D -DAG 13 februari 2014:

1+ 1 = 2

(en hoe nu verder?)

Inleiding

Snel machtsverheffen

Stel je voor dat je 7^{25} moet uitrekenen. Je weet dat machtsverheffen herhaald vermenigvuldigen is. Dus kun je het als volgt doen:

$7^2 = 7 \times 7 = 49$

$7^3 = 49 \times 7 = 343$

$7^4 = 343 \times 7 = 2401$

$7^5 = 2401 \times 7 = 16807$

$7^6 = 16807 \times 7 = 117649$

$7^7 = 117649 \times 7 = 823543$

$7^8 = 823543 \times 7 = 5764801$

$7^9 = 5764801 \times 7 = 40353607$

$7^{10} = 40353607 \times 7 = 282475249$

7^{11} = ...

en met wat geduld en nauwkeurigheid kom je er wel, maar het vraagt wel 24 vermenigvuldigings- stappen!
Door slim gebruik te maken van al gevonden tussenresultaten, kan het ook korter.
Je begint met $7^1 \times 7^1$; het resultaat is 7^2. Daarna bereken je $7^2 \times 7^1$ met resultaat 7^3. Vervolgens
$7^3 \times 7^3 = 7^6$. Nu kan $7^6 \times 7^3 = 7^9$ worden gemaakt; daarna $7^9 \times 7^9 = 7^{18}$ en ook $7^{18} \times 7^6 = 7^{24}$. Tenslotte bereik je 7^{25} door $7^{24} \times 7^1$ te berekenen.
Bij elke volgende stap worden alleen maar eerder gemaakte resultaten gebruikt.

Bij deze manier van machtsverheffen let je alleen maar op de exponenten en dus ben je eigenlijk niet aan het vermenigvuldigen, maar aan het *optellen*. Zo kun je de 25-ste macht van een willekeurig getal bereiken met de volgende rij van 7 optellingen van exponenten:

1 + 1 = 2; 2 + 1 = 3; 3 + 3 = 6; 6 + 3 = 9; 9 + 9 = 18; 18 + 6 = 24; 24 + 1 = 25

Zo’n rijtje van optellingen kan korter worden genoteerd met een zogenaamde ***optelketen***:

1, 2, 3, 6, 9, 18, 24, 25

Over het vinden van dergelijke korte optelketens gaat deze opdracht.

De afkomst van het probleem is eigenlijk al verteld. Het gaat om het snel berekenen van hoge machten door op een slimme manier vermenigvuldigingen te combineren. Het probleem speelt een rol in de wereld van de informatica, de theorieën die de achtergrond vormen voor het werken van computers. Vaak gaat het daarbij over hoeveel simpele rekenstappen uitgevoerd moeten worden om een bepaald probleem op te lossen. Het gebied van de wiskunde dat er bij hoort heet ***complexiteitstheorie***, een hot item in de toepassingen van de wiskunde op dit moment; een spannend gebied waarin jij vandaag je eerste stappen zet.

De opdracht

In deze opdracht ga je op zoek naar zo kort mogelijke optelketens voor natuurlijke getallen. Een korte optelketen voor het getal 25 is bijvoorbeeld 1, 2, 3, 6, 9, 18, 24, 25 (zie inleiding). Maar wat je niet zomaar ziet, is of deze optelketen de kortst mogelijke is. Misschien kan het door handiger gebruik te maken van eerder gemaakte getallen nog korter!
Heel wat mensen hebben op dit gebied al onderzoek gedaan. Soms met succes, maar ook wel met minder succes. Je krijgt hulp bij je zoektocht, onder andere doordat je een paar resultaten van eer- dere onderzoekers aangereikt krijgt. Maar het probleem is nog steeds niet bevredigend opgelost..... Wellicht kunnen jullie vandaag een bijdrage leveren aan een verdere oplossing van het probleem!

De opdracht is ingedeeld in 4 delen.
In deel A ga je zelf optelketens maken voor kleine getallen. In deel B wordt een eerste schatting voor de lengte van optelketens onderzocht. Daarna ga je je in de delen C en D verdiepen in al bekende methoden om redelijk korte optelketens te maken..
Je krijgt ook algemene vragen voorgelegd. Je zult daarbij vast allerlei samenhangen ontdekken. Het visueel helder in beeld brengen van samenhangen die je gevonden hebt, is waardevol en levert bij deze opdracht zeker wat op in de beoordeling.

Natuurlijk is het gebruik van een rekenmachine aan te bevelen en toegestaan. Eigen computerprogramma's mogen ook.
Misschien denk je: ik schrijf wel een eenvoudig computerprogramma, dat bij elk gegeven getal *n* automatisch een kortste keten vindt. Goed idee, maar wees niet overmoedig! Dit is namelijk al heel lang geprobeerd, maar nog nooit bevredigend gelukt. Niet gelukt in die zin, dat zo'n programma niet binnen een dag met zekerheid de kortste ketens voor de getallen 1 t/m 50 berekenen kon op de snelste computers van de wereld!

