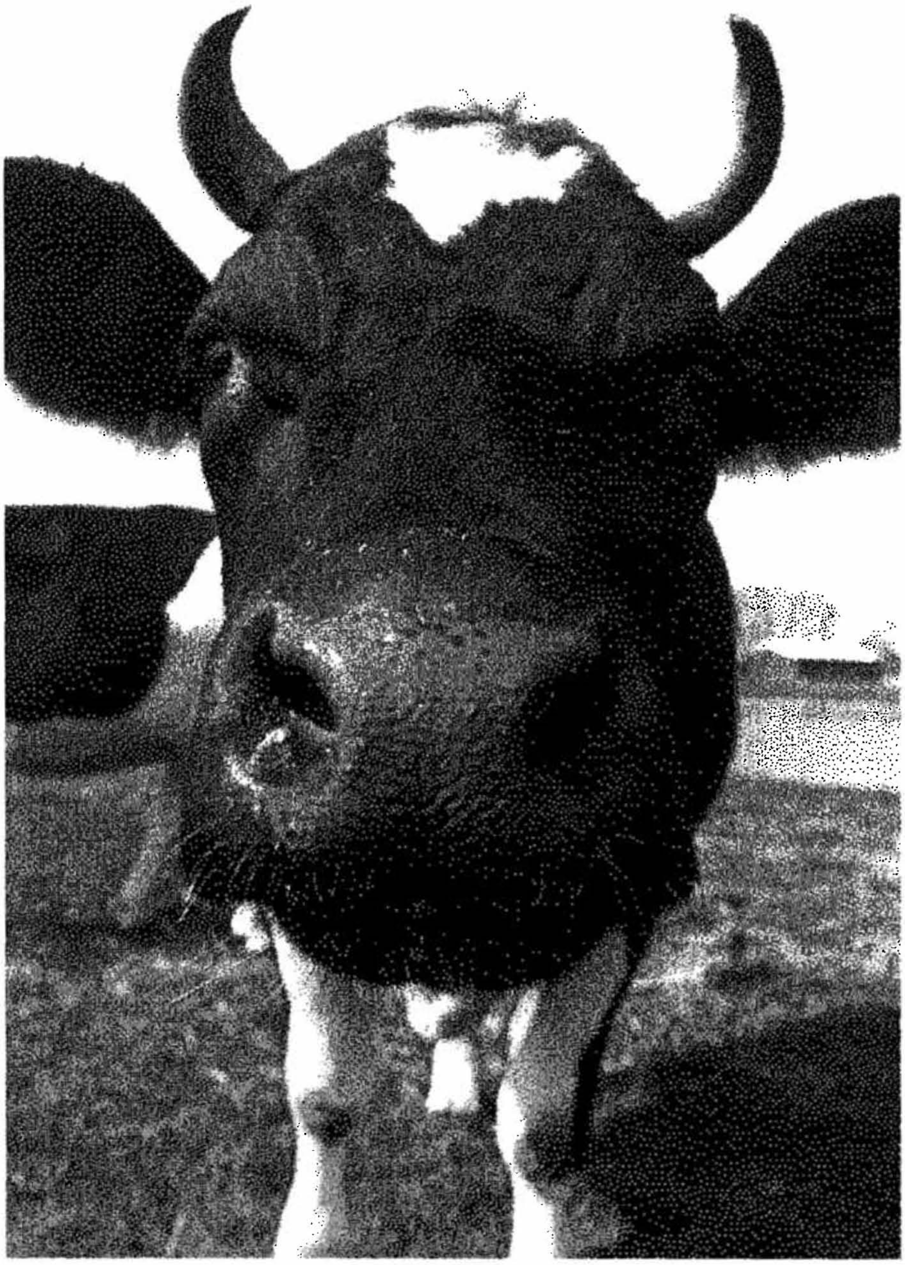
Opdrachtenbundel DDM



Nieuwe wiskunde tweede fase
Profiel E&M
Freudenthal Instituut

Verantwoording

Bij het samenstellen van deze bundel is onder meer dankbaar gebruik gemaakt van de volgende bronnen:

- *Discrete Mathematics across the curriculum*, K-12, NCTM Yearbook 1991.
- The Spode Group (1986), *Decision Mathematics*. Ellis Horwood Limited, Oxford.
- Sandefur, James T. (1993), *Discrete Dynamical Modeling*. Oxford University Press, New York.
- Lint, J. H. van (1998), *Wiskunde en de compact disk*, gepresenteerd op de Nationale Wiskunde Dagen 1998, Noordwijkerhout.

Achterin deze bundel zijn enkele proefwerken en schoolonderzoeken opgenomen. Deze zijn welwillend ter beschikking gesteld door de docenten van de experimenteerscholen: het Cals College in Nieuwegein en het Liemers College in Zevenaar.
De antwoorden zijn gemaakt door Irene Gosselink, stagiaire bij het Freudenthal Instituut.

Inhoudsopgave

Opdrachtenbundel Discrete Dynamische Modellen

Project:	Wiskunde voor de tweede fase
Profiel:	E&M
Domein:	Discrete Dynamische Modellen
Klas:	VWO 6
Staat:	Eerste experimentele versie
Ontwerp:	Michiel Doorman, Heleen Verhage

1: Recurrente betrekkingen voor telproblemen

1 In een openluchttheater telt de eerste rij 70 stoelen, de tweede rij 72, de derde 74, enzovoort. In totaal zijn er 30 rijen.
De stoelen zijn doorgenummerd over de rijen. De eerste stoel van de eerste rij heeft nummer 1, de eerste stoel van de tweede rij heeft nummer 71, de eerste stoel van de derde rij nummer 143, enzovoort. Jij hebt een kaartje voor stoel nummer 1000.

Hoeveel zitplaatsen zijn er in het theater en in welke rij zit jij?

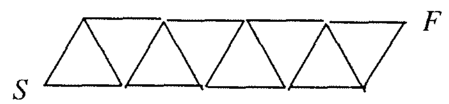
2 Op je grafische rekenmachine kun je de volgende recurrente betrekking invoeren:
$U(n) = 3 + U(n\text{-}1)$
$U(0) = 1$

a. Met welke directe formule kun je het n-de element van de rij uitrekenen? Controleer je antwoord door de directe formule voor $V(n)$ in te voeren en de rijen U en V in een tabel te vergelijken.

b. Verander U in: $U(n) = n + U(n\text{-}1)$.
Kun je nu een directe formule vinden?

c. Verander U in: $U(n) = n * U(n\text{-}1)$. Kun je nu een directe formule vinden?

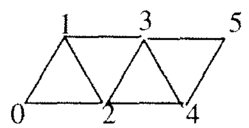
3 Een bij loopt over de weggetjes van S naar F.



De bij beweegt zich steeds naar rechts, maar kan zigzaggen.

a. Zijn alle routes even lang?

Het berekenen van het aantal mogelijke routes voor de bij om van S naar F te komen is niet eenvoudig. Het blijkt echter dat je eenvoudig een recurrente betrekking kunt opstellen voor het aantal routes.
Nummer de punten als volgt:



b. Verklaar waarom geldt:
het aantal routes naar 5 = (het aantal routes naar 4) + (het aantal routes naar 3).

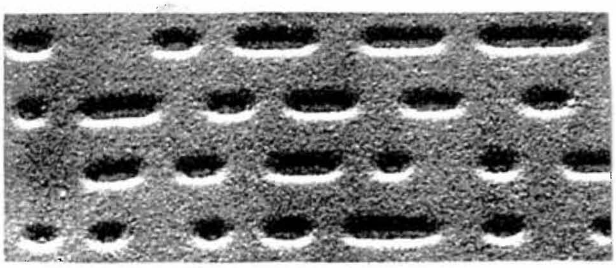
c. Hoe ziet deze formule eruit als je n punten hebt? Hoeveel routes zijn er van S naar F?

Fibonnacci en de compact disc

De reeks getallen die ontstaat door een nieuw getal te maken uit de som van de twee voorafgaande, startend met 0 en 1, wordt de rij van Fibonacci genoemd. De rij is vernoemd naar de beroemde Italiaanse wetenschapper Leonardo van Pisa, die leefde van ca 1170 tot na 1240.

4 De recurrente betrekking voor de rij van Fibonacci is:
$F(n) = F(n\text{-}1) + F(n\text{-}2)$, met $F(0) = 0$ en $F(1) = 1$.

a. Bereken de volgende vijf getallen uit de rij.



De rij van Fibonacci heeft verrassende toepassingen. Naast het routeprobleem van de vorige opgave, is er ook een toepassing te vinden bij de architectuur van compact discs. Het spoor op een CD is 5 kilometer lang en bestaat uit putten en dammen (zie de figuur). Als de laserbundel de CD leest, dan interpreteert hij de overgang van een put naar een dam (of omgekeerd) als een 1, en daarna 0-en tot de volgende overgang. De lengte van een 0 is 0.3 µm. Twee overgangen kunnen niet direct op elkaar volgen. Dan raakt de laserbundel in de war. Deze beperking heeft tot gevolg dat je niet twee 1-en na elkaar kunt lezen.
Om muziek op een CD te kunnen zetten, wordt die gecodeerd in groepjes 0-en en 1-en, met de extra eis dat er geen twee 1-en naast elkaar voor mogen komen. In vaktaal heet een enkel symbool een bit, en een groepje van 8 bits een byte.

b. Stel dat zo'n groepje uit een rijtje van acht 0-en en 1-en bestaat en dat die extra eis niet van toepassing is. Hoeveel verschillende rijtjes van acht symbolen (bytes) zijn er dan?

Door de extra eis wordt het tellen van het aantal mogelijke rijtjes gecompliceerder. Bij 3 bits bijvoorbeeld, is het rijtje 000 goed en het rijtje 110 fout.

c. Laat zien dat je met 1, 2, 3 en 4 bits achtereenvolgens 2, 3, 5 en 8 goede rijtjes kunt maken.

