december 1990

experimentele versie

W 12 16

Trappers

Docentenhandleiding

Publikatie van het team W12-16
onder verantwoordelijkheid van de
Commissie Ontwikkeling Wiskundeonderwijs

Ontwerp: Juul ten Hove

Deze publikatie is te bestellen bij
Instituut voor Leerplanontwikkeling (SLO), Enschede (053-840840)
onder vermelding van AN-nummer 3.315.6442

Docentenhandleiding Trappers.

Inhoudsopgave

Inleiding

Het pakket Trappers heeft een lange geschiedenis achter de rug. Bijna twee jaar geleden stonden de eerste zinnen van het pakket Trappers geciteerd in Kolom W12-16, een actualiteitenrubriek van het project W12-16 van het blad Euclides. In het begin waren de ideeën over een nieuw algebraprogrammma onvoldoende uitgekristalliseerd, zodat ik volop de gelegenheid had om met de fiets naar alle kanten uit te waaieren. Gedurende zijn ontwikkeling heeft het pakket dan ook vele veranderingen ondergaan. Daarbij heb ik talloze keuzes gemaakt. Om het pakket een plaats te geven in het algebraprogramma, zijn belangrijke keuzes beschreven in een verslag van de ontwikkeling van Trappers, dat is opgenomen in bijlage 1 (Achtergronden).

Een andere manier om keuzes te verhelderen is te vertellen wat niet in Trappers zit. Enkele werkbladen over de overbrengingsverhoudingen in de fiets zijn te vinden in bijlage 2 (Uit de versie van november 1990). Misschien brengen ze u op ideeën, om de fiets in een later stadium nog eens terug te laten komen. Met die bedoeling is ook een artikel over fietsen geplaatst in bijlage 3 (Wiskunde op de fiets, hoe vind je zoiets?) en enkele werkbladen uit een Amerikaans tijdschrift in bijlage 4 (Bicycling at home).

Kern van de handleiding is de wandeling door het pakket. Bij elke opdracht sta ik even stil om iets te vertellen over de bedoeling ervan en over hoe ik leerlingen ermee heb zien werken.

Soms is het prettig om iets tussendoor te doen of om een opdracht in te leiden. Een transparant op de overheadprojector kan vaak snel een situatie of bedoeling duidelijk maken. Na de wandeling zijn enkele bladzijden afgedrukt, die als transparant kunnen worden gecopiëerd.

De lijst van kernopdrachten is een derde troef in de verheldering van de bedoelingen. Met die lijst kun je als docent een korte weg creeëren door het pakket. Ik heb dat niet zelf gedaan omdat een verkorting afhankelijk is van de inbreng van de leerlingen, het gebeuren in de klas, en wat er in de andere (wiskunde-)lessen al is gedaan.

1 Telkens als je met je trappers rond gaat, kom je een stukje verder.
 a Kom je bij elke ronde steeds evenveel verder?
 b Maakt het dan uit of je veel of weinig wind tegen hebt?
 c En hoe zit het met de stand van je zadel, verandert de afstand als je het zadel omhoog doet?
 d En scheelt het als je aan het stuur trekt?
 e Dat stukje is niet bij iedereen even ver. Hoe kan dat?

2 De fietsen op de bladzijde hiernaast zijn in de loop van de jaren op straat verschenen. Zoek zeven verschillen tussen die fietsen.

3 Per trapperronde kom je met de ene fiets verder dan met de andere fiets. Bij sommige fietsen kun je zelfs al rijdend die afstand veranderen. Welke onderdelen van de fiets hebben te maken met die afstand? Zet daar een kruisje bij.

Experiment:
wat is het verband tussen het aantal keren dat de trappers rond gaan en de afstand die de fiets dan aflegt?

A **DOEN:** ....
METEN: **Hoe ver kom je bij één trapperronde?** ....

B **DOEN:** **Markeer op het plein twee punten, die ver uit elkaar liggen.**
METEN: **Hoe groot is de afstand tussen die punten?** .....
Hoeveel keer gaan je trappers rond bij die afstand? ....

4 a De beschrijving van de eerste meting is niet af. Bedenk zelf een manier om te meten hoeveel meter een fiets aflegt, als de trappers één keer rond draaien.
Zet jouw manier in de beschrijving van het experiment.

Een wandeling door het pakket

1 Trappers

Over de context

Heb je wel eens tegen de wind in gefietst . . . . . ? Spelen met het ritme van de trappers doen de meeste leerlingen niet, maar het is wel voorstelbaar. Dat geldt voor veel activiteiten met de fiets in dit pakket. Leerlingen tellen geen trapperrondes en ze hebben meestal ook niet eerder nagedacht over hoe de fiets vooruit komt. Dat je inderdaad bij iedere trapperronde even ver komt, is niet voor alle leerlingen vanzelfsprekend. Een gesprek daarover, het kijken naar plaatjes van verschillende fietsen, het meten aan de fietsen en reflecteren op de wijze waarop gemeten is, zijn noodzakelijke activiteiten om echt bekend te worden met de context. Maar als dat is gebeurd, dan wordt het evenredig verband, tussen het aantal trapperrondes en de afstand, levend voor de leerlingen. Ze ervaren hoe het is om in een hogere versnelling te fietsen, ze voelen het als het ware in de benen.

De opdrachten

1 Dit zijn enkele vragen, die ter oriëntering gesteld kunnen worden. Dat kan goed in een klassegesprek, waarin dan ook andere vragen naar boven kunnen komen.

2 De meest opvallende verschillen tussen fietsen zitten niet in het te onderzoeken verband. Als contrast, en dus ter verheldering van waar het wel over zal gaan, zijn leerlingen even bezig met die andere, opmerkelijke verschillen.

3 Even richten op die onderdelen van de fiets, die te maken hebben met het verband in kwestie.

4 Door deze opdracht, en een bespreking ervan, gaan leerlingen goed voorbereid meten. Dat is belangrijk omdat het meten anders te veel tijd kost en wellicht te chaotisch verloopt. En juist bij een dergelijke afwijkende werkvorm is het nodig dat leerlingen goed weten wat ze te doen hebben en waarvoor ze dat doen.

5 De resultaten van de eerste meting (A) kun je vergelijken met de uitkomst van de tweede meting (B).

a Hoe kun je dat doen?

b Kloppen de resultaten van jouw metingen met elkaar?

c Welke meting is volgens jou het meest nauwkeurig? Waarom denk je dat?

d Vertel kort wat het verband is tussen het aantal keren dat de trappers rond gaan en de afstand die je rijdt op de fiets, die jij gemeten hebt.

6 Verzamel de uitkomsten van de klas. Op de volgende bladzijde staat een schema, waar je de gegevens in kunt zetten..

Overzicht van de metingen

fiets nummer	A afstand bij 1 trapperronde	B gemeten afstand	aantal trapperrondes	formule	machientje
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7 (Jaap)					

5 Bij het meten kun je de trapperronde als uitgangspunt nemen, of de afstand. Door de gekozen vraagstelling gaan de leerlingen uit van trapperrondes. Ze meten de afstand bij één trapperronde, of bij vijf trapperrondes, ze meten het aantal keren dat een wiel rond draait bij één trapperronde, maar allemaal gaan ze uit van de trapperrondes. Om direct de andere kant in te brengen is meting B ingevoerd. Niet alle leerlingen zijn meteen ongerust als de metingen niet blijken te kloppen. Blijkbaar moet de gelijkwaardigheid van de uitkomsten nog even door dringen. In het vervolg komt dit aspect weer aan bod, dus het hoeft niet meteen uitgekauwd te worden.

6 De uitkomsten verschillen sterk, de metingen variëren doorgaans tussen 3,5 en 5,2 meter. Het overzicht, dat ontstaat bij het invullen van het schema, kan aanleiding geven tot een gesprek over zwaar- en licht trappende fietsen.

Belangrijk is dat misconcepten uit de weg worden geruimd, voordat leerlingen beginnen met hoofdstuk 2. Zo was er bijvoorbeeld een leerling, die in de veronderstelling leefde dat de afstand, die je fietst per trapperronde, afhankelijk is van de lengte van de fiets. Pas tijdens de bespreking van de experimenten kwam dat naar voren. Daarom is het ook belangrijk dat leerlingen eerst zelf nadenken over hoe ze het best kunnen meten en dat de ideeën besproken worden voordat ze de metingen gaan uitvoeren.

1 a Hoeveel meter legt Jaap af per trapperronde?

b Hij fietst 18 trapperrondes. Hoeveel meter is hij verder gekomen?

2 Jaap heeft met zijn fiets gemeten. Hij wil berekenen wat de maten zijn in meters. Jij helpt hem met het maken van een tabel. Een deel van de tabel staat hiernaast.

a Welke titels zet je boven de kolommen? Schrijf ze er maar bij.

b Vul ook de laatste kolom in (je mag afronden op één cijfer achter de komma).

c Schrijf kort op hoe je aan de getallen bent gekomen.

2 Resultaten bekeken

Verschillende representaties

In het voorgaande is veel gepraat over wat er allemaal aan de hand is met het onderzochte verband. In dit hoofdstuk wordt dat vertaald naar wiskundige hulpmiddelen en representaties (tabellen, machientjes, formules, grafieken) waaraan leerlingen kunnen rekenen en redeneren. Het gaat in vogelvlucht; de tabellen en machientjes worden in het volgende hoofdstuk uitgediept, de formules en grafieken krijgen een vervolg buiten dit pakket.

De opgaven

1 In het vorige hoofdstuk hebben leerlingen zelf gemeten, in dit hoofdstuk krijgen ze de gegevens in taal, of op nog andere wijze. Deze opdracht levert geen problemen op.

2 Leerlingen hebben al vaker gewerkt met verhoudingstabellen, ook in contexten. Daarin reken je doorgaans horizontaal:

		:2	x1,5
aantal trapperrondes	2	1	1,5
afstand (meters)	7	3,5	5,25

In dit pakket ligt het accent op de vertikale berekeningen:

aantal trapperrondes	2	x3,5	1,5
afstand (meters)	7		5,25

Het gaat om het verband tussen de variabelen traptal en afstand, en leerlingen worden daarop niet gericht bij het werken met een verhoudingstabel. Zo'n tabel is dus niet geschikt om dat verband te onderzoeken en te beschrijven. De vertikale tabel en de getallen, die niet op volgorde in de tabel staan, brengen de leerlingen er wel toe om te kijken naar het verband tussen de variabelen.

Doordat de leerlingen zelf te titels verzinnen (2a), denken ze actief na over hoe de tabel in elkaar zit en wat de getallen betekenen. Dergelijk reflectieve activiteiten rond tabellen zijn belangrijk voor het leren interpreteren ervan en het zelf opstellen van tabellen vanuit gegegevens in een context.

Het kort opschrijven van een berekening (2c) bereidt voor op het maken van formules.

3 a Jaap vraagt hoeveel trapperrondes jij invult als je met jouw fiets dezelfde dingen zou hebben gemeten als hij. Zet achter de tabel nog een kolom (met titel), waarin je het aantal trapperrondes op jouw fiets invult.

b Hoe ben je nu aan de getallen gekomen?

4 Corine heeft de laatste twee kolommen van de tabel zó ingevuld:

$\xrightarrow{\ldots}$ *afstand(m)*	$\xrightarrow{:3,7}$ *traptal(Corine)*
5,3	1,4
24,5	6,6
10,5	
451,5	
63	

a Vul jij haar berekeningen aan?

b Zij heeft boven de tweede pijl de bewerking **: 3,7** gezet. Wat zou op die plaats in jouw tabel moeten staan?

c Wat zal ze boven de eerste pijl zetten?

5 Corine en Jaap fietsen naast elkaar. Wie van de twee moet het snelst trappen? Verklaar je antwoord.

6 Arjen heeft ook gemeten met zijn fiets. Helaas is zijn papier wat gescheurd.

a Wat zou er hebben gestaan?

b Hoe ben je daar achter gekomen?

7 Voor het invullen van haar tabel heeft Corine steeds dezelfde berekening gemaakt. Ze heeft die kort opgeschreven:

afstand : 3,7 = traptal

a Wat bedoelt zij met ***traptal*** ?

b Wat bedoelt zij met ***afstand*** ?

c Schrijf de berekening voor jouw fiets ook zo kort op.

3 De vermenigvuldiging en haar omkering, de deling, vormen een duo vanaf het begin. In het meten, het denken en het rekenen krijgt dat duo gestalte. Leerlingen hebben daar onder meer profijt van op het moment dat ze formules gaan omvormen (in een later stadium, dat valt buiten dit pakket).

4 Corine introduceert de pijlen. Die blijken een cruciale rol te spelen in het naar boven halen van de bewerking (delen door een getal, vermenigvuldigen met een getal), die een speciale plaats heeft in de beschrijving van een berekening in de vorm van een formule. De pijl accentueert het feit dat het er even niet toe doet welke getallen je bewerkt. De getallen in de tabel kunnen even goed andere getallen zijn, de bewerking blijft hetzelfde. Leerlingen blijken opvallend gemakkelijk die bewerkingen te kunnen vinden. Misschien komt dat doordat ze op de basisschool al veel gewerkt hebben met pijlsommen en machientjes.

5 Deze vraag is niet zo gemakkelijk als het lijkt. Even aandacht aan schenken in een nabespreking.

6 De leerlingen weten inmiddels dat er een vermenigvuldiging moet komen boven de pijl. Ze komen er doorgaans snel uit.

7 Deze manier van opschrijven is nieuw voor de leerlingen. Daarom is het nodig aandacht te schenken aan de gebruiken, die verbonden zijn met het werken met dergelijke formules. In deze opgave gebeurt dat door het nadenken over de betekenis van de woorden en door de vertaling van een analoge berekening naar een dergelijke beschrijving.

Op de achtergrond spelen afspraken over de gebuiken bij het werken met formules een bealngrijke rol:

- Voor de getallen, die steeds veranderen, verzin je een woord (of een letter, als je een luie schrijver bent en mits je weet waarover het gaat).
- Aan de ene kant van het =-teken staat wat je met die veranderende getallen doet, en aan de andere kant van het =-teken staat in één woord wat voor getallen er uit komen.

De afspraken zijn verbonden met de manier waarop formules hier gebruikt worden, namelijk als beschrijving van berekeningen. In een later stadium zullen leerlingen die formules op een meer abstracte manier kunnen gebruiken, namelijk als beschrijving van verbanden. Dan is de formule niet meer zozeer verbonden met de berekening, maar kun je

8 Jaap heeft anders gerekend. Hij schrijft kort:
trapperrondes x 3,5 = afstand

Arjen zegt: "Wat Jaap opschrijft, betekent dat hij drieeneenhalf keer zoveel trapperrondes maakt, als dat hij meters fietst."
Corine zegt: "Nee, joh, het is andersom: Jaap moet het aantal trapperrondes juist vermenigvuldigen met drieeneenhalf, om de afstand te vinden."

a Waarom zegt Corine dat het andersom is?
b Wie heeft er gelijk en waarom denk je dat?

