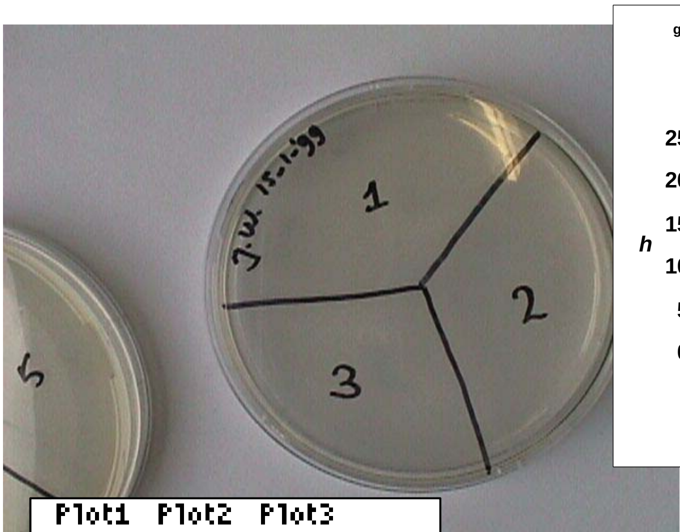
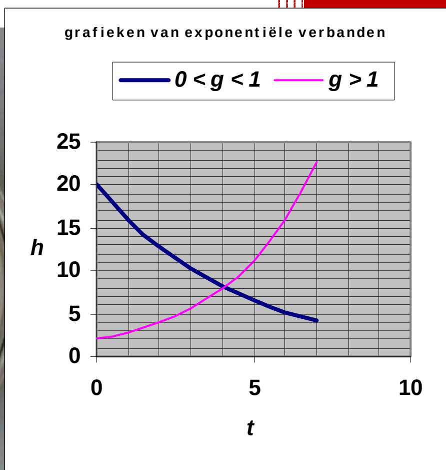
NAAM:

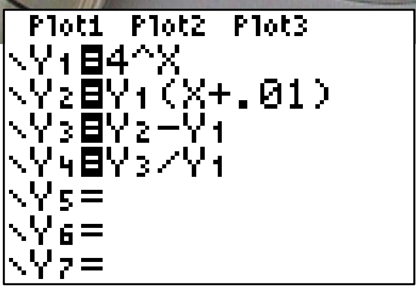
KLAS:

SaLVO!

13 Exponentiële functies







$$\Delta x = \alpha\, x$$

WISKUNDE

NATUURKUNDE

BIOLOGIE

SCHEIKUNDE

KLAS 5 VWO

SaLVO!

Dit lesmateriaal is een onderdeel van het samenwerkingsproject SaLVO! dat als doel heeft om meer samenhangend onderwijs te ontwikkelen in de bètavakken.

Overzicht projectmateriaal

De leerlijn SaLVO! rond verhoudingen, verbanden, formules en grafieken is opgebouwd uit een aantal delen bij verschillende vakken:

biologie = B, economie = E, informatiekunde = I, natuurkunde = N, scheikunde = S en wiskunde = W.

deel	titel	vak(ken)	leerjaar
1	Verhoudingen en evenredigheden	W	2 HV
2	Een verband tussen massa en volume	N	2 HV
3	Vergroten en verkleinen	N, W	2HV
4	Omgekeerd evenredig verband	W	2/3 HV
5	Planeten en Leven	B, N, S, W	2/3 HV
6	Economie en procenten	E, W	3 HV
7	Verhoudingen bij scheikundige reacties	S	3 HV
8	Formules en evenredigheden	N	3HV
9	Vergelijkingen in de economie	E, W	3 HV
10	Exponentiële verbanden	I, N, W	3 HV
11	Evenredigheden en machten	W	4 HV
12	Verbanden beschrijven	N	4 HV
13	Exponentiële functies	B, N, S, W	5 V
14	Periodieke functies	N, W	5 V

Colofon

Project SaLVO! (Samenhangend Leren Voortgezet Onderwijs)

Auteurs Ad Mooldijk, Henk van der Kooij

Versie september 2009

M.m.v. St. Bonifatiuscollege, Utrecht
Geref. Scholengemeenschap Randstad, Rotterdam
Freudenthal Inst. for Science and Mathematics Education, Univ. Utrecht

Copyright

Voorwoord

Het deel 'Exponentiële functies' is gemaakt voor vijfde klas vwo leerlingen en hoort bij de vakken biologie, natuurkunde, scheikunde en wiskunde.
Als je eenmaal meetresultaten hebt, wil je ook weten of tussen de gemeten grootheden een bepaald verband bestaat. Je wilt immers graag voorspellingen doen over andere waarden van de grootheden of je wilt met je resultaten een beter inzicht krijgen in wat er aan de hand is, iets wat je theorievorming zou kunnen noemen. Dus is heel interessant hoe je het verband tussen twee grootheden kunt beschrijven. Hoe dat voor verbanden met een exponentieel karakter in zijn werk gaat wordt duidelijk gemaakt in dit deel. In het eerste gedeelte komt wiskundig aan de orde hoe veranderingen zorgen voor exponentiële verbanden. Daarna komen exponentiële verbanden in de natuur aan de orde en hoe je deze kunt herkennen en vastleggen. Daarna komen nog een aantal verrassende zaken van dit soort verbanden aan de orde.

Inhoudsopgave

Exponentiële verbanden

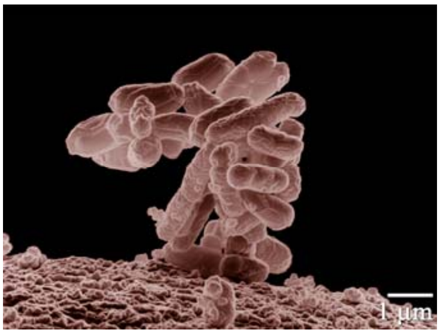
1 Discrete groei en afname

In deze paragraaf wordt kennis over begrippen als groeifactor en verdubbelingtijd opgehaald en verdiept.

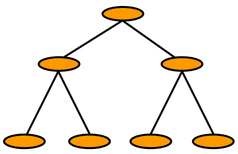
Paragraafvraag	Hoe beschrijf je het verschil tussen lineaire en exponentiële groei?

Instap **Escherichia coli (E.coli)**

De volgende informatie komt van Wikipedia.

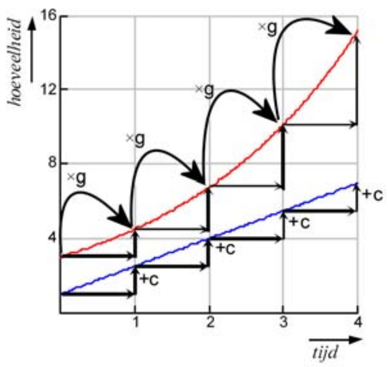


Escherichia coli is een van de meest voorkomende soorten bacteriën in de dikke darmen en is nodig voor het verteren van voedsel. De bacterie is genoemd naar de Oostenrijkse microbioloog Theodor Escherich.
Gemiddeld komen zo'n 100 miljard tot tien biljoen van deze bacteriën per dag via de ontlasting van de mens naar buiten en als *E. coli* (de gebruikelijke afkorting) in water wordt aangetroffen is dat dus een indicatie dat het water met uitwerpselen vervuild is.
De bacterie kan snel gekweekt worden, aangezien deling onder goede omstandigheden ongeveer iedere 20 minuten optreedt (vanuit een enkele bacterie zijn er dus ongeveer 70 miljard binnen een halve dag te maken).

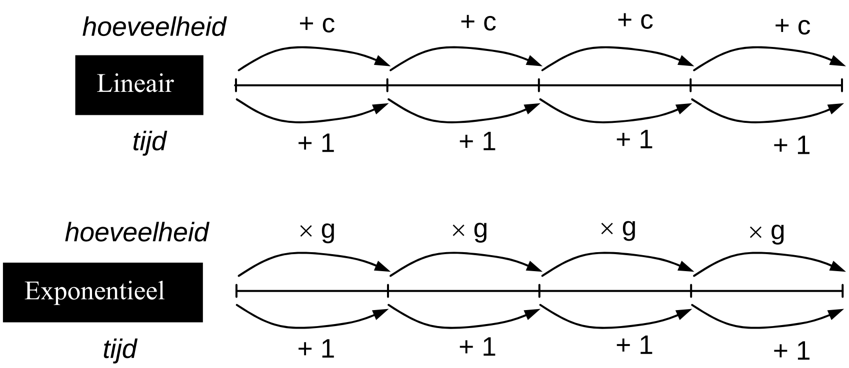


Neem voor het gemak aan dat celdeling (dus verdubbeling van het aantal!) steeds precies na 20 minuten plaatsvindt en dat je met één bacterie begint.

a. Hoeveel zijn er dan na 1 uur? En hoeveel na drie uren?
b. Wat verandert aan de aantallen van a. als je start met 128 bacteriën?
c. Wat is de groeifactor per 20 minuten? En per uur?
d. Controleer of de genoemde 'ongeveer 70 miljard' klopt.
e. Je raakt er per dag nogal wat kwijt! Wordt dat wel voldoende aangevuld?



De verschillen tussen de karakteristieke eigenschappen van lineaire en exponentiële groei zijn mooi schematisch weer te geven:



Bespreking **Groei en afname**

Bespreek met medeleerlingen de volgende vragen:

a. Wat is de definitie van groeifactor bij exponentiële groeiprocessen?

b. Naast groei (toename) is ook afname mogelijk. Welk gevolg heeft dat voor de waarden van c en g in bovenstaande karakteristieken?

c. Is een negatieve groeifactor mogelijk?

d. Hoe kun je een groeifactor aanpassen aan een andere tijdstap dan $\Delta t = 1$?

De twee meest voorkomende soorten groeiprocessen zijn *lineaire* en *exponentiële* groei. De karakteristieken van deze groeimodellen zijn

Lineaire groei:	bij elke vaste tijdstap wordt een constante hoeveelheid **c** opgeteld bij de aanwezige hoeveelheid. Dus: $L(t+1) = L(t) + c$ Met startwaarde $L(0)$ geldt dus: $L(1) = L(0) + c$, $L(2) = L(1) + c$, ...
Exponentiële groei:	bij elke vaste tijdstap wordt de aanwezige hoeveelheid met een constant getal **g** vermenigvuldigd. Dus: $E(t+1)= g \cdot E(t)$ Met startwaarde $E(0)$ geldt dus: $E(1) = g \cdot E(0)$, $E(2) = g\cdot E(1)$, ...

Lineaire groei met startwaarde 5 en constante c = 2 geeft dus:
$L(1) = 5 + 2 = 7$, $L(2) = L(1) + 2 = 7 + 2 = 9$, ...

Exponentiële groei met startwaarde 5 en groeifactor g = 2 geeft dus:
$E(1) = 2 \cdot 5 = 10$, $E(2) = 2 \cdot E(1) = 2 \cdot 10 = 20$, ...

1 Spelen met de formules

a. Bij de formules in het kader hierboven hoort een vaste tijdstap 1, dus $\Delta t = 1$. Waaruit blijkt dat?

b. Verklaar: $L(t+2) = L(t) + 2 \cdot c$ en $E(t+2) = g^2 E(t)$

Probeer de verklaring te geven met behulp van een redenering en laat ook met algebra zien dat het klopt.