Deze getallen komen voor in de rij van Fibonacci, en je kunt je afvragen of daar een verklaring voor te vinden is.

d. Probeer te beredeneren waarom $a(5) = a(4) + a(3)$, als $a(5)$ het aantal goede rijtjes bij 5 bits is.
TIP: een rijtje van 5 kun je splitsen in een rijtje van 4 + het laatste symbool. Dit laatste symbool is óf een 0, of een 1. Behandel die twee gevallen apart.

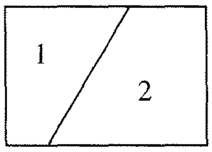
e. Kun je je redenering ook generaliseren naar een rijtje van willekeurige lengte?

f. Hoeveel verschillende goede rijtjes zijn er mogelijk bij 10 bits?

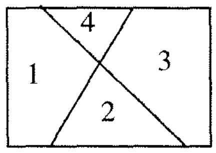
g. Welke lengte moet een rijtje hebben, opdat er tenminste 256 verschillende mogelijkheden zijn met dat rijtje?

Het antwoord op de vorige vraag laat zien met hoeveel bits een rijtje van 8 (een byte) uitgebreid moet worden, als de eis van de 1-en van toepassing is!

5 Een rechthoek kun je met een lijn in twee delen verdelen. Als je nog een lijn tekent die de eerste lijn snijdt, dan krijg je vier delen:



$U(1) = 2$



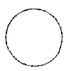
$U(2) = 4$

De regel is dus dat een lijn loopt van een zijde van de rechthoek naar een andere zijde van de rechthoek. En bovendien snijdt een nieuwe lijn alle bestaande lijnen. Een nieuwe lijn gaat niet door het snijpunt van bestaande lijnen, en snijdt een andere lijn ook niet precies op de rand. De rechthoek mag je zo groot nemen als je zelf wilt.

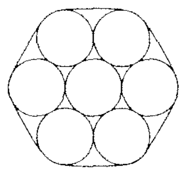
a. Ga na dat dit mogelijk is door zelf nog twee lijnen erbij te tekenen. Tel beide keren uit hoeveel delen de rechthoek bestaat.

b. Hoeveel lijnen zijn nodig om de rechthoek in tenminste 52 stukjes op te delen? Onderzoek dit probleem. Stel daartoe een recurrente betrekking op tussen $U(n)$ en $U(n\text{-}1)$.

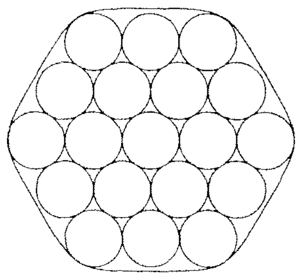
6 In een fabriek worden buizen met staaldraad gebundeld. Daarbij ontstaat de zogenaamde zeskantstapeling. De omtrek is dan zo klein mogelijk en er kan handig gestapeld worden.
Hieronder staan voorbeelden van zulke bundels buizen. Je ziet telkens de voorkant. Het rangnummer is k.



$k = 1$



$k = 2$



$k = 3$

a. Hoeveel buizen zitten in ieder van deze drie bundels?

b. Hoe kun je het aantal buizen bepalen van de bundel met rangnummer $k = 4$? Wat is het aantal?

c. Stel een recurrente betrekking op voor het aantal buizen in een bundel met rangnummer n.

Een directe formule voor het aantal buizen n in een bundel is:
$\textit{aantal buizen} = 3 \cdot n \cdot (n - 1) + 1$

d. Klopt dat voor je antwoord bij **b**?

e. Verklaar deze formule met behulp van je recurrente betrekking.
Hint: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = n \cdot (n + 1) / 2$

2: Rekenen met geld

In de financiële rekenkunde is men sinds jaar en dag gewend om te werken met tabellen. Die tabellen stammen van ver voor de tijd van rekenmachines en computers.
Men onderscheidt verschillende typen rentesommen, die elk hun eigen tabel hebben.

7 Je stort 2000 gulden op een spaarrekening die 4,5 % rente geeft.

a. Tot welk bedrag is je storting na 7 jaar aangegroeid?

b. Hieronder staat een tafel uit een tabellenboek voor financiële rekenkunde.
S (spreek uit *grote S*) betekent slotwaarde.
Ga na hoe je zonder rekenmachine, maar met deze tafel, het antwoord op vraag a. kunt vinden.

$S_{\overline{n}|}$ I. TAFELS VOOR $(1{,}0425)^n$; $(1{,}045)^n$; $(1{,}0475)^n$; $(1{,}05)^n$.

n	4¼ %	4½ %	4¾ %	5 %
1	1 , 0425	1 , 045	1 , 0475	1 , 05
2	1 , 0868 0625	1 , 0920 25	1 , 0972 5652	1 , 1025
3	1 , 1329 9552	1 , 1411 6613	1 , 1493 7592	1 , 1576 25
4	1 , 1811 4783	1 , 1925 1860	1 , 2039 7128	1 , 2155 0625
5	1 , 2313 4661	1 , 2461 8194	1 , 2611 5991	1 , 2762 8156
6	1 , 2836 7884	1 , 3022 6012	1 , 3210 6501	1 , 3400 9564
7	1 , 3382 3519	1 , 3608 6183	1 , 3838 1560	1 , 4071 0042
8	1 , 3951 1018	1 , 4221 0061	1 , 4495 4684	1 , 4774 5544
9	1 , 4544 0237	1 , 4860 9514	1 , 5184 0031	1 , 5513 2822
10	1 , 5162 1447	1 , 5529 6942	1 , 5905 2433	1 , 6288 9463

8 Een jong ouderpaar besluit bij de geboorte van hun eerste kind om *jaarlijks* 2000 gulden op een spaarrrekening te storten. De eerste storting vindt plaats op de dag van de geboorte en de rente is 5%.

a. Hoeveel staat er op de zesde verjaardag van het kind op de rekening?
(Neem voor het gemak aan dat de jaarlijkse rente precies op de verjaardag van het kind wordt uitgekeerd.)

b. Hieronder staat de tafel voor *s* (spreek uit: *kleine s*). Ga na hoe je met deze tafel het antwoord op vraag **a** kunt vinden.

$s_{\overline{n}|}$ III. TAFELS VOOR $\Sigma(1{,}045)^n$; $\Sigma(1{,}05)^n$; $\Sigma(1{,}055)^n$; $\Sigma(1{,}06)^n$
beginnende met $n = 1$.

n	4½ %	5 %	5½ %	6 %
1	1 , 045	1 , 05	1 , 055	1 , 06
2	2 , 1370 25	2 , 1525	2 , 1680 25	2 , 1836
3	3 , 2781 9113	3 , 3101 25	3 , 3422 6638	3 , 3746 16
4	4 , 4707 0973	4 , 5256 3125	4 , 5810 9103	4 , 6370 9296
5	5 , 7168 9166	5 , 8019 1281	5 , 8880 5103	5 , 9753 1854
6	7 , 0191 5179	7 , 1420 0845	7 , 2668 9384	7 , 3938 3765
7	8 , 3800 1362	8 , 5491 0888	8 , 7215 7300	8 , 8974 6791
8	9 , 8021 1423	10 , 0265 6432	10 , 2562 5951	10 , 4913 1598
9	11 , 2882 0937	11 , 5778 9254	11 , 8753 5379	12 , 1807 9494
10	12 , 8411 7879	13 , 2067 8716	13 , 5834 9825	13 , 9716 4264

9 Maak de tafel voor kleine *s* na in een spreadsheet programma.
Vraag: is jouw spreadsheet makkelijk aan te passen voor andere rentepercentages dan de genoemde?

Er bestaan spaarrekeningen waarbij je een eenmalige storting kunt doen en het rentepercentage vervolgens jaarlijks toeneemt. Dus hoe langer je het gestorte bedrag op de rekening laat staan, hoe hoger het rentepercentage. Bij sommige banken heet zo'n rekening een klimrekening.

10 Bij een bepaalde klimrekening loopt het rentepercentage met 0,5% per jaar op, te beginnen bij 3%. Na 1 jaar is de rente dus 3,0%, na 2 jaar 3,5%, na 3 jaar 4,0%, enzovoort. Verder is er sprake van samengestelde interest, dus rente-op-rente, en de looptijd van de klimrekening is 10 jaar.

a. Stel een recurrente betrekking op voor het bedrag dat na *t* jaar op deze rekening staat, als je bovendien weet dat de eenmalige storting fl. 5000 bedraagt.
(Tip: als je het te gecompliceerd vindt om met één betrekking te werken, kun je ook een model met twee betrekkingen maken, één voor het kapitaal en één voor de rente.)
b. Reken je model door op de GR of in een spreadsheet, en produceer een tabel waaruit je kunt aflezen hoe het kapitaal aangroeit gedurende de looptijd.
c. Wat is voordeliger: sparen via de klimrekening of sparen via een gewone spaarrekening, als de gewone spaarrekening 5% rente geeft?
d. Bij welk rentepercentage voor de gewone spaarrekening is het eindresultaat hetzelfde als bij de klimrekening?

Stel je voor, je krijgt 100 gulden. Liever vandaag dan morgen natuurlijk, want 100 gulden nu is meer waard dan 100 gulden over een jaar bijvoorbeeld.
Immers, als je nu 100 gulden krijgt, en de rente is 5%, dan kun je daar in een jaar tijd 105 gulden van maken door het geld op de bank te zetten.

11 a. Leg uit dat als je nu *f* 95,24 op de bank zet, je over een jaar *f* 100,- hebt (bij 5% rente).

Het terugrekenen van wat 100 gulden straks *nu* waard is, heet het contant maken van een toekomstig bedrag. Het bedrag *f* 95,24 heet de *contante waarde.*

b. Een brugklasser krijgt op haar 13e verjaardag de toezegging van haar oma dat ze fl 1000 zal krijgen op haar 18e verjaardag, mits ze tot die tijd niet rookt.
Bereken de contante waarde van dit bedrag.