> Zo'n korte beschrijving van een berekening heet een **formule**
> De woorden in de formule zijn zelf verzonnen, maar als je het verhaal gevolgd hebt, weet je waar het over gaat.
> Corine, bijvoorbeeld, heeft van "aantal trapperrondes" één woord gemaakt: "traptal".

9 In het overzicht op bladzijde 6 is ruimte voor formules.
Maak voor elke fiets een formule en zet die in het schema.

10 Vergelijk de formules van opgave 9.
a Wie komt het verst met 150 trapperrondes?
b Wie heeft de meeste rondjes getrapt op een afstand van 500 meter?
c Hoe zie je dat aan de formules?
d Hoe zie je dat aan de tabellen?

aan de vorm zien wat er allemaal aan de hand is met dat verband. Om zo ver te komen, heb je een arsenaal aan ervaringen nodig, en aan dat arsenaal wordt door Trappers een bijdrage geleverd.

8 In deze opgave trekt Arjen een conclusie, die de formule trekt in de richting van beschrijving van een verband. Hij zegt iets over het verband naar aanleiding van de beschrijving van de berekening van Jaap. Hij zegt het fout en Corine corrigeert hem door te spreken in termen van de berekening. Voor velen gaat deze opgave te ver, maar er zijn ook leerlingen die haar wel aan kunnen.

9 Opnieuw geeft het invullen van het schema aanleiding tot het vergelijken van de verschillende fietsen.

10 Ook de formules geven informatie over die fietsen. De vragen zijn gericht op het interpreteren van de formules en het trekken van conclusies. De uitspraken kunnen snel gecontroleerd worden doordat ook de andere vormen van informatie in het schema staan. Deze opgave bereidt voor op het leren hanteren van formules als beschrijving van verbanden.

11 Behalve met een tabel of een formule kun je de resultaten van de metingen in beeld brengen door een grafiek te maken. Vier leerlingen hebben dat gedaan. Op de bladzijde hiernaast zie je hun grafieken. Beantwoord de eerste twee vragen voor iedere grafiek afzonderlijk.

a Hoeveel meter leggen ze af in 10 trapperrondes?

b Hoeveel trapperrondes rijden ze op een afstand van 50 meter?

c Welke grafiek vind jij de beste?

d Geef de grafieken allemaal een cijfer en schrijf erbij waarom je dat cijfer gegeven hebt.

e Maak een lijstje van punten waarop je hebt gelet bij het beoordelen van de grafieken.

12 Jij gaat straks ook grafieken tekenen. Daarvoor maak je eerst een tabel, één voor de fiets van Jaap en één voor je eigen fiets. Hieronder is al een begin gemaakt.

a Zet onder de tweede tabel de naam, die hoort bij de fiets die jij gemeten hebt

b Vul de tabellen verder in.

c Welke regelmaten zitten er in de tabellen?

13a Teken in het plaatje hieronder de grafiek, die hoort bij Jaap zijn fiets.

b Zal jouw fietsgrafiek steiler lopen, of minder steil dan die van Jaap?

c Hoe kun je dat zien aan de tabellen?

d Teken ook de grafiek van Jouw fiets, in hetzelfde plaatje.

e Bij vraag 12c heb je verteld welke regelmaten in de tabellen zitten. Hoe vind je die regelmaten terug in de grafieken?

14a Wie heeft de minste trapperrondes nodig om een 20 meter lange helling op te komen, jij of Jaap?

b Hoe zie je dat aan de grafiek?

c Wie moet dan het zwaarst trappen?

15 Karin is vier jaar en heeft een kinderfiets. Teken Karins fietsgrafiek, zoals je denkt dat die ongeveer zal zijn.

16a Kun je je een fiets voorstellen, waarvan de grafiek over de horizontale as loopt?

b En hoe zit het met een grafiek, die samenvalt met de vertikale as?

11 In deze opgave ervaren de leerlingen de bruikbaarheid van de getekende grafieken door eerst af te lezen, in beide richtingen. Aan het eind van dit hoofdstuk is het zinvol om terug te koppelen naar die uitspraak. Hebben ze zelf ook zo'n handige grafiek getekend?

12 Voor het zelf tekenen van de grafiek hebben leerlingen de behoefte aan punten, die ze kunnen plotten. De tabel, die ze bij deze opgave produceren, kunnen ze daarvoor gebruiken. De getallen in de tabel zijn bewust gekozen: daaruit is een zekere regelmaat af te lezen en voor leerlingen die daar enigszins mee vertrouwd zijn, is dit een aanwijzing dat in de grafiek die regelmaat terug te vinden moet zijn.

13 Met de tabel erbij (opgave 12) kunnen leerlingen goed de grafieken tekenen. Hoewel er een probleem is met de grafiek als rechte lijn (zie achtergronden), kunnen ze, met de getallen erbij, de vragen goed beantwoorden.

14 Deze vraag moet je goed lezen, want de snelste trapper heeft de minste moeite met de helling, en daar kan een slechte lezer in trappen. De helling van de grafiek heeft niets te maken met de helling, die genomen wordt. Goed om daar eens over na te denken.

15 Zonder tabel, maar op globale kenmerken een grafiek tekenen. Na de voorgaande opdrachten is dit geen probleem meer.

16 Leerlingen zijn inventief.

1 a Brenda en Peter vergelijken hun fietsen met elkaar. Brenda telt 26 trottoirbanden in 5 trapperrondes. Peter doet in 2 trapperrondes 11 trottoirbanden. Wie legt de grootste afstand af per trapperronde?

b Peter en Brenda hebben geen rekenmachine bij de hand, maar wel pen en papier. Ze schrijven dit op:

× 11

traptal Brenda	5		50	55
afstand (meters)	26	11	260	286
traptal Peter		2		52

× 26

Hebben ze het goed gedaan?

c Wat is hun conclusie?

2 De tabel van Brenda en Peter is uitgebreid en een kwart slag gedraaid:

a Vul de tabel verder in.

b Wat moet er bij de pijlen staan?

3 Jaap komt onderweg naar school hectometerpaaltjes tegen. Op het eerste paaltje staat het getal 1,2. Vanaf het moment dat hij het paaltje passeert, begint hij trapperrondes te tellen.

a Wat stelt het getal 1,2 op het eerste paaltje voor?

b Hoeveel meter zit er tussen twee opeenvolgende paaltjes?

c Na acht paaltjes is hij de tel kwijt. Hoeveel trapperrondes zou hij hebben gemaakt? (ga ervan uit dat hij ongestoord doorfietst).

d Hij heeft een tabel gemaakt. Wat zet hij bij de pijlen?

. . . . . .

trapper-rondes (aantal)	hectometer-paaltje (nummer	gefietste afstand (km)	gefietste afstand (m)
0	1,2	0	0
29	1,3	0,1	100
57	1,4	0,2	200
86	1,5	0,3	300
114	1,6	0,4	400
143	1,7	0,5	500

. . .

4 a Hier zijn twee uitspraken over de tabel.

I Bij elk volgend hectometerpaaltje is hij steeds evenveel verder.

II Bij paalnummer 1,5 heeft hij 0,3 km gefietst,
dus bij paalnummer 3,0 heeft hij 0,6 km gefietst.

Welke is goed, of zijn ze allebei goed?

b In twee kolommen hebben de paren getallen een vaste verhouding. Welke twee kolommen zijn dat ? Welke verhouding is het?

3 Tabellen en machientjes

1 De getallen zijn gemakkelijk genoeg en de meeste leerlingen berekenen snel, met of zonder rekenmachine, het aantal meters per trapperronde. De verhoudingstabel op het kladpapier laat zien dat die trappers, de afstanden en het vermenigvuldigen in de berekeningen, iets te maken hebben met vaste verhoudingen en dat je een vraag daarover even goed met behulp van zo'n tabel kunt oplossen. Dat is prettig bijvoorbeeld in het geval dat je geen rekenmachine bij de hand hebt. Een gesprek over het gebruik van hulpmiddelen bij het rekenen in dergelijke situaties kan zinvol zijn.

2 De verhoudingstabel is een kwart slag gedraaid en op twee plaatsen is het getal 1 ingevoegd. Om een vermenigvuldigingsfactor te kunnen vinden kan het handig zijn om de bij 1 behorende waarden te zoeken. Als je die gevonden hebt, kun je de factor gewoon aflezen. Door toevoegen van 1 hebben leerlingen de gelegenheid dat zelf te ontdekken, zonder dat ze het echt nodig hebben. In het pakket praktisch rekenen voor klas 3 zal expliciet aandacht worden besteed aan het normeren op 1 in verhoudingstabellen, ook in verband met het vinden van de factor. Daarmee wordt de koppeling tussen de verschillende tabellen en tussen de verschillende manieren van kijken naar evenredigheid ook in de rekenlijn voortgezet en versterkt.

3 De stap van hectometerpaaltje naar gefietste afstand heeft voorbereiding nodig. Dat gebeurt door middel van de vragen a t/m c. In de klas is gebleken dat een aparte vraag tussendoor ook helpt:
Stel je voor dat je een kilometerteller op de fiets hebt zitten. Aan het begin van de tocht staat die op 367,3 km. Aan het eind van de tocht op 395,4 km. Hoeveel km heb je dan gereden?

4 De uitspraken richten de leerlingen op de overeenkomstige regelmaten in de tabel (I) en de verschillen tussen de verbanden in de tabel (II). De verschillen worden in onderdeel b benoemd in termen van verhoudingen.

De meeste leerlingen hebben al in groep 4, 5 en 6 van de basisschool leren rekenen met machientjes. De opgaven van de illustratie werken uitnodigend voor veel leerlingen. Ook na de opmerking dat het niet nodig is om die opgaven te maken, gaan sommigen toch ijverig aan het rekenen. Dat is niet erg, want die activiteit haalt juist naar boven wat ze nodig

5 De machientjes op de bladzijde hiernaast komen uit rekenboeken voor de basisschool. Ze zijn op verschillende manieren getekend. Dat kan, zolang je maar kunt zien wat het machientje doet. Maak drie verschillende tekeningen van machientjes, die dezelfde berekening maken.

6 De weegschaal in een groentewinkel weegt, rekent én maakt de kassabon.

a Maak een lijstje van wat er is gekocht voor de bon hieronder.

b Zet er naast hoeveel elk artikel heeft gekost.

c Er staan nog meer getallen op de bon. Wat stelt elk van die getallen voor?

d In de weegschaal zitten machientjes.Welke heeft de weegschaal gebruikt bij
het berekenen van de prijzen?

e In de weegschaal zit ook een andere soort machine. Die telt in-getallen bij elkaar op. Twee van deze machines zijn geschakeld:

Voor het maken van deze kassabon zijn meer dan twee machines geschakeld.
Maak het schema af en schrijf de getallen van de kassabon erbij.

f Op een andere kassabon staat ook Chinese kool. De prijs per kilo is hetzelfde als op deze bon. De prijs van die kool is f 3,25. Hoeveel kool is afgewogen?

g De totaalprijs van de bon is f 10,80. Weet jij welke prijzen er verder nog op staan? Verklaar je antwoord.

h Bij welke van de machines op de bon kun je terugrekenen, en bij welke niet?

7 Jaap heeft trapperrondes geteld, weet je nog? Zijn tabel staat op bladzijde 7. Bij welk machientje krijgt hij de afstand in meters als hij aantal trapperrondes invoert?

8 Als de trappers draaien, draaien de wielen mee. Hoe vaak de wielen rond gaan bij een gegeven aantal rapperrondes, kun je berekenen met behulp van dit machientje:

$$\big\downarrow \times 1{,}6$$

Hoe vaak gaan de wielen rond als hij 10 trapperrondes heeft gedraaid?

hebben: met machientjes kun je rekenen en het doet er eigenlijk niet veel toe welke getallen je erin doet, het machientjes doet er altijd hetzelfde mee. In de opgaven van Trappers gaat het om de volgende stap: het doet er wel toe welke machientjes je gebruikt voor de berekeningen, en je kunt machientjes met elkaar vergelijken: ze zeggen iets over de eigenschappen van de fiets, of over de prijs van de groente (opgave 6). En je kunt een machientje veranderen: er twee van maken, die achter elkaar geschakeld toch hetzelfde resultaat opleveren. Die constructie van machientjes is te herkennen binnen de context van de fiets (opgave 9).

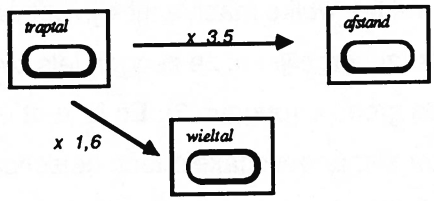
5 Machientjes kunnen in verschillende gedaanten verschijnen, maar ze hebben allemaal gemeen dat er een ingang, een bewerking en een uitgang is. Leerlingen weten dit al, maar ze zijn zich nu ook bewust daarvan.

6 Leerlingen geven er geen blijk van dat ze genoeg hebben van die fietsen. Toch is het goed om ook andere contexten te betrekken. Hier is dat mogelijk zonder storende onderbreking, doordat de context van de weegschaal in de groentewinkel natuurlijk aansluit op het inhoudelijke verhaal, zodat die lijn voortgezet kan worden.
De eerste delen van deze opgave zijn oriënterend op de betekenis van de tekst op de kassabon. In onderdeel d komt een soort machientje op de proppen, waarmee je heel goed een berekening kunt verhelderen, maar dat duidelijk verschilt van de machientjes, die tot nu toe aan de orde zijn geweest. Essentiëel verschil is dat je dit soort machientjes niet kunt omkeren. In het programma van W12-16 is die eigenschap belangrijk in verband met het oplossen van vergelijkingen. Voor de leerlingen op dit moment in Trappers levert dit een contrast, waarmee duidelijk wordt om welke machientjes het wel gaat.
Misschien is het nodig om te context voor te bereiden. Waarschijnlijk kennen de leerlingen beter de bonnen van de weegschalen in de supermarkt. Aan het eind van dit hoofdstuk heb ik een collage tussengevoegd, van bonnen uit de supermarkt. Daarvan kunt u eventueel een transparant maken om te gebruiken bij en inleidend gesprek over de machientjes in de weegschaal (zie Transaparanten).

7 Terug naar trappers.

8 Dit nieuwe machientje voor de fiets van Jaap spreekt voor zich, de berekening bevestigt dat.

9 Bij Jaap zijn fiets kun je nog een derde machientje maken. Dat berekent de afstand als de wielen ronddraaien. Hoe rekent dat machientje? Zet je antwoord in het schema:



fiets van Jaap

10 De ijsfiets op het plaatje van blz. 24 heeft een wiel met een omtrek van ongeveer 2,85 meter. Wat doen de machientjes bij deze fiets? Zet je antwoord in het schema:

11a Op de bladzijde hiernaast zie je twee fietsen. Het voorwiel van de hoge bi is bijna twee keer zo groot als het wiel van de circusfiets.
Waaraan kun je dat zien?

b Komt de hoge bi dan ook twee keer zo ver als de circusfiets, bij elke wielronde? Verklaar je antwoord.