Uit de gegeven recursieve beschrijvingen voor lineaire groei $L(t+1)=L(t) + c$ en voor exponentiële groei $E(t+1)=g \cdot E(t)$ kun je de volgende directe formules afleiden:

Lineaire groei:	$L(t)=L(0)+ c \cdot t$	met $L(t)$ de hoeveelheid op tijdstip t $L(0)$ de beginhoeveelheid op $t = 0$ c de constante toename bij $\Delta t = 1$
Exponentiële groei:	$E(t)=E(0) \cdot g^t$	met $E(t)$ de hoeveelheid op tijdstip t $E(0)$ de beginhoeveelheid op $t = 0$ g de groeifactor bij $\Delta t = 1$ $g > 1$: groei $0< g < 1$: afname

2 Onderzoek (ga er maar even voor zitten!)

a. Beredeneer de correctheid van de twee functies die hierboven zijn gegeven. Gebruik zonodig het resultaat van vraag 1b.

b. Van een groeiproces is gegeven: $N(0) = 64$ en $N(4) = 324$
Welke functie beschrijft de groei als deze lineair is?
En welke functie beschrijft de groei als deze exponentieel is?

In de karakteristieken was sprake van een vaste tijdstap 1. Je maakt als het ware steeds een tijdsprong $\Delta t = 1$. De eenheid was er niet bij gegeven. Dus, afhankelijk van de probleemsituatie, kan $\Delta t = 1$ betekenen: 1 seconde, 20 minuten, een half uur, een jaar, een eeuw, enz.

Hoewel de tijd zelf ononderbroken doorloopt (dat wordt wel *continu* genoemd), kijken wij in deze paragraaf naar tijdsprongen van een vaste, eindige lengte. Deze manier van kijken naar het sprongsgewijs verloop van de tijd wordt vaak aangeduid met *discreet*.

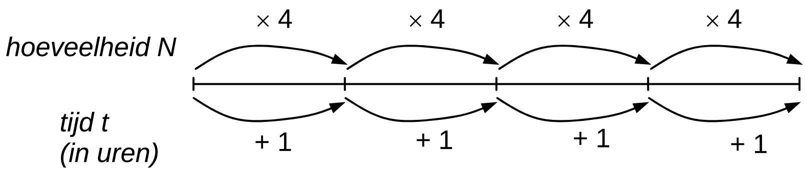
Groeiprocessen waarbij met vaste tijdstappen iets verandert, worden daarom vaak *discrete processen* genoemd, terwijl processen waarbij de veranderingen doorlopend plaatsvinden *continue processen* worden genoemd.

Op de discrete groeiprocessen ga je nu eerst wat meer oefenen. In de volgende paragraaf wordt de stap gezet naar continue processen.

3 Verandering van tijdstap

Op tijdstip $t = 0$ zijn er 500 exemplaren van een bepaald soort bacterie.

Het groeiproces wordt hieronder weergegeven.



a. Hoe groot is de groeifactor per 2 uren? En per half uur?

b. Geef de functie $N(t)$ voor de volgende drie tijdseenheden:
t in uren
t in eenheden van 2 uren
t in eenheden van een half uur

4 Procentuele groei

Een bank geeft 5% rente per jaar. Die rente wordt steeds aan het einde van het jaar berekend. Je start op 1 januari 2007 met een bedrag van €400 en je laat de rente steeds bijschijven bij het spaartegoed.

a. Hoe groot is je spaartegoed na 3 jaar?

b. Hoe lang duurt het voordat je spaartegoed is verdubbeld?

c. Wat is de groeifactor per jaar?

De bank zou de rente ook per half jaar kunnen berekenen, of per twee jaar. Maar wel zo dat er per jaar nog steeds 5% wordt gespaard.

d. Mark denkt dat de bank 2,5% per half jaar zou moeten berekenen en 10% per twee jaar. Welke denkfout maakt hij?

e. Wat zouden de percentages per half jaar en per twee jaar dan moeten zijn?

5 Nog meer procenten...

Zet de volgende percentages om in groeifactoren:

a. een toename met 20%, met 100%, met 900%, met 1%, met p%
b. een afname met 5%, met 50%, met 100%, met p%

6 Vuistregel voor verdubbelingstijd

Er is een vuistregel die procentuele groei koppelt aan de tijd die nodig is om een verdubbeling te bereiken: $p \cdot t_d \approx 70$ met p het percentage en t_d de verdubbelingstijd. Voor niet al te grote waarden van p is die regel redelijk goed bruikbaar.

a. Controleer dat bij 5% rente per jaar het inderdaad ongeveer 14 jaar duurt voordat het spaartegoed is verdubbeld.
b. Onderzoek de vuistregel ook voor 1% groei en voor 10% groei.

7 De verandering is evenredig met de hoeveelheid

a. Bekijk de twee volgende tabellen van exponentiële groei resp. afname. Vul de lege cellen van de derde rij in (ΔN staat voor de verandering, toe- of afname, van N bij tijdstap $\Delta t = 1$)

t	0	1	2	3	4
N	5	20	80	320	1280
Δ*N* (bij $\Delta t = 1$)	15				

t	0	1	2	3	4
H	1024	256	64	16	4
Δ*H* (bij $\Delta t = 1$)	- 768				

b. Geef de functies die deze twee exponentiële processen beschrijven.
c. Beschouw het gedrag van ΔN en ΔH in de tijd; welk type functie past in beide gevallen? Beschrijf ΔN en ΔH met behulp van functies.

Bij de vulling van de derde rij is gekozen voor $\Delta N(t) = N(t + 1) - N(t)$ en voor $\Delta H(t) = H(t + 1) - H(t)$

d. De functie $\Delta N(t)$ kan dus ook algebraïsch worden gevonden vanuit de functie $N(t)$. Leid deze functie af en controleer of het antwoord gelijk is aan dat van vraag c. Doe hetzelfde voor de functie $\Delta H(t)$.

We nemen nu even aan dat beide processen ook met tijdstappen $\Delta t = \frac{1}{2}$ kunnen worden beschreven.

Daarom dezelfde groeiprocessen nog eens, maar nu met tijdstap $\Delta t = \frac{1}{2}$:

T	0	0,5	1	1,5	2
N	5	10	20	40	80
Δ*N* (bij $\Delta t = \frac{1}{2}$)	5				

T	0	0,5	1	1,5	2
H	1024	512	256	128	64
Δ*H* (bij $\Delta t = \frac{1}{2}$)	- 512				

Voor ΔN geldt nu: $\Delta N(t) = N(t + \frac{1}{2}) - N(t)$

e. Leid de formule voor $\Delta N(t)$ af uit dit gegeven. Doe hetzelfde voor $\Delta H(t)$

Kennelijk geldt voor ieder exponentieel proces:

Bij een exponentieel groeiproces $N(t) = \text{b} \cdot \text{g}^t$ is
de verandering recht evenredig met de aanwezige hoeveelheid
ofwel:
$\Delta N(t) = \text{c} \cdot N(t)$
De evenredigheidsconstante c is afhankelijk zowel van de groeifactor g als van de grootte van de tijdstap Δt

8 Even spelen met *G* en Δ*G* en de tijdstap Δ*t*

Bekijk het groeiproces $G(t) = 16^t$ met t in jaren. We nemen aan dat we de grootte van de tijdstap naar believen mogen veranderen.
Dan geldt dus: $\Delta G(t) = \text{c} \cdot G(t)$

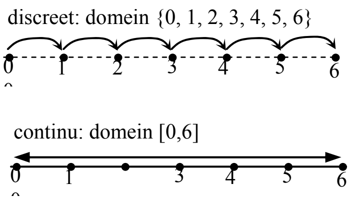
a. Voor $\Delta t = 1$ geldt: de groeifactor is g = 16 en de evenredigheidsconstante c = 15. Toon dit aan.

b. Bepaal nu zelf de groeifactor en de waarde van de constante c voor de volgende gevallen: $\Delta t = 2$, $\Delta t = 3$, $\Delta t = \frac{1}{2}$, $\Delta t = \frac{1}{3}$, $\Delta t = \frac{1}{4}$ en $\Delta t = \frac{1}{12}$

c. Bekijk de antwoorden van a. en b. goed.
Kun je bij het algemene geval $G(t) = \text{g}^t$ (bij vaste tijdstap $\Delta t = 1$) bedenken wat de groeifactor en de waarde van c zijn voor een tijdstap $\Delta t = \text{p}$, met p een of ander positief getal?

Exponentiële verbanden

2 Continue groei en afname

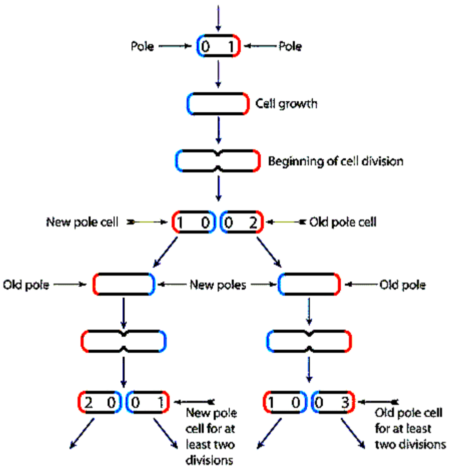


Bij de E.coli bacterie groeide het aantal cellen sprongsgewijs: elke 20 minuten is er verdubbeling. Hier is dus sprake van een discreet proces. Maar als je let op het volume, dan blijkt er wel degelijk tijdens die 20 minuten ook sprake te zijn van groei. En die groei van het volume verloopt continu. Continue modellen vind je ook bij de afkoeling van een kop koffie, bij het ontladen van een condensator en bij het gasverlies door de poreuze huid van een luchtschip.

Paragraafvraag	**Hoe zit het bij continue processen met de groeifactor?**

Instap

E.coli revisited



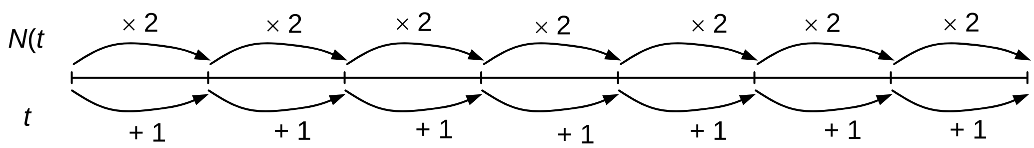
In het plaatje hiernaast zie je schematisch weergegeven dat de splitsing in twee exemplaren gebeurt op het moment dat het volume van die ene cel tweemaal zo groot is geworden. Dus voor het volume van een bacteriënkolonie geldt:
$V(t) = V(0) \cdot 2^t$ waarbij $V(0)$ het beginvolume is en t nu een continue variabele voorstelt, in eenheden van 20 minuten.

a. Wat is het volume na 20 minuten? En na 10 minuten? En na 30 minuten?
Waarom is het logisch dat het volume tussen 10 en 30 minuten verdubbelt?

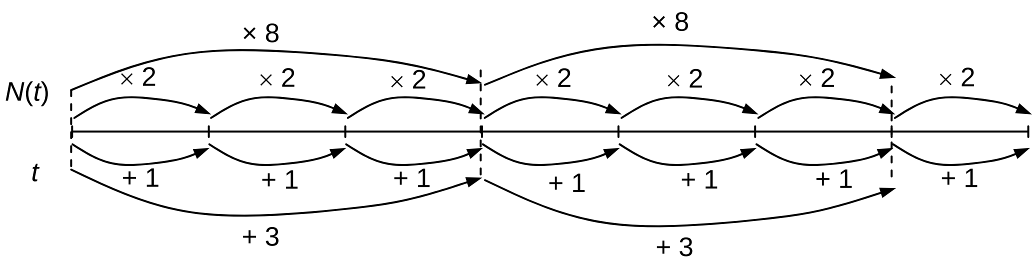
b. Op zeker moment is het volume tien keer zo groot als $V(0)$.
Na hoeveel minuten is dat zo ongeveer? Hoe lang duurt het voordat het volume 100 keer zo groot is als $V(0)$?
Wat is het verband tussen deze twee uitkomsten?

c. "Een continu proces met groeifactor 2 kan met een verandering van de tijdseenheid ook worden beschreven als een groeiproces met groeifactor 10".
Wat vind je van deze uitspraak?