Om geldbedragen die op verschillende tijdstippen worden uitgekeerd met elkaar te kunnen vergelijken, wordt de *contante waarde* berekend.
Los gewapend met deze kennis het volgende probleem op:

12 Voor een investeringsproject is in 1998 een bedag nodig van 1 miljoen.
De verwachte opbrengsten zijn:
in 1999: 300.000
in 2000: 500.000
in 2001: 400.000
in 2002: 300.000

Bereken de contante waarde van dit project, door alle toekomstige bedragen terug te rekenen naar 1998. Vergelijk vervolgens de contante waarde van de opbrengsten met de kosten van het project.

3: Populatiegroei

13 Op een zeehondeneiland telt men jaarlijks het aantal zeehonden. Het aantal zeehonden dat in de loop van een jaar geboren wordt, bedraagt ongeveer 40% van het aantal zeehonden dat er aan het begin van dat jaar was. Het sterftecijfer is ongeveer 15%. Aan het begin van 1995 waren er ongeveer 5000 zeehonden.

a. Hoe groot zal de populatie in januari 2000 ongeveer zijn?

b. Zal de populatie ooit de omvang van 20 000 dieren bereiken, aangenomen dat de verdere omstandigheden niet wijzigen?

c. Op een bepaald moment zijn er 20.000 zeehonden op het eiland. Dat is eigenlijk te veel, en daarom besluit de overheid dat er ieder jaar 2000 zeehonden tgevangen moeten worden. Wat betekent dit voor de omvang van de populatie vijf jaar later?

d. Hoeveel dieren moet men jaarlijks vangen om in een periode van 10 jaar de populatie van 20 000 terug te brengen tot 10 000?

14 In de tabel hieronder staat het aantal inwoners van de Verenigde Staten in de afgelopen eeuwen.

jaar	*aantal inwoners (x 1000)*	*jaar*	*aantal inwoners (x 1000)*	*jaar*	*aantal inwoners (x 1000)*
1790	3929	1850	23192	1910	91972
1800	5308	1860	31443	1920	105711
1810	7240	1870	38558	1930	122775
1820	9638	1880	50156	1940	131669
1830	12866	1890	62948	1950	150697
1840	17069	1900	75995	1960	179323

a. Laat door de grafische rekenmachine een plaatje maken bij deze gegevens.

b. Aanvankelijk, zo tussen 1790 en 1860, lijkt sprake te zijn van exponentiële groei. Hoe groot is de groeifactor per jaar? (*Let op: in de tabel staan de gegevens per 10 jaar.*) Welke waarde voor de groeivoet g in het volgende model volgt hieruit?

$N_t = N_{t-1} + g \cdot N_{t-1}$

$N_{1790} = 3929$

c. Neem aan dat alle gegevens in de tabel gemodelleerd worden met geremde groei. Welke waarden voor g en K geven dan de beste benadering?

$$N_t = N_{t-1} + g \cdot N_{t-1} \cdot \left(1 - \frac{N_{t-1}}{K}\right)$$

$N_{1790} = 3929$

d. Het model dat je nu hebt, had dus in de zestiger jaren gemaakt kunnen zijn. De waarde van het model moet onder andere blijken uit de voorspellingen die je ermee kunt doen. In 1970 telde de VS ongeveer 203 miljoen inwoners, in 1980 op 221 miljoen en in 1990 op 250 miljoen.
In hoeverre komen deze getallen overeen met de voorspellingen van je model?

15 In een groot aantal ontwikkelingslanden is de afgelopen jaren een campagne voor 'family planning' (=geboortebeperking) gevoerd. In de tabel hieronder staat voor de periode 1960-1976 het aantal landen dat bezig is met zo'n family planning programma. Uit de getallen blijkt, dat het aantal landen in die periode flink is toegenomen.

jaar	*aantal landen*	*jaar*	*aantal landen*
1960	2	1969	38
1961	3	1970	47
1962	7	1971	50
1963	7	1972	54
1964	8	1973	57
1965	13	1974	61
1966	20	1975	63
1967	24	1976	64
1968	34		

De vraag die we ons stellen is, of de toename van het aantal landen met een wiskundig model te beschrijven is. Een voor de hand liggende eerste stap bij het onderzoeken van cijferreeksen is het plotten van de data.

a. Gebruik de GR om de data te plotten.

De grafiek van het aantal landen heeft de vorm van een S-curve. Het ligt daarom voor de hand om het logistisch model te kiezen om deze data zo goed mogelijk te beschrijven.

b. Probeer een zo goed mogelijk geremde groeimodel te maken bij deze data.

4: Economische modellen

Vraag/aanbod modellen

16 Bij dynamische vraag/aanbodmodellen in de economie werkt men meestal met de volgende aannames:
- het aanbod van een produkt in een bepaald jaar hangt via een *positief/negatief* verband af van de prijs in het *huidige/voorafgaande* jaar
- de vraag naar een produkt in een bepaald jaar hangt via een *positief/negatief* verband af van de prijs in het *huidige/voorafgaande* jaar
- elk jaar past de prijs zich op de markt zodanig aan, dat vraag en aanbod aan elkaar gelijk worden.

a. Kies de juiste woorden (positief/negatief en huidige/voorafgaande).

b. Beredeneer ook waarom die aannames redelijk zijn, eventueel aan de hand van een voorbeeld dat je zelf bedenkt.

17 In het volgende vraag/aanbod model is $S(n)$ het aanbod van graan, $D(n)$ de vraag naar graan (in 100.000 zakken) en $P(n)$ de prijs van graan per zak in dollars, alles in jaar n. (De S is van supply en de D is van demand.)

$S(n+1) = 0.8\ P(n)$
$D(n) = -1{,}2\ P(n) + 20$
$D(n+1) = S(n+1)$

a. Hoeveel eenheden graan zullen de producenten volgend jaar op de markt brengen, als de prijs van graan dit jaar 6 dollar per zak bedraagt?

b. Welke nieuwe prijs voor graan zal volgend jaar op de markt ontstaan, als alle graan die de producenten volgend jaar op de markt brengen, verkocht wordt?

c. Teken de grafieken van S en D in één figuur, met P op de horizontale as.

d. Geef in de figuur aan hoe het cyclisch proces verloopt dat in de economie wel met 'spinneweb-theorema' wordt aangeduid. Neem $P(0) = 6$.

e. Gaat de prijs die jaarlijks op de markt tot stand komt naar de evenwichtswaarde toe, of juist er vanaf?

f. Herschrijf het vraag/aanbod model tot een differentievergelijking voor $P(n+1)$.

g. Bepaal ook de directe formule voor $P(n+1)$.

18 Een campinghouder verhuurt jaarlijks een aantal staanplaatsen voor caravans. Over de afgelopen twee jaar is bekend:

jaar	*prijs* (P_t)	*aantal verhuurd* (D_t)
$t = 0$	fl. 100	60
$t = 1$	fl. 120	50
$t = 2$	...	...

Een prijsverhoging van 20 gulden heeft dus geleid tot 10 minder verhuurde staanplaatsen. Uit ervaring weet de campinghouder dat de huurders onmiddellijk reageren op een prijswijziging.

a. Neem aan dat het aantal verhuurde staanplaatsen lineair afhangt van de prijs. Hoeveel staanplaatsen verhuurt de campinghouder dan in jaar 2 als hij de prijs nogmaals met 20 gulden verhoogt?

b. Stel een vergelijking voor D_t op, aangenomen dat D_t lineair afhangt van P_t.

De campinghouder is zeker niet van plan om voor jaar 2 de prijs weer met 20 gulden te verhogen. Hij zoekt naar een subtielere manier om de prijs te veranderen, en laat zich daarbij leiden door de vraag in de voorafgaande jaren.
Hij besluit om voor jaar 2 de prijs als volgt aan te passen:

*verandering in de prijs = 0,5 * verandering in 'aantal verhuurd' in voorafgaand jaar*

c. Wat wordt de prijs in jaar 2 als je deze regel toepast?

d. Hoeveel staanplaatsen zullen er nu in jaar 2 verhuurd zijn, uitgaande van de vergelijking die je bij vraag **b** hebt opgesteld?

e. De campinghouder werkt in feite met het volgende wiskundig model:
$D_t = 110 - 0.5\ P_t$
$P_{t+1} - P_t = 0.5\ (D_t - D_{t-1}) \qquad (*)$
Leid hieruit de betrekking $P_{t+1} = 0.75\ P_t + 0.25\ P_{t-1}$ af.

Deze betrekking is een voorbeeld van een lineaire tweede orde differentievergelijking. Om een tweede orde vergelijking te kunnen doorrekenen, heb je twee beginwaarden nodig, zoals je al eerder hebt gezien.

f. Controleer je antwoord op vraag **d** met behulp van deze betrekking. Bereken ook de prijs van een staanplaats in de jaren 3, 4 en 5, aangenomen dat de campinghouder dezelfde berekeningsmethode blijft toepassen.

g. Een omschrijving in woorden van de betrekking voor P_{t+1} is:
De nieuwe prijs is een gewogen gemiddelde van de prijzen in de twee voorafgaande jaren.
Wat zijn de gewichten bij dit gewogen gemiddelde?

h. Hoe verandert de betrekking voor P_{t+1} als je de factor 0.5 in (*) verandert in 0.6?

Een macro-economische model

19 Van het nationaal inkomen (Y) van een land wordt een deel geconsumeerd (C) en een deel gespaard. De investeringen (I) bevinden zich op een constant niveau, en van het consumentengedrag is bekend dat er een tijdsvertraging optreedt. Het (vereenvoudigde) wiskundig model is:

$C_t = 0.8\, Y_{t-1} + 36$ (de consumptiefunctie)
$I_t = 30$ (de investeringen)
$Y_t = C_t + I_t$ (de evenwichtsvergelijking)

a. In jaar 0 is het nationaal inkomen 200. Wat wordt het nationaal inkomen in het daaropvolgende jaar, volgens dit model?
En in het jaar daarna?

b. Stel een differentievergelijking op voor Y_t en leid af dat de directe formule voor Y_t te schrijven is als:
$Y_t = 330 + 0.8^t\,(Y_0 - 330)$
waarbij 330 de evenwichtswaarde van het nationaal inkomen is.

c. Controleer met behulp van de grafische rekenmachine dat de differentievergelijking en de directe formule inderdaad hetzelfde resultaat geven.

d. Welk gedrag vertoont de rij Y_0, Y_1, Y_2, ...?
Omcirkel je keuze en motiveer:
+ De rij beweegt zich naar het evenwicht toe.
+ De rij beweegt zich van het evenwicht af.
+ Je kunt er niks van zeggen, want het hangt af van de beginwaarde Y_0.