12 Hieronder zie je drie rollende wielen, op vijf momenten achter elkaar getekend.
De wielen laten sporen achter.

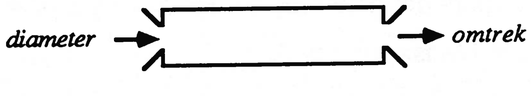
a Kleur de omtrek op de laatste tekeningen van de wielen blauw.
b Teken in die wielen middellijnen.
c Hoe lang zijn op de tekeningen de diameters?
d Een deel van elk van de sporen is ontstaan door één omwenteling van het wiel. Hoe vaak kun je de diameters ongeveer afpassen op
die stukken spoor?
Is dat voor elk van die wielen gelijk?

13 Iemand heeft opgeschreven hoe hij de omtrek van een wiel berekent:

omtrek = π x diameter.

a Op de meeste rekenmachines kun je π (spreek uit: pi) vinden.
Schrijf π als komma-getal, met twee cijfers achter de komma.

b Dit machientje voert dezelfde berekening uit, als beschreven is door de formule. Welke bewerking zit er in? Vul maar in.



c Het grootste wiel legt een afstand van 2.14 meter af, telkens als het wiel één keer rond gaat. Hoe groot is de diameter van het wiel?

d Teken ook het machientje voor de berekening bij c.

e Wat is de formule bij de berekening van c?

f Corine en Arjen hebben een gesprekje:
(*over anderhalf keer zoveel . . .*)
Hoe zal Corine haar uitspraak controleren?
Voer die controle uit. Heeft ze gelijk?

9 De tekening maakt het mogelijk voor leerlingen om getallen in de schermpjes te zetten. Een enkele leerling heeft dat niet nodig om het derde machientje te vinden. Voor sommigen kan dit een goede tip zijn: maak een tabel met pijlen boven de kolommen.

10 Deze opgave brengt de leerling bij de betekenis van de machientjes voor de context.

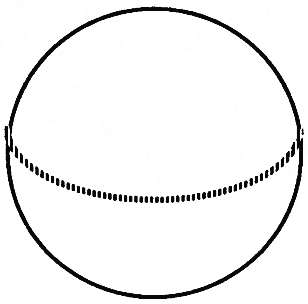
11 Wat bedoel je met twee keer zo groot? Een keer zo groot, dat is evenveel erbij, dus twee keer zo groot is twee maal de grootte erbij? Deze vraag komt van de tekenaar van het plaatje. Voor de leerling kan dat misverstand ook bestaan. En twee maal zo hoog betekent niet twee maal zoveel oppervlakte. Misschien is het nodig om vierkanten te tekenen op het bord, om duidelijk te maken wat er wordt bedoeld: twee keer de hoogte van het wiel op de circusfiets geeft je de hoogte van het grote wiel op de hoge bi. Uitkouwen van het antwoord bij b is niet nodig, het komt in de volgende opdrachten wel naar boven. Terugkoppelen naar deze vraag is dan aan te bevelen.

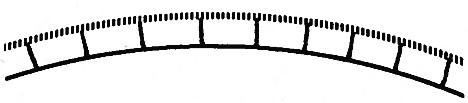
12 De drie formaten wielen laten draaien, dat kan bijvoorbeeld met wielen uit een doos Fischertechniek, of met wieltjes van lego. Als demonstratie is dat nuttig, of om zelf te doen, voor leerlingen, die zich dat rollen moeilijk kunnen voorstellen, zonder dat ze die wielen in handen hebben gehad .
Omdat ze niet met meetkunde bezig zijn, is het even lastig om de begrippen omtrek, middellijn en diameter paraat te krijgen. Daarvoor zijn de onderdelen a t/m c. Het gaat om onderdeel d: ontdekken dat die factor bij al die wielen gelijk is.

13 Middels de formule zegt de persoon in kwestie: " Zó reken je dat uit." Na de activiteiten met formules in hoofdstuk 2 kunnen leerlingen deze formule lezen en interpreteren, en vertalen naar een machine. Met de omkering van die machine en beschrijving van die omkering in formuletaal raakt deze opdracht een kern van het netwerk rond evenredigheden.
Een karakteristieke eigenschap van een evenredig verband is dat vergroting van de ene variabele een vergroting oplevert van de andere variabele, met dezelfde factor. Bij de fiets is dat direct in te zien, maar bij de cirkel niet. Vergroting van de diameter met een factor 2, levert een vergroting van de omtrek, eveneens met factor 2, maar een vergroting van de opppervlakte met een factor4. Visueel werkt die oppervlakte sterker door en daarom is de genoemde eiegenschap voor de omtreksformule niet zo evident.

Een tussendoortje

Er is nog een karakteristieke eigenschap: bij elke stap kom je evenveel verder (bij het werken met grafieken gebruik je vaak deze formulering). Ook dat is bij de fiets evident: bij elke volgende trapperronde kom je evenveel verder, en omgekeerd, voor elke volgende 100 meter moet je evenveel rondjes trappen. Als je denkt aan een groeiende cirkel, kun je een dergelijk uitspraak doen: maak je de diameter steeds een centimeter groter, dan wordt de omtrek ook steeds evenveel groter, en omgekeerd, voor elke centimeter, die je toevoegt aan de omtrek, wordt de straal steeds evenveel groter. Dat levert soms verrassende resultaten, kijk maar naar het volgende probleem:





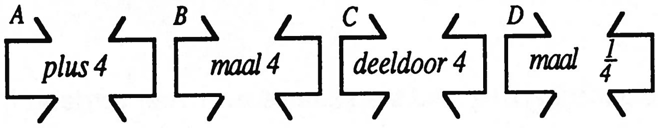
Stel je voor dat je een touw om de aarde hebt gespannen, over de evenaar. Het touw is strak gespannen (neem aan dat de aarde een gladde, ronde bol is). Je knipt het touw door en zet er een stuk tussen, zodat het touw een meter langer wordt. Om het touw weer strak te krijgen zet je over de hele lengte paaltjes in de grond en het touw prik je er met krammen aan vast. Als het touw rondom de hele aarde even ver van de aarde af $taat, hoeveel centimeter hangt het dan boven de grond?

Als u deze opgave nog niet kent, wacht dan met verder lezen en zoek een antwoord, want er wordt te veel verklapt en dan mist u een ervaring!

Leerlingen kunnen deze opgave oplossen met het gegeven dat de omtrek van de aarde 40 000 kilometer is, en met het machientje **omtrek** $\xrightarrow{:\pi}$ **diameter.**

Een goede voorstelling van de situatie krijg je als je uitgaat van een cirkel met een omtrek van een meter (en dus een diameter van 100 cm : π = 32 cm), en die steeds met stappen van een meter, in de omtrek, laat groeien.

Trappers is al dik genoeg en veel leerlingen zullen misschien struikelen, vandaar dat de opgave niet in het leerlingenmateriaal verwerkt is. U kunt uw eigen overwegingen maken. In Transparanten vindt u een bladzijde met deze opgave, geschikt om een transparant van te maken.



14 Vergelijk de machientjes hiernaast eens met elkaar:

a Maak voor elk machientje een tabel. Je mag zelf de ingetallen kiezen, maar neem er in ieder geval vijf (er kunnen ook kommagetallen in!).

b In welke tabel hebben de in-getallen en uit-getallen die bij elkaar horen, steeds dezelfde verhouding? Hoe zie je dat aan de tabel?

c Teken de grafieken in één plaatje.

d Welke overeenkomst zie je tussen de grafieken van de machientjes, waarvan
de ingetallen en de uitgetallen een vaste verhouding hebben?

e Geef bij elk machientje een formule.

14 Tot slot van dit hoofdstuk komen enkele machientjes op een rij te staan, mét hun eigenschappen in de andere representatievormen. Bij onderdeel c, het tekenen van de gafieken komen veel leerlingen tot de ontdeking dat ze de tabellen niet kunnen gebruiken voor het tekenen van die grafieken, omdat de getallen er niet op passen. Dat levert voor sommigen een interessant leerproces op. Tim, bijvoorbeeld, heeft als ingetallen 10, 20, 30 enzovoort. Voor de grafiek deelt hij door 10, zowel de ingetallen als de uitgetallen. Tot zijn verbazing kun je aan de grafiek niet meer zien dat er steeds 4 bij opgeteld wordt!

Het verband tussen traptal en afstand noemen we een **evenredigheid** of een **evenredig verband** omdat er sprake is van een vaste verhouding.

1 Brenda en Peter hebben een verhoudingstabel gemaakt van hun berekeningen met trapperrondes en afstanden (zie bladzijde 19). Wat is de verhouding tussen *traptal* en *afstand* bij Brenda? En wat is die verhouding bij Peter?

2 In hoofdstuk 3 komen meer verbanden voor, waarin sprake is van een vaste verhouding. Hier is een lijstje van enkele verbanden:

a Zoek eerst de machientjes, die horen bij die verbanden, en vul ze in op de stippellijnen. (de pijlen hoeven niet altijd van links naar rechts te lopen!)
b Bij welke verbanden hoort een vaste verhouding? Zet die verhouding erachter.

3 Evenredige verbanden komen heel veel voor. Maar niet alle verbanden zijn evenredig. Op de volgende bladzijden zie je stukjes uit andere pakketten en boeken.
a Bekijk ze goed. Welke verbanden zijn evenredig? Zet daar een kruisje bij. **Tip: maak er eventueel tabellen bij.**
b Schrijf er ook bij waaraan je kunt zien dat het gaat om een evenredigheid.

4 Ken je nog meer evenredigheden? Maak er een lijstje van en vertel erbij waarom je denkt dat het om een evenredigheid gaat.

4 Evenredig

In het laatste hoofdstuk worden de leerlingen uitgenodigd te reflecteren op het rekenen, waardoor ze de mogelijkheid krijgen om het verband tussen twee variabelen als een object te beschouwen; als iets dat op zichzelf staat, als iets waaruit je conclusies kunt trekken, zonder dat er allerlei berekenigen aan vooraf moeten gaan, als iets dat op verschillende manieren benaderd kan worden.

1 Dat er sprake is van een vaste verhouding in die overbrenging tussen trappers en wielen op een fiets, is zijdelings ter sprake gekomen. Het vergt een zekere abstractie om dat verband als verhouding te kunnen opvatten.

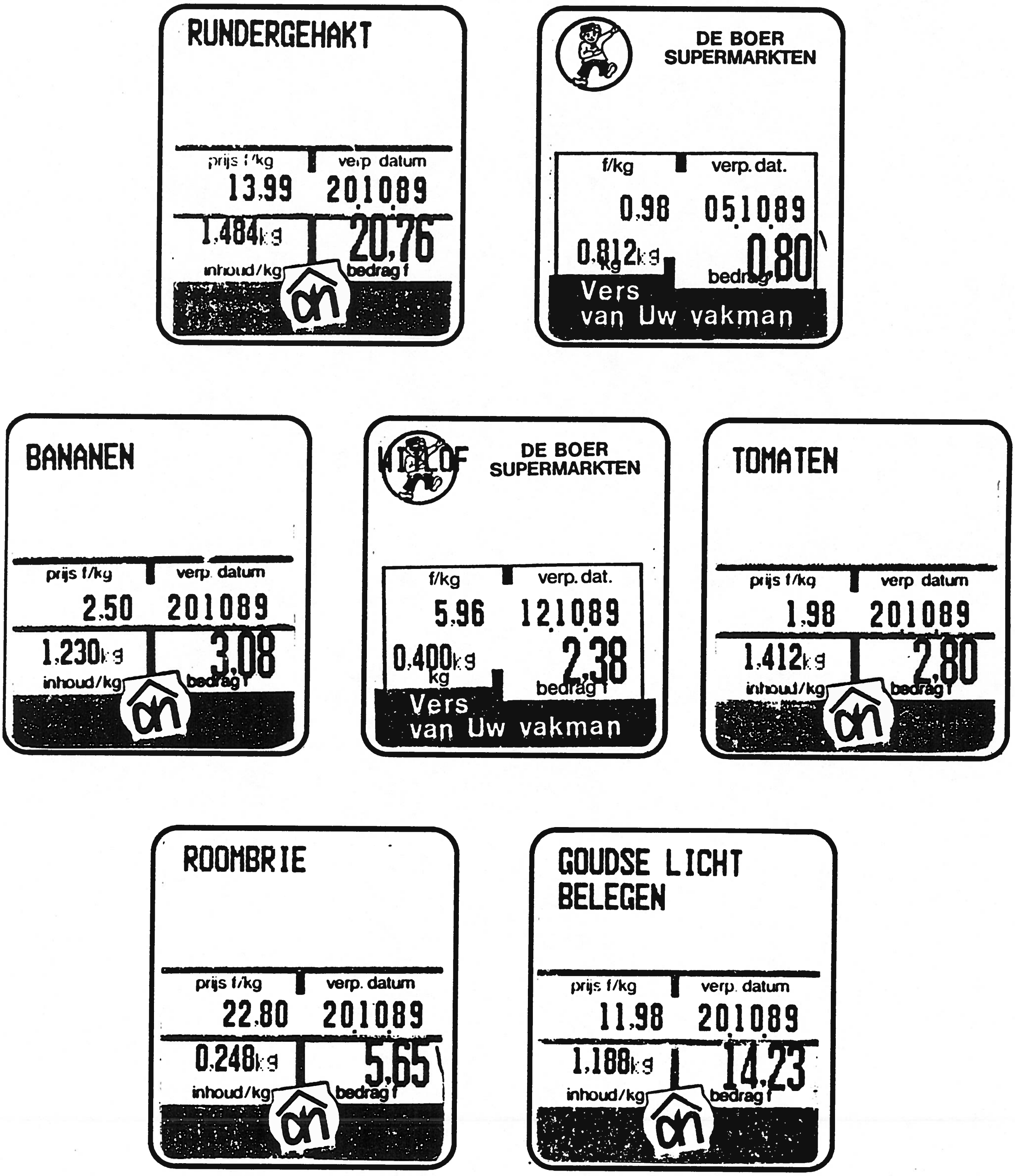
2 Die verhouding is al zo vaak onderhuids aanwezig geweest, hier wordt dat op een rijtje gezet. Hier kunnen de leerlingen ook ontdekken dat je aan de machientjes kunt zien dat die vaste verhouding erin zit. Het is niet de bedoeling dat dit als regel-om-uit-je-hoofd-te-leren in de schriften van de leerlingen komt. Er komt nog voldoende gelegenheid om dat te ontdekken. Nu of op een later tijdstip.

3 Als leerlingen in klas 1 het pakket Hoe Langer Hoe Meer hebben doorgewerkt, dan zullen de eerste twee voorbeelden bekend voor komen en zal het ophalen van de benodigde kennis niet zo veel moeite kosten als het lijkt. Voor leerlingen, die nog nooit eerder die contexten hebben gezien, zal het wat meer moeite kosten om zoveel te weten te komen, dat ze de vraag erover kunnen beantwoorden.
Bij de laatste drie voorbeelden ontstaat vanzelf een antwoord als de vragen, die er bij staan, beantwoord zijn.