Hieronder is schematisch een exponentieel proces weergegeven met groeifactor 2.



Hetzelfde proces kan ook worden weergegeven met groeifactor 8:



Daartoe moet je dus wel de tijd anders schalen: je hebt 3 tijdstappen bij groeifactor 2 nodig om één tijdstap bij groeifactor 8 te krijgen. Die tijdschaling zie je ook terug in
$8^t = 2^{3t}$

9 Tijdschaling 1

a. Leg uit, met behulp van de regels voor machten, waarom geldt: $8^t = 2^{3t}$

b. Verklaar waarom dit ook waar is: $2^t = 8^{\frac{t}{3}}$

Omdat 8 een gehele macht van 2 is, kan de tijdschaling makkelijk worden gezien. Maar bij een groeiproces met groeifactor 2 is er ook een tijdschaling mogelijk naar groeifactor 10.

Duidelijk is dat deze schaling groter is dan 3 en kleiner dan 4. Maar hoe groot is hij precies?
De vraag is dus: hoeveel tijd neemt het bij een groeiproces met groeifactor 2 om een tienvoud te krijgen?
En het antwoord daarop is: de waarde van *t* die oplossing is van de vergelijking
$2^t = 10$

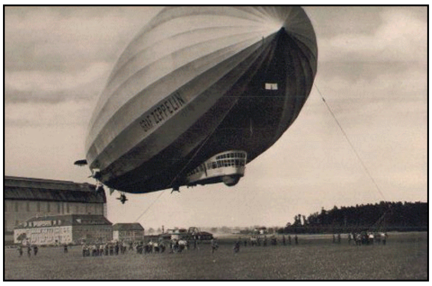
10 Tijdschaling 2

a. Controleer met je GR dat voor $2^t = 10$ geldt: $t \approx 3{,}322$

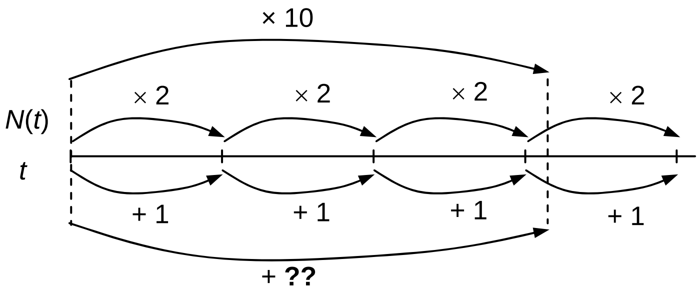
b. Toon aan: $2^{3{,}322t} = 10^t$

Omgekeerd kan een proces met groeifactor 10 worden omgeschreven naar een proces met groeifactor 2.

c. Toon aan: $2^t = 10^{\frac{t}{3{,}322}} = 10^{0{,}3010t}$



11 Exponentieel verval (afname)



De Hindenburg was een gigantisch Duits luchtschip dat vluchten uitvoerde op onder andere New York, waar het in 1936 volledig uitbrandde. Door de poreuze wanden lekte veel waterstof weg. Een volledige vulling met 180 000 m3 waterstof werd in 10 dagen gehalveerd. Ook in dit geval is sprake van een exponentieel proces, maar nu met afname in plaats van toename.

a. Welke formule beschrijft de hoeveelheid aanwezige waterstof *W* als functie van de tijd *t* (eenheid 10 dagen)?

b. $W(t) = 180\,000 \cdot (0{,}933)^t$ geeft de hoeveelheid waterstof in de tijd met als eenheid de dag. Toon dat aan.

Moderne luchtschepen zijn veel kleiner en verliezen veel minder gas: ze starten met een vulling van 3000 m^3 en verliezen 2% gas per 10 dagen.

c. Geef de formule voor het volume (in m^3) als functie van de tijd (eenheid 10 dagen).

d. Na hoeveel dagen is het volume gehalveerd?

In de natuurwetenschappen wordt bij exponentieel verval vaak gebruik gemaakt van het begrip *halfwaardetijd*. Dat is de tijd die nodig is om een hoeveelheid terug te brengen tot de helft van de oorspronkelijke waarde.

Een voorbeeld (uit Wikipedia):

> De halfwaardetijd voor tritium is 12,33 jaar. Na 12,33 jaar is dus de helft van het tritium omgezet in helium, na nog eens 12,33 is er nog maar een 1/4 deel van het oorspronkelijke tritium over, na weer 12,33 jaar 1/8, enz.

Voor tritium geldt dus de volgende functie: $T(t)=T(0) \cdot \frac{1}{2}^{t}$ waarbij de tijdseenheid dus 12,33 jaar is.

12 Halfwaardetijd (1)

Natuurlijk is er nu ook een tijdschaling mogelijk waarmee een tijdseenheid van bijvoorbeeld één jaar wordt gebruikt. Voor het tritium hierboven zoek je dus een groeifactor g zo dat $g^{12,33} = \frac{1}{2}$

a. Toon aan dat nu geldt: $T(t) = T(0) \cdot \frac{1}{2}^{t/12,33}$, met t in jaren.

b. Laat zien dat, afgerond op 4 decimalen, geldt: $T(t) = T(0) \cdot \left(0,9453\right)^{t}$

Nog meer informatie van Wikipedia:

> Cafeïne heeft in het lichaam een halfwaardetijd van circa 5 uur, dus als men de dag om 8.00 uur zou beginnen met acht koppen koffie, dan heeft men om 13.00 uur nog steeds het equivalent van vier koppen koffie in het bloed, om 18 uur nog het equivalent van twee koppen en wanneer men gaat (proberen te) slapen is het alsof men net een kop koffie gedronken heeft.

13 Halfwaardetijd (2)

Een kop koffie bevat (afhankelijk van de manier van bereiden) ongeveer 100 mg cafeïne.

a. Geef een formule voor de hoeveelheid cafeïne die in je lichaam aanwezig is op tijdstip t (in uren) na het drinken van een kop.

b. Je drinkt op een dag drie koppen koffie: om 8 uur, 13 uur en 18 uur. Hoeveel mg cafeïne zit er nog in je lichaam als je om 23 uur naar bed gaat?

De halfwaardetijd wordt meestal aangeduid met $t_{1/2}$

Een halfwaardetijd kan worden gegeven in een willekeurige tijdseenheid zoals seconde, uur, dag, jaar. Bij het bepalen van een functie die het proces beschrijft met een 'gewone' tijdmaat is het natuurlijk wel zaak dat je dezelfde tijdseenheid gebruikt: t in seconden als $t_{1/2}$ in seconden is gegeven, maar in jaren als $t_{1/2}$ ook in jaren is gegeven.

> Voor halveringen is $\frac{t}{t_{1/2}}$ een natuurlijke tijdstap die het aantal halveringen aangeeft op een continue schaal.

> Bij exponentieel verval met groeifactor $\frac{1}{2}$ en halfwaardetijd $t_{1/2}$ wordt het proces beschreven met de functie
>
> $$H(t)=H(0) \cdot \frac{1}{2}^{t/t}$$
>
> waarbij $t_{1/2}$ en t dezelfde tijdseenheid hebben.

14 Naar $t_{1/2}$ en terug

We hebben een proces met een groeifactor van 0,3 per week. We starten met een hoeveelheid van 200.

a. Geef de functie die de hoeveelheid H koppelt aan de tijd t (in dagen).

b. Wat is de halfwaardetijd voor dit proces?

Een proces heeft halfwaardetijd 3 maanden.

c. Geef de functie die de hoeveelheid H koppelt aan de tijd (met als eenheid de halfwaardetijd)

d. Wat is de groeifactor per maand voor dit proces?

Exponentiële verbanden

3 Verandering evenredig met hoeveelheid

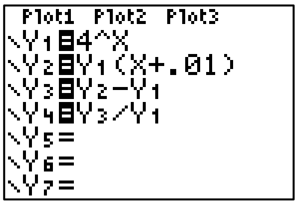
Bij exponentiële groeiprocessen is de verandering (de toename of afname) evenredig met de al aanwezige hoeveelheid. Maar de grootte van de tijdstap is van invloed op de evenredigheidsconstante. Bij continue processen kunnen we de tijdstap naar nul laten naderen en daarmee proberen zicht te krijgen op de *momentane* verandering; dat is de *groei op een bepaald tijdstip*. Dat is precies het doel van deze paragraaf.

Paragraafvraag	**Hoe verloopt de verandering in de tijd?**

instap

Hoe verandert de verandering over de tijd gezien?

Neem een tijdsverschil Δt =0.01 en neem een grondtal met voorlopig g=4



Neem een functie $H(t) = g^t$ en reken deze uit voor een paar tijdstippen. Bereken dan de verandering met even later:
$\Delta H(t)=H(t+\Delta t) - H(t)$. Als je dit in je GR invoert, wordt opgave b. gemakkelijker te maken

t	$H(t)$	$H(t+\Delta t)$	$\Delta H(T)$	$\Delta H(t)$/H(t)
1	g^t			
2				
3				
4				
5				
6				

a. Doe hetzelfde voor bijvoorbeeld de grondtallen 6 en 8.

b. Blijft de verandering evenredig met de hoeveelheid?

c. Hangt de verandering af van het grondtal?

d. Bereken de tabel ook eens met g=4 maar met Δt =0.2

e. Kun je dezelfde conclusies trekken?

Uit de vorige opdracht heb je gemerkt dat de verandering evenredig met de hoeveelheid blijft, dat het grondtal uitmaakt maar dat ook het tijdstip en het tijdsverschil van de verandering uitmaakt. Om iets over die tijdstap te kunnen zeggen en vooral ook veranderingen in het continue proces te kunnen beschrijven, gaan we nu naar verschillende tijdstappen kijken.

15 De tijdstap verkleinen

Gegeven is de functie $H(t) = 2^t$. Voor de verandering bij een tijdstap Δt geldt:

$\Delta H(t) = H(t+\Delta t) - H(t) = 2^{t+\Delta t} - 2^t = (2^{\Delta t} - 1) \cdot 2^t$

a. Vul onderstaande tabel in.
Gebruik de GR en noteer de uitkomsten met 4 significante cijfers:

Δt	$\Delta H(t)$	$\Delta H(t)/\Delta t$
1	$1 \cdot 2^t$	$1 \cdot 2^t$
0,1	$0{,}07177 \cdot 2^t$	$0{,}7177 \cdot 2^t$
0,01		
0,001		
0,0001		
0,00001		

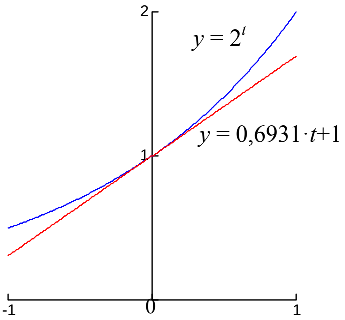
b. Waarom is het logisch dat de getallen in de tweede kolom steeds kleiner worden en tot nul verschrompelen? En waarom gebeurt dat niet bij de getallen in de derde kolom?

$$c_2 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2^{\Delta t} - 1}{\Delta t} \approx 0,6931$$

Als Δt steeds dichter bij nul wordt gekozen, dan nadert $\Delta H(t)/\Delta t$ tot een constante maal 2^t. Omdat die constante bij grondtal 2 hoort, noemen we hem c_2. Er geldt: $c_2 \approx 0{,}6931$. Bij andere grondtallen horen ook zulke constanten. Zo hoort bij 3^t de constante c_3.

c. Bepaal c_3, c_4, c_5 en c_6 in 4 decimalen nauwkeurig op dezelfde manier als hiervoor is gedaan met c_2.
Bepaal ook $c_{2,6}$, $c_{2,7}$ en $c_{2,8}$ in 4 decimalen nauwkeurig.

d. Probeer met de GR een groeifactor g te vinden waarvoor geldt: $c_g = 1$.