Wat betekent dat voor het nationaal inkomen?

5: Modellen met meer variabelen

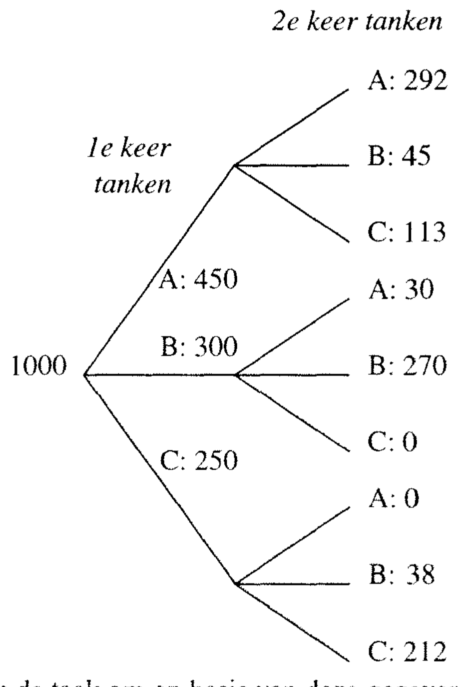
Marketingstrategieën

Bij het nemen van bedrijfskundige beslissingen is er vaak sprake van onzekerheid. De wiskundige hulpmiddelen die je kent om deze onzekerheid te lijf te gaan, zijn de kansrekening, de matrixrekening en de differentievergelijkingen.
De bekendste toepassing uit de marketing is waarschijnlijk het doorrekenen van marktaandelen.

In een middelgrote plaats in Nederland zijn drie verschillende benzine pompen, A, B en C. Was het vroeger zo dat een pomphouder wel op zijn vaste klanten kon rekenen, tegenwoordig tanken de klanten net zo makkelijk de volgende keer bij de concurrent. Vooral pomphouder A maakt zich zorgen, want hij heeft het gevoel dat hij steeds minder klanten krijgt. Hij heeft jou gevraagd om uit te zoeken hoe trouw de automobilisten eigenlijk zijn in hun koopgedrag, en of ze vaak van pomp wisselen.

20 a. Stel dat die vraag jou echt gesteld wordt. Hoe zou je zo'n onderzoek dan opzetten en uitvoeren?

Je hebt twee weken lang in weer en wind staan posten bij de drie pomphouders, en precies genoteerd welke auto wanneer en waar tankt. Er waren 1000 auto's die in elk geval twee keer getankt hebben, en dus bruikbaar voor het onderzoek. De gegevens van deze 100 auto's heb je verwerkt in het volgende diagram:



b. Aan jou de taak om op basis van deze gegevens een beknopt rapport voor de ondernemer te schrijven, waarin je in gaat op de vraag of de pomphouder zich zorgen moet maken over zijn marktaandeel in de verkoop van benzine.
Je kunt aannemen dat de dataverzameling heeft plaats gevonden in 'gemiddelde weken', en dat er geen reden is om aan te nemen dat de consumenten hun gedrag zullen veranderen.

De conclusie moet cijfermatig onderbouwd zijn en het rapport moet een kwantitatieve analyse van de data bevatten met extrapolatie naar de toekomst. De ondernemer is erg vertrouwd met het lezen van computeruitdraaien van spreadsheetprogramma's.

Ten gevolge van jouw rapport ziet pomphouder A de bui hangen en hij wil daar wat aan gaan doen. Hij aarzelt nog tussen twee strategieën:
Strategie I: een aktie gericht op merkentrouwheid. Dit kan bijvoorbeeld bereikt worden door een klant die voor tenminste 50 gulden benzine tankt een bonnetje te geven waarmee de klant bij de volgende keer tanken 5 gulden korting krijgt. Deze campagne richt zich dus op de klanten van A.
Stel dat het met deze aktie lukt om het aantal automobilisten dat na tanken bij A de volgende keer tankt bij B of C te halveren (de andere helft tankt dus weer bij A, ipv bij B of C).
Strategie II: het idee van deze strategie is om te proberen klanten af te snoepen van B en C. Dit kan bereikt worden met een reclamecampagne in de lokale media. Stel dat het resultaat hiervan is dat 10 % van de automobilisten die bij B of C tanken de volgende keer bij A tanken, in plaats van opnieuw bij B resp. C.

c. Onderzoek wat het effect van deze twee strategieën afzonderlijk is op het marktaandeel van A.
En wat is het resultaat als de strategieën met elkaar gecombineerd worden?

Buffels in Amerika

21 In 1830 waren er veertig miljoen(!) buffels in het westen van de VS. In 1887 waren er nog maar 200 over, de dieren werden ongelimiteerd afgeslacht. In 1985 waren er weer ongeveer 26.000 exemplaren, als volgt verdeeld: 10400 volwassen mannetjes, 9100 volwassen vrouwtjes, 3380 onvolwassen mannetjes en 3120 onvolwassen vrouwtjes. Van de onvolwassen dieren is tweederde deel 1-jarig, de rest is 2-jarig (dit geldt voor zowel mannetjes als vrouwtjes).
Van de buffels is bovendien bekend:
- 100 volwassen vrouwtjes werpen elk jaar gemiddeld 90 kalveren, waarvan 48 mannetjes en 42 vrouwtjes;
- 50% van de 1-jarigen overleeft het eerste levensjaar, van de 2-jarigen wordt 60% volwassen (de rest gaat dood);
- van de volwassen dieren sterft elk jaar 10%.

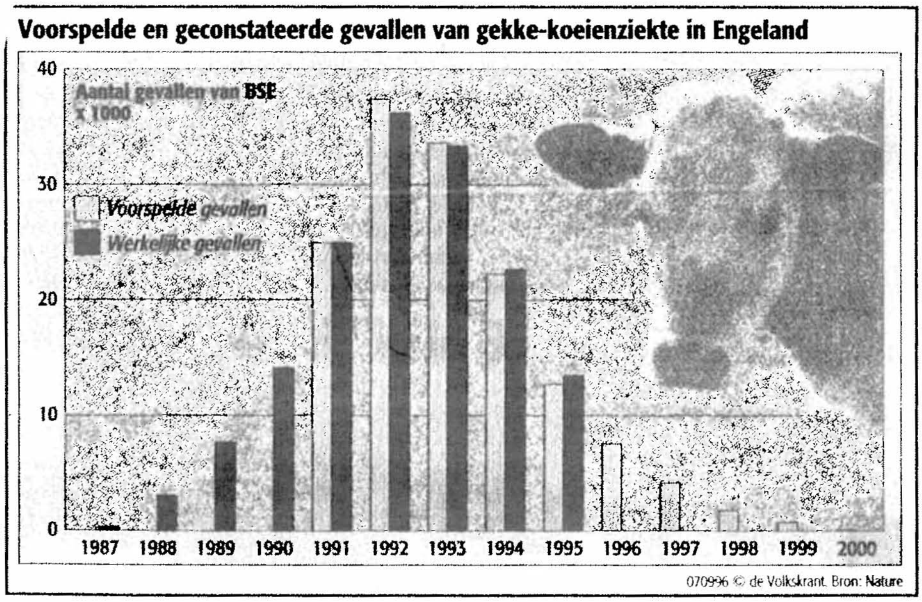
Als je alleen de vrouwtjes-populatie onderzoekt zal blijken dat er sprak is van ongeremde groei. Het verantwoordelijke departement overweegt toe te staan dat jaarlijks volwassen vrouwtjes worden afgeschoten.
Hoeveel kunnen er jaarlijks geschoten worden opdat het aantal vrouwtjes van de buffelpopulatie redelijk in evenwicht blijft?

Epidemieën

Eind jaren tachtig werd in Engeland een toenemend aantal gevallen van de 'gekke-koeienziekte' (BSE) geconstateerd. In de jaren negentig nam de ziekte zelfs epidemische vormen aan en er werd in Europees verband over gesproken om een flink deel van de veestapel, of zelfs de hele veestapel, te slachten. Bij het slachten van de hele veestapel zou het gaan om meer dan 9 miljoen koeien!

Een groep wetenschappers van de universiteit van Oxford stelde een wiskundig model op van de BSE epidemie, waardoor het mogelijk werd voorspellingen te doen en berekeningen uit te voeren over het effect van diverse maatregelen. Zij kwamen tot de conclusie dat het zeker niet nodig is de hele veestapel af te slachten. Met een selectief slachtbeleid valt ook te bereiken dat de epidemie in het jaar 2001 voorbij is.

22 Hieronder staat een grafiek met zowel het aantal voorspelde als geconstateerde gevallen van BSE in Engeland.



a. In welk jaar was de toename van het aantal BSE gevallen het grootst?

b. Vergelijk de voorspelde gevallen met de werkelijke gevallen. Wat is je commentaar?

Het verloop van epidemieën kan geanalyseerd worden met behulp van een wiskundig model. Een belangrijke stap bij het ontwerpen van zo'n model is het in kaart brengen van de verschillende groepen die in het model kunnen voorkomen en het beschrijven van de relaties en wederzijdse invloeden tussen die groepen.

23 Stel je voor: in het najaar breekt er een griepepidemie uit in Nederland.

a. Probeer, uitgaande van wat je weet over griep, zo goed mogelijk te beschrijven hoe zo'n epidemie kan verlopen.

b. Welke groepen van mensen kun je onderscheiden en wat voor invloed hebben die op elkaar?