4 In deze vraag kunnen leerlingen laten zien wat ze kunnen. De meesten vinden dat leuk.

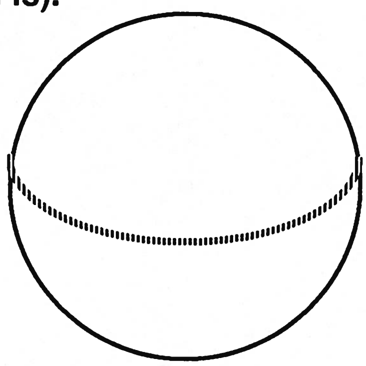
Transparanten

nr 1 - weegschalen in de supermarkt

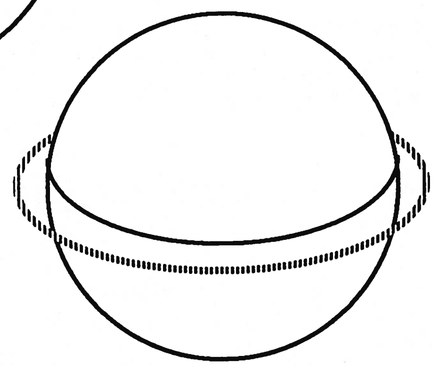


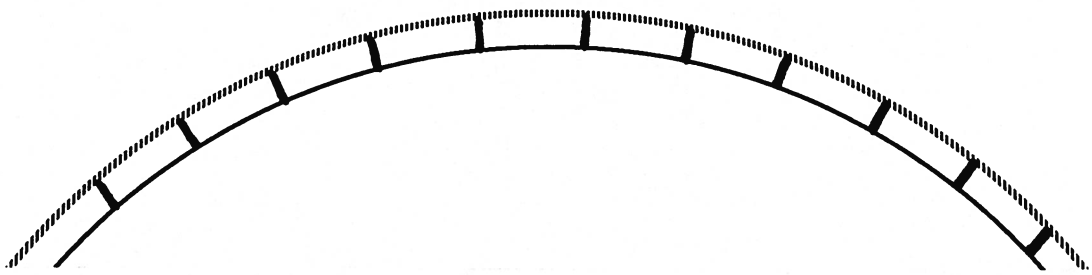
nr 2 - een touw om de aarde

Stel je voor dat je een touw om de aarde
hebt gespannen, over de evenaar.
Het touw is strak gespannen (neem aan dat de
aarde een gladde, ronde bol is).



Je knipt het touw door
en zet er een stuk tussen,
zodat het touw een meter langer wordt.
Om het touw weer strak te krijgen
zet je over de hele lengte paaltjes in de grond
en het touw prik je er met krammen aan vast.





Als het touw rondom de hele aarde
even ver van de aarde af staat,
hoeveel centimeter hangt het dan boven de grond?

Kernopdrachten

1 Trappers

(1) Dit is een oriëntatie op wat er gaat komen.

(4) Het experiment laat de leerlingen voelen wat het te onderzoeken verband betekent en de ervaringen zijn steun bij het doen van uitspraken over dat verband.

(5) Dit is een reflectie op het meten en op de resultaten van de metingen.

2 Resultaten bekeken

(2) De berekeningen worden verwerkt in een tabel.

(4) Een reflectie op de tabel.

(7) De berekeningen worden vertaald in een formule.

(8) De betekenis van de formule wordt verscherpt.

(10) Een reflectie op formules en tabellen.

(11) Een oriëntatie op grafieken bij de metingen.

(13) Het verband tussen traptal en afstand komt los te staan van de berekeningen door het tekenen van de grafieken.

(15) en (16)
De globale kenmerken van de grafieken worden benadrukt. Daardoor kunnen leerlingen de verbanden op een hoger abstractieniveau bekijken.

3 Tabellen en machientjes

1 en 2

Hiermee wordt een relatie gelegd tussen verhoudingstabellen en vertikaal opgestelde tabellen.

5 Dit is een oriëntatie op machientjes.

9 Berekeningen met de fiets worden vertaald naar machientjes.

13 Hetzelfde type verband komt naar voren in een andere situatie. Daarnaast worden formules als beschrijving van de berekeningen, het machientje en de redeneringen in termen van taal bij elkaar gebracht.

14 Machientjes, tabellen, grafieken en formules komen bij elkaar, zonder context. Belangrijk is het contrast, veroorzaakt door het plusmachientje.

4 Evenredig

2 Dit is een reflectie op verbanden, die eerder in het pakket van verschillende kanten bekeken zijn.

3 Kunnen leerlingen evenredigheden verkennen vanuit verschillende representaties? Samen met opgave 2 krijgen ze de mogelijkheid om het begrip verhouding naar een hoger abstractieniveau te tillen, dat uitsteigt boven het rekenen.

Bijlage 1

Achtergronden

De ontwikkeling van Trappers start tijdens een periode van het project, waarin veel ideeën nog vaag zijn en waarin de discussies over bijvoorbeeld de rol van machientjes en formules nog volop aan de gang zijn. Over een aantal zaken zijn we het eens, binnen het team W12-16. Het is duidelijk dat een kennisnetwerk rond verbanden, waarin tabellen, grafieken en formules belangrijke representaties zijn, aandacht moet krijgen in het programma. In de eerste twee, drie leerjaren moeten leerlingen de tijd krijgen om zo'n netwerk op te bouwen. We zijn het er ook over eens dat een te vroege formalisering funest kan zijn voor de ontwikkeling van een gedegen kennisnetwerk. Formules moeten in de eerste instantie formules zijn met woorden, waarin de betekenis van de variabelen duidelijk is. Leerlingen zullen formules zelf construeren vanuit de berekeningen, die ze eerder zelf hebben uitgevoerd.

Nu begeef ik me op het pad van de discussie, want dat laatste is een veronderstelling, die onderzoek vraagt. Dat onderzoek verricht ik door experimenteren met de eerste versies van Trappers. Daarin zijn formules in spreadsheets ingevoerd, en kunnen leerlingen waarden invullen en de door de computer berekende resultaten bekijken op regelmatigheden. Vervolgens kijken ze naar de formules die erachter zitten en kunnen ze daarin veranderen. Tenslotte maken ze in andere cellen hun eigen formules. Leerlingen zijn vaak enthousiast bezig met de computer, ook in deze lessen. Mijn veronderstelling in deze fase van het project is dat deze omgeving voor leerlingen ruimte biedt om te experimenteren en ervaringen op te doen met het opstellen en onderzoeken van de werking van formules, maar dat blijkt niet het geval te zijn. Veel leerlingen komen niet tot het opstellen van een formule, die doet wat ze verwachten. In deze versie van het pakket Trappers zijn ze daar ook niet goed op voorbereid en ik kies er voor om de spreadsheets voorlopig te verlaten en formules op een meer elementair niveau terug te laten komen.

Ik richt me op het kennisnetwerk en de machientjes, die leerlingen kunnen helpen bij het bewust maken van de manier waarop ze rekenen. In een aantal moderne schoolmethoden wordt ook al gewerkt aan het opbouwen van zo'n netwerk. Echter de rollen van, met name, formules en machientjes verschillen sterk bij per methode. Na een analyse van het gebruik van machientjes in een aantal methoden, besluiten we in de algebra-ontwikkelgroep om te onderzoeken op welke manier enkelvoudige machientjes (zo noem ik machientjes, die één ingang hebben, één bewerking uitvoeren en één uitgang hebben) een rol kunnen spelen in het opbouwen en analyseren van formules.

Denk bijvoorbeeld aan:

* Taal: neem vijf keer zoveel water als siroop.

  Machine: siroop -- **x 5** --> water

  Formule: siroop x 5 = water, of s x 5 = w

* Taal: kies een getal

  tel daar 4 bij op

  vermenigvuldig met 8

  trek er 7 van af

  Machientjes: getal -- **+ 4** --> -- *** 8** --> -- **- 7** --> antwoord

  Formule: (((getal + 4) * 8) - 7) = antwoord

* Taal: vermenigvuldig het ingetal met zichzelf

  Machine: ingetal -- **macht2** --> uitgetal

  Formule: ingetal ^ 2 = uitgetal

Mogelijke vragen kunnen zijn in het onderzoek: zijn leerlingen in staat om vanuit één representatie de andere twee vinden? Zijn de machientjes inderdaad een steun bij het opstellen van formules? In welke fase in het leerplan kunnen leerlingen de machientjesketens gebruiken om inverse waarden te vinden?

Het pakket Trappers heeft inmiddels een zwaar accent gekregen in de richting van evenredige verbanden en allerlei rekenactiviteiten er omheen, en is daardoor te log voor een grondig onderzoek naar die rol van machientjes. Voor dat onderzoek is nu een ander pakket in ontwikkeling. Over de opbouw van het leren werken met formules komt nog een algemeen stuk, waarin een schets wordt gegeven van de verschillende rollen, die formules kunnen spelen en waarin een lijn wordt uitgezet in het leerplan voor het leren werken met formules. Formules horen bij een kennisnetwerk rond verbanden, en ze ontbreken dan ook niet in dit pakket. Maar het zelf opstellen van formules wordt heel voorzichtig opgebouwd, van de grond af, en wordt niet al te zeer uitgediept.

Wat betreft grafieken is er in de eerste experimenten een heel ander probleem naar voren gekomen. De grafiek van een evenredig verband is een rechte lijn. Dat kun je zien als je de punten uit een tabel plot in een coördinatenstelsel, en dat wordt duidelijker als je de punten, die er tussenin liggen, ook tekent. Het tekenen is een soort bewijs, maar gevoelsmatig blijft het zweven. Tenminste voor leerlingen, die nooit gespeeld hebben met lijnen in een rooster of anderszins ervaringen hebben opgedaan, die dit verschijnsel ondersteunen. En dat geldt voor de meeste leerlingen. Een gevolg is dat ze niet gebruik maken van eigenschappen die daaraan verbonden zijn, zoals het feit dat je aan twee punten genoeg hebt om de lijn te kunnen tekenen. De eerste versies van Trappers gaat dieper in op waaiers van grafieken door de oorsprong. Maar het onvolledig netwerk van kennis en ervaringen bij leerlingen, over de rechte lijn en de vaste verhoudingen daarbij, blijkt storend te werken op het spel met de waaiers. Mijn conclusie is dat hier sprake is van een onderdeel van het kennisnetwerk, dat een zorgvuldiger opbouw vereist. Ik ben dan ook begonnen met de ontwikkeling van een nieuw lespakket (genaamd Lijnenspel), dat in het programma voor Trappers geplaatst zal worden. En het spel met de waaierende en de schuivende grafieken zal dan in een later stadium, na Trappers, moeten komen.

Tabellen nemen in Trappers een belangrijke plaats in. De metingen met de fietsen leveren voor de leerlingen gegevens op over hun fiets, waarmee ze allerlei berekeningen uitvoeren. Het ligt voor de hand om bij die berekeningen verhoudingstabellen te gebruiken, maar het is gebleken dat die verhoudingstabellen het kijken naar het verband tussen de variabelen belemmeren. Horizontaal rekenen in verhoudingstabellen levert weinig problemen op voor leerlingen, die de tabellen hebben leren kennen in Praktisch Rekenen. Maar de stap naar de vermenigvuldiging (of deling) in vertikale richting vergt een blikwisseling, die bij de meeste leerlingen op dat moment niet optreedt. In de versie van Trappers van september 1990 wordt die vraag gesteld bij de opgave over het breien:

Stel je voor:

8.1 Je wilt een lekkere warme wintertrui breien.
Voor een proeflap met een breedte van 10 cm heb je 25 steken opgezet.

breedte (cm)	10
aantal steken	23

breedte (in cm) ---?---> aantal steken

a Met welk getal moet je de breedte vermenigvuldigen om het aantal steken te krijgen?

b Hoeveel steken moet je opzetten voor een lap die 52 cm breed moet worden?

De opgave zelf maken de leerlingen vlekkeloos, maar op het moment dat ik de vraag stel: "kun je die vermenigvuldiguing nu ook aangeven in de verhoudingstabel?", blokkeren verreweg de meeste leerlingen.Misschien hebben ze het nodig om meer vertrouwd te zijn met evenredigheden als type verband, en hebben ze niet genoeg aan het rekenen met verhoudingen, dus alleen met de getallen. In een pakket over procenten, en dan voor de derde klas, wordt ook geëperimenteerd met de stap naar de vertikale vermenigvuldiging in verhoudingstabellen.
De tabellen zijn dus bewust vertikaal gemaakt. In hoofdstuk 2 verschijnt de tabel met pijlen boven de kolommen, die aangeven hoe je van de ene kolom naar de andere kunt rekenen. Deze tabellen blijken een grote steun te zijn in het vinden van de structuur achter de berekeningen en daarmee het verband tussen de variabelen. Leerlingen vinden de bewerkingen vlot, en dat zou wel eens kunnen liggen aan het feit dat ze op de basisschool veel met machientjes en tabellen hebben gerekend.

Machientjes vormen in Trappers een samenvattend antwoord op de vraag: met welke bewerking van getallen in de ene kolom krijg je de getallen uit de andere kolom? Ze functioneren als overgang tussen de berekeningen en de formules. Het maalmachientje en zijn omkering (deeldoor) krijgen een eigen gezicht doordat ze staan in het geheel van evenredigheden. Ze zijn daarmee een onderdeel van het kennisnetwerk rond evenredige verbanden.

De context van het fietsen is verleidelijk. In de eerste instantie lijkt het me interessant om de overbrengingen in de fiets uitgebreid aan de orde te stellen. Dat ligt ook voor de hand als je met het verband tussen aantal trapperrondes en afstand bezig bent. In de eerste versie van Trappers is aan dat onderwerp dan ook een hoofdstuk geweid. Het gaat in dit pakket echter om de algebra, en niet om een fenomenologie van de fiets of van het fietsen. De algebra in het pakket vergt al zo veel inspaning van leerlingen in de tweede klas van het MAVO, dat het luxe is om dit hoofdstuk te handhaven. Wellicht zijn er leerlingen, die wel toe komen aan een uitgebreide studie van de fiets, maar dat zal moeten blijken als dit pakket ook in HAVO/VWO-klassen draait.
Een andere ingang voor de context is de fietssport. De schrijver van het artikel Wiskunde op de fiets, hoe vind je zo iets?, verschenen in Pythagoras, september 1988, heeft zich laten inspireren door een verhaal uit de krant. In die richting zijn er werkbladen in voorgaande versies van Trappers geweest maar ook die werkbladen leidden te veel af van de wiskundige kernen.

De fietscontext heeft nu in Trappers een zeer speciale rol. Het is de bedoeling dat hij gaat functioneren als referentie voor evenredige verbanden in andere contexten. Dat is duidelijk bij de omtreksformule van de cirkel. Aan de vorm kun je zien dat gaat het om hetzelfde type verband als bij de fiets, maar bepaalde eigenschappen van dat verband zijn bij de cirkel niet zo evident als bij het fietsen. Bijvoorbeeld als je de diameter drie keer zo groot maakt, wordt de omtrek ook drie keer zo groot. Of als je een touw om de aarde heen een meter langer maakt, dan wordt de diameter ongeveer dertig centimeter groter.