De constante c_2 is de limietwaarde waartoe de uitdrukking $\frac{2^{\Delta t}-1}{\Delta t}$ nadert als Δt naar 0 nadert. Dat wordt ook wel genoteerd als: $c_2 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2^{\Delta t}-1}{\Delta t}$.

Omdat geldt $1 = 2^0$, kan de uitdrukking ook zo worden geschreven: $\frac{2^{\Delta t}-2^0}{\Delta t}$

Deze uitdrukking heeft een heel speciale betekenis voor de functie $H(t) = 2^t$. Het is namelijk het differentiequotiënt bij startpunt $t = 0$. De limietwaarde van dit differentiequotiënt is dus de *helling van de grafiek* voor $t = 0$.

Wat geldt voor grondtal 2 is ook waar voor andere grondtallen g. De constante c_g is de helling van de grafiek van $H(t) = g^t$ bij $t = 0$.

Verder weet je dat de afgeleide functie (of hellingfunctie) krijgt door van het differentiequotiënt $\frac{\Delta H(t)}{\Delta t}$ de limiet te bepalen: $\lim_{t \to 0} \frac{\Delta H(t)}{\Delta t} = \frac{dH}{dt} = H'(t)$

Dus:

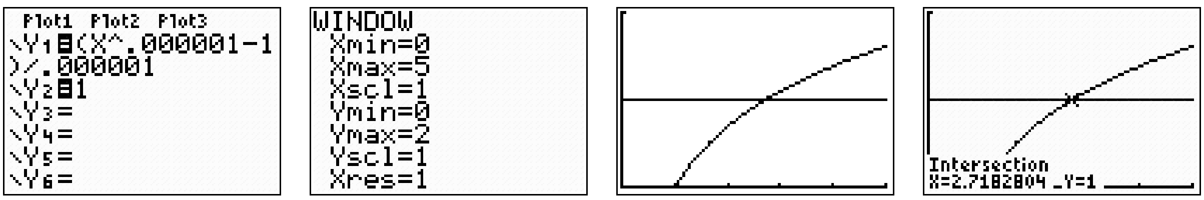
> De afgeleide functie van $H(t) = g^t$ is $H'(t) = c_g \cdot g^t$
> waarbij c_g de helling van de grafiek van H is bij $t = 0$

De afgeleide van een exponentiële functie is dus evenredig met de functie zelf. En de evenredigheidsconstante is de helling van de grafiek bij $t = 0$.

Natuurlijk geldt: bij een grotere g hoort een steilere helling bij $t = 0$.

Omdat c_2 kleiner is dan 1 en c_3 groter dan 1, moet er tussen 2 en 3 een getal g te vinden zijn waarvoor geldt: $c_g = 1$.

In onderstaande schermafdrukken zie je hoe je dat grondtal redelijk kunt benaderen:



16 Het magische grondtal e

a. Leg uit waarom je op deze manier dat grondtal kunt vinden.

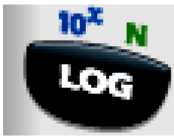
b. Gebruik de GR om te controleren dat inderdaad geldt: $c_e = 1$.

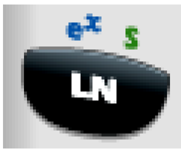
> $f(x) = e^x$
> heeft als afgeleide
> $f'(x) = e^x$

De functie $f(x) = e^x$ heeft dus een heel simpele afgeleide, namelijk de functie zelf! Dat is de reden waarom er in toepassingen van exponentiële functies zo graag wordt gewerkt met dit speciale grondtal. In paragraaf 2 is besproken hoe je via tijdschaling het ene grondtal kunt omzetten naar een ander. Dat geldt dus ook voor het omschrijven naar grondtal e.

17 omzetten naar grondtal e

a. Schrijf de functie $f(x) = 2^x$ als functie met grondtal e, dus als e^{cx}.
b. Dezelfde vraag voor $f(x) = 3^x$
c. Wat valt op aan de constanten die bij deze tijdschalingen horen? Kijk eventueel nog eens terug naar Instapvraag c.





In veel toepassingen van exponentiële processen kom je één van de groeifactoren 10 en e tegen. Ze zijn ook als aparte knop op de GR te vinden.

Een groeifactor 10 ziet er gewoon uit; e ziet er veel minder 'natuurlijk' uit:

$e \approx 2.718281828$.

groeifactor 10 komt in veel situaties voor. Groeifactor *e* komt mogleijk nog vaker voor, vanwege de specifieke eigenschappen die het heeft bij iontegreren en differentieren.

18 Werken met groeifactor e

a. Het kalmeringsmiddel Bromazepam heeft een halfwaardetijd van ongeveer 18 uur. Als we de beginhoeveelheid van het middel op 1 stellen, dan geldt voor het verval de formule $H(t) = e^{-0{,}0385 \cdot t}$
Laat zien dat dit bij benadering klopt.
b. Het radioactieve vervalproces van het isotoop Cu^{59} wordt beschreven met de functie $N(t) = N(0) \cdot e^{-0{,}578 \cdot t}$. De tijd t is in jaren.
Bepaal de halfwaardetijd $t_{1/2}$

Ieder 'gewoon' grondtal en elke groeifactor van een continu proces kan worden omgezet naar grondtal e.

19 Grondtallen schrijven als macht van e en omgekeerd

a. Schrijf de grondtallen 2, 5, 10, 1/2, 1/5 en 1/10 als macht van e
b. Schrijf e als macht van de grondtallen 2, 5, 10, 1/2, 1/5 en 1/10.

20 luchtdruk en hoogte

Tussen de luchtdruk p (in kilopascal) en de hoogte boven zeeniveau h (in km) bestaat het volgende verband: $p = 105 \cdot e^{-0{,}15 \cdot h}$

a. Bereken de druk op zeeniveau
b. Op welke hoogte is de druk gehalveerd?
c. Wat is de 'groeifactor' bij dit exponentieel verband?
d. In je luchtballon constateer je een druk $p = 87$ kilopascal. Hoe hoog zit je?

21 Radioactief

De stof Radon 220 vervalt in 56 s tot de helft van de oorspronkelijke hoeveelheid.

a. Noteer de vervalfunctie met groeifactor 0,5.
b. Bepaal de vervalfunctie met als tijdstap de minuut.
c. Idem met als tijdstap de seconde.
d. Noteer de functie met grondtal e.

Exponentiële verbanden

4 Het verband met de logaritme

De constanten c_g die in voorgaande paragrafen een rol speelden (tijdschaling, evenredigheidsconstante bij de afgeleide functie) zijn steeds via benaderingen gevonden. Ze kunnen ook exact worden gegeven. Daarbij speelt de logaritme een belangrijke rol.

Paragraafvraag	**Wat hebben logaritmen te maken met tijdschaling en evenredigheidsfactoren?**

Instap

Opfrisser
De logaritme is al behandeld in de vierde klas.
Een exponentiële functie en een logaritmische functie met beide hetzelfde grondtal zijn elkaars inverse:

$$g^p = q \Leftrightarrow p = {}^g\log q \quad \text{voor } q > 0 \text{ en } g > 0 \text{ en } g \neq 1$$

De belangrijkste eigenschap van logaritmen is:

$${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(a \cdot b) \quad \text{voor } a, b > 0$$

Voorbeelden van logaritmen:

${}^2\log 8 = 3$
${}^3\log 2 + {}^3\log 5 = {}^3\log 10$
${}^5\log 64 = 3 \cdot {}^5\log 4$
${}^4\log 12 - {}^4\log 2 = {}^4\log 6$
${}^2\log 7 = x \Leftrightarrow 2^x = 7$

a. Welke eigenschappen ken je nog meer?
b. Kun je de volgende wonderlijke eigenschap verklaren: $g^{{}^g\log a} = a$
c. Waarom is de oplossing van $2^t = 10$ gelijk aan $t = {}^2\log(10)$?
d. Kun je de benaderende waarde van ${}^2\log 10$ berekenen met je GR?

Net zoals de grondtallen 10 en e voor de exponentiële functies een uitzonderingsrol hebben, geldt datzelfde voor logaritmen met grondtal 10 en grondtal e. Normaal noem je het grondtal bij een logaritme, zoals bij ${}^2\log 10$.
Bij afspraak wordt het grondtal 10 weggelaten bij de notatie van een logaritme, terwijl de logaritme met grondtal e een afwijkende naam krijgt.

Afspraak: ${}^{10}\log$ wordt geschreven als $\log$
${}^e\log$ wordt geschreven als $\ln$

De logaritme met grondtal e wordt ook wel de *natuurlijke logaritme* genoemd.
De constanten c_g die in de vorige paragraaf opdoken gedragen zich als logaritmen.
Dat betekent zoveel als: ze vertonen dezelfde eigenschappen als logaritmen.
Bekijk maar het volgende rijtje waarden (afgerond op 4 decimalen):

g	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c_g	0,6931	1,0986	1,3863	1,6094	1,7914	1,9459	2,0794	2,1972	2,3026

Je ziet bijvoorbeeld dat geldt : $c_9 = 2 \times c_3$ en ook $c_2 + c_4 = c_8$

Bespreking

Welke eigenschappen van logaritmen herken je in de twee gegeven voorbeelden? Zoek nog meer voorbeelden in het rijtje.
Gebruik eigenschappen van logaritmen om te controleren dat de constanten in het rijtje zich inderdaad gedragen als logaritmen.

22 Andere constanten berekenen.

Uitgaande van het feit dat de constanten eigenlijk logaritmen zijn, kun je nieuwe waarden van c_g daarmee bepalen.

a. Wat is de waarde van c_{12} en van c_{20}?
Controleer je antwoorden door die waarden ook op de andere manier (zie de instap van paragraaf 3) te berekenen.

De constanten c_g hebben alles te maken met de natuurlijke logaritme. Er blijkt:

$c_g = \ln(g)$

De verklaring is niet echt moeilijk als je kijkt naar de logaritmische eigenschap $g^{{}^g\log a} = a$.

Als je daarin grondtal e neemt voor g, dan staat er:

$e^{{}^e\log a} = a$ ofwel $a = e^{\ln a}$

Dus de functie $f(x) = 2^x$ laat zich herschrijven tot $f(x) = e^{\ln 2 \cdot x}$

Tot nu toe hadden we steeds gewerkt met $2^x = e^{c_2 \cdot x}$ en dus geldt: $c_2 = \ln(2)$.

Voor c = $\frac{1}{2}$ geldt dus: $c_{1/2} = \ln(\frac{1}{2})$

23 De afgeleide van exponentiële functies

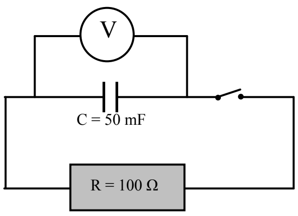
De afgeleide functie van $H(t) = g^t$ is $H'(t) = c_g \cdot g^t$ (zie paragraaf 3)

a. Laat zien dat voor $f(x) = 2^x$ geldt: $f'(x) = \ln(2) \cdot 2^x$ en dat dit ook kan worden geschreven als $f'(x) = \ln(2) \cdot e^{\ln(2) \cdot x}$

b. Toon aan: $\ln(\frac{1}{2}) = -\ln(2)$

c. Laat zien dat voor $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ geldt: $f'(x) = \ln(\frac{1}{2}) \cdot (\frac{1}{2})^x$ en dat dit ook kan worden geschreven als $f'(x) = -\ln(2) \cdot e^{-\ln(2) \cdot x}$

24 Het ontladen van een condensator



Een condensator is opgeladen. De spanning over de condensator bedraagt 8 V. Als de schakelaar gesloten wordt, ontlaadt de condensator zich over de weerstand R. Tijdens het ontladen wordt de spanning gemeten:

Tijd *t* (in s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Spanning *U* (in V)	8,00	6,55	5,36	4,40	3,60	2,94	2,41	1,97	1,61	1,32

a. Beschrijf het verband tussen *U* en *t* als functie met behulp van een e-macht.
b. Wat is de halveringstijd?
c. Bereken de snelheid van ontladen op tijdstip $t = 0$ en op $t = 4$
d. De constante bij groeifactor e heeft een natuurkundige betekenis: constante $= \frac{-1}{R \times C}$ met R de weerstand (in Ω) en C de capaciteit van de condensator (in F). Controleer of dit klopt met jouw gevonden functie.

