

De grens van de provincie Utrecht

De dimensie van een kronkelige lijn

DEEL 0 – dimensie 1

Opdracht

Meet het lijnstuk hieronder met elk strookje en noteer steeds in de tabel de lengte in het aantal hele strookjes.

NB. Meet het lijnstuk echt, je mag alleen hele strookjes gebruiken.

| Naam van het strookje | Aantal hele strookjes |
|-----------------------|-----------------------|
| 8 eenheden | |
| 4 eenheden | |
| 2 eenheden | |
| 1 eenheid | |
| 1/2 eenheden | |
| 1/4 eenheden | |
| 1/8 eenheden | |

Vraag 1a. Wat valt je op?

Vraag 1b. Wat is de lengte van het lijnstuk?

Vraag 1c: Laat zien aan de hand van je metingen dat de lengte van het lijnstuk niet afhangt van de meeteenheid.

We zeggen: **de dimensie van een lijnstuk is 1**. Dat betekent:

- Als je het lijnstuk met factor 2 vergroot, dan krijg je een lijnstuk waar het oorspronkelijke lijnstuk 2^1 keer in past.
- Als je het lijnstuk met factor 3 vergroot dan krijg je een lijnstuk waar het oorspronkelijke lijnstuk 3^1 keer in past.
- Etc.

Vraag 2: Laat met een paar voorbeelden uit de tabel zien dat jouw lijnstuk **dimensie 1** heeft.

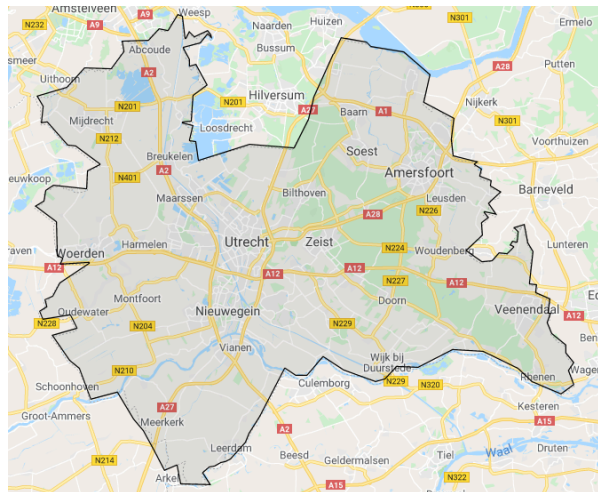
Tot zover niks nieuws.

Voor kronkelige lijnstukken is er echter wat anders aan de hand. Daar kan namelijk de lengte van het lijnstuk wel afhangen van de maateenheid en dat heeft gevolgen voor de dimensie.

DEEL 1 – De grens van de provincie Utrecht gemeten

Kijk eens goed naar de provinciegrens van Utrecht. Dat is een kronkelige lijn. Je ziet een patroon van inhammen en uitstulpingen.

Als je inzoomt op die grens zie je steeds meer details en kun je de lengte van de grens steeds preciezer meten. Het lijkt dan alsof de omtrek (de provinciegrens) steeds groter wordt. Hoe zit dat eigenlijk?



Opdracht - Meten

Meet de omtrek van de provincie Utrecht op de grote kaart met de verschillende meetstrookjes. Begin met de langste strookjes (van 40 km).

- Leg de strookjes van dezelfde lengte steeds zo goed mogelijk langs de grens van de provincie.
- Je mag de strookjes niet buigen of vouwen.
- Tel het aantal hele strookjes en bereken de lengte in km.

$$\text{Lengte} = \text{aantal} \times \text{meeteenheid}$$

- Vul de tabel in **op het werkblad**.

| Meeteenheid strook | Aantal | Lengte |
|--------------------|--------|--------|
| strook 40 km | | |
| strook 30 km | | |
| strook 20 km | | |
| strook 10 km | | |
| strook 5 km | | |