Evenredigheden kom je niet alleen tegen bij de fiets of bij de cirkel. Er zijn zo veel situaties waarin evenredigheden een rol spelen dat het belang van een kennisnetwerk rond evenredigheden duidelijk is. Evenredigheden komen voor in alle gedaanten en worden ook afwisselend in die gedaanten gebruikt. Als illustratie volgt hier een fragment uit experimenteel leerlingenmateriaal over het aanmaken van betonspecie, voor de derde klas van het LBO:

toegevoegd water

De hoeveelheid water is afhankelijk van:
- aanwezig water in zand en grind;
- gewenste vloeibaarheid betonspecie;

Een veel voorkomende verhoding is:
Gewicht water = de helft van cementgewicht,
zie figuur 13

Fig. 13 *gewichtsverhouding water en cement*

De verhouding water : cement heeft een naam.
Dat is de *water-cementfactor.*
Dus:
Water-cementfactor = gewicht water gedeeld door gewicht cement, ofwel:
wcf = 150 gedeeeld door 300 = 0,5 (zie fig.14)

$$\text{wcf} = \frac{W}{C} = 0{,}5$$

Van de leerlingen gevraagd om in hoog tempo te switchen tussen de woordformule, de verhouding en de vermenigvuldiging, drie representaties van een evenredigheid, die elk hun eigen wolk van associaties en eigenschappen hebben.
Die andere contexten vormen in bescheiden mate deel van het pakket Trappers, maar komen ruimschoots aan de orde in lesmateriaal, dat op andere wijze dan Trappers bijdraagt aan het kennisnetwerk.

Door het werken aan Trappers zijn ideeën meer uitgekristalliseerd en zijn allerlei problemen naar boven gekomen, die het waard zijn om aandacht te krijgen in het programma en in het ontwikkelingsonderzoek. Je kunt dus stellen dat de ontwikkeling van het pakket invloed heeft gehad op de ontwikkeling van het nieuwe algebraprogramma. In dat ontwikkelproces zijn de accenten in leerlingenmateriaal steeds verschoven. Uiteindelijk is de kern van het pakket Trappers het werken aan het kennisnetwerk rond evenredigheden, met een accent op tabellen en machientjes.

Bijlage 2

Uit Trappers, november 1989

Draaiende delen

Hoe komt het nou dat die trapperrondes per fiets zo sterk kunnen verschillen?
Wat zit er allemaal vast aan de trappers en de wielen?
Hoe wordt de beweging van de trappers omgezet in een beweging van de wielen?
Welke onderdelen van de fiets zijn hiermee gemoeid?
Zoek dat eens uit bij je eigen fiets (of die van je vriendin/vriend).

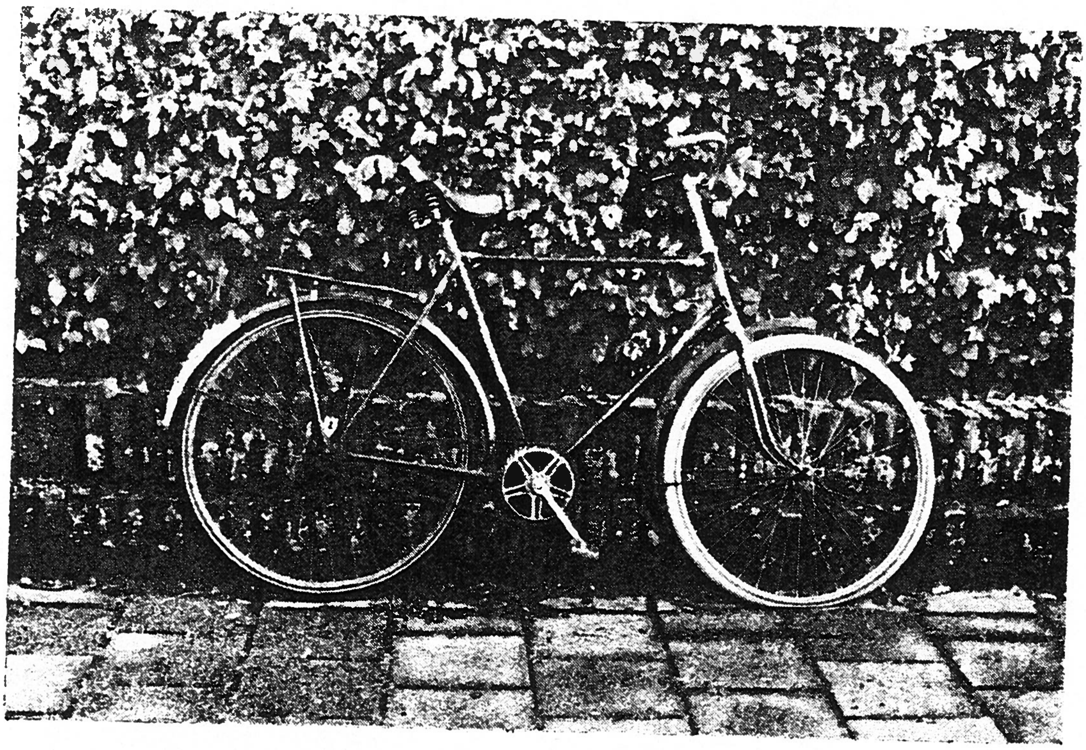
>a. Welke onderdelen van je fiets zorgen er voor dat het achterwiel wordt aangedreven?
Hoe gaat dat? Maak het verhaaltje af.

Mijn benen draaien de trappers rond.
De trappers zorgen er voor dat . . . . gaat draaien . . . .

. . . .

. . . .

. . . .

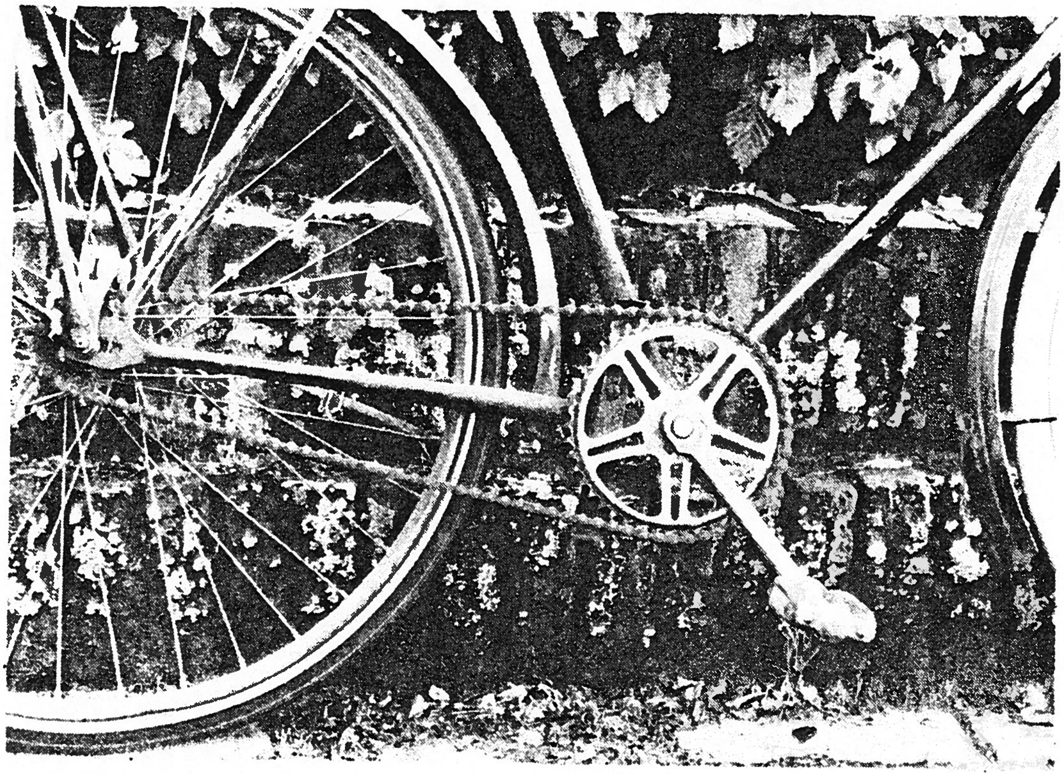


> Wat draait sneller rond als je fietst: de trappers of het achterwiel?

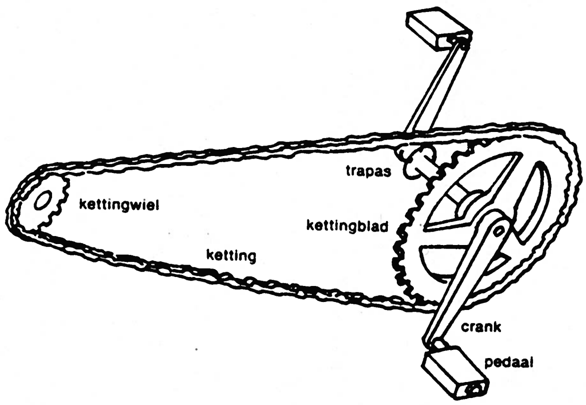
Overbrenging

De fietsketting brengt de beweging van de trappers over op het achterwiel.

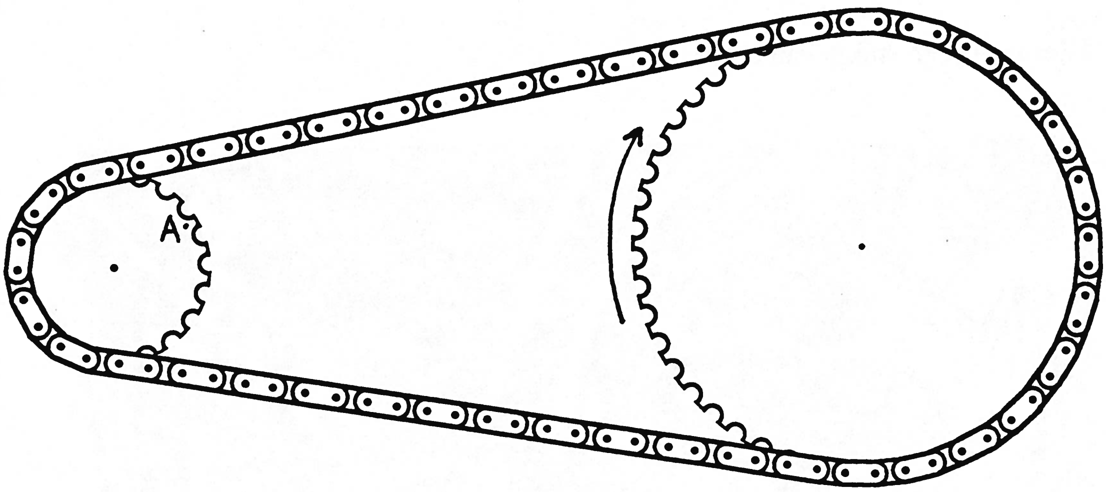
Hier zie je een stukje van een fiets:



En hier is een tekening:



> Kun je de benoemde onderdelen op de foto vinden?
> Schrijf ze er dan maar bij.


A

Draai het wieletje . . .

Tandje voor tandje draaien kettingblad en kettingwiel rond. Daar zorgt de ketting voor. Nooit slaat de ketting een tandje over. Tenminste: als tandwiel of ketting niet aftands zijn!

> a. Het grote tandwiel draait in de richting van de pijl.
Hoe draait het kleine tandwiel?
(teken ook zo'n pijl in het kleine tandwiel)

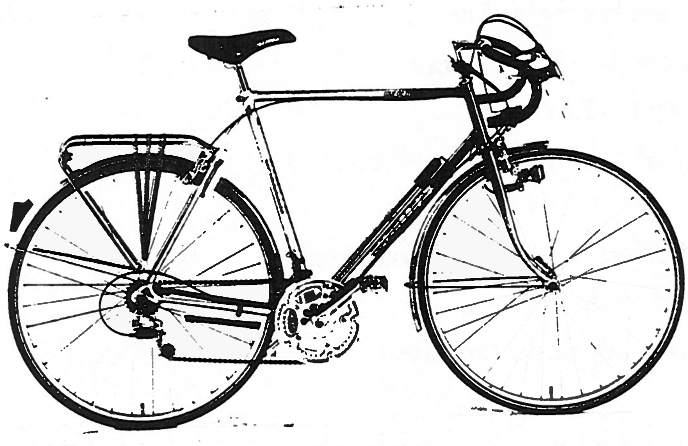
In de schematische tekening zitten veel tandjes van de tandwielen verstopt achter de ketting.

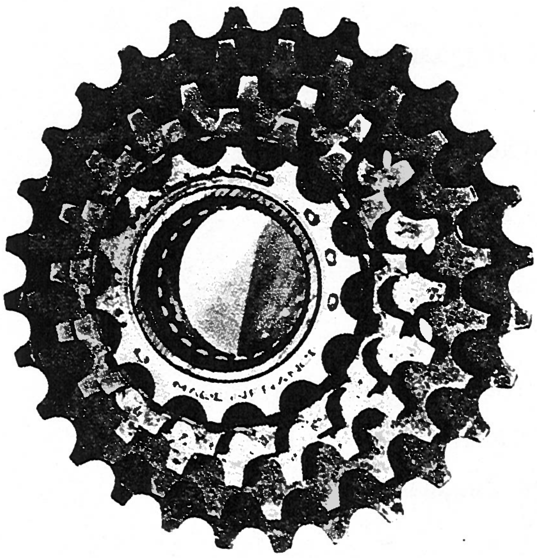
>b. Doe alsof de ketting doorschijnend is en teken de tandjes erbij.
Hoeveel tandjes heeft het grote wiel? En hoeveel het kleine?

> c. Als punt A één keer rond is gegaan, waar zit punt B dan?

> d. Als de trapper precies één keer rond gaat, hoeveel tandjes is de ketting dan verschoven?
Waar zit punt A dan?
En hoe vaak is punt A helemaal rond gegaan?

>c. Hoe vaak moet de trapper rond zijn gegaan om punt A weer in de oorspronkelijke stand te krijgen?
(Maak eventueel een verhoudingstabel.)





Groot en klein

Op een racefiets kun je kiezen wat voor tandwielen je wilt gebruiken. Deze fiets heeft voor twee kettingbladen en achter een serie van vijf kettingwielen. Zo'n serie kettingwielen noemen ze een *pilon*..

Afhankelijk van de keuze van kettingbladen kettingwiel zul je lange of korte trapperrondes hebben.

Neem aan dat je voor het kleinste blad hebt gekozen. Dat heeft 48 tanden. Achter staat de ketting op het middelste blad. Je kunt overschakelen op een kleiner of een groter tandwiel achter, het voorste blad laat je even ongemoeid.