Een mogelijk model om een epidemie wiskundig te beschrijven is:

$$G(t+1) = G(t) - a\,G(t)\,Z(t)$$
$$Z(t+1) = Z(t) + a\,G(t)\,Z(t) - b\,Z(t)$$
$$I(t+1) = I(t) + b\,Z(t)$$

De populatie is ingedeeld in drie groepen:
G: nog te besmetten wezens
Z: wezens die ziek zijn
I: wezens die immuun zijn.

Kenmerkend van zo'n model is de interactie tussen verschillende groepen (zieken steken gezonden aan).

24 a. In de recurrente betrekking voor G is $\Delta G = -\,a\,G(t)\,Z(t)$. Omschrijf in woorden wat dit betekent.

b. Een systeem heet gesloten als de totale omvang van de populatie niet verandert. De veranderingen binnen het systeem heffen elkaar dan getalsmatig op.
Voor dit epidemie model betekent dit dat $\Delta G + \Delta Z + \Delta I = 0$.
Is dat hier het geval?

c. Stel dat er in een populatie een besmettelijke ziekte opduikt. Kun je, zonder meteen te gaan rekenen, iets voorspellen over de ontwikkeling van de aantallen G, Z en I?

25 a. De parameters van het wiskundig model zijn a en b.
Omschrijf in woorden welke interpretatie je kunt geven aan $b = 0.20$.

b. Reken het model door (bijvoorbeeld met een spreadsheet programma) in het geval $a = 0.001$ en $b = 0.20$ voor een populatie van 1000 wezens, waarvan er op $t = 0$ tien ziek zijn geen enkele immuun.

c. Laat een grafiek tekenen voor $t = 0$ tot 30 en vergelijk deze grafiek met de grafiek van de gekke koeienziekte. In hoeverre lijken die grafieken op elkaar?

d. Onderzoek met dit wiskundig model hoe het verloop van een epidemie in de tijd eruit kan zien, door de waarden van a en b te variëren. Stel je bevindingen op schrift.

6: Gemengde opgaven

Leerexperiment met ratten

In het kader van een onderzoek naar het leervermogen van ratten wordt het volgende experiment uitgevoerd:
Een rat in een kooi moet door een bepaald gangetje lopen. Als de rat het eind van de gang bereikt, noemt de onderzoeker de poging een succes. De rat krijgt dan soms een beloning (voedsel), soms een straf (een lichte electrische schok), en soms gebeurt er helemaal niets. De onderzoeker is geïnteresseerd in hoeverre het gedrag van de rat beïnvloed wordt door wat er aan het eind van de gang gebeurt.

26 De onderzoekers hebben dit experiment een groot aantal keren uitgevoerd, waarna zij tot het volgende wiskundige model kwamen om de kans op succes bij de n-de poging te berekenen:

$$p_n = p_{n-1} + a\,(1 - p_{n-1}) - b\,p_{n-1}$$

Hierbij staat a voor de fractie successen (= het bereiken van het einde van de gang) die beloond wordt, en b voor de fractie successen die bestraft wordt.

a. Wat kun je zeggen over de succeskans p_n als je bij een succes altijd straft of beloont, dus als $a + b = 1$?

Neem nu aan dat $a + b < 1$.

b. Onderzoek de differentievergelijking voor verschillende waarden van a en b.
Leg ook steeds de relatie met de context.
Hoe moet er volgens jou beloond en gestraft worden om de ratten zo efficiënt mogelijk te leren het einde van de gang te bereiken?

Medicijnspiegel in het bloed

27 Van een bepaald type hoestsiroop is de aanbevolen dosis 16 ml, om de vier uur in te nemen. De bijsluiter vermeldt ook nog dat na vier uur een kwart van de in het lichaam aanwezige hoeveelheid is afgebroken.

a. Analyseer de hoeveelheid hoestsiroop die in het lichaam aanwezig is als iemand dit medicijn precies volgens voorschrift inneemt. Welke fluctuaties zijn er?
Verwerk in je analyse in elk geval een differentievergelijking en een webgrafiek.

b. Iemand vindt het te lastig om elke vier uur wat in te nemen, en besluit eens in de acht uur de dubbele hoeveelheid (dus 32 ml) in te nemen. Is dat verstandig?

Contextloze systemen

28 Teken de web-grafieken bij de systemen en beschrijf wat op den duur met ieder systeem gebeurt.

a. $U(n) = -0.8\ U(n-1) + 3.6$ met $U(0) = -4$

b. $U(n) = -U(n-1) + 4$ met $U(0) = 6$

c. $U(n) = -1.5\ U(n-1) + 5$ met $U(0) = 1.5$

29 Teken de webgrafiek bij het systeem:
$A(n+1) = 3.2\,A(n) - 0.8\,A^2(n)$
en trek je conclusies.

30 Bestudeer het systeem:
$A(n+1) = A^3(n) - A^2(n) + 1$
Wat zijn de evenwichtswaarden? En wat kun je zeggen over de stabiliteit daarvan?

31 Het systeem:
$A(n+1) = A(n) - A^3(n)$
heeft als enige evenwichtswaarde $A = 0$.
Teken een web-grafiek om na te gaan of deze evenwichtswaarde stabiel, instabiel of semi-stabiel is.

7: Bijlage - Proefwerken en schoolonderzoeken DDM

Proefwerk wiskunde A Klas 5VWO Discrete Dynamische Modellen Hoofdstuk 1
datum 26 - 1 - 1998 Versie 1
Normering: 1(3,3,4) 2(3,3) 3(0,5,3,3) 4(3,5)
Totaal 35 punten kenmerk:v5ad1198.wpd
Werk netjes en duidelijk en laat altijd zien hoe je aan je antwoord komt. SUCCES!!!!!!!!!!

Algemene aanwijzingen voor het gebruik van de grafische rekenmachine:
1. Let op dat de MODE staat ingesteld op Seq.
2. Let op dat bij een gewone (of tijd-) grafiek je rekenmachine staat ingesteld op Time en bij een web grafiek op Web.
3. Bij een gewone grafiek is het verstandig om in je Window de waarden van nMin en nMax gelijk te houden aan de waarden van xMin en xMax.
4. Bij een web grafiek is het verstandig om in je Window de waarden van xMin en xMax gelijk te houden aan de waarden van yMin en yMax.
5. Voor de TI-82: neem voor nStart steeds 0
Voor de TI-83: neem voor PlotStart en PlotStep steeds 1.

Opgave 1
Tom zet een bedrag van f 2500,- op een spaarrekening, waar hij 4,5% rente per jaar ontvangt.
a. Om uit te rekenen hoeveel geld er na t jaren op de rekening staat kan een exponentiële functie van de vorm $k(t)=b \cdot g^t$ worden opgesteld, waarin k de hoeveelheid geld weergeeft en t de tijd in jaren. Geef de functie voor de situatie zoals hiervoor omschreven.
b. Het is eveneens mogelijk om de situatie weer te geven in een model met een recurrente betrekking: $k(t)=f \cdot k(t-1)$. Je moet daarbij tevens aangeven hoeveel k (0) is. Geef de recurrente betrekking en de waarde van k (0).
c. Laat zien dat beide modellen dezelfde situatie beschrijven, door zowel met de functie van onderdeel a, als met de recurrente betrekking van onderdeel b uit te rekenen hoeveel geld er na drie jaar op de rekening staat.

Opgave 2
De formule voor het algemene model met geremde groei luidt als volgt

$$N_t=N_{t-1}+g \cdot N_{t-1} \cdot \left(1-\frac{N_{t-1}}{K}\right)$$

In een meer specifieke situatie kan dat leiden tot de formule

$$N_t=N_{t-1}+0{,}3 \cdot N_{t-1} \cdot \left(1-\frac{N_{t-1}}{21}\right) \quad met\ N_0=2$$

a. Beschrijf een situatie waarvan de laatste formule een model zou kunnen zijn. Geef daarbij aan wat de waarden van de gebruikte getallen voor de situatie betekenen.
(*Let op*: de beschreven situatie moet realistisch zijn!)
b. Bereken N_3

Opgave 3

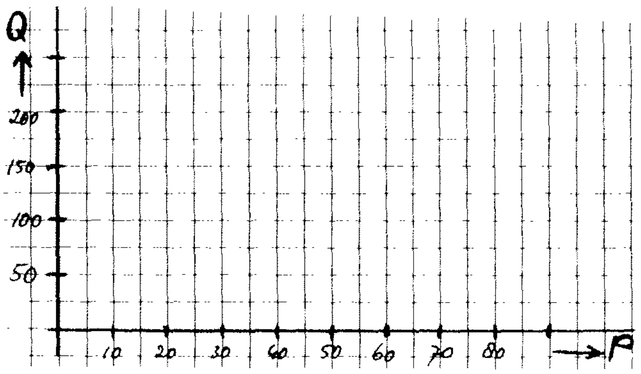
Een economisch model heeft de volgende formules om de aangeboden hoeveelheid Q_t^a en de gevraagde hoeveelheid Q_t^v van een bepaald goed uit te rekenen:

$$Q_t^a = 1{,}2P_{t-1} + 40$$
$$Q_t^v = -2P_t + 232$$

In dit model geeft P de prijs aan. Er is evenwicht als $Q_t^a = Q_t^v$

a. Schrijf rechts op dit blad je naam. **NAAM:**

b. Hieronder zie je een assenstelsel getekend met horizontaal de prijs en verticaal de hoeveelheid van het goed uitgezet. Teken op dit blad de grafiek van zowel Q_t^a als Q_t^v.



c. Neem aan dat $P_0 = 40$ en teken in de grafiek de ontwikkeling in het model tot en met $t = 2$.

d. Bereken de evenwichtsprijs door het model statisch te maken en P op te lossen uit een op te stellen vergelijking

Opgave 4

Welke evenwichtspunten er in een model optreden kan op verschillende manieren bekeken worden, bijvoorbeeld door een berekening, maar ook mogelijk is met behulp van een grafiek op je grafische rekenmachine

a. Bepaal het evenwichtspunt (of de evenwichtspunten) door middel van een berekening voor het model $U_n = 3 \cdot U_{n-1} - 5$

b. Bepaal voor het model $U_n = 0{,}8 \cdot U_{n-1}^2$ het evenwichtspunt (of de evenwichtspunten) met behulp van je grafische rekenmachine. Schets de tekening die je hebt gebruikt en geef in die schets voor elk evenwichtspunt aan hoe je kunt zien of het een stabiel dan wel instabiel evenwicht betreft

EINDE

Proefwerk wiskunde A **Klas 5VWO** **Discrete Dynamische Modellen**
datum 5-2-1997 Versie 1
Normering: 1(2,3,2,3) 2(4,4) 3(3,4,3) 4(2,3,3,4)
Totaal 40 punten
Werk netjes en duidelijk en laat altijd zien hoe je aan je antwoord komt. SUCCES!!!!!!!!!!