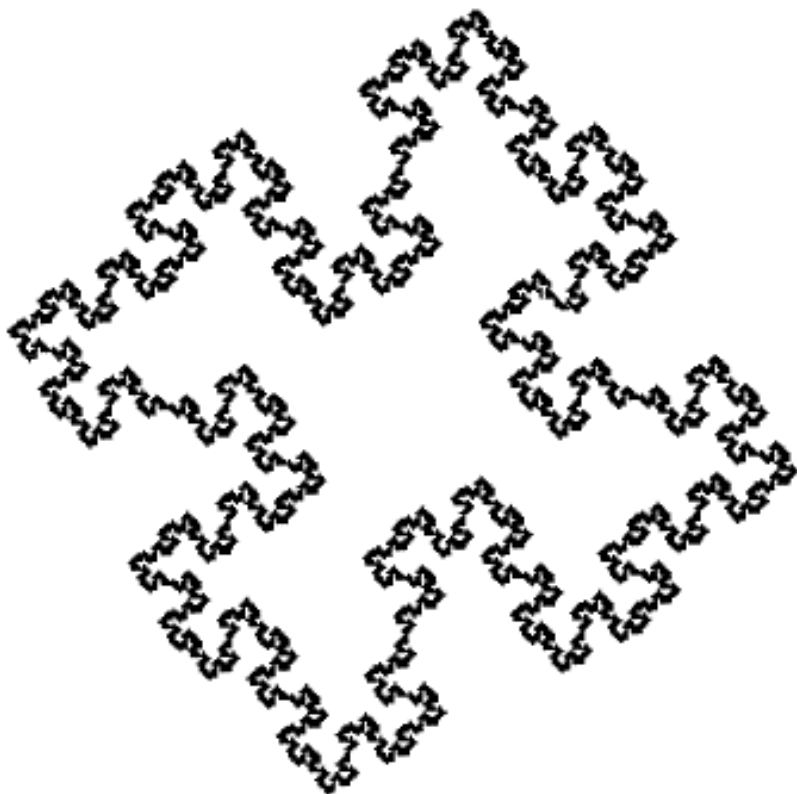
Vraag 3a: Wat valt je op?

Vraag 3b: Laat met een paar voorbeelden uit de tabel zien of de grenslijn van Utrecht **dimensie 1** heeft.

Vraag 4: Zoek uit wat de verhouding is tussen de gemeten lengte en de factor waarmee je de strook verkleint.

DEEL 2 – een fractal gemeten

Je ziet hier een fractal, dat is een wiskundige structuur waarvan het patroon zich blijft herhalen als je inzoomt. De grens van Utrecht lijkt dus wel een beetje op zo'n fractal.



Je kunt ook van deze fractal de lengte meten met een steeds kleiner strookje. Gebruik de strookjes van opdracht 0 om de lengte te meten en vul de resultaten weer in de tabel in.

| Naam van het strookje | Aantal hele strookjes | Lengte in 'eenheden |
|-----------------------|-----------------------|---------------------|
| 8 eenheden | | |
| 4 eenheden | | |
| 2 eenheden | | |
| 1 eenheid | | |

| | | |
|--------------|--|--|
| 1/2 eenheden | | |
| 1/4 eenheden | | |
| 1/8 eenheden | | |

Vraag 5a: Wat valt je op?

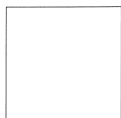
Vraag 5b: Laat met een paar voorbeelden uit de tabel zien of de fractal **dimensie 1** heeft.

Vraag 6: Zoek uit wat de verhouding is tussen de gemeten lengte en de factor waarmee je de strook verkleint.

Vraag 7: Vergelijk de factor met die van grenslijn van de provincie Utrecht.