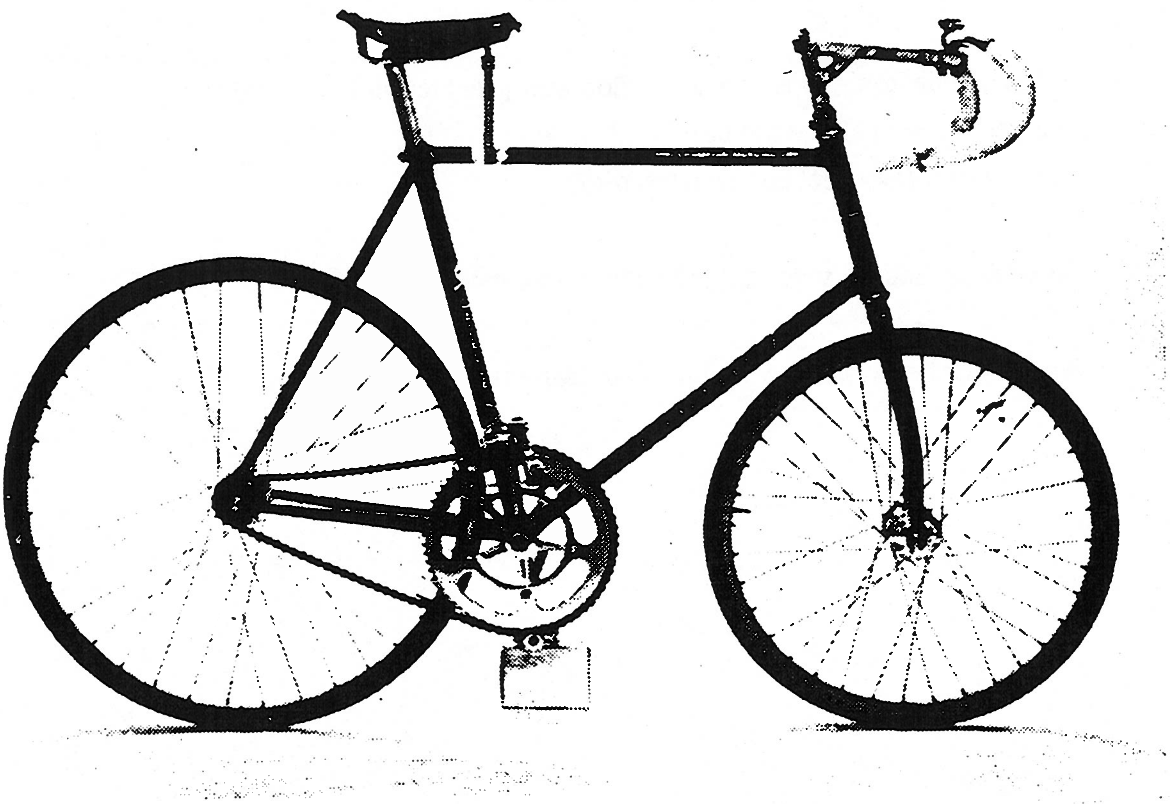
> Moet je een groter of een kleiner kettingwiel kiezen, als je tegen de wind in gaat fietsen? Waarom?

> Je hebt wind mee en wilt overgaan op een grotere trapperronde. Kies je een groter of een kleiner kettingwiel?

> Bij één van de kettingwielen op dit pilon gaat je achterwiel twee keer zo snel als de trappers. Welke is dat? (Hoeveel tanden heeft die?)

De wind wakkert aan. Je vindt dat je benen te snel moeten trappen.

> Kun je door het wisselen van voorblad daar iets aan doen?



Overbrengingsverhouding

De fiets van de vorige bladzijde heeft 48 tanden op het kettingblad (voor) en 20 tanden op het kettingwiel (achter). De *overbrengingverhouding* is het aantal keren dat het achterwiel rond draait bij 1 trapperronde. Wat de overbrengingsverhouding is, kun je met behulp van de tabel berekenen.

trapperronde	1	
tanden kettingwiel	48	20
wielronde		1

> Bereken de overbrengingsverhouding bij de fiets.

> Waarom zou dat overbrengings*verhouding* worden genoemd?

In de wielersport praten ze ook over overbrengingsverhouding. Dan wordt vaak de aantallen tanden van kettingblad en kettingwiel erbij gegeven. Ze doen dat alleen een beetje vreemd. Ze zeggen dan: *de overbrengingsverhouding is 47 x 17.*

> Kun jij verzinnen wat de verhouding dan is?
Welke berekening heb je dan uitgevoerd?

> Probeer van je berekening een formule te maken met de volgende woorden erin:

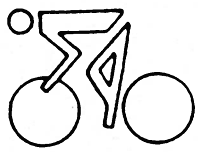
trapperrondes, wielrondes, tanden kettingblad, tanden kettingwiel.

> Je kunt de overbrengingsverhouding ook berekenen als je een plaatje hebt en een lineaal met millimeterverdeling.
Op bladzijde 10 is het plaatje. Probeer het eens.

Bijlage 3

Uit Pythagoras, september 1988

Wiskunde op de fiets, hoe vind je zo iets?



Op 24 mei 1988 maakte *de Volkskrant* melding van het indoor-uurrecord van de Italiaanse wielrenner *Francesco Moser* (figuur 1). Het betreffende bericht is hieronder weergegeven. Of je belangstelling nu uitgaat naar wielrennen of niet, het is zonder meer aardig dat bericht even door te nemen. En ... probeer eens te achterhalen waar iets mis is. (Al zal dat niet meevallen.)

Moser beëindigt carrière met indoor-uurrecord

Van onze sportredactie

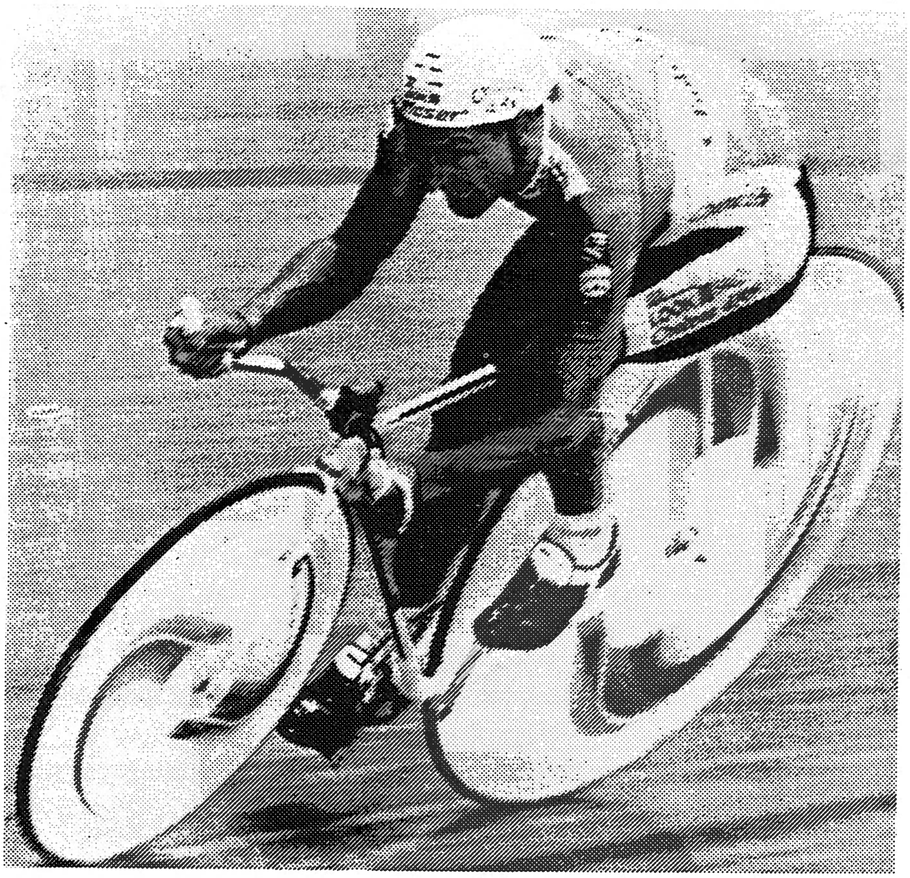
AMSTERDAM — In de nadagen van zijn carrière heeft Francesco Moser zich een derde werelduurrecord toegeëigend. De 36-jarige Italiaan verbeterde zaterdag in de Schleyer-hal van Stuttgart het indoor-werelduurrecord van de Sovjet-amateur Ekimov. Moser kwam op het houten ovaal uit op 50 kilometer, 644 meter en 65 centimeter. Het oude record bedroeg 49.672 meter en werd op 27 oktober 1986 in Moskou gevestigd.

Eerder deed Moser twee vergeefse pogingen om Ekimov te overtreffen. De Italiaanse prof is ook houder van de twee werelduurrecords op buitenbanen. De grootste afstand op zeeniveau reed hij op 3 oktober 1986 in Milaan: 49,801 kilometer. Op 23 januari 1984 kwam hij in Mexico-Stad tot het uurrecord voor hooglandbanen: 51,151 kilometer.

Voor vijfduizend toeschouwers reed Moser in Stuttgart op een zeer speciale fiets. Voor had hij een extra klein wiel met een doorsnee van 58,5 centimeter. Het dichte achterwiel was bijna twee keer zo groot: 103 centimeter, en woog 3,2 kilogram. Verder maakte hij gebruik van aerodynamische voorzieningen als druppelhelm en ossekopstuur. Per pedaalslag legde hij met zijn versnelling (47x17) 8 meter en 20 centimeter af. In het tweede deel van zijn race kwam hij tot de snelste ronde. Hij bereikte toen een snelheid van 54,278 kilometer per uur.

Moser, die zich via een hoogtestage in Colombia onder begeleiding van professor Conconi had voorbereid, was niet te stuiten in de jacht op het wereldrecord, dat hij vorig jaar in Moskou en Wenen had gemist. De coureur pakte Ekimov onderweg ook het wereldrecord op de 20 kilometer af. Hij passeerde dat punt in 23.41,71. De oude recordtijd was 23.52,98.

Moser verbeterde zijn wereldrecord op de 10 kilometer van tien dagen geleden (11.50,35) net niet: 11.53,79. Na afloop toonde hij zich uiterst tevreden: „Ik wilde mijn loopbaan beëindigen met dit indoor-record. Dat is nu gelukt. Ik wist het vooraf. Alleen een val had me kunnen stuiten. Ik kom niet terug in de competitie. Ik zal hier en daar nog wat kleine wedstrijden rijden, maar het serieuze werk is voorbij", aldus Moser voor de Italiaanse tv, die de recordpoging rechtstreeks uitzond.



Figuur 1. Francesco Moser op zijn extravagante fiets met buitensporig groot achterwiel tijdens het vestigen van het indoor-uurrecord.

Schaam je niet
Waarschijnlijk is je niets merkwaardigs opgevallen in het bericht. Waaruit dan is op te maken dat je geen wieler-kenner bent.

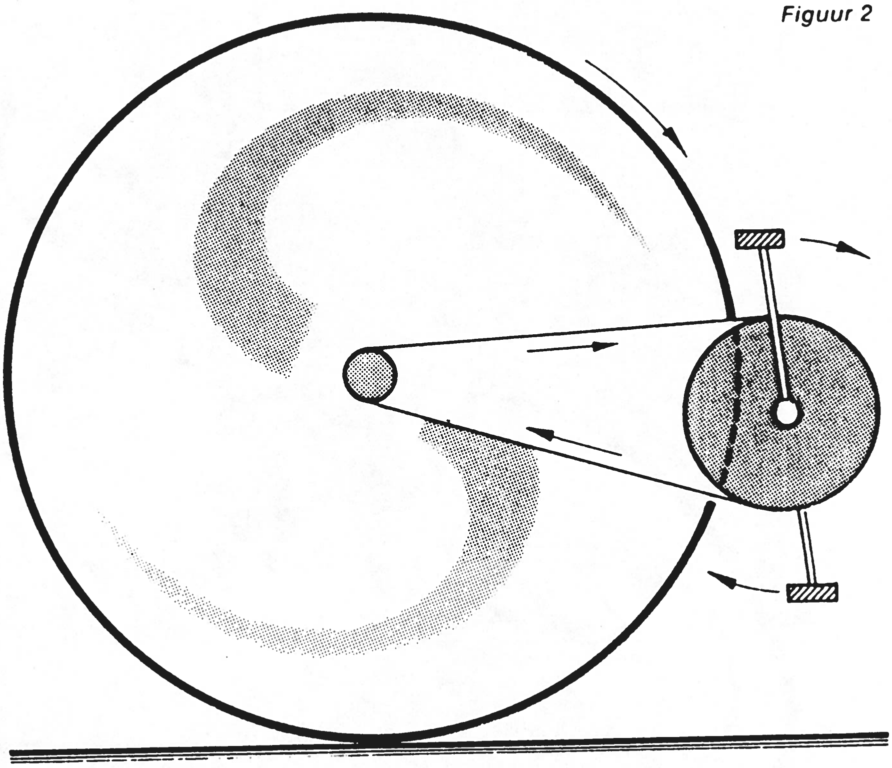
Want kenners (en zeker wielrenners) letten altijd meteen op de 'versnelling' die wordt gebruikt. Bij de record-fiets van Moser is dat wel een heel bijzondere. Met name vanwege dat enorme achterwiel.

De aandacht van een beetje kenner gaat dus al snel uit naar de zin die begint op de tweede regel van de rechter kolom.

> *Per pedaalslag legde hij met zijn versnelling* (47 × 17) 8 meter en 20 centimeter af.

Wat daarin niet klopt is die 8 meter en 20 centimeter die per pedaalslag worden afgelegd. Ook voor niet-kenners die daar

Figuur 2



eenmaal op gewezen zijn, is dat eenvoudig na te gaan.

Wat betekent 47 × 17?
Met 47 wordt het aantal tanden bedoeld van het grote kettingblad dat aan de trappers vastzit. Het getal 17 slaat op het aantal tanden van het (kleine) achterkettingwiel dat aan het achterwiel vastzit (figuur 2).

Overbrenging
Een *pedaalslag* is één rondgang van elke trapper. Met één pedaalslag gaat het kettingblad ook precies één keer rond. Als het kettingblad 47 tanden heeft, moet de ketting daarbij 47 tanden opschuiven (figuur 2). Ook langs het achterkettingwiel moet de ketting dan 47 tanden opschuiven. Daarvoor moet het achterkettingwiel 47 gedeeld door 17 keer rond. Dat is afgerond 2,76 keer.

In het algemeen heet het aantal tanden van het kettingblad gedeeld door die van het achterkettingwiel de *overbrenging*.
Met een rondgang van het achterkettingwiel gaat ook het achterwiel precies één keer rond. De overbrenging geeft dus aan hoe vaak het achterwiel rond gaat bij één pedaalslag.

Verzet

Als het achterwiel één omwenteling maakt, wordt de omtrek ervan precies één keer langs de weg afgewikkeld. Indien het wiel niet slipt, gaat de fiets dan even veel meters vooruit als het aantal meters dat de omtrek van het achterwiel bedraagt. Voor een achterwiel met middellijn (diameter) d is dat $\Pi \cdot d$ meter.
De afstand die een fiets per pedaalslag vooruit gaat, heet *verzet*. Bij een overbrenging B gaat het achterwiel B keer rond. Het verzet V wordt dan

$$V = B \cdot (\Pi \cdot d) \qquad (1)$$

Doorgaans spreekt men van een hoge of zware versnelling als het verzet groot is, van een lage of lichte versnelling als het verzet klein is.