Opgave 1
In 1997 wordt een nieuwe politieke partij opgericht: DDM '97, voor een Discrete en Dynamische Maatschappij. De partij wint aanvankelijk snel aan populariteit. Een onderzoeksbureau, dat de partij begeleid in de promotiecampagne, heeft na een aantal peilingen onder de stemgerechtigde bevolking een formule opgesteld waarmee de aanhang A_t (in procenten) na t maanden vanaf 1 januari 1997 benaderd kan worden. De formule luidt:

$$A_t=(1+0,2)\cdot A_{t-1}-\frac{0,2}{17}A_{t-1}^2$$

a. De aanhang op 1 januari 1997 is door de voorpubliciteit reeds 1 procent. Bereken de aanhang op 1 februari 1997.
b. Bepaal met je TI-82 (en leg globaal uit hoe je dat doet) in welke maand DDM'97 een aanhang van 10 procent zal bereiken.
c. Hoeveel bedraagt de grenswaarde volgens de formule?
d. Het model zoals weergegeven met de formule heeft de remfactor:

$$1-\frac{A_{t-1}}{17}$$

Herschrijf de formule voor A_t zodanig dat de remfactor in bovenstaande vorm in de formule voorkomt.

Opgave 2
Bepaal (eventueel met behulp van een web-grafiek op je TI-82):
1 hoeveel evenwichtspunten de volgende modellen hebben
2 hoe groot die evenwichtswaarden zijn
3 of het stabiele dan wel instabiele evenwichtspunten betreft
4 of het verloop van het model monotoon dan wel alternerend is
(Geef steeds enige toelichting hoe je aan je antwoord komt)

a. $$K_n=1,09K_{n-1}-3$$

b. $$F_t=1,51F_{t-1}-\frac{0,51}{43}F_{t-1}^2$$

Z.O.Z.!!!!!

Opgave 3
Meneer Doorman wil zijn eigen oudedagsvoorziening regelen. Hij wil er voor zorgen dat hij op 65-jarige leeftijd, dat is over 30 jaar, een kapitaal met dezelfde koopkracht als een bedrag van *f* 100.000,- nu heeft, tot zijn beschikking heeft. Met dezelfde koopkracht als nu *f* 100.000,- wil zeggen dat hij die *f* 100.000,- jaarlijks aanpast aan de prijsinflatie. De inflatie in Nederland bedraagt voor de komende 30 jaar volgens het Centaal Planbureau zo'n 1,5 % per jaar.
Let op: in deze opgave zijn sommige percentages per maand en andere per jaar!!!!!!!
a. Bereken het bedrag dat meneer Doorman over 30 jaar bij elkaar gespaard wil hebben.
b. Als meneer Doorman elke *maand f* 250,- op een spaarrekening laat bijschrijven, die *maandelijks* 0,4 % rente oplevert, heeft hij dan na 30 jaar sparen genoeg voor zijn oudedagsvoorziening?
c. Hoeveel moet meneer Doorman maandelijks op zijn rekening storten om precies het door hem gewenste bedrag over 30 jaar op zijn rekening te hebben?

Opgave 4
In een macro-economisch model gaat men er van uit dat consumenten hun inkomen besteden aan consumptiegoederen en aan sparen.
Aan consumptiegoederen wordt steeds een basisbedrag (voor de eerste levensbehoeften) besteed van 30 en verder 80 % van het inkomen uit de voorgaande periode. In formulevorm wordt dit weergegeven als: $C_t = 0{,}8\ Y_{t-1} + 30$.
Er wordt elke periode een vast bedrag van 100 gespaard: $S_t = 100$.
Het model is in evenwicht als het bedrag dat in een periode wordt besteed aan consumptiegoederen en sparen gelijk is aan het inkomen in die periode: $Y_t = C_t + S_t$.
a. Stel de differentievergelijking voor het model op.
b. Bereken bij welk inkomen het model in evenwicht is door het evenwicht van het statische model uit te rekenen (zonder je TI-82 te gebruiken).
c. Leg uit hoe je je antwoord van onderdeel b terug kunt vinden in de oplossingsformule::

$$Y_n = \frac{b}{1-a} + a^n\left(Y_0 - \frac{b}{1-a}\right)$$

d. Wat gebeurt er in het model als in elke periode naast het vaste bedrag van 100 ook nog 10 % van het inkomen uit die periode wordt gespaard: $S_t = 0{,}1\ Y_t + 100$. (De evenwichtsvoorwaarde blijft ongewijzigd.)

EINDE

Proefwerk wiskunde A Klas 5 VWO Discrete Dynamische Modellen H 1,2 en 3
datum: 17-06-1997 Versie 1
Normering: 1(3,3,4,2,5) 2(2,2,4,4,4,4,4,4) 3(4,4,2) 4(4,4,3,4)
Totaal 70 punten kenmerk: v5addmt.wpd
Werk netjes en duidelijk en laat altijd zien hoe je aan je antwoord komt. SUCCES!!!!!!!!!!

Let op: na afloop van dit proefwerk moet iedereen zijn grafische rekenmachine inleveren. Leerlingen die hun rekenmachine nog nodig hebben voor wiskunde B, kunnen zich melden bij meneer Wanga; zij krijgen van hem hun rekenmachine tijdelijk terug. Bij de uitgang kun je (straks) je rekenmachine voorzien van een sticker met naam, je krijgt dan na de vakantie dezelfde rekenmachine weer terug.

Opgave 1

Leo heeft een prijs van *f* 100.000,- gewonnen in een loterij. Hij zet het geld op de bank. Aan het eind van ieder jaar krijgt hij 8% rente en haalt hij *f* 10.000,- van zijn rekening.

a. Hoeveel geld staat er na afloop van het derde jaar op zijn rekening?
b. Stel een recurrente betrekking op bij dit verhaal en geef de bijbehorende beginwaarde.
c. Na hoeveel jaar is het geld van Leo op? En hoeveel is het laatste bedrag dat Leo kan opnemen? (Rood staan mag niet.)

Marjan en Ruud hebben allebei ook een prijs gewonnen in de loterij. Zij zetten net als Leo hun geld op de bank (allebei op een aparte rekening) Ook zij krijgen 8% rente en na ieder jaar halen ze allebei ook *f* 10.000,- van hun rekening.

d. Bereken hoe hoog de prijs van Ruud moet zijn geweest als er jaarlijks hetzelfde saldo op zijn rekening blijft staan.
e. Bereken met behulp van de directe oplossingsformule hoe hoog de prijs van Marjan moet zijn geweest als zij na precies 10 jaar de laatste keer *f* 10.000,- van haar rekening opneemt en er dan ook niets meer op die rekening staat.
Voor een differentievergelijking $X_n = a\,X_{n-1} + b$ luidt de directe oplossingsformule als volgt:

$$X_n = \frac{b}{1-a} + a^n \cdot \left(X_0 - \frac{b}{1-a}\right)$$

Z.O.Z.!!!!

Opgave 2

Omdat scholen tegenwoordig geld krijgen van de overheid op basis van het aantal leerlingen dat de school heeft, proberen middelbare scholen steeds meer campagne te voeren, zodat er ieder jaar weer voldoende leerlingen op de school zullen zitten.
In Monnickendam zijn twee middelbare scholen, die elkaar om bovengenoemde reden flink beconcurreren. Het komt nogal eens voor dat een leerling na de MAVO doorgaat op de HAVO van de andere school, en zo ook van HAVO naar VWO. Het is zelfs al zover gekomen dat de scholen halverwege het schooljaar leerlingen met aantrekkelijke welkomstgeschenken bij elkaar proberen weg te lokken.
Het Klooster College had op 1 augustus 1996 1250 leerlingen, maar onderzoek heeft uitgewezen dat ze jaarlijks 20 % van de leerlingen kwijt raken aan het Abdij Lyceum. Die school heeft op 1 augustus 1996 850 leerlingen en raakt jaarlijks 15 % van de leerlingen kwijt aan het Klooster College.
Je mag in deze opgave aannemen dat het aantal middelbare scholieren al jaren hetzelfde is en dat dat de komende jaren ook nog zo zal blijven.

a. Je kunt de hiervoor beschreven situatie weergeven met een stelsel differentie vergelijkingen:

$$K_t = a \cdot K_{t-1} + b \cdot A_{t-1} \qquad en \qquad A_t = c \cdot K_{t-1} + d \cdot A_{t-1}$$

Hierin is K_t het aantal leerlingen op tijdstip t van het Klooster College en A_t het aantal leerlingen op tijdstip t van het Abdij Lyceum. Bepaal a, b, c en d.
b. Bereken met behulp van die differentievergelijkingen de aantallen leerlingen van beide scholen op 1 augustus 1997.
c. Bereken met behulp van die differentievergelijkingen de aantallen leerlingen van beide scholen op 1 augustus 1995. (Je mag ervan uitgaan dat de beschreven situatie ook van toepassing was op de jaren voor 1996.)
d. Geef het stelsel vergelijkingen (K = ... en A = ...) zoals dat in de evenwichtssituatie geldt en bepaal hiermee de aantallen in de evenwichtssituatie.
e. Controleer je uitkomst van onderdeel d door de beschreven situatie met matrices weer te geven en vervolgens de situatie na 50 jaar uit te rekenen.

