0^{2\frac{1}{2}}\right) = 1250$

6 a.

functie $f(x) =$	primitieve $F(x) =$
x^{-2}	$(-1)x^{-1}$
x^{-3}	$(-\frac{1}{2})x^{-2}$
x^{-4}	$(-\frac{1}{3})x^{-3}$
x^{-5}	$(-\frac{1}{4})x^{-4}$

b. $\displaystyle\int_1^{10} \frac{1}{x^4}\mathrm{d}x = \left(-\tfrac{1}{3}\right)\left(10^{-3} - 1^{-3}\right) = \tfrac{333}{1000}$

7 a. $\ln x$ is alleen gedefinieerd voor $x > 0$

b. als $x < 0$, geldt $-x > 0$ kun je schrijven: $f(x) = -\frac{1}{-x}$ en een primitieve is; $F(x) = \ln(-x)$

8 a. $\displaystyle\int_1^{e} \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln \mathrm{e} - \ln 1 = 1$

b. $\displaystyle\int_5^{b} \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln b - \ln 5 = 1$, dus: $\ln b = \ln 5 + \ln \mathrm{e} = \ln 5\mathrm{e}$, dus $b = 5\mathrm{e}$

9

a. $\int f(x+a)\mathrm{d}x = F(x+a)$

b. $\int (f(x)+a)\mathrm{d}x = F(x) + ax$

c. $\int f(ax)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax)$

d. $\int af(x)\mathrm{d}x = aF(x)$

10

a. $\ln 5 - \ln 1 = \ln 5$

b. $\ln 7 - \ln 3 = \ln\frac{7}{3}$

c. $\frac{1}{3}(\ln 15 - \ln 3) = \frac{1}{3}\ln 5$

d. $(\ln 5 + 20) - (\ln 1 + 4) = \ln 5 + 16$

11

$x\mathrm{e}^x \xrightarrow{\textit{gedifferentieerd}} x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x$

$x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x \xrightarrow{\textit{gedifferentieerd}} (x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x) - \mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x$

Dus: $F(x) = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x$ ofwel: $F(x) = (x - 1)\,\mathrm{e}^x$

12 a. $\int \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x} + c$

b. $\int x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = -x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} + c$

13 c. De grafiek van f is symmetrisch ten opzichte van de y -as en heeft de top (0 , 1). Die top correspondeert met de maximale waarde van $f(x)$; dat betekent dat de grafiek van F in het punt met $x = 0$ een raaklijn met maximale richtingscoëfficiënt heeft. Dus het punt (0 , $F(0)$) is een buigpunt van de grafiek van F.
Merk op: de grafiek van F is puntsymmetrisch t.o.v. haar buigpunt.

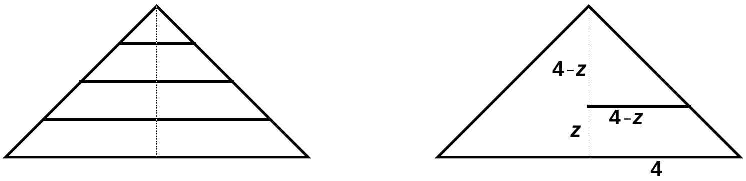
14 a. Als $F(x) = -\mathrm{e}^{-x^2}$, dan $F'(x) = -\mathrm{e}^{-x^2} \cdot -2x = 2x\mathrm{e}^{-x^2}$

b. $G(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}$

c. De grafiek van g is puntsymmetrisch t.o.v. O, dus de grafiek van G moet symmetrisch zijn t.o.v de y-as, want uit $-g(-x) = g(x)$ volgt $G(-x) = Gx)$. Uit het verloop van de oppervlakte tussen de grafiek van g en de x-as (vanf $x = -4$) kun je concluderen dat bij $x = 0$ de oppervlakte het 'negatiefst' is en dat betekent een minimum voor G.

5 Inhoudsberekeningen

1 **a.**



b. Zie rechterplaatje: straal cirkel op hoogte z is gelijk aan 4 - z.
Opp. cirkel = p · *straal*^{2} = p · $(4 - z)^2$

c. $\int_0^4 \mathrm{p}\,(4 - z)^2\,\mathrm{d}z$

d. Een primitieve F van de oppervlaktefunctie wordt beschreven door:

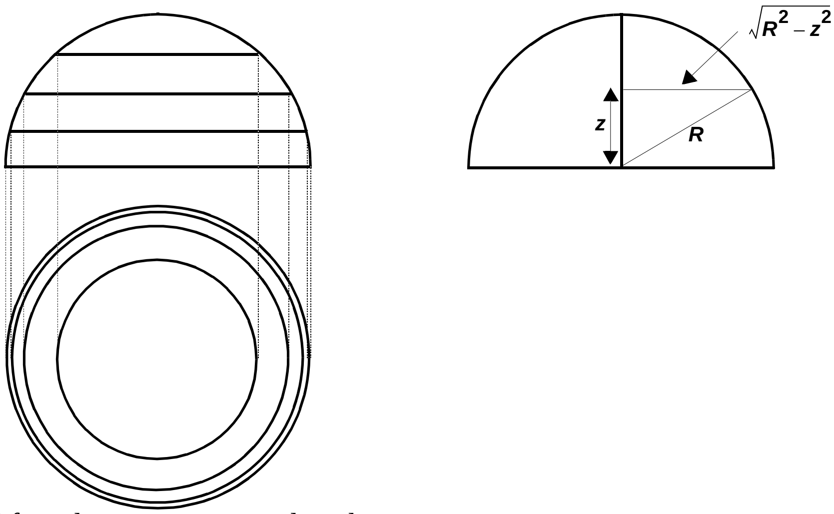
$$F(z) = (-\tfrac{1}{3})\mathrm{p}\,(4 - z)^3$$

De inhoud is dus gelijk aan:

$$F(4) - F(0) = 0 + \tfrac{1}{3}\mathrm{p}4^3 = \tfrac{64}{3}\mathrm{p} = 21\tfrac{1}{3}\mathrm{p}$$

e. hoogte = 4 en opp. grondvlak = 16p en $\frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 16\mathrm{p} = 21\tfrac{1}{3}\mathrm{p}$

2 **a.**



Afstand tussen twee opvolgende hoogtecirkels varieert!

b. Straal cirkel op hoogte z is gelijk aan $\sqrt{R^2 - z^2}$ (zie figuur rechts), dus:

$$O(z) = \mathrm{p} \cdot (\sqrt{R^2 - z^2})^2 = \mathrm{p}\,(R^2 - z^2)$$

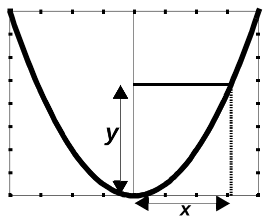
c. Inhoud halve bol = $\int_0^R \mathrm{p}\,(R^2 - z^2)\,\mathrm{d}z$;

een primitieve van O wordt gegeven door: $P(z) = \mathrm{p}\,(R^2 z - \tfrac{1}{3}z^3)$;

inhoud is dus: $P(R) - P(0) = \pi\left(R^3 - \frac{1}{3}R^3\right) = \frac{2}{3}\pi R^3$

Merk op dat hieruit de formule voor de inhoud van bol volgt: $\frac{4}{3}\pi R^3$

3 **a.**

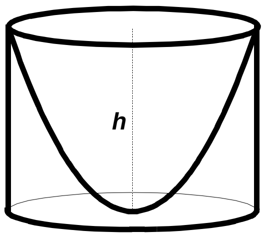


$y = ax^2$, dus $x^2 = \frac{y}{a}$

opp. cirkel (op hoogte y) = $\pi x^2 = \pi\frac{y}{a} = \frac{\pi}{a}\, y$

b. $\int_0^h \frac{\pi}{a} y\,dy = \frac{\pi}{a}\int_0^h y\,dy = \frac{\pi}{a}\cdot\frac{1}{2}h^2 = \frac{\pi h^2}{2a}$

c.



inhoud cilinder = $h \cdot \pi r^2$

uit $h = ar^2$ volgt $r^2 = \frac{h}{a}$

dus: inhoud cilinder = $\frac{\pi h^2}{a}$

en dat is 2 · inhoud paraboloïde

4 **a.** $O(y) = \pi x^2 = \pi(1 - y)$, dus inhoud = $\int_0^1 \pi(1 - y)\,dy = \frac{1}{2}\pi$

b. Doorsnede van vlak loodrecht op x-as is nu een cirkel met straal y.
De oppervlakte hiervan is $\pi y^2 = \pi(1 - x^2)^2$
Via een Riemannsom komen we op de integraal genoemd in **4b**, waarbij je moet bedenken dat de ‘integratie-variabele’ x loopt van -1 tot 1.

c. Stel $f(x) = (1 - x^2)^2 = 1 - 2x^2 + x^4$, dan $F(x) = x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5$;