Eén pedaalslag van Moser

Voor de record-fiets van Moser gold $B = 2{,}76$ en $d = 1{,}03$ m. Deze waarden ingevuld in (1) leveren een verzet V van 8,93 m. Kortom, per pedaalslag legde Moser 8 meter en 93 centimeter af! Dat is 73 centimeter meer dan in het krantebericht is vermeld.

Vergelijk dat eens met een normale fiets. Die heeft doorgaans een versnelling van 48 × 20 en wielen met een diameter van 27 of 28 inch (1 inch = 2,54 cm = 0,0254 m). De waarde van B is dan 2,4. B en d invullen in (1) levert voor 27 inch wielen een verzet van 5,17 m en voor 28 inch wielen 5,36 m.

Geen record-fiets

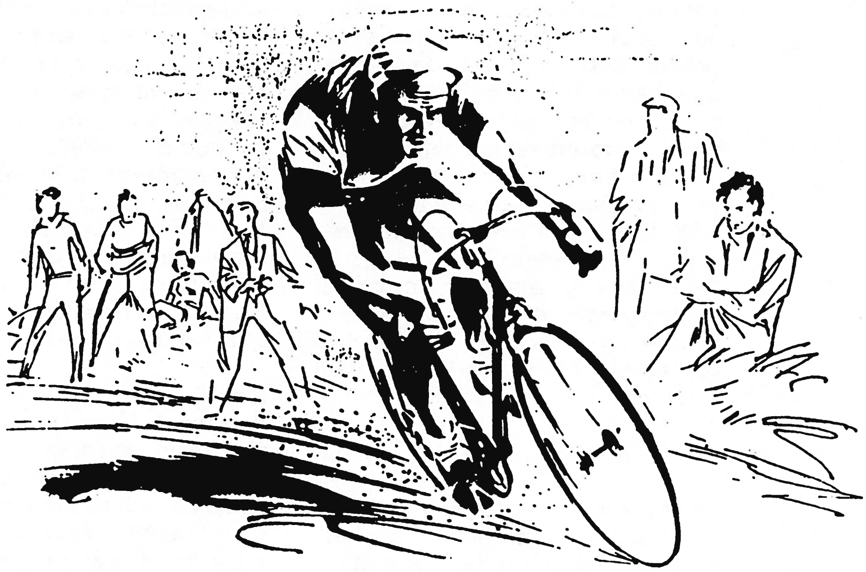
Niemand zal het in zijn hoofd halen om met een normale fiets een uurrecord te willen vestigen. Zelfs al zou die fiets van het lichtste materiaal zijn gemaakt, dichte wielen hebben, voorzien zijn van een ossekopstuur, enzovoort. Maar waarom eigenlijk niet?
In principe hoeft het niet aan de fiets te liggen. Per pedaalslag van Moser zou er op een normale fiets iets meer dan anderhalve pedaalslag moeten worden gedaan. Maar dat is nu juist gemakkelijker gezegd dan gedaan!

De soepele tred

Regelmatig herhaalde bewegingen zoals lopen, zwemmen, roeien of fietsen gaan bij een bepaald ritme of cadans het gemakkelijkst en efficiëntst. Voor de cirkelvormige beenbeweging van het fietsen is dat 80 tot 90 (voor wielrenners) pedaalslagen per minuut. Laten we die *optimale cadans* of *soepele tred* maar houden op 90 pedaalslagen per minuut.
Met hoge snelheid fietsen — zeker langdurig — is dus niet een kwestie van maar zoveel mogelijk pedaalslagen per minuut maken. Het komt er op neer om ongeveer 90 pedaalslagen per minuut te maken met een zo zwaar mogelijke versnelling ('De grote molen zien rond te krijgen' zou Mart Smeets zeggen). En hoe gunstiger de omstandigheden (lichte fiets, zo weinig mogelijk wrijving, geen helling, enzovoort), des te zwaarder de versnelling kan zijn.

De tred van Moser

Moser legde in 1 uur een afstand af van 50 kilometer 644 meter en 65 centimeter (50 644,65 m). Hoeveel pedaalslagen deed hij gemiddeld per minuut?



Daartoe moet die 50 644,65 m eerst worden gedeeld door 60 (het aantal minuten in een uur) en daarna door 8,93 m (het verzet van Moser). Dat levert afgerond 94,5 pedaalslagen per minuut. Komt inderdaad aardig in de buurt van de 90. Niet zo verwonderlijk, want na heel wat uitproberen zal zijn verzet daar ongetwijfeld min of meer op zijn afgestemd.

Hoeveel pedaalslagen heeft Moser maximaal per minuut gemaakt?
Zijn maximale snelheid was 54 278 meter per uur (54,278 kilometer per uur). Deze afstand delen door 60 én het verzet van 8,93 m levert afgerond 101,3 pedaalslagen per minuut. Al te veel boven zijn optimale cadans om lang vol te kunnen houden. Was dat wel zo (en dat had hij tijdens de training kunnen merken), dan had hij een zwaardere versnelling moeten kiezen. Bij voorbeeld 47 × 16. Die had hem een verzet geleverd van 9,51 m (reken maar na met formule (1)). Met 95,1 pedaalslagen per minuut had hij dan iets gemakkelijker gereden en 54 278 m in een uur hebben afgelegd.

Maar Moser zal tijdens de training wel gemerkt hebben dat die versnelling te zwaar voor hem was om in zijn optimale cadans te komen.

Op een normale fiets
Welke afstand zou Moser met die gemiddelde cadans van 94,5 pedaalslagen per minuut op een normale fiets hebben afgelegd?
Met 27-inch-wielen (verzet 5,17 m) 29 kilometer 313 meter en 90 centimeter. Met 28-inch-wielen (verzet 5,36 m) 30 kilometer 391 meter en 20 centimeter. Niet te

vergelijken met zijn record-afstand.

Hoeveel pedaalslagen per minuut zou hij op een normale fiets hebben moeten doen om zijn record-afstand te halen?
Met 27-inch-wielen (verzet 5,17 m) 163,3 en met 28-inch-wielen (verzet 5,36 m) 157,5.
In beide gevallen veel te veel boven zijn optimale cadans. Moser zou zich letterlijk rot hebben getrapt en waarschijnlijk doodop ver vóór het verstrijken van het uur zijn afgestapt. □

Niet in fase

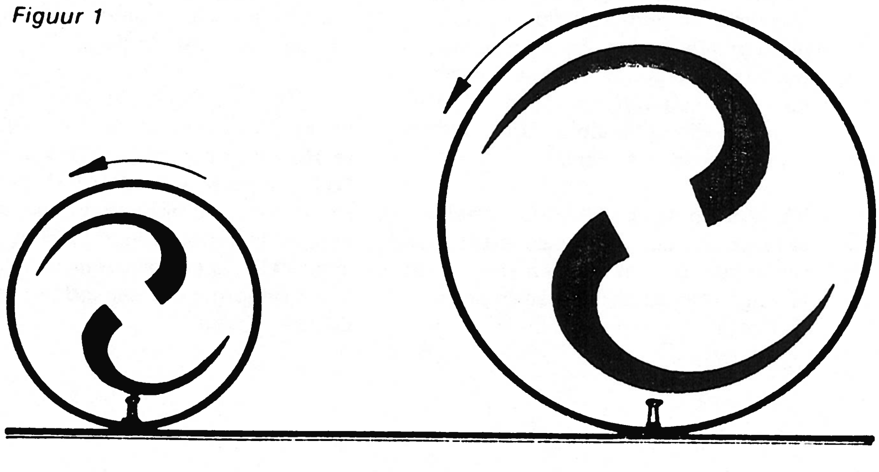
Moser's recordpoging werd rechtstreeks uitgezonden door de Italiaanse tv. Of dat een erg boeiende uitzending is geweest, laten we maar in het midden.

Toch moet het voor de kijkers in het begin wel even wennen zijn geweest om Moser zo te zien rijden. Want door het grote verschil in afmetingen van de wielen draaiden deze niet gelijk op ('niet in fase' zo gezegd), zoals bij een normale fiets. Het voorwiel maakte veel meer omwentelingen. Dit zal des te opvallender zijn geweest, omdat de wielen dicht waren, zodat ze beschilderd konden worden (figuur 1).

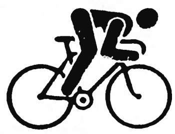
Neem eens aan dat bij de start de ventielen van beide wielen in de laagste stand, vlak boven de grond, stonden (figuur 1). Ga er bovendien van uit dat de opgegeven maten van de wielen kloppen (diameter voorwiel 58,5 centimeter en diameter achterwiel 103 centimeter). Na hoeveel omwentelingen van beide wielen zou die stand opnieuw zijn bereikt?
Hoeveel keer komt de stand die de wielen bij de start innamen (figuur 1), nog voor op het hele traject van 50 644,65 meter?

Oplossingen op bladzijde 32. □

Figuur 1



Wat is efficiënt en gemakkelijk?



De cirkelvormige beenbeweging van het fietsen gaat het efficiëntst en gemakkelijkst bij zeg maar 90 pedaalslagen per minuut. Om dat wat nader te verklaren is een uitstapje naar de natuurkunde nodig.

Net als voor elke andere inspanning is voor fietsen energie nodig, en wel *lichaamsenergie*. Er moet immers arbeid worden verricht.
Is de fiets eenmaal op gang en wordt er met constante snelheid gereden, dan moet er arbeid worden verricht om de wrijving van de wielen met de weg en de weerstand van de lucht te overwinnen. De energie die daarvoor nodig is, wordt hier voor het gemak de *aan de fiets afgeleverde energie* genoemd.

Nu zou het mooi zijn als van elke gebruikte kilojoule lichaamsenergie er ook precies één kilojoule aan de fiets wordt afgeleverd. Maar zo is het niet. In de regel is de aan de fiets afgeleverde energie slechts een gedeelte van de gebruikte lichaamsenergie.

Welk gedeelte? Dat hangt af van het aantal pedaalslagen per minuut. Dat gedeelte blijkt het grootst te zijn bij ongeveer 90 pedaalslagen per minuut, de *optimale cadans*. Bij meer of minder pedaalslagen per minuut neemt dat gedeelte af. Van persoon tot persoon kan die optimale cadans iets verschillen, maar niet veel.

Wil iemand dus zo efficiënt mogelijk omgaan met zijn lichaamsenergie, dan zal hij hoe dan ook moeten zorgen dat hij ongeveer 90 pedaalslagen per minuut maakt.

Met het gegeven dat er ongeveer 90 pedaalslagen per minuut gedaan moeten worden, blijft er niets anders over dan dat met een zo groot mogelijk verzet te doen. Hoe groter het verzet, des te groter is zo de afstand die per minuut wordt afgelegd (en dus ook de snelheid).
Omdat bij een groter verzet de afstand die per minuut wordt afgelegd, groter is, moet ook de aan de fiets afgeleverde energie groter zijn. Door die grotere afstand is er immers ook meer wrijving van de wielen met de weg en meer luchtweerstand. En dat maakt weer dat de gebruikte lichaamsenergie groter wordt. Vandaar dat men bij een groot verzet ook wel spreekt van een zware versnelling.

Kortom, hoe meer lichaamsenergie iemand per minuut weet te gebruiken, hoe groter verzet hij 'rond' kan krijgen en hoe sneller hij gaat. En de lichaamsenergie die iemand per minuut weet te gebruiken, hangt natuurlijk af van de 'vorm van de dag'.

Nu zal ook duidelijk zijn waarom Moser zo'n 'gestroomlijnde' fiets gebruikte. Het vermindert zijn luchtweerstand. Zo kan hij met gebruik van dezelfde lichaamsenergie per minuut nog met een nét iets groter verzet rijden. Want uiteindelijk is er een grens aan de lichaamsenergie die iemand per minuut kan gebruiken. □

Uit de praktijk

Donderdag 9 juni werd in de *Giro d'Italia* (Ronde van Italië) een twaalf kilometer lange tijdrit tegen een berg op gehouden. Deze tijdrit zou naar ieders mening van doorslaggevende betekenis zijn voor de eindoverwinning van de Giro. Daarvoor kwamen toen het meest de Amerikaan *Andrew Hampsten* en het opkomende Nederlandse talent *Erik Breukink* in aanmerking. Zij stonden met gering tijdsverschil respectievelijk nummer 1 en nummer 2 in het klassement. Hampsten bleek in deze tijdrit stukken sneller te zijn en vergrootte daarmee zijn voorsprong in het klassement op Breukink.

In de krant stond de volgende dag een verslag van deze tijdrit. Daarin waren onder andere enkele verklarende woorden van Erik Breukink opgenomen. Uit dit verslag hieronder twee fragmenten.

> De stijging bleek te zwaar voor machtklimmer Breukink. Hij had voortdurend problemen met zijn versnelling en kwam daardoor niet in het gewenste ritme. De keus van de verzetten was verkeerd geweest, wat enerzijds op een gebrek aan ervaring en anderzijds op vermoeidheid na een zware ronde kan duiden. Opmerkelijk was in elk geval dat Hampsten een zwaarder verzet reed dan Breukink, terwijl dat normaal andersom is.

> Ik heb in de tijdrit op mijn lichtste verzet moeten rijden, maar om verschillen te maken had ik zwaarder, 40x19, moeten draaien", verklaarde Breukink. „En dat lukte niet. Ik heb te veel op de 40x20 moeten rijden."
>
> Een opvallend verschil met Hampsten die soms 42x20, maar meestal 42x19 gebruikte, een verschil van een halve meter per pedaalomwenteling.

De wielen van een racefiets hebben standaard een diameter van 27 inch (1 inch = 2,54 cm). Reken de verzetten die bij de genoemde versnellingen horen, maar eens na en vergelijk ze met elkaar.

Antwoorden op bladzijde 32. □

Waarom dat enorme achterwiel?

Voor een groot verzet is dat buitensporig grote achterwiel van Moser niet nodig. De wielen van een 'gewone' racefiets hebben standaard een diameter van 27 inch (1 inch = 2,54 cm). Toch zijn versnellingen met verzetten die in de buurt liggen van dat van Moser (8,93 meter) daarop geen uitzondering. Vergelijk maar met de tabel.