25 Meer afgeleide functies

a. Schrijf de afgeleide functie van $f(x) = 5 \cdot 3^x$ zowel met grondtal 3 als met grondtal e.
b. Van een functie $y = f(x)$ is de afgeleide gegeven:
$dy/dx = 6.9315 \cdot e^{\ln(4) \cdot x}$
Wat is de functie?

De halfwaardetijd is een gebruikelijke grootheid. Daarnaast wordt ook wel de vervaltijd gebruikt. De volgende informatie komt weer van Wikipedia:

> De **halfwaardetijd** of **halveringstijd** is de tijd waarna van de oorspronkelijke hoeveelheid nog precies de helft over is. Als symbool hanteert men meestal $t_{\frac{1}{2}}$.
> De **vervaltijd** of **1/e-tijd** of **gemiddelde levensduur** is de gemiddelde duur van het bestaan van een instabiel deeltje, ofwel de tijd waarna van de oorspronkelijke hoeveelheid nog precies 1/e-de deel over is. Als symbool hanteert men meestal τ (de Griekse letter *tau*).
> Halfwaardetijden en vervaltijden zijn overigens eenvoudig in elkaar om te rekenen, want de vervaltijd is altijd 44% langer dan de halfwaardetijd:
> $\tau = 1{,}4427 \times t_{½}$.

26 De koppeling van halfwaardetijd en vervaltijd

a. Laat zien dat de gegeven omrekening $\tau = 1{,}4427 \times t_{½}$ klopt.
b. Bij de halfwaardetijd geldt dat er dan nog 50 % (de helft) over is van de oorspronkelijke hoeveelheid. Welk percentage van de beginhoeveelheid is nog over na de vervaltijd?

Een exponentiële functie van de vorm $f(x) = g^x$ is dus te schrijven als $f(x) = e^{\ln(g)\cdot x}$ en voor de afgeleide functie geldt dan $f'(x) = \ln(g) \cdot e^{\ln(g)\cdot x}$.
Wat voor de constante ln(g) geldt, is ook in meer algemene zin waar:

> De functie $f(x) = e^{c\cdot x}$ met constante c heeft afgeleide $f'(x) = c \cdot e^{c\cdot x}$

Bij het onderwerp radioactief verval wordt in de natuurkunde het begrip activiteit (A) gebruikt. De activiteit wordt gedefinieerd als het *verval per seconde* op een bepaald tijdstip. Dus bij een hoeveelheid $N(0)$ op het begintijdstip $t = 0$ en een vervalproces dat zich laat beschrijven als $N(t) = N(0) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{t_{1/2}}}$ is de activiteit de afgeleide van de functie N, dus
$A(t) = N'(t)$

27 Activiteit *A* en hoeveelheid *N*

a. Schrijf de functie $A(t)$ met behulp van een e-macht.
b. Toon aan, door de afgeleide van N te bepalen, dat geldt
$$A(t) = -\frac{\ln 2}{t_{1/2}} \cdot N(t)$$

Exponentiële verbanden

5 Veranderingen meten en beschrijven

Om te oefenen met het opsporen van exponentiële verbanden, doen we hier een paar experimenten (of je krijgt de meetgegevens om uit te werken). In deze paragraaf kijken we vooral naar continue veranderingen.
We gaan eerst kijken naar hoe de lichtabsorptie in glas afhangt van de dikte en zullen zien dat dit proces veel lijkt op andere processen in de natuur.

Paragraafvraag	**Wat hebben processen als lichtabsorptie in glas, het afrollen van een verzwaard koord over een katrol en het afkoelen van een glas thee met elkaar gemeen?**

Experiment

1. Absorptie van licht door glas

Neem een evenwijdige bundel licht en meet de intensiteit op een afstand van ongeveer 20 cm. Verander de afstand niet meer! Plaats een stuk getint glas loodrecht tussen de lichtbron en de lichtsensor en meet opnieuw de intensiteit. Doe dit met steeds meer stukken van hetzelfde glas. (Er zijn ook metingen beschikbaar in het coach6-project).

Vul je metingen in in de eerste rij van de tabel.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$I(n)$											
$\Delta I(n)=I(n) - I(n-1)$											
$\Delta I(n)/I(n)$											

a. Onderzoek het verband tussen de intensiteit van het doorgelaten licht en het aantal glasplaten; vul daarvoor eerst de tweede rij in bovenstaande tabel in. Is er een bekend verband te zien, zoals lineair of (omgekeerd) evenredig? (zie blok 10)

b. Bereken de *relatieve* afname van de intensiteit voor elk stuk glas dat er bij komt. Gebruik daarvoor de derde rij van de tabel.
Wat valt je op? Kun je nu voorspellen wat de intensiteit wordt na nog een stukje glas?

Als het goed is, merk je dat de intensiteit met elk stuk glas in verhouding, dus relatief, steeds evenveel wordt verkleind. Elk stuk glas van dezelfde dikte absorbeert (en reflecteert) een even groot deel van het opvallende licht. Iets wat eigenlijk wel logisch is.

Het betekent dat de afname van de intensiteit mede afhangt van de intensiteit zelf. Een bepaald deel (of percentage) wordt doorgelaten. Dat percentage is afhankelijk van de dikte van het glas, het soort glas en de tint van het glas.
Het is vergelijkbaar met het afnemen van de hoeveelheid gas in een luchtschip in de tijd. Alleen is er nu geen sprake van tijd, maar van dikte van het glas. Maar een procentuele afname kan ook nu weer worden beschreven met het begrip groeifactor.

$Groeifactor = \dfrac{I_{nieuw}}{I_{oud}}$ met tussen I_{nieuw} en I_{oud} steeds een even grote stap van de grootheid die I beïnvloedt (hier: steeds een even dik stukje glas)
Bij afname is de groeifactor een getal tussen 0 en 1.

28 Glas en lichtintensiteit

Een stuk glas met een dikte van 4,0 mm laat van een lichtintensiteit van 2,0 W/m^2 nog 1,6 W/m^2 over.

a. Hoeveel procent wordt in 4,0 mm glas geabsorbeerd?
b. Hoe groot is de lichtintensiteit na 8,0 mm dik glas als je begint met 2,0 W/m^2?
c. Wat is de lichtintensiteit na het stuk glas van 4,0 mm als je begint met een intensiteit van 1,0 W/m^2?
d. Hoe groot is de lichtintensiteit na 16 mm glas als je begint met 3,0 W/m^2?
e. Bepaal de groeifactor van de intensiteit van licht door het glas voor stappen van 4,0 mm glas.
f. Noteer het verband van de lichtintensiteit als functie van de glasdikte.

Experiment **2. Het afkoelen van een kopje thee.**

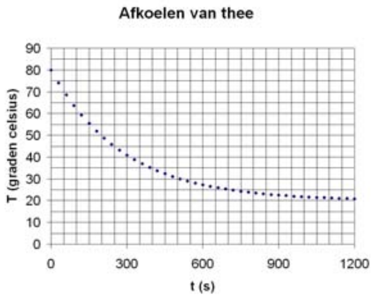
Neem een bekerglas met 100 mL water van ongeveer 80 °C. Plaats hierin een thermometer en bepaal met flink roeren per minuut de temperatuur $T(t)$ tot deze tot ongeveer 30°C is gedaald. Meet ook de kamertemperatuur T_k en noteer deze.

Vul de eerste vier rijen van onderstaande tabel in.

$t(s)$									
$T(t)$ (°C)									
$T_d = T(t) - T_k$ (°C)									
$\Delta T = T_d(n) - T_d(n-1)$									
$\Delta T / T_d$									

a. Maak een diagram van de temperatuur $T(t)$ als functie van de tijd t.
b. Welk verband bestaat er tussen het temperatuurverschil met de omgeving en de tijd? Leg uit waarom je de conclusie kunt trekken dat er geen omgekeerd evenredig of lineair verband te vinden is.
c. Bereken op eenzelfde manier als bij het eerste experiment steeds de relatieve afname van het temperatuurverschil per tijdstap van 60 s. Gebruik daarvoor de laatste rij van de tabel.
d. Kun je nu aangeven met welke formule je op elk tijdstip het temperatuurverschil met de omgeving kunt uitrekenen?

29 Kopje thee revisited



Een kopje thee heeft, net ingeschonken, een temperatuur van 80 °C.
Na 100 s is de temperatuur gedaald tot 64 °C, terwijl de kamertemperatuur 20 °C bedraagt.

a. Maak een voorspelling van de temperatuur van de thee na 200 s, na 300 s en na 600 s.
b. Vergelijk je voorspelling met je klasgenoten.

Bij de processen in de twee experimenten merk je dat ze iets gemeen hebben:
Bij dat soort processen kun je ook over een groeifactor praten, je vermenigvuldigt de

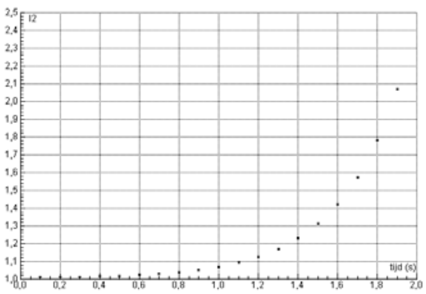
de verandering van de grootheid is evenredig met de grootheid zelf!

grootheid elke keer met een constant getal. Bij een groeifactor kleiner dan 1 wordt de verandering steeds kleiner naarmate de grootheid zelf kleiner wordt, terwijl een groeifactor groter dan 1 ervoor zorgt dat de aangroei steeds groter wordt! Dit exponentieel gedrag van natuurwetenschappelijke processen ontstaat door de verbanden tussen de grootheden van die processen. Er zijn dus dieper liggende oorzaken. Gelijksoortige oorzaken geven dan ook gelijksoortige verbanden. Kun je proefondervindelijk een verband tussen twee grootheden bepalen, dan kun je dus ook al een vermoeden hebben van wat er achter dat verband zit.
Door een stuk gekleurd glas te gebruiken, blokkeer je blijkbaar voor een percentage van het licht de doorgang. Nog zo’n stuk glas haalt gewoon hetzelfde percentage weg van het overgebleven licht.
Eenzelfde oorzaak vind je bij het tegenhouden van ioniserende straling door bijvoorbeeld lood. Dat houdt per cm ook een bepaald percentage straling tegen. Wat doorgaat per diktestap hangt dus af van wat aangeboden wordt aan het begin.
Voor de thee geldt blijkbaar dat de afgegeven warmtestroom aan de omgeving en daarmee de verandering van temperatuur per tijdseenheid afhangt van het temperatuurverschil van de thee met de omgeving.

Experiment

3. Het vallende koord van een katrol

Onder aan vitrage hangt wel eens een zwaar koord, gemaakt van loodkorrels in een stoffen buis, flexibel maar toch zwaar. De vitrage hangt met koord mooi in plooien. Zo’n koord kan goed gebruikt worden om een versnelde beweging met een katrol te maken. Die gaan we bekijken. De katrol heeft een lichtsensor die de beweging van de katrol bepaalt en zo zorgt dat Coach een *s,t*-diagram van het vallende koord maakt.