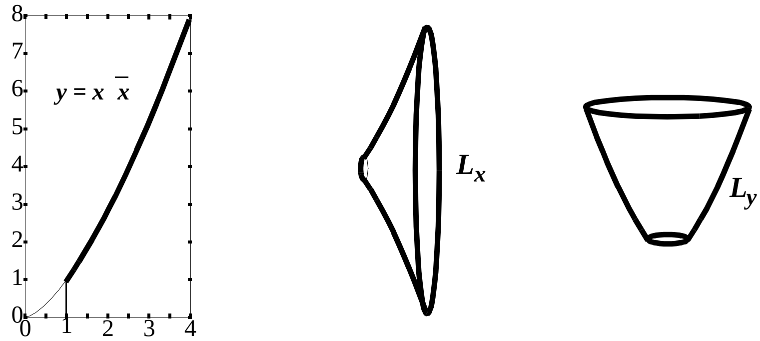
de inhoud van het nieuwe omwentelingslichaam = $F(1) - F(-1) = \frac{16}{15}\pi > 2 \cdot \frac{1}{2}\pi$

5 **a.** Met GR: 4.934802201

b. Een primitieve van $f(x) = \pi\sin^2 x$ is volgens hoofdstuk 4: $F(x) = \pi(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x)$ en

$F(\pi) - F(0) = \pi \cdot \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2}\pi^2$

6 **a.**



b. inhoud $L_x = \pi\int_1^4 y^2\,dx = \pi\int_1^4 x^3\,dx \approx 200{,}3$

inhoud $L_y = \pi\int_1^8 x^2\,dy = \pi\int_1^8 y^{4/3}\,dy \approx 171$

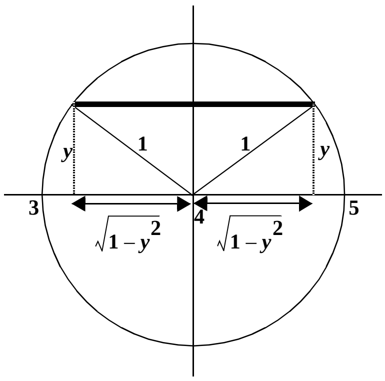
7 inhoud $L_x = \pi\int_1^2 x^{-4}\,dx \approx 0{,}916$

inhoud $L_y = \pi\int_{1/4}^1 y^{-1}\,dy \approx 1{,}386$

8 **a.** $\frac{4}{3}\pi$

b. De doorsnede van R_y met een horizontaal vlak op hoogte y is een cirkel met straal x_R, en de oppervlakte daarvan = πx_R^2; de integratie-variabele y loopt van -1 tot 1. Analoog voor de inhoud van L_y.

c.

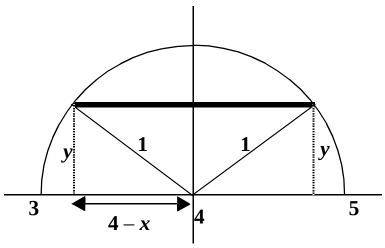


Gebruik de stelling van Pythagoras

d. $\pi\int_{-1}^{1}(8\cdot 2\sqrt{1-y^2})\,dy = 16\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}\,dy \approx 78{,}96$

9 **a.** binnenomtrek cilinderwandje = $2\pi x_k$, hoogte = y_k, dikte = Δx en inhoud = het produkt van deze drie waarden

b.



Volgens Pythagoras:
$y^2 + (4 - x)^2 = 1$

c. uitkomst integraal $\approx$ 39.48; de inhoud van de torus is 2 keer zoveel, dat klopt met antwoord **8d**.

10 De baan van het zwaartepunt is een cirkel met straal 4; de baanlengte is dus 8π.
De oppervlakte van de cirkel = $\pi \cdot 1^2 = \pi$
Volgens Guldin is de inhoud van de torus : $8\pi \cdot \pi = 8\pi^2$. Benadering: 78.96

11 **a.** Zwaartepunt vierkant is middelpunt vierkant en dat punt beschrijft een baan met lengte 8π. De oppervlakte van het vierkant = 4. De inhoud volgens Guldin = 32π.
b. Inhoud buitencilinder = hoogte $\cdot$ opp. bodem = $2 \cdot 25\pi = 50\pi$.
Inhoud binnencilinder = $2 \cdot 9\pi = 18\pi$. Het verschil = 32π.

12 Het gemakkelijkst is hier om de hoogte van een horizontale doorsnede te meten vanaf de top. Stel die hoogte = x, je vindt dan: $O(x) = \left(\frac{x}{h}\right)^2 \cdot \pi r^2 = \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot x^2$.