Door een nieuwe snelbus verbinding met Volendam wijzigt de situatie, doordat de SZN (School Zonder Naam) uit Volendam nu ook een concurrent wordt. De SZN trekt jaarlijks 10 % van de leerlingen van het Klooster College en 5 % van de leerlingen van het Abdij Lyceum. De SZN raakt alleen leerlingen kwijt aan het Abdij College: 8 %. De percentages tussen het Klooster College en het Abdij Lyceum blijven ongewijzigd. Op het moment dat de busverbinding tot stand komt heeft de SZN 1000 leerlingen.

f. Stel drie nieuwe differentievergelijkingen op voor de gewijzigde situatie.
g. Geef de overgang van leerlingen tussen de drie scholen ook weer in een matrix.
h. Bereken het nieuwe evenwicht dat op den duur tussen de drie scholen zal ontstaan.

HET PROEFWERK GAAT VERDER OP DE VOLGENDE BLADZIJDE!!!

Opgave 3
In een meertje in Gelderland leven onder andere snoeken (roofvis) en voorns (prooivis). De wijzigingen in de aantallen vissen per periode van een jaar zijn als volgt:

$$\Delta V=(0{,}07-0{,}001\cdot S_{t-1})\cdot V_{t-1}$$
$$\Delta S=(-0{,}04+0{,}0002\cdot V_{t-1})\cdot S_{t-1}$$

Hierin is V het aantal voorns en S het aantal snoeken.
Op het tijdstip $t=0$ is $V=100$ en $S=100$.
a. Bereken het aantal voorns op $t=2$.
b. Bereken de aantallen snoeken en voorns in de evenwichtsituatie.
c. Laat door middel van een berekening zien dat in de evenwichtsituatie het aantal voorns en snoeken niet meer verandert.

Opgave 4
Gegeven is het volgende model:

$$Q_t^a=0{,}6P_{t-1}-20$$
$$Q_t^v=100-c\cdot P_t$$
$$Q_t^a=Q_t^v$$
$$P_0=5$$

a. Stel bij dit model een differentievergelijking op voor P_t als $c=0{,}8$.
b. Teken een grafiek bij de prijsontwikkeling in de tijd voor het geval dat $c=0{,}8$. Indien je hiervoor je TI gebruikt, neem dan de tekening over op papier. Vergeet niet de schaalverdeling bij de assen aan te geven.
c. *Bereken* de evenwichtsprijs.

Als $c=0{,}6$ dan ontstaat er een bijzondere situatie.

d. Onderzoek waarom $c=0{,}6$ zo'n bijzondere situatie is. Teken bij je uitleg in ieder geval ook een grafiek.

EINDE

So Discreet Dynamische Modellen V5 WA 14-2-1997

Licht al je antwoorden voldoende toe!

1) Leo heeft een prijs van ƒ100.000,- gewonnen in de loterij. Hij zet het geld op de bank. Op het eind van ieder jaar krijgt hij 8% rente en haalt hij ƒ10.000,- van zijn rekening.

a) Hoeveel geld staat er op zijn rekening na afloop van het derde jaar.

b) Stel een recurrente betrekking op bij dit verhaal.

c) Na hoeveel jaar is het geld van Leo op.
En wat is het laatste bedrag dat Leo kan opnemen (rood staan mag niet).

Niels heeft ook een prijs gewonnen in de loterij. Hij zet net als Leo zijn geld op de bank. Ook Niels krijgt 8% rente en na ieder jaar haalt hij ook ƒ10.000,- van zijn rekening.
Bij Niels blijft het saldo echter van jaar op jaar even groot.

d) Bereken hoe hoog de prijs van Niels moet zijn geweest.

2) Een viskweker begint op een zekere dag met een nieuwe visvijver met daarin 160 vissen. Hij weet dat de eerste vier jaar de populatie bij benadering exponentieel groeit zodat er na die tijd 684 vissen leven in de vijver.

a) Stel een model op voor de groei gedurende de eerste 4 jaar

Op een gegeven moment zal de groei afnemen omdat de vijver maar beperkte afmetingen heeft. De maximale capaciteit van de vijver is 4000 vissen.

b) Stel met behulp van deze informatie een verbeterd model op voor de groei van de vispopulatie.

3) Gegeven is het volgende model:

$Q^a_t = 0.6P_{t-1} - 20$

$Q^v_t = 100 - cP_t$

$Q^a_t = Q^v_t$

$P_0 = 5$

a) Stel bij dit model een differentievergelijking op voor P_t als $c = 0{,}8$

b) Teken ook een grafiek van de prijsontwikkeling in de tijd en bereken de evenwichtsprijs.

Als $c = 0{,}6$ dan ontstaat er een bijzondere situatie

c) Laat de tijdindices weg en teken de grafieken van Q^a en Q in één figuur met P of de horizontale en Q op de verticale as

d) Wat is het bijzondere aan dit model en leg uit waarom deze situatie juist bij dit model optreedt

VWO-5 Discrete Dynamische Modellen 14 feb 1997

Opgave 1 Recursieve betrekking

U_t is het gemiddelde aantal uitleningen per boek van een

bibliotheek per jaar in het jaar t.
Men kan aantonen dat steeds bij benadering geldt
$U_{t+1} = 0{,}2 + 0{,}3U_t$

Op den duur zullen de percentages boeken die worden uitgeleend, hetzelfde blijven.

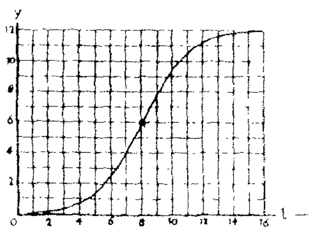
1. Bereken hoe groot het gemiddeld aantal uitleningen per boek per jaar op den duur zal zijn.

Examen VWO-1997

Opgave 2 Logistische groei

Hieronder is een tijd-lengte-grafiek van een denneboom getekend. Hierbij is t de ouderdom in jaren en y de lengte in meters.
Enkele punten van de grafiek zijn in de tabel weergegeven.

t	y
3	0,36
4	0,71
7	4
8	6
9	8
12	11,3



2. Probeer een zo goed mogelijk wiskundig model op te stellen bij dit groeiproces. Geef duidelijk aan wat je gedaan hebt.

Opgave 3 Dynamisch model

Bekijk onderstaand model

$Q^v_t = -3P_t + 180$

$Q^a_t = P_{t-1} - 80$

$Q^a_t = Q^v_t$

$P_0 = 20$

3. Druk P_t uit in Q^v_t
4. Geef een differentievergelijking van de prijs en teken een grafiek van de prijsontwikkelingin de tijd op het interval [0, 10].
5. Geef de evenwichtsprijs.

ANTWOORDEN OPDRACHTENBUNDEL DDM

1 2970 zitplaatsen ; rij 13

2a $3n+1$

b $1+\frac{n(n+1)}{2}$

c $n!$

3 a nee

b als de bij naar 5 loopt, moet ze òf via 4, òf via 3.
Ze kan maar op één manier van 3 naar 5 of van 4 naar 5 lopen.

c aantal routes naar n = (aantal routes naar n-1) + (aantal routes naar n-2)

aantal routes van S naar F = aantal routes naar 9 = 55.

4 a $F(2)=1$, $F(3)=2$, $F(4)=3$, $F(5)=5$, $F(6)=8$.

b 256

d het laatste symbool is een 0: elk goed rijtje van 4 mag hiervóór
het laatste symbool is een 1: het vierde symbool <u>moet</u> 0 zijn
elk goed rijtje van 3 mag daarvóór.

Dus $a(5)=a(4)+a(3)$.

e 89 rijtjes

f 13 bits

5 b de n-de lijn deelt precies n hokjes in tweeën; er komen dus n hokjes bij: $U(n)=n+U(n-1)$. Er zijn 10 lijnen nodig.

6 a $k=1$: 1 buis, $k=2$: 7 buizen, $k=3$: 19 buizen

b 37 buizen

c $U(n)=U(n-1)+6(n-1)$

e $U(n)=U(1)+6(1+2+3+\ldots+n-1)$

$= 1+3n(n-1)$

7 a 3810 gulden

b $2800\cdot(1{,}045)^7 = 2800\cdot 1{,}36086183 = f\ 3810{,}41$
(zie tabel) (mag met rekenmachine)

8 a 14284 gulden

b $2000 \cdot \sum_{n=1}^{6} (1,05)^n = 2000 \cdot 7,14200845$

10 a $U(t) = U(t-1) \cdot (1,03 + (t-1) \cdot 0,005)$

c klimrekening

d 5,2 %

11 b f 783,53

12 contante waarde = 1.331.575 gulden

13 a ongeveer 15300

b ja

c na 5 jaar zijn er 51035 zeehonden; de populatie neemt dus nog steeds toe

d 17626

14 b $(\text{groeifactor})^{10} = 1,35 \Rightarrow \text{groeifactor} = 1,03$; $g = 0,03$

c $g = 0,03$; $K = 250.000$

d de voorspellingen voor 1980 en 1990 zijn te laag

15 b $g = 0,5$; $K = 64,5$

16 positief, voorafgaand ; negatief, huidig

17 a 480.000 zakken

b $S(n+1) = D(n+1) = -1,2\, P(n+1) + 20 = 4,8$

$P(n+1) = 12,7$

e de prijs gaat (alternerend) naar de evenwichtswaarde toe

f $P(n) = 16,7 - 0,7\, P(n-1)$

g $P(n) = 9,82 + (-0,7)^n\, (P(0) - 9,82)$

18 a 40

b $D_t = 110 - 0,5\, P_t$

c $P_2 =$ fl. 115

d $D_2 = 53$

e $P_{t+1} - P_t = 0,5\,(110 - 0,5\, P_t - (110 - 0,5\, P_{t-1})) = 0,75\, P_t + 0,25\, P_{t-1}$

f $P_3 =$ fl 116,25 ; $P_4 =$ fl. 115,49 ; $P_5 =$ fl. 116,02

g 0,75 en 0,25

h $P_{t+1} = 0,7\, P_t + 0,3\, P_{t-1}$

19 a $y_1 = 226$; $y_2 = 246,8$

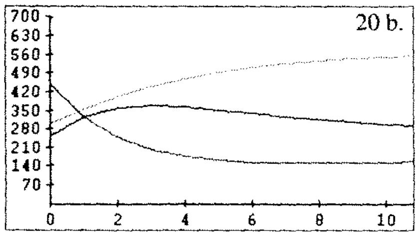
b $y_t = 0,8\, y_{t-1} + 66 \Rightarrow y_t = \frac{66}{1-0,8} + 0,8^t \left(y_0 - \frac{66}{1-0,8}\right)$

19 d De rij beweegt zich naar het evenwicht toe.