DEEL 3 – Meer over de fractal – gebroken dimensies

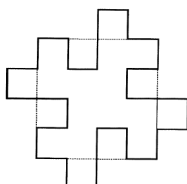
Deze fractal is op een speciale manier gemaakt. De vorm is bedacht door de Italiaanse wiskundige Peano. Je begint met een vierkant:



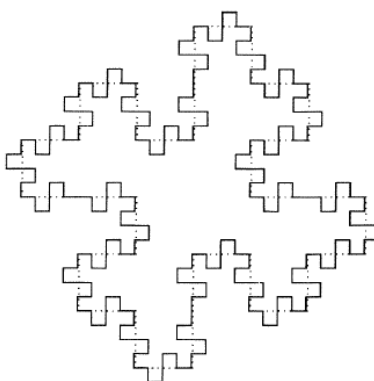
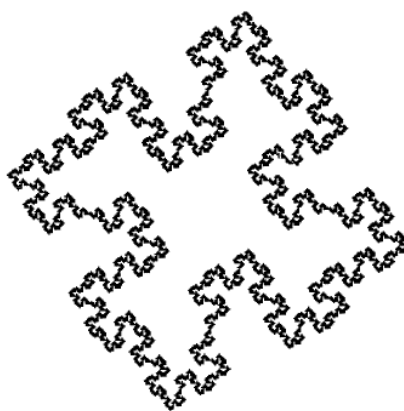
Daarin vervang je elk van de vier zijden door een lijn van de volgende vorm. De lijnstukjes hieronder zijn 4 keer zo kort als de zijde van het vierkant.




Je krijgt dan:



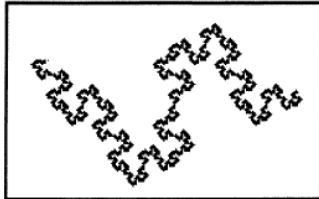
Voor de duidelijkheid is het oude vierkant er nog ingetekend.



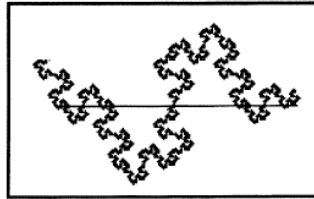
In de nieuwe figuur vervang je weer alle rechte lijnstukjes door lijnstukjes van de vorm: 

Deze lijnstukjes zijn weer vier keer zo klein. Je krijgt de figuur hier rechts. Zo kun je oneindig doorgaan

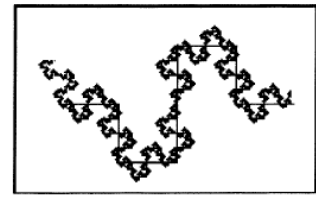
We kunnen nu de lengte (omtrek) van de fractal ook meten met meetstrookjes die die steeds 4 keer zo klein worden. Zo kun je steeds preciezer meten,



Een stuk van de fractal



Gemeten met een 'groeve' maat



En vervolgens met een kleinere maat (8 keer zo klein).

De benadering van de lengte wordt bij een kleinere meeteenheid (een kleiner meetstrookje) al een stuk beter. Hier zie je de tabel die past bij deze fractal.

| Strookje (eenheden) | Aantal strookjes | Lengte in eenheden (maat) | $\frac{1}{\text{meeteenheid}}$ |
|---------------------|------------------|---------------------------|--------------------------------|
| 1 | 1 | | 1 |
| $\frac{1}{4}$ | 8 | | 4 |
| $\frac{1}{16}$ | 64 | | 16 |
| $\frac{1}{64}$ | 512 | | 64 |
| $\frac{1}{256}$ | 4096 | | 256 |
| | | | |

Nu gaan we onderzoeken hoe het zit met de relatie tussen de lengte en de meeteenheid bij deze fractal.

Vraag 8: Zoek uit wat de verhouding is tussen de gemeten lengte en de factor waarmee je de strook verkleint.

Vraag 8: Vergelijk de factor met die van grenslijn van de provincie Utrecht en van de factor bij vraag 6.