Een loodkoord van 2,0 m is om een katrol geslagen. Beide einden hangen bijna even ver naar beneden: links 1,01 m en rechts 0,99 m. Hierdoor zit links wat meer massa dan rechts en wordt het koord links wat meer naar beneden getrokken. Het koord gaat hierdoor steeds sneller van de katrol afglijden.

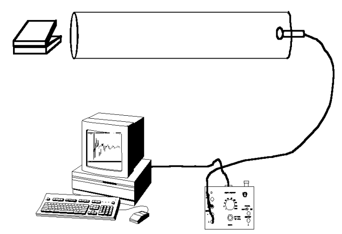
Meet met coach de beweging van het koord op om te analyseren. Hiernaast is als voorbeeld een grafiek van de lengte links tegen de tijd dat het koord van de katrol rolt uitgezet. (Deze meting is ook beschikbaar in het coach6-project, voor als je zelf geen meting hebt kunnen doen)

Bewaar de meting. Bekijk de tabel van de meting.

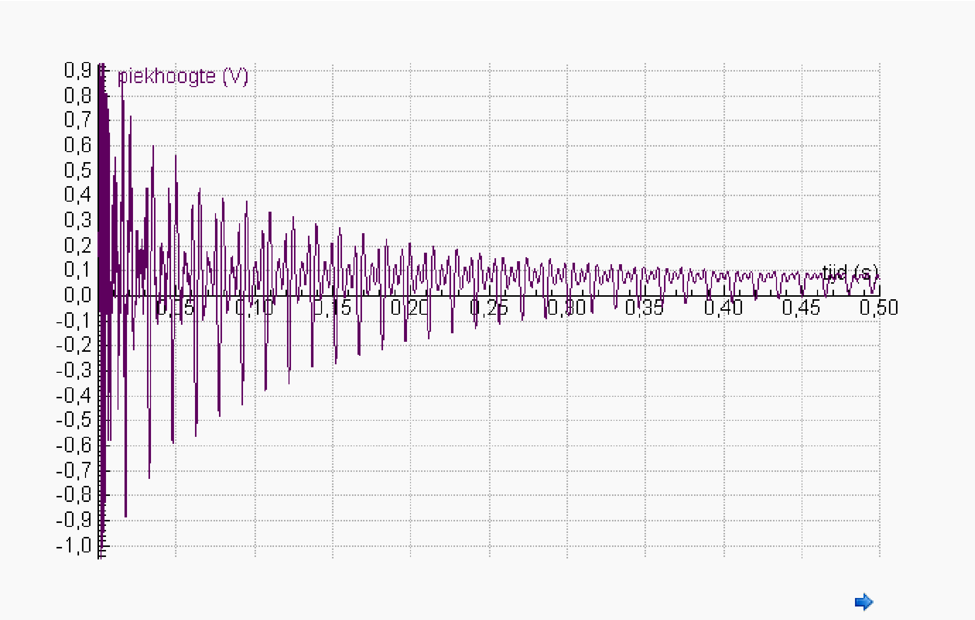
a. Wanneer is links 30% groter geworden?
b. Bepaal de groeifactor per 1,0 s.
c. Leg uit dat de procentuele verandering gelijk blijft.
d. Waarom neemt de snelheid nu exponentieel toe? Leg uit wat de oorzaak van de snelheidsverandering is en hoe dat van de stand van het koord afhangt.

Experiment

4. Het vervagen van geluid



Op de volgende bladzijde zie je de resultaten van een experiment weergegeven in een diagram. Het gaat om een meting van het geluid van een klap bij een lange buis van 2,6 m.
Een microfoon aan één kant van de buis meet de geluidsterkte terwijl aan de andere kant een klap is gegeven (zie de schematische opstelling hiernaast).
In het diagram zie je de tik van de klap steeds opnieuw terug als een stevige tik omlaag. De klap kaatst heen en weer bij de uiteinden en de microfoon registreert steeds als de klap langs komt.Bij het terugkaatsen gaat een deel van de geluidsenergie de buis uit en een deel kaatst terug.

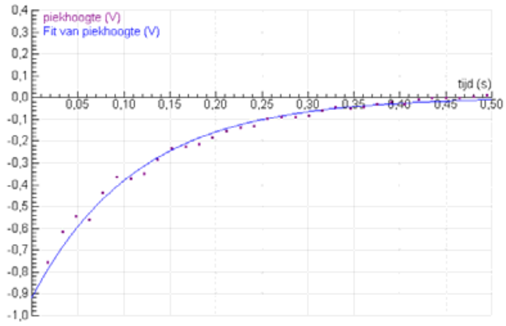


We willen weten hoe het zit met het percentage geluid dat over is ten opzichte van het aantal keren weerkaatsen. Daarmee kun je aangeven wat er bij het terugkaatsen gebeurt.

pieknr	tijd	Piek hoogte	groei-factor
	s	V	
0	0,003	-1,007	
1	0,017	-0,756	0,75
2	0,033	-0,615	0,81
3	0,048	-0,545	0,89
4	0,062	-0,560	1,03
5	0,077	-0,435	0,78
6	0,092	-0,364	0,84
7	0,107	-0,372	1,02
8	0,122	-0,348	0,94
9	0,137	-0,286	0,82
10	0,151	-0,231	0,81

a. Bepaal de hoogte van elke piek die de microfoon registreert. Neem hierbij de onderste pieken. Hiernaast zie je de eerste 10 pieken in een tabel.

b. Maak hiervan een diagram.



c. Kijkend naar de berekende groeifactoren per (niet vaste!) tijdstap lijkt ook hier sprake van een exponentieel verband. Geef daarvoor argumenten.

Voor het geval van een exponentieel verband zal de formule iets zijn van $h = h_0 \cdot g^n$ met h_0 de piekhoogte van piek nul en g de groeifactor.

d. Vind een goede benadering voor deze formule (dus vind de waarden van h_0 en g).

De vier experimenten van deze paragraaf hebben allemaal iets gemeen. Kennelijk geldt bij elk van deze vier gevallen dat de verandering van een grootheid (temperatuurverschil, lichtintensiteit, lengteverschil links-rechts en geluidssterkte) evenredig is met de nog aanwezige waarde van de grootheid.
In de volgende paragraaf gaan we dit verschijnsel bekijken vanuit een wiskundig standpunt. En dan zal blijken dat er gebruik kan worden gemaakt van resultaten uit vorige paragrafen.

Exponentiële verbanden

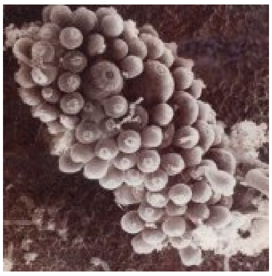
6 Wiskundige modellen

Met functies en verbanden kun je proberen vat te krijgen op wiskunde maar ook op processen in de natuurwetenschappen. In deze paragraaf komen resultaten van vorige paragrafen bij elkaar in het kader van natuurwetenschappelijke modellen.

Paragraafvraag	**Wat zijn de wiskundige basisprincipes achter sommige natuurwetenschappelijke modellen?**

Instap

Allemaal anders en toch in zekere zin gelijk

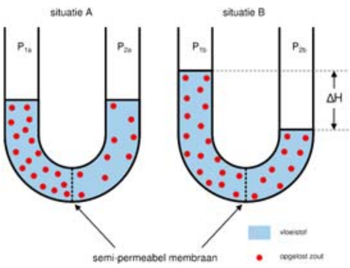


Er zijn veel verschillende natuurwetenschappelijke fenomenen die zich laten beschrijven als verandering in de tijd.
Hier komen vier voorbeelden:

Ontlading. Bij het ontladen van een condensator geldt dat de snelheid waarmee de ontlading plaatsvindt evenredig is met de hoeveelheid nog aanwezige lading Q.

Afkoeling. Thee in een kopje koelt af als je het laat staan. Er geldt: de hoeveelheid warmte die per seconde wordt afgestaan aan de omgeving is evenredig met het temperatuurverschil tussen de koffie temperatuur T en de omgevingstemperatuur T_0 of T_k (met de k van kamertemperatuur).

Populatiedynamica. De populatiegroei van een bacteriënkolonie is evenredig met de grootte van de populatie P.



Osmose. Als twee oplossingen met verschillende concentraties gescheiden zijn door een semi-permeabele wand, dan zal er vloeistof van het deel met de hoge concentraties stromen naar het andere deel. Hoe hoger het concentratieverschil ΔC tussen de twee delen, hoe sneller het stromen.

a. Probeer de vier verschijnselen in formulevorm weer te geven.
b. In welke zin lijken de vier fenomenen op elkaar?

Soms is er geen sprake van verandering in de tijd, maar verandering van plaats. Zoals bij:

Lichtsterkte. Afhankelijk van de mate van troebelheid van water, neemt de lichtsterkte sterk of iets minder sterk af. Globaal gesproken neemt de lichtsterkte per meter diepte af met 75 %.

Absorptie. Elke centimeter dikte van een bepaalde stof absorbeert een vast deel van de intensiteit I van het invallende licht, of van geluid of van röntgenstraling.

c. Beschrijf deze verschijnselen ook met een formule.

Als de tijd een rol speelt, zijn veel veranderingsprocessen te schrijven in de vorm

$$\frac{dN}{dt} = c \cdot (N(t) - A) \quad \text{of} \quad \frac{dN}{dt} = c \cdot (A - N(t))$$

waarin t de tijd, c een constante die samenhangt met de specifieke situatie, A een grenshoeveelheid en N de hoeveelheid of de concentratie voorstellen.

Gaat het om processen waarbij de afstand een rol speelt, dan kun je overal de t vervangen door een x.

30 **Op de koffie komen.**
Een kop koffie heeft een temperatuur van 90 °C op tijdstip t = 0. De constante heeft een waarde 0,0024. De omgevingstemperatuur is 20°C. Dus het afkoelingsproces kan worden beschreven met

$$\frac{dT}{dt} = -0,0024 \cdot (T(t) - 20)$$

a. Verklaar het eerste min-teken in de gegeven vergelijking.

De verandering van de temperatuur wordt weergegeven door $\frac{dT}{dt}$. Maar die verandering is gelijk aan de verandering van het temperatuur*verschil* tussen $T(t)$ en de omgevingstemperatuur van 20°C. Dus geldt: $\frac{dT}{dt} = \frac{d(T-20)}{dt}$.

b. Waarom is dat correct?

Noem het temperatuurverschil TV, dus $TV(t) = T(t) - 20$.
Daarmee kun je de eerste vergelijking herschrijven tot $\frac{dTV}{dt} = -0,0024 \cdot TV(t)$

c. De functie $TV(t) = e^{-0,0024 \cdot t}$ voldoet hier aan. Verklaar dat.
d. Uitgaande van de functie TV kun je nu ook de functie $T(t)$ vinden. Geef die functie.


Galileo Galileï
1564 - 1642

31 **Een onderzoek van Galileï**
Galileï is bekend vanwege zijn uitspraak dat de aarde beweegt en niet de zon (zoals toen de mening was), waarvoor hij in de pauselijke ban werd gedaan. Hij heeft zich ook beziggehouden met valbewegingen. Hij was de eerste die aantoonde dat de valsnelheid niet wordt beïnvloed door de massa van een voorwerp.
Voor de valsnelheid had hij twee mogelijke hypothesen:
1. De val*snelheid* is evenredig met de val*weg*
2. de val*snelheid* is evenredig met de val*tijd*

a. Schrijf beide hypothesen met behulp van een wiskundige vergelijking.
b. Welke functie voor de valweg en de tijd volgt uit hypothese 1?
c. En welke functie krijg je als hypothese 2 volgt?
d. Welke van de twee hypothesen is de juiste?

begrensde groei:
$$\frac{dN}{dt} = c \cdot (A - N)$$

Er zijn ook processen waarbij niet de *aanwezige* hoeveelheid de snelheid van het proces bepaalt, maar de *capaciteit* ofwel de maximaal mogelijke hoeveelheid de snelheid van verandering regelt. In zo'n geval werkt de hoeveelheid die er al is in zekere zin remmend, immers hoe meer er is, hoe kleiner de nog beschikbare 'ruimte' is. Dit verschijnsel wordt wel *begrensde groei* genoemd.