Integreren over het interval $[0, h]$ geeft inderdaad de uitkomst $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

13 G_n nadert tot $G = \pi r^2$ en $\frac{1}{3}hG_n$ nadert dus tot $\frac{1}{3}hG = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

14 Afstand zwaartepunt tot omwentelingsas = $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}r = \frac{1}{3}r$;
baanlengte zwaartepunt $= 2\pi \cdot \frac{1}{3}r = \frac{2}{3}\pi r$; opp. driehoek = $\frac{1}{2}rh$;
inhoud kegek volgens Guldin = $\frac{2}{3}\pi r \cdot \frac{1}{2}rh = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

6 Gevarieerde toepassingen

1 **a.** $y_1(x) = x$, dus $y_1'(x) = 1$ en $\int_0^1 \sqrt{1+1^2}\,dx = \sqrt{2} \approx 1{,}4142$

b. $y_2(x) = x^2$, dus $y_2'(x) = 2x$ en $\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,dx \approx 1{,}4789$

c. $y_3(x) = x^3$, dus $y_3'(x) = 3x^2$ en $\int_0^1 \sqrt{1+9x^4}\,dx \approx 1{,}5479$

2 **a.** Voor $x = 0$ is y minimaal; dit minimum = 1 voor $a = 1$.
Kies venster $[-1, 1]$ bij $[0, 2]$ en voer in: $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

b. $y'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ en $\int_{-1}^{1} \sqrt{1+\frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2}\,dx \approx 2{,}35$

3 $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$; opp, paraboloïde = $\int_0^4 \left(2\pi \;\; 4\sqrt{x} \;\; \sqrt{1+\frac{4}{x}}\right)dx = 8\pi\int_0^4 \sqrt{x+4}\,dx \approx 30{,}64$

4 $y'(x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$, dus $2\pi y(x)\sqrt{1+y'(x)^2} = 2\pi\sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{1+\frac{x^2}{R^2 - x^2}} = 2\pi R$

De inhoud van de bol is $\int_{-R}^{R} 2\pi R \, \mathrm{d}x = 4\pi R^2$

5 De inhoud van een bol met straal R is een functie van R: $F(R) = \frac{4}{3}\pi R^3$.

volume schil $\approx$ opp. bol $\cdot$ dikte schil

dus opp. bol $\approx \dfrac{\text{volume schil}}{\text{dikte schil}} = \dfrac{F(R+\Delta R) - F(R)}{\Delta R}$

Als ΔR tot 0 nadert dan nadert het differentiequotiënt tot de afgeleid $F'(R)$.

Dus opp. bol = $F'(R) = 4\pi R^2$.

6 **a.** $x_Z = \frac{22}{9} = 2\frac{4}{9}$.

b. Moment puntmassa's t.o.v. O is 40, $x_Z = 4\frac{4}{9}$ dus ook 2 meer.

7 **a.** $r_k = \sqrt{1 - y_k^2}$, massa = $\pi(1 - y_k^2)\,\Delta y$

b. moment = $\pi y_k(1 - y_k^2)\,\Delta y = \pi(y_k - y_k^3)\,\Delta y$

c. inhoud bol = $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi$ dus massa halve bol = $\frac{2}{3}\pi \cdot 1$

d. De teller is de som van de momenten van de cilinderschijfjes t.o.v. M, de noemer de totale massa.

e. $\pi \int_0^1 (y - y^3)\,\mathrm{d}y$

f. $y_Z = \dfrac{\frac{1}{4}\pi}{\frac{2}{3}\pi} = \dfrac{3}{8}$

8 Stel de afstand van een hyperdun cilinderschijfje tot de top = x
Voor de afstand x_Z van het zwaartepunt tot de top geldt dan:

$$x_Z = \frac{\int_0^h \left(x \cdot \left(\frac{x}{h}\right)^2 \cdot \pi r^2\right) \mathrm{d}x}{\frac{1}{3}\pi r^2 h} = \frac{3}{4}h$$

9 $F = mg$

$$W = \int_0^h mg \, \mathrm{d}s = mgh$$

10 a. $g \approx 9{,}86$

b. $\displaystyle\int_{6{,}37\cdot 10^6}^{12{,}74\cdot 10^6} \frac{4\cdot 10^{14}\, m}{r^2}\,\mathrm{d}r \approx 3{,}1\cdot 10^7 m \text{ N}$

Energie is $\frac{1}{2}mv^2$. Enig rekenen geeft $v \approx 7874$ m/s .

c. $\displaystyle E = \int_{6{,}37\cdot 10^6}^{h} \frac{4\cdot 10^{14}}{r^2}\,\mathrm{d}r = -\frac{4\cdot 10^{14}}{h} + \frac{4\cdot 10^{14}}{6{,}37\cdot 10^6} = -\frac{4\cdot 10^{14}}{h} + 6{,}28\cdot 10^7 \text{ N}$

Als h oneindig groot wordt dan nadert E tot $6{,}28\cdot 10^7$ Newton.
Dit levert $v = 11.2$ km/s .

d. Met een snelheid die minder is komt de massa tot een bepaalde hoogte en valt dan weer terug. Als de beginsnelheid groter of gelijk is aan de ontsnappingssnelheid dan valt de massa niet meer terug en is dus aan de aantrekkingskracht van de aarde "ontsnapt".