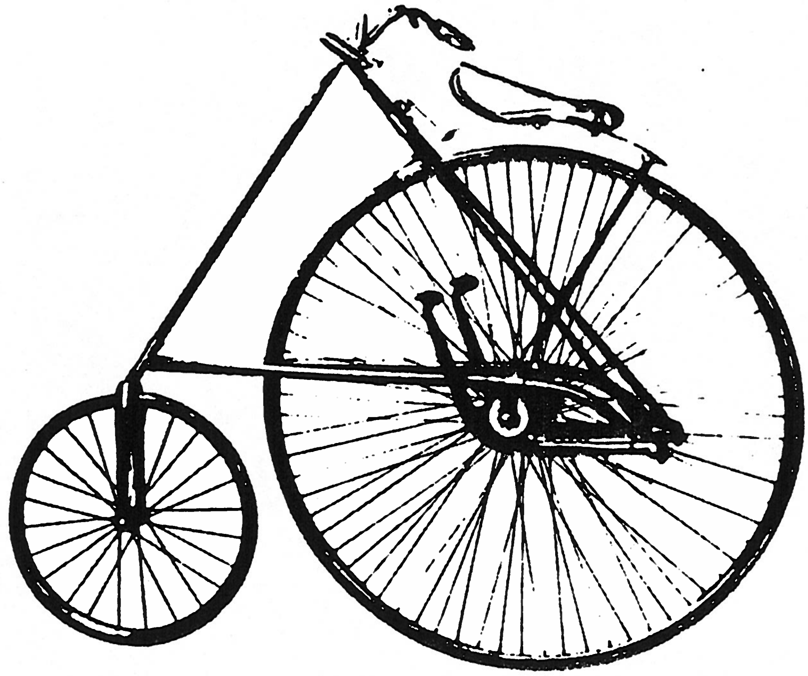
De 'grote molen'
Met 54 × 14 (de 'grote molen') of 54 × 13 wordt gereden als een peloton 'op drift' is. De snelheden liggen dan ruwweg tussen de 45 en 50 kilometer per uur (zie tabel). In zo'n geval rijdt telkens één renner een klein tijdje op kop en houdt de achter hem rijdende renners 'uit de wind'. Die ondervinden dan minder luchtweerstand en kunnen dus wat meer op het gemak volgen. Iets wat natuurlijk niet gaat als je alleen rijdt, zoals Moser.

De sprint
De 54 × 12 wordt gebruikt bij de eindsprint. Het komt er dan op aan om die kortstondig met zoveel mogelijk pedaalslagen per minuut rond te draaien. Gemak en efficiëntie spelen daarbij een ondergeschikte rol. De snelheden die worden bereikt, komen een heel eind in de buurt van de 60 kilometer per uur (zie tabel). Houdt absoluut niemand op een gewone vlakke weg langdurig vol.

Waarom gebruikte Moser dan geen gestroomlijnde gewone racefiets? Om het verzet hoefde hij het niet te laten. Vermoedelijk is de totale luchtweerstand van fietser plus fiets bij gebruik van zo'n groot achterwiel kleiner. Wat dat betreft helpen alle kleine beetjes, want het verzet van Moser is niet gering. Zeker als je dat vergelijkt met de omstandigheden waarbij overeenkomstige verzetten worden gebruikt bij wegwedstrijden. □

Hoge versnellingen van een gewone racefiets

Versnelling	Verzet	Snelheid bij 90 pedaalslagen	Snelheid bij 100 pedaalslagen
54 × 14	8,31 m	44,874 km per uur	49,9 km per uur
54 × 13	8,95 m	48,330 km per uur	53,7 km per uur
54 × 12	9,70 m	52,380 km per uur	58,2 km per uur



Fiets uit 1881. Ook al met een enorm groot achterwiel (maar met een zeer ongebruikelijk trapstel).

Ook mooi!

Naar aanleiding van 'Is dat niet mooi?' uit Pythagoras 27-4 bladzijde 3 stuurde *D. Boonstra* uit Amstelveen ons onder andere de volgende fraaie vondsten:

$$(3 + 4)^3 = 343$$

$$243 : 324 = 324 : 432$$

Uit de tweede vondst is ook nog af te leiden:

$$486 : 648 = 648 : 864$$

Wie weet nog meer? □

Bijlage 4

Uit Arithmetic teacher, december 1989

DEAS

Name ____________________

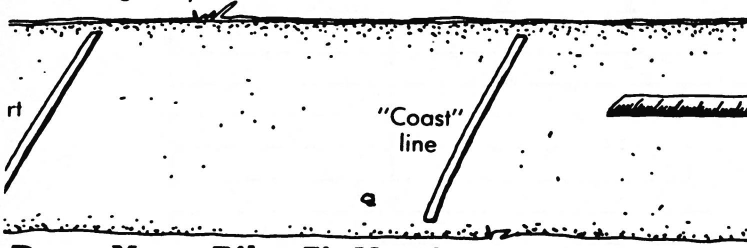
Bicycling at Home

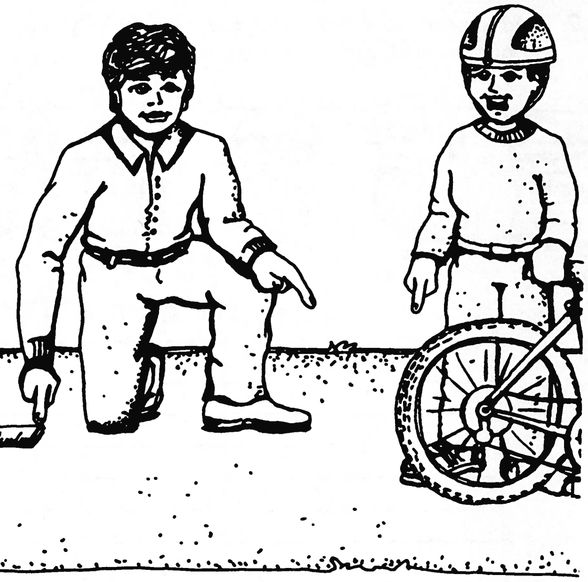
Dear Parents,

Your child has been using mathematics in class while collecting and investigating data about bicycles and bicycling. Two additional activities are suggested on this sheet. You and your child may want to do one or both of them together. The results can be recorded and shared with classmates.

How Far Can You Coast on Your Bike?

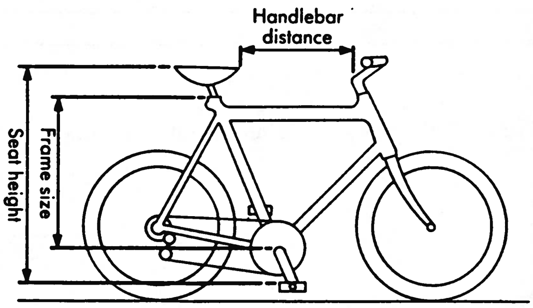
1. Find a level place for bicycling and mark a start line and a "coast" line, as shown.
2. Pedal your bike as fast as you can from the start line until you cross the coast line, then coast on your bike (no pedaling) as far as you can go.
3. Measure the distance you coasted after crossing the coast line. You can measure with a ruler or a tape or with the length of your stride.



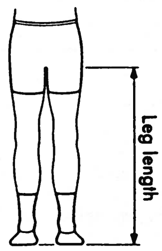


Does Your Bike Fit You?

1. Use one of these two methods to find the size of frame that fits you.
   Method A: Find your height and divide by 3.
   Method B: For a racing bike, subtract 10 in., or 25.5 cm, from your leg length. For a mountain bike, subtract 11 in., or 28 cm, from your leg length.
   Measure the size of your bicycle's frame and compare it with your results.
2. The bicycle seat height should be 109 percent of your leg length.
3. The handlebar height should be about the same as the seat height (except for high risers).
4. The distance from the handlebar to the seat should be the same as that from your elbow to your fingertips.



Measuring frame size, seat height, and handlebar distance



Measuring leg length

Caution: If you make adjustments to the seat or the handlebars so they fit you better, make sure that you leave at least 2.5 in., or 6 cm, of the seat post inside the seat tube and the same amount of the stem in the head tube.

From the *Arithmetic Teacher*, December 1990

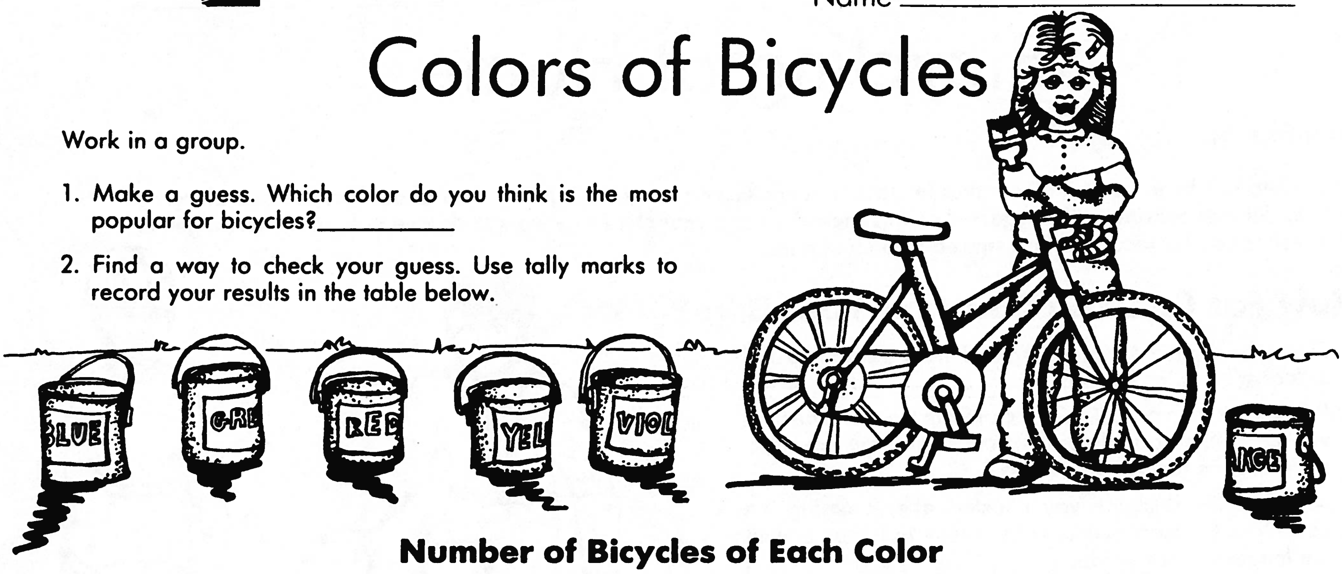
IDEAS

Name ____________________

Colors of Bicycles

Work in a group.

1. Make a guess. Which color do you think is the most popular for bicycles?__________
2. Find a way to check your guess. Use tally marks to record your results in the table below.



Number of Bicycles of Each Color

Colors	Tally marks	Number

3. Write a story. Tell what you did and what you found out about your guess.

____

(Title)

____

____

____

____

____

4. Are the most popular colors listed on the "Bicycling Data Sheet" the same as the ones you found?

____

____

From the *Arithmetic Teacher*, December 1990

DEAS

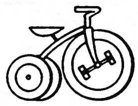
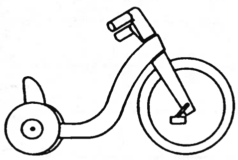
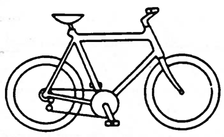
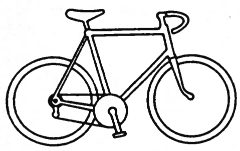
Name ______________________________

Pedals and Wheels

Work in a group.

1. Measure the circumference (distance around wheel) of the front wheel for each tricycle and bicycle. Record the measurements in the table below.
2. Turn the pedal one complete turn and measure the distance each type of tricycle and bicycle moves. Finish the table to find how far each one moves for one to five turns of the pedal.

Distance Traveled by Tricycles and Bicycles

	Number of pedal turns	1	2	3	4	5
	Small tricycle ______________ (Distance around wheel)					
	Big Wheel™ ______________ (Distance around wheel)					
	Twenty-inch bicycle ______________ (Distance around wheel)					
	Twenty-six-inch bicycle ______________ (Distance around wheel)					

3. Which cycle went the farthest in five turns of the pedal? __________ Tell why.

____

____

____

____

____

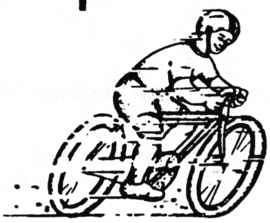
____

From the *Arithmetic Teacher*, December 1990

IDEAS

Name ______________________

What Is Your Bicycling Speed?



Work in a group.

1. Use the animal speeds on the "Bicycling Data Sheet" to finish this sentence:
   When I ride a bicycle, I think I can go as fast as a ______________ (Name of animal),
   which can run __________ per hour.
2. Use a bicycle to collect data for A, B, and C and write how you found the data.
   You will need these data to compute your bicycling speed.

Data	How data were obtained
A. Number of wheel revolutions for each pedal revolution (gear advantage or gear ratio) ______________	
B. Distance around a tire (wheel circumference) ______________	
C. Number of revolutions of pedal you can make in one minute ______________	

3. How far can you pedal in one minute? (Multiply answers A × B × C.)
   ____
4. How far can you pedal in one hour? ______________
   Tell how you found out.
5. What is your bicycling speed per hour? ______________
6. How does your actual speed in problem 5 compare with the speed you guessed in problem 1? Are the two speeds close?

From the *Arithmetic Teacher*, December 1990

IDEAS

Name ____________________

Bicycling Data Sheet

Percentages of U.S. adults participating in leisure sports

	1989	1988
Swimming	38	36
Fishing	29	29
Bicycling	28	24
Bowling	22	21
Camping	22	19
Hiking	20	16
Pool or billiards	20	17
Running or jogging	19	17
Weight training	16	19
Bicycle touring or racing	16	11
Softball	16	16
Volleyball	15	13
Motorboating	15	12
Aerobics or "dancercize"	13	14
Golf	13	12

Source: Gallup Organization

Percentages of 1989 bicycle sales by color for bicycles twenty inches and larger

Blue	24
Black	23
Red	22
White	8
Silver	5
Yellow	2
All others	16

Source: Bicycle Market Research Institute

U.S. bicycle sales (in millions)

	Domestic shipments		Imports	
Type of bicycle	1980	1989	1980	1989
Twenty-inch wheels	3.7	2.3	0	1.5
Lightweight	3.2	1.1	1.7	2.3
Other	0.1	1.9	0.3	1.5

Source: Adapted from data provided by the Bicycle Manufacturers Association of America

Sizes of tricycle and bicycle wheels (diameters in inches)

Standard tricycles:	10, 12, 13, 16
Big Wheels™:	11, 11½, 13, 16,
Bicycles:	10, 12, 16, 18, 20, 24, 26, 27

U.S. bicycle sprint-speed records (1990)

Male		
Age	km/h	mph
13–14	59.68	37.06
15–16	63.26	39.28
17–18	66.22	41.12
19+	69.81	43.35
Female		
Age	km/h	mph
13–15	53.03	32.93
16–17	60.32	37.46
18+	63.78	39.61

Source: Adapted from data provided by U.S. Cycling Federation

Canadian bicycle sprint-speed records (1990)

Sex	km/h	mph
Male	68.51	42.54
Female	59.95	37.23

Source: Adapted from data provided by Canadian Cycling Association

Animal speeds and bicycling speeds

	km/h	mph
Human bicycling behind a car	245	152
Cheetah	101	63
Red kangaroo	72	45
Racehorse	69	43
Greyhound	68	42
Rhinoceros	56	35
Giraffe	51	32
Human bicycling for 1 hour	50	31
Human running	42	26
Elephant	39	24
Blue whale	37	23
Lizard	29	18
Bee	18	11
Penguin (in water)	13	8

Source: *Guinness Book of Essential Facts*

From the *Arithmetic Teacher*, December 1990