Deel A: Optelketens

Bij het maken van optelketens voor natuurlijke getallen moet je je houden aan de volgende spelregels:
• Je begint altijd met het getal 1.
• Elk volgend getal wordt gemaakt door gebruik te maken van getallen die al eerder zijn gevonden, de zogenaamde *voorgaande getallen*. Dat kan op twee manieren:
- door twee voorgaande getallen op te tellen
- door een voorgaand getal te verdubbelen (dus op te tellen bij zichzelf)

Een zekere, maar erg trage, manier om 25 te maken gebruikt 24 optelstappen. Maar in de inleiding zag je al dat het ook veel sneller kan:
1 + 1 = 2 ; 2 + 1 = 3 ; 3 + 3 = 6 ; 6 + 3 = 9 ; 9 + 9 = 18 ; 18 + 6 = 24 en 24 + 1 = 25
Hiervoor zijn 7 optelstappen nodig en dat is een behoorlijke winst ten opzichte van de eerste manier. De vraag is nu: ***kun je 25 nog sneller maken dan met 7 optelstappen***?
Bij 25 is dat (handmatig) nog uit te zoeken door alle mogelijkheden systematisch af te werken, maar bij grotere getallen kan het al snel behoorlijk lastig worden.

Definitie OPTELKETEN:
Een ***optelketen*** voor een natuurlijk (d.w.z. positief geheel) getal *n* is een stijgend rijtje natuurlijke getallen:
• dat begint met 1
• dat eindigt met *n*
• waarin elk getal na het startgetal 1 de som is van twee voorgaande getallen, of het dubbele is van een voorgaand getal.

Bij de eerste hierboven genoemde manier om het getal 25 te maken hoort de optelketen:
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25.
Bij de tweede manier hoort de optelketen:
1, 2, 3, 6, 9, 18, 24, 25.

Om het maken van optelketens te oefenen en daardoor greep te krijgen op verschillende methoden om een getal te maken, ga je nu eerst zelf een aantal optelketens maken.

>1 Zoek voor de getallen *n* = 1 t/m *n* = 32 de *kortste* optelketens en geef de resultaten weer in een tabel.
Neem er de tijd voor, zodat je zeker weet dat je bij elk getal van 1 tot en met 32 de *kortst* mogelijke keten hebt gevonden. Om je waakzaam te houden: 15 kan met 5 optelstappen en 23 met 6.

Het kleinst mogelijke aantal optelstappen dat je nodig hebt om een natuurlijk getal te maken is een karaktereigenschap van dat getal. Daarom geven we ook de volgende definitie.

Definitie COMPLEXITEIT
De ***complexiteit*** van een natuurlijk getal *n* is het <u>aantal optelstappen</u> dat nodig is voor een *kortst mogelijke* optelketen voor dat getal *n.* We geven de *complexiteit* van een getal *n* aan met *c*(*n*).

De complexiteit van een getal kun je dus vinden uit een kortste optelketen, door het aantal getallen in die keten te tellen die volgen *na* het startgetal 1.
Voor *n* = 10 zijn er meerdere kortste optelketens te vinden, bijvoorbeeld: 1, 2, 3, 5, 10 en 1, 2, 4, 8, 10

In beide gevallen heb je een optelketen met 5 getallen, waarbij dus 4 optelstappen zijn gemaakt. Omdat je ook kunt nagaan dat er geen kortere optelketen voor 10 mogelijk is, geldt dus *c*(10) = 4

>2 Vul de tabel van vraag 1 aan met de waarden van *c*(*n*). Hieronder is al een begin gemaakt:

n	**Een kortste optelketen**	**c(*n*)**
1	1	0
2	1, 2	1
3	1, 2, 3	2
4	1, 2, 4	2
5	1, 2, 3, 5	3
6	1, 2, 3, 6	3
7	1, 2, 3, 4, 7	4
8	1, 2, 4, 8	3
9	1, 2, 3, 6, 9	4
10	1, 2, 3, 5, 10	4
.....	.....	.....

Deel B: Een eerste schatting voor *c*(*n*)

Voor het maken van een getal n heb je ten hoogste $n-1$ optelstappen nodig. Dat aantal stappen is precies nodig als je steeds 1 optelt bij het laatstgevonden getal. Meestal is dit echter bij lange na niet de snelste manier om bij *n* te komen.
Maar je weet nu in ieder geval zeker dat voor ieder getal *n* geldt: $c(n) \leq n-1$

In de tabel van vraag 1 zie je dat $n-1$ een erg grove schatting voor de bovengrens is. In het alge- meen kan het met veel minder optelstappen.
Een belangrijk deel van de speurtocht van deze middag is gericht op het vinden van een bovengrens voor *c*(*n*) die zo dicht mogelijk bij de werkelijke waarde van *c*(*n*) ligt.
Zo'n bovengrens zullen we een *scherpe* bovengrens noemen.