32 **Een cultuur van E.coli bacteriën**
De bovengrens voor een bacterie cultuur is $6 \cdot 10^{10}$ cellen. Het aantal cellen op een bepaald tijdstip geven we aan met $N(t)$. De groeisnelheid van de cultuur is evenredig met de nog beschikbare ruimte; de evenredigheidsconstante is $4 \cdot 10^{-3}$ (cellen per seconde). De tijd wordt gemeten in seconden. Neem aan dat de beginhoeveelheid $N(0)$ gelijk is aan $3 \cdot 10^{7}$.

a. Beschrijf dit proces met een wiskundige vergelijking.
b. Beschrijf N als functie van de tijd en schets de grafiek.
c. Op welk tijdstip is de groeisnelheid van deze cultuur gelijk aan 10 cellen per uur?

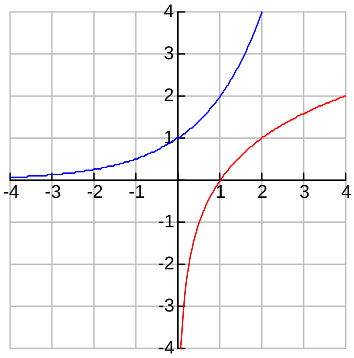
Exponentiële verbanden

7 De afgeleide van een logaritme

In deze paragraaf wordt de afgeleide van een logaritmische functie afgeleid uit de al bekende afgeleide van een exponentiële functie.

Paragraafvraag	**Hoe ziet de afgeleide van een logaritmische functie er uit ?**

Instap **Vergelijk $f(x) = 2^x$ en $g(x) = {}^2\log x$**



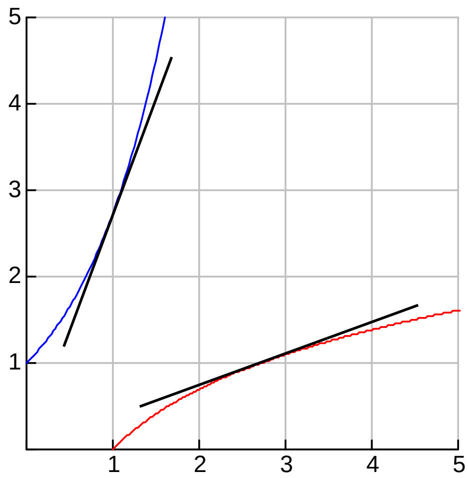
Hiernaast zijn de grafieken van beide functies getekend. Omdat de schaal langs de x-as gelijk is gekozen aan de schaal langs de y-as, kun je met dit plaatje goed controleren dat deze twee functies elkaars inverse zijn.

a. Hoe kun je dat controleren?
b. Noem van beide functies het domein en het bereik.

Bekijk de steilheid (helling) van de grafiek van f in het punt (1, 2).

c. Schat de helling in dit punt.
d. Je kunt deze helling ook exact berekenen. Doen!
e. De grafiek van g gaat door het punt (2, 1). Schat voor dat punt de helling van de grafiek. Kun je die ook exact berekenen? Waarom wel/niet?

We gaan nu gericht op zoek naar de afgeleide van de logaritmische functie $g(x) = {}^g\log x$. Daarvoor gebruiken we zijn inverse functie $f(x) = g^x$, want daarvan kennen we de afgeleide: $f'(x) = \ln(g) \cdot g^x$
Het ligt voor de hand om met de makkelijkste exponentiële functie te beginnen: $f(x) = e^x$. Daarvan is immers de afgeleide weer gewoon de functie zelf.
In één figuur zijn de grafieken van $f(x) = e^x$ en $g(x) = \ln x$ getekend en de raaklijn in (1, e) aan de grafiek van f en in (e, 1) aan de grafiek van g.



Het lijkt er op dat de raaklijnen beide door de oorsprong gaan.
Voor de functie $f(x) = e^x$ kun je zelf controleren of dit waar is door de vergelijking van de raaklijn te bepalen.

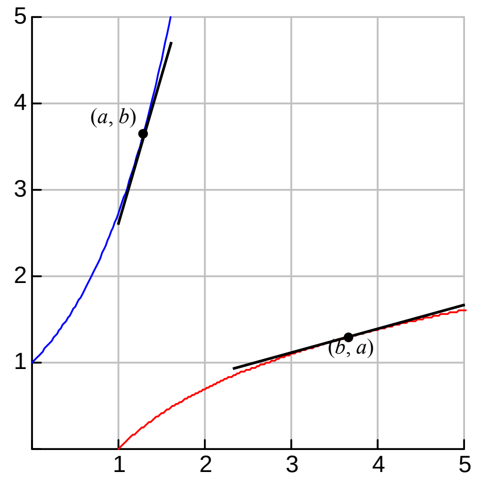
33 Controleer met de vergelijking van de raaklijn dat deze inderdaad door de oorsprong gaat.

34 Hoewel je nog niet de afgeleide van een logaritmische functie kent, kun je toch de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van g vinden, omdat deze raaklijn het spiegelbeeld is van de raaklijn aan de grafiek van f bij spiegeling in de lijn $y = x$.
Wat is kennelijk de waarde van de afgeleide van $g(x)$ voor $x = \mathrm{e}$?

Niet alle raaklijnen aan de grafiek van $f(x) = \mathrm{e}^x$ gaan door de oorsprong.
Het principe van de spiegeling in de lijn $y = x$ is wel altijd geldig.
Daarmee kun je de helling van de grafiek van $g(x) = \ln x$ dus voor ieder punt afleiden uit de helling in het daarmee corresponderende punt van de grafiek van f.

35 Bereken de helling van de grafiek van g in de punten $(1, 0)$, $(\mathrm{e}^2, 2)$ en $(2, \ln 2)$ door eerst bij de grafiek van f de helling uit te rekenen in de punten $(0, 1)$, $(2, \mathrm{e}^2)$ en $(\ln 2, 2)$.
Enig idee wat de afgeleide functie is van $g(x) = \ln x$?

Het vermoeden dat je waarschijnlijk hebt, namelijk $g'(x) = \frac{1}{x}$, kan met behulp van algebra worden bewezen.
Bekijk daartoe het punt (a, b) op de grafiek van f en het daarmee corresponderende punt (b, a) op de grafiek van g



Voor het punt (a, b) op de grafiek van f geldt:
$b = \mathrm{e}^a$ en de helling van de grafiek in dat punt is e^a
Voor het punt (b, a) op de grafiek van g geldt:

$a = \ln b$ en de helling van de grafiek in dat punt is $\frac{1}{\mathrm{e}^a}$

Dus kan worden gesteld: $g'(b) = \frac{1}{\mathrm{e}^a}$

Probleem daarbij is echter dat je graag de afgeleide wilt uitdrukken in de x-coördinaat van het betreffende punt en dat is in dit geval dus b en niet a! Met behulp van een ander gegeven, namelijk $a = \ln b$, is dat wel te verhelpen:

$$g'(b) = \frac{1}{\mathrm{e}^a} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln b}} = \frac{1}{b}$$

Hiermee is dus aangetoond dat voor iedere toegestane x (dus voor alle $x > 0$) geldt:

de afgeleide functie van $g(x) = \ln x$ is $g'(x) = \frac{1}{x}$

$^{g}\log x = \dfrac{\ln x}{\ln g}$

Dit resultaat voor de natuurlijke logaritme kan worden gebruikt voor logaritmen met een ander grondtal.
Zoals je weet kan de logaritme van ieder toegestaan grondtal g (g > o en g ≠ 1) worden omgezet naar een ander grondtal, bijvoorbeeld naar grondtal e: $^{g}\log x = \frac{\ln x}{\ln g}$

36 Bepaal de afgeleide van de functies $f(x) = {}^{2}\log x$ en $g(x) = {}^{3}\log x$

37 Bepaal de afgeleide van de functie $g(x) = {}^{g}\log x$

38 Transformaties op logaritmische functies
De grafieken van de functies $f_1(x) = \ln(x + 3)$, $f_2(x) = 2 \cdot \ln(x)$, $f_3(x) = -3 + \ln(x)$ en $f_4(x) = \ln(3x)$ kunnen worden gevonden vanuit de grafiek van $f(x) = \ln x$ met behulp van steeds een andere meetkundige transformatie.

a. Noem voor elk van de vier functies welke transformatie nodig is.
b. Beredeneer wat de invloed van die transformatie is op de afgeleide van de functie die het resultaat is van die transformatie.
c. Bepaal van f_1, f_2 en f_3 de afgeleide functie.
d. $f_4(x) = \ln(3x)$ is een beetje een geval apart.
Gebruik de GR om (met nDeriv) de afgeleide te laten tekenen van $f(x) = \ln x$ en ook van $f_4(x) = \ln(3x)$.
Hoe kun je wat je ziet verklaren?

Exponentiële verbanden

8 Wetenswaardigheden rond het magische getal e

In deze paragraaf vind je opdrachten rond het magische getal e.

Paragraafvraag	**Wat maakt e zo bijzonder?**

Een van de meest belangrijke eigenschappen van het getal e hebben we al leren kennen. Het is het enige grondtal voor exponentiële functies waarvoor geldt dat de afgeleide functie gelijk is aan de functie zelf.
Sterker nog $f(x) = e^x$ is echt de enige functie die zichzelf als afgeleide heeft. Daarom is het differentiëren en integreren met een e-macht zo handig.

Een benadering van dit getal (let wel: er is geen exacte waarde van het getal bekend, net zo min als voor het getal π en voor $\sqrt{2}$) in 35 decimalen:

$$e \approx 2{,}71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874\ 71352\ 66249$$

Maar (misschien wil je dit wel weten) hoe komt men tot zo'n benadering in een willekeurig aantal decimalen?

Daarvoor zijn verschillende methoden bruikbaar. We bespreken er hier twee:
1. een continue renteberekening
2. een benadering van e^x met behulp van een oneindig doorlopende veelterm; de zogenaamde Taylor-reeks

1. Rente op rente bij een fictieve bank

Stel je voor:
een bank die jouw bankrekening elk jaar 100% rente geeft op het gespaarde bedrag. Dat is natuurlijk een buitenkans die je niet laat lopen!
Maar de bank is nog vriendelijker dan je dacht:
op jouw voorstel om per half jaar 50% rente te geven zeggen ze direct "ja"

39 Neem even aan dat je € 100,- op deze bank zet op 1 januari.

a. Hoeveel heb je dan aan het eind van het jaar als de rente maar één keer per jaar wordt toegekend?

b. En hoeveel heb je aan het eind van het eerste jaar als je (geaccepteerd door de bank) de rente in twee halve jaren laat berekenen?

Neem aan dat de bank accepteert dat de 100% rente mooi gelijkmatig wordt verdeeld over de 365 dagen van het jaar, zodat je per dag $\frac{100}{365}$ % rente krijgt.

c. Hoeveel heb je dan op de bank staan na 1 jaar?

d. Laat zien dat de rente over een heel jaar, als er 100% rente per jaar wordt gegeven, bij gelijkmatige verdeling over 365 dagen neerkomt op:
$(1+\frac{1}{365})^{365} \approx 2{,}714567$ keer het inlegbedrag.