20 b De gegevens uit het diagram kunnen gemodelleerd worden m.b.v. een overgangsmatrix:

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \quad \text{VAN} \\ & \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}65 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}9 & 0{,}15 \\ 0{,}25 & 0 & 0{,}85 \end{pmatrix} \end{array}$$

NAAR ,



dus

$$\begin{pmatrix} A_t \\ B_t \\ C_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} .. & .. & .. \\ .. & .. & .. \\ .. & .. & .. \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{t-1} \\ B_{t-1} \\ C_{t-1} \end{pmatrix},$$

of m.b.v. het stelsel betrekkingen:

$$A_t = 0{,}65\, A_{t-1} + 0{,}1\, B_{t-1}$$

$$B_t = 0{,}1\, A_{t-1} + 0{,}9\, B_{t-1} + 0{,}15\, C_{t-1}$$

$$C_t = 0{,}25\, A_{t-1} + 0{,}85\, C_{t-1}.$$

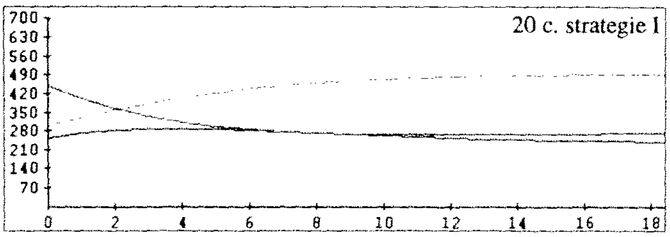
Dit stelsel kan doorgerekend worden in een spreadsheet programma of op de TI-83.

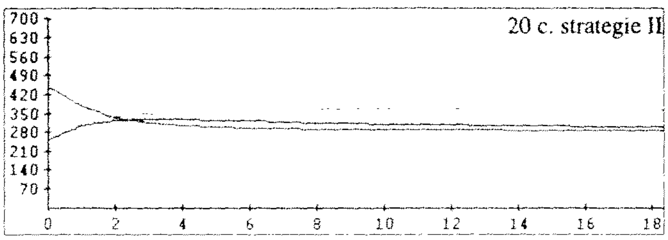
A_t wordt steeds kleiner naarmate t groter wordt, je ziet dus dat het marktaandeel van A daalt

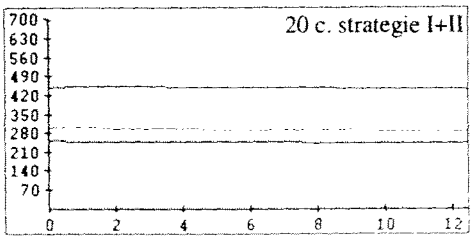
c Strategie 1: het marktaandeel van A daalt

Strategie 2: het marktaandeel van A daalt

combinatie van beide strategieën: het marktaandeel van A "stijgt".







21 je vindt de volgende betrekkingen:

$VR_{1jr}(t) = 0{,}42\ VR_{volw}(t-1)$

$VR_{2jr}(t) = 0{,}5\ VR_{1jr}(t-1)$

$VR_{volw}(t) = 0{,}6\ VR_{2jr}(t-1) + 0{,}9\ VR_{volw}(t-1)$

doorrekenen geeft: je kunt jaarlijks 218 vrouwtjes afschieten.

22 a 1992

b de voorspelde waarden komen goed overeen met de werkelijkheid

23 b zieken, mensen die aangestoken kunnen worden en mensen die immuun zijn. Zieken kunnen mensen uit de tweede groep aansteken; zieken die genezen worden immuun.

24 a $a\,G(t)Z(t)$ is het aantal mensen dat tussen tijdstip t en $t+1$ wordt. (Het is duidelijk dat dit aantal zowel van het aantal zieken ("aanstekers") als van het aantal nog te besmetten wezens afhangt.). Deze mensen gaan dus van groep G naar groep Z. Dus $\Delta G = G(t+1) - G(t) = -a\,G(t)Z(t)$.

b ja

25 a in een tijdsinterval geneest 20 % van de zieken

c de grafiek van $Z(t)$ vertoont hetzelfde verloop

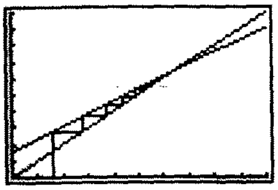
d als $b = 0{,}2$ en a wordt groter, verschuift de piek van $Z(t)$ wat naar boven en naar links. a mag niet te groot worden; bij $a = 0{,}004$ ontstaan al te grote (groter dan 1000) en te kleine (kleiner dan 0) voor G en Z.

als $a = 0{,}001$ en b wordt groter verschuift de piek van $Z(t)$ niet, maar $Z(t)$ daalt sneller (mensen genezen sneller). Als b kleiner wordt daalt $Z(t)$ langzamer.

26 a $p_n = a$

b $p_n = \frac{a}{a+b} - (1-a-b)^n \left(p_0 - \frac{a}{a+b}\right)$. Omdat $0 < 1-a-b < 1$ treedt monotone convergentie op: p_n convergeert naar $\frac{a}{a+b}$. Dit is het grootst als $b = 0$, dus als er niet gestraft wordt.

27 a Als $U(t)$ de dosis is op tijdstip t (t in 4 uren)
dan geldt : $U(t) = 0{,}75\, U(t-1) + 16$; $U(0) = 16$.
voor de tijdstippen t waarop de siroop ingenomen wordt.

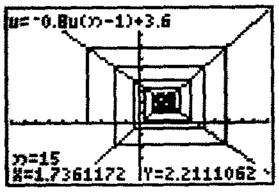


Daaruit volgt : $U(t) = 64 - 48 \cdot 0{,}75^t$.

Na verloop van tijd zal de dosis op deze tijdstippen 64 ml zijn. Iedere vier uur neemt de dosis af tot 48 ml, op dat moment wordt weer 16 ml ingenomen.

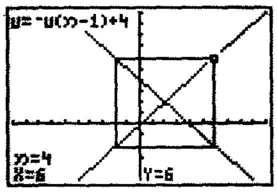
b $U(t) = 0{,}5\, U(t-1) + 32$, t in 8 uren.
Op momenten van inname wordt de dosis weer 64 ml, maar na 8 uur is de dosis nog slechts 32 ml. Dit lijkt dus niet zo verstandig te zijn.

28 a



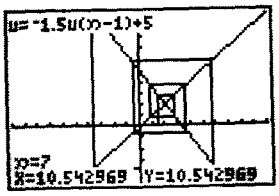
$U(n)$ convergeert naar het evenwichtspunt

b



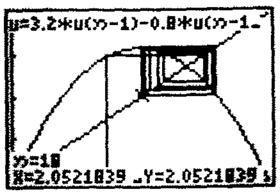
$U(n)$ alterneert.

c



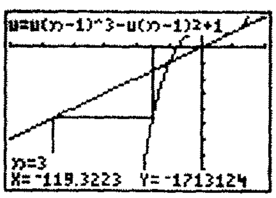
$U(n)$ divergeert

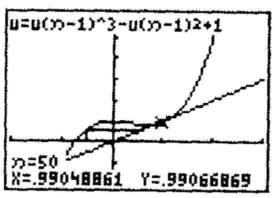
29

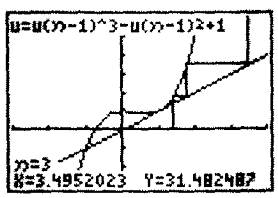


Voor $A(0) < 0$ en $A(0) > 4$ divergeert $A(n)$.
Voor $0 < A(0) < 4$ lijkt $A(n)$ rond het rechter evenwichtspunt te gaan alterneren, maar dat is niet zo. Het is onduidelijk wat daar gebeurt.

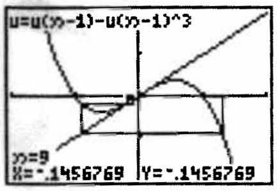
30 Het systeem heeft twee evenwichtswaarden : $(-1,-1)$ en $(1,1)$.
$(-1,-1)$ is instabiel , $(1,1)$ semistabiel.



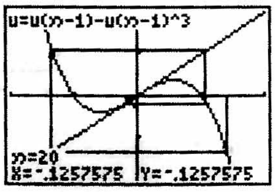




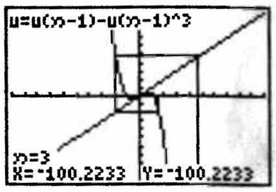
31 De evenwichtswaarde is stabiel. Het is mogelijk aan te tonen:
dat als $A(0) < -\sqrt{2}$ of $A(0) > \sqrt{2}$, $A(n)$ divergeert.
Als $-\sqrt{2} < A(0) < \sqrt{2}$, convergeert $A(n)$ naar de evenwichtswaarde.



$A(0) < \sqrt{2}$



$A(0) < \sqrt{2}$



$A(0) > \sqrt{2}$