Een eerste poging om de bovengrens te verscherpen volgt nu.

>3 Controleer met je tabel of de volgende uitspraak klopt voor de getallen 1 t/m 32:

$$c(n) \leq \frac{n+1}{2}$$

Als deze uitspraak over *c*(*n*) klopt voor *ieder* natuurlijk getal *n*, dan heb je opeens een veel betere bovengrens gevonden voor *c*(*n*)!
De uitspraak komt er eigenlijk op neer dat je niet domweg steeds 1 bij een voorgaand getal blijft optellen totdat je *n* hebt bereikt, maar dat je onderweg een handige versnelling inbouwt. In feite zegt de uitspraak dat het altijd mogelijk is om een optelketen te maken met hoogstens $\frac{n+1}{2}$ stappen.

>4 Beredeneer dat bovenstaande uitspraak waar is voor ieder getal *n*

Dit is een belangrijk moment! Je hebt nu door te redeneren de grove bovengrens voor *c*(*n*) al een stuk scherper gemaakt, zeker voor grotere waarden van *n*, en daar gaat het om:
een bovengrens noemen we beter of scherper dan een andere, als die voor alle waarden van *n* (op een paar waarden in het begin na) beter is. Zo is $\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{3}} + \mathbf{3}$ scherper dan $\frac{\mathbf{n+1}}{\mathbf{2}}$, omdat er voor grote *n* forse winst wordt behaald, terwijl we maar even niet letten op de waarden van *n* tot aan 15. In het vervolg komen we hier nog op terug.

Deel C: De verdubbelingsmethode

Sommige getallen kun je maken door alleen maar steeds te verdubbelen. In de tabel van vraag 1 zie je dat je dan machten van 2 als uitkomst krijgt.

>5 Veronderstel dat *n* een macht van 2 is, zeg: $n = 2^k$. Wat is dan *c*(*n*)?

>6 Wat is het grootste getal *n* dat complexiteit 10 heeft, dat wil zeggen: wat is de grootste *n* met *c*(*n*) = 10?
En wat is het grootste getal *n* met *c*(*n*) = *q*, voor een willekeurig natuurlijk getal *q*?
Geef bij deze vraag een sluitende redenering!

De machten van 2 zijn bijzondere getallen.
Het getal 39 kun je bijvoorbeeld niet bereiken met alleen maar verdubbelen. Je komt tot 32 via 1, 2, 4, 8, 16, 32. Daarna kun je, met gebruikmaking van al eerder gemaakte machten van 2, toch bij 39 komen:
1, 2, 4, 8, 16, 32, 36 (= 32 + 4), 38 (= 36 + 2), 39 (= 38 + 1)

De methode die alleen maar gebruik maakt van zo ver mogelijk verdubbelen en daarna aanvullen met eerder gemaakte lagere machten van 2, noemen we de ***verdubbelingsmethode***.

>7 Gebruik de verdubbelingsmethode om een optelketen te maken voor 1308.

>8 Beredeneer dat je met de verdubbelingsmethode elk getal *n* kunt maken.

De verdubbelingsmethode kan dus ingezet worden voor ieder getal *n*. Maar denk nu niet dat dit altijd de snelste methode is. Dat kun je ook al zien in de tabel van deel A.

Deel D: De factormethode

Het getal 15 kun je op verschillende manieren maken.
De verdubbelingsmethode van deel B leidt tot de optelketen:
1, 2, 4, 8, 12, 14, 15. Maar het kan korter met: **1, 2, 4, 5, 10, 15** en ook met:**1, 2, 3, 6, 12, 15**

In de tweede keten wordt 15 gemaakt door handig gebruik te maken van het getal 5; in de derde keten door handig gebruik te maken van het getal 3. Het is geen toeval dat 3 en 5 als factoren in 15 voorkomen.
De methode die bij het maken van een optelketen gebruik maakt van factoren die in het getal voor- komen, noemen we de *factormethode*.

>9 Pas de factormethode toe op *n* = 85 en op *n* = 1122

De vraag is nu of deze factormethode snellere resultaten geeft dan de verdubbelingsmethode. Dit is vast niet altijd zo, maar in sommige gevallen wel.

>10 Onderzoek in ieder geval de getallen 63 en 1023 en 1308 en 85 en 1122 en 8127. Zoek steeds een zo kort mogelijke optelketen. Vergelijk het aantal stappen dat je daarbij nodig hebt met het aantal stappen bij de verdubbelingsmethode en de factormethode.

>11 Probeer iets algemeens te formuleren over bepaalde soorten of typen getallen en de bijbehorende optelketens. Hou je niet in, maar wees wel duidelijk!