Vraag 9: Heeft deze fractal dimensie 1? Dat betekent: geldt de regel:
 $Lengte = aantal \times (meeteenheid)^1$

Meer algemeen kun je zeggen:

Of meer algemeen: $maat = aantal \times (meeteenheid)^{dimensie}$

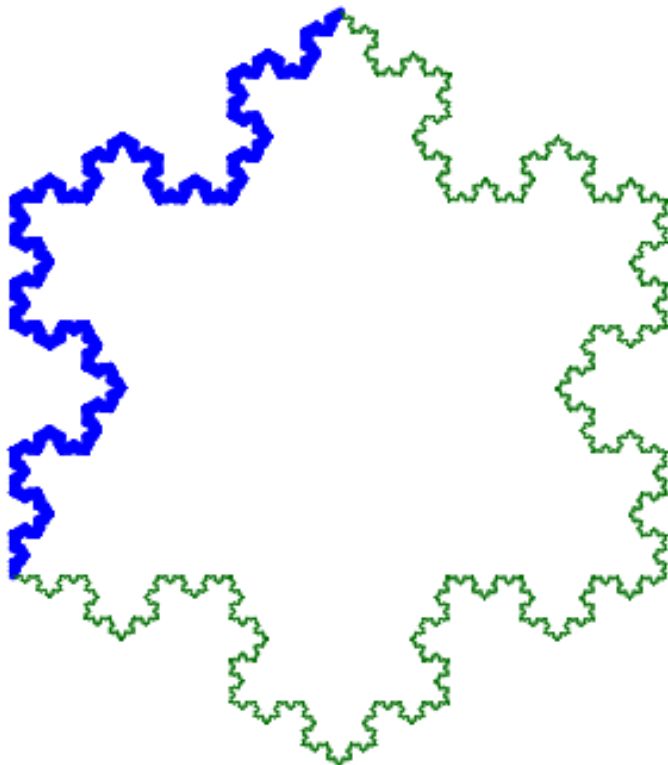
Anders geschreven: $aantal = maat / (meeteenheid)^{dimensie}$

Vraag 10: Gebruik deze regel en de tabel hierboven om de dimensie van de lengte van de fractal te vinden.

Vraag 11: Vind op dezelfde manier als bij vraag 10 nu ook de dimensie van de grenslijn van Utrecht.

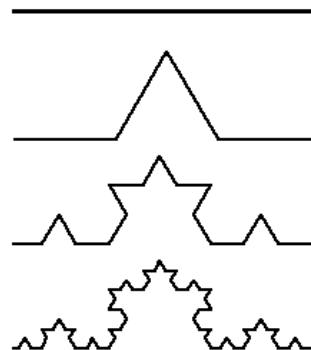
Deel 4 – extra – nog meer fractals en gebroken dimensies

Onderzoek de dimensie van het blauwe lijnstuk in fractal hieronder die de sneeuwvlok van Koch heet.



Je maakt dat lijnstuk zo:

- Verdeel een lijnstuk met lengte 1 in 3 gelijke delen.
- Teken op het middelste deel een gelijkzijdige driehoek. Laat het middelste deel weg.
- Herhaal nu de verdeling voor elk lijnstukje van de nieuwe figuur
- En zo verder



Tip: Gebruik voor het meten (afpassen) van de lengte van het blauwe lijnstuk steeds een strookje dat 3 keer zo klein is als het vorige. Je hoeft nu waarschijnlijk niet echt te meten, maar je kunt ‘handig tellen’.

Gebruik ook weer een tabel om je resultaten in te vullen

| Strookje Meeteenheid | Aantal strookjes | Lengte in eenheden (maat) |
|-------------------------|------------------|---------------------------------|
| 1 | | |
| $\frac{1}{3}$ | | |
| $\frac{1}{9}$ | | |
| $\frac{1}{27}$ | | |
| $\frac{1}{81}$ | | |
| $\frac{1}{243}$ | | |

Gebruik ook weer de regel over dimensies

$$maat = aantal \times (meeteenheid)^{dimensie}$$

Anders geschreven:

$$aantal = maat / (meeteenheid)^{dimensie}$$