40 Het wordt nog erger voor de bank (of leuker voor jou!)

De bank gaat zelfs akkoord met het idee dat jouw banksaldo per seconde groeit. Dus de 100% per jaar wordt, wat de bank betreft, *continu* verhoogd door de 100% rente per jaar te berekenen alsof je dat elk moment kunt laten berekenen.

a. Waarom geeft de volgende formule, met n het aantal perioden waarin je het jaar kunt verdelen, de manier waarmee je het bedrag op de bank aan het eind van het jaar kunt berekenen?

$$\text{bedrag} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \text{inleg}$$

Het deel $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ bepaalt hoeveel meer je aan het eind van het jaar hebt dan aan het begin van het jaar.

b. Onderzoek met de GR wat dit oplevert als je n naar oneindig laat gaan. Tip: gebruik de functie-optie Y1 = (1 + 1/X)^X met (in WINDOW) X van 0 tot 100 000 en Y van 0 tot 3.

c. Is er een grenswaarde voor Y? Welke is die dan

Het limietbedrag dat je op deze manier per jaar kunt krijgen bij een bank met deze vriendelijke voorwaarden is

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2{,}71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874\ 71352\ 66249$, of met nog meer decimalen als je dat wilt, keer het bedrag dat je hebt ingelegd.

d. Onderzoek of je met de GR dit grensbedrag kunt vinden.

2. Een benadering van e^x met behulp van veeltermen

Wikipedia geeft de volgende informatie over functies die te benaderen zijn met een oneindig doorlopende somrij van getallen:

> Een **taylorreeks** of **taylorontwikkeling** is in de wiskunde, speciaal in de analyse, de voorstelling of benadering van een functie als een machtreeks met coëfficiënten die op een factor na de verschillende orden afgeleiden van de functie in een bepaald punt zijn. De reeks is genoemd naar de Britse wiskundige Brook Taylor.
>
> In het bijzonder is de taylorreeks van een functie f die in een interval $|x - x_0| < r$ oneindig vaak differentieerbaar is, de machtreeks:
>
> $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Dat klinkt nogal indrukwekkend! Maar laten we eens stapsgewijs bekijken hoe dit werkt voor de functie $f(x) = e^x$

1. De opmerking “oneindig vaak differentieerbaar” is voor $f(x) = e^x$ makkelijk: steeds geldt: $f'(x) = e^x$, dus $f^{(n)}(x) = e^x$.
   De notatie $f^{(n)}$ staat voor de n-de afgeleide van de functie f, dus $f^{(1)}(x) = f'(x), f^{(2)}(x) = f''(x)$, enzovoorts.

2. Gebruik $x_0 = 0$, dus $f^{(n)}(x_0) = e^0 = 1$

Dan is de moeilijk-ogende formule $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ al gereduceerd tot

de wat meer vriendelijke formule: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x)^n$

De Taylorreeks voor de functie $f(x) = e^x$ is dus volgens bovenstaande formule:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + ...$$

De notatie $n!$ betekent het product van de getallen 1 t/m n, dus $2! = 1\times2 = 2$, $3! = 1\times2\times3 = 6$, $4! = 1\times2\times3\times4 = 24$, enzovoorts.

41 **Tekenen en rekenen met Taylor**

Met behulp van de GR kun je mooi onderzoeken hoe de grafiek van $f(x) = e^x$ rond het punt (0, 1) steeds beter wordt benaderd door het toevoegen van steeds meer termen van de reeks.

a. Teken met de GR de grafieken van $f(x) = e^x$ en $y = 1 + x$.

b. Toon aan dat de rechte lijn de raaklijn is aan de grafiek van f in het punt (0, 1).

c. Teken nu met de GR de grafieken van $f(x) = e^x$ en $y = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$

d. Onderzoek met de GR voor welke waarden van x het verticale verschil tussen de twee grafieken minder dan 0,1 is.

De toevoeging van extra termen van hogere graad uit de Taylor-reeks wordt vaak aangeduid met n-de graads benadering. Zo is in a. sprake van de eerstegraads benadering en bij c. van de tweedegraads benadering.

Herhaal vraag d. voor de derdegraads-, vierdegraads- en vijfdegraads benadering van e^x.

De eerstegraads benadering van een kromme in een gegeven punt noemen we de raaklijn.

Voor de eerstegraads benadering $g(x) = ax + b$ van $f(x) = e^x$ in het punt (0, 1) hebben we twee eisen:

(i) $f(0) = g(0)$ beide grafieken gaan door hetzelfde punt

(ii) $f'(0) = g'(0)$ beide grafieken hebben daar dezelfde helling

42 Toon aan dat deze twee eisen leiden tot b = 1 en a = 1

Zo zou je de tweedegraads benadering van een kromme in een punt de 'raakparabool' kunnen noemen.

Voor de tweedegraads benadering $g(x) = ax^2 + bx + c$ van $f(x) = e^x$ in het punt (0, 1) wordt een extra eis toegevoegd:

(i) $f(0) = g(0)$ beide grafieken gaan door hetzelfde punt

(ii) $f'(0) = g'(0)$ beide grafieken hebben daar dezelfde helling

(iii) $f''(0) = g''(0)$ de verandering van de helling in dat punt is gelijk

43 Toon aan (met algebra) dat deze drie eisen leiden tot c = 1, b = 1 en a = $\frac{1}{2}$

44 Formuleer nu zelf de eisen die aan een derdegraads benadering kunnen worden gesteld. Bepaal deze derdegraads benadering van $f(x) = e^x$.

Op een dergelijk manier kwam Taylor aan zijn (oneindig doorlopende) n-de graads benadering van een willekeurige functie:

> Als een functie f n maal differentieerbaar is, dan geldt voor de n-de graadsfunctie g (die ook wel n-de orde benadering van f genoemd wordt) in x = a:
>
> $$g^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) \text{ voor } n = 0, 1, 2, ..., n$$

Hierboven heb je even geproefd aan de manier waarop de Taylor-reeks voor e^x kan worden geconstrueerd.
Er is ook nog een eenvoudige manier om te controleren dat de machtreeks

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + ...$$

Wel moet kloppen. Je weet immers dat de functie $f(x) = e^x$ zichzelf als afgeleide heeft.

45 Gebruik deze eigenschap om aan te tonen dat de machtreeks klopt.

Pas op! Het volgende is alleen voor echte liefhebbers!

Er zijn nog twee functies waarvan de achtereenvolgende afgeleiden makkelijk zijn te bepalen: sin x en cos x.
De Taylor-reeksen die bij deze functies horen zijn
rond (0, 0)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + ...$$

en rond (0, 1):

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + ...$$

Gebruik je kennis van sin en cos om bijzonderheden van deze twee machtreeksen te onderzoeken. (Denk bijvoorbeeld aan $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$)

Exponentiële verbanden

9 Toevallig?

Het uiteenvallen van een atoomkern is een toevalsproces. Is het niet merkwaardig dat een toevalsproces leidt tot een voor een stof vaste grootheid als halveringstijd?

Paragraafvraag	**Hoe kun je met toeval een groeifactor krijgen?**

Experiment

Dobbelen

Iedereen in de klas heeft een dobbelsteen. Er wordt afgesproken dat iemand die 2 gooit af is en niet meer meedoet. Het aantal mensen dat nog meedoet wordt aan het begin en na elke keer gooien genoteerd. Ga hiermee door tot er nog maar een paar mensen over zijn.
Doe hetzelfde experiment nog vijf keer en middel dan de gevonden waarden. Zet deze in een diagram uit.
Bepaal de groeifactor per keer gooien. Is deze constant?
Iedereen weet dat de kans om een twee te gooien éénzesde is. Dat betekent nog niet dat je bij elke zes keer gooien een twee gooit. Bij elke worp bepaalt het toeval of je een twee gooit of niet, je kan dus best drie keer achter elkaar een twee gooien of helemaal niet. Bij heel veel keer gooien blijkt echter dat je ongeveer in éénzesde van het aantal worpen wel een twee gooit.
Door heel veel mensen een dobbelsteen te laten gooien blijkt ook dat elke kant van de dobbelsteen dezelfde kans heeft om boven te komen en wordt elk getal (ongeveer) even vaak gegooid.

46 Dobbelen en formules

Uitgaande van 100 leerlingen kun je proberen de waarschijnlijke uitkomst van dit experiment in een formule te gieten, zodat je voorspellingen kunt doen.

a. Hoe ziet die formule eruit?
b. Wat is de groeifactor in die formule?
c. Hoeveel leerlingen verwacht je nog dat er over zijn na vier keer gooien?

47 Kop of munt

1000 mensen gooien een munt op en kijken of ze kop of munt gooien. Wie munt gooit valt af.

a. Hoeveel mensen verwacht je dat er de eerste keer kop gooien?
b. Hoeveel mensen zijn er (waarschijnlijk) nog over na drie keer gooien?
c. Na hoeveel keer gooien mag je verwachten dat er nog ongeveer 10 mensen over zijn?
d. Zet in een formule hoe je kunt berekenen hoeveel mensen er (gemiddeld) nog over blijven na een gegeven aantal keer gooien
e. Hoe groot is nu de groeifactor per keer?

48 Twintigvlak

Behalve een dobbelsteen heb je ook andere vormen, zoals een twintigvlak. Laat 2000 mensen nu eens steeds met zo'n veelvlak gooien. Wie 14 gooit is af en doet niet meer mee.

a. Zet in een formule neer hoeveel mensen er na een aantal keer nog overblijven (gemiddeld genomen).
b. Hoeveel mensen verwacht je over te houden na tien keer gooien?

c. Hoe groot is de groeifactor?

> ***Toevallig?***
> *bij een proces dat met een vaste kans verloopt, is de grootte van de verandering evenredig met de grootte van de veranderende grootheid.*

49 De schuimkraag

Bierschuim bestaat uit een grote hoeveelheid belletjes die ongeveer toevallig kapot klappen met een bepaalde kans dat een bel in een seconde knapt. Hierdoor valt de schuimkraag langzaam in elkaar en wordt deze steeds kleiner.

a. Leg uit wat voor soort formule je verwacht voor de hoogte van de schuimkraag.
b. Als een schuimkraag van 6,0 cm na 90 s nog maar 4,0 cm hoog is, hoe groot is dan de groeifactor per 60 s?

Bij het bierschuim kun je van een enkel belletje niet zeggen wanneer het knapt, omdat elk belletje per seconde dezelfde kans heeft, kun je wel iets zeggen over wanneer je verwacht dat de helft geknapt is en van de schuimkraag dus nog de helft over.
Bij radioactief verval kun je van een enkel atoom niet zeggen wanneer het vervalt. Een stof is wel meer of minder stabiel, je kunt dus wel iets zeggen over de kans dat een atoom vervalt. Kijken we naar bijvoorbeeld koolstof-14 (${}^{14}\mathrm{C}$), dan weten we dat na 5730 jr de helft van de ${}^{14}\mathrm{C}$ atomen vervallen is. Bij een munt is de kans dat je kop of munt gooit 0,5. Dat betekent dat je, als je met veel munten gooit, de helft met kop zult hebben en de helft met munt.
Doordat bij een tweede keer gooien of na opnieuw 5730 jr opnieuw de helft van wat aanwezig is vervalt of afvalt, is de groei of afname evenredig met de hoeveelheid. Dit is dus hetzelfde als bij het afkoelen van een kopje koffie, waarbij de temperatuurdaling evenredig was met het temperatuurverschil! Die eigenschap zorgt dus voor het exponentiele verloop.
Voor een ${}^{14}\mathrm{C}$ atoom betekent dat, dat de kans dat een atoom in 5730 jr vervalt ook 0,5 is. Over een enkel atoom kun je niets zeggen, voor veel atomen betekent het, dat het verval zich net zo gedraagt als de voorbeelden hierboven. Fysici zeggen dat de halveringstijd van ${}^{14}\mathrm{C}$ 5730 jr is. Wiskundigen zeggen dat de groeifactor per 5730 jr van ${}^{14}\mathrm{C}$ 0,5 is.

50 ${}^{14}\mathrm{C}$ heeft dus een halveringstijd van 5730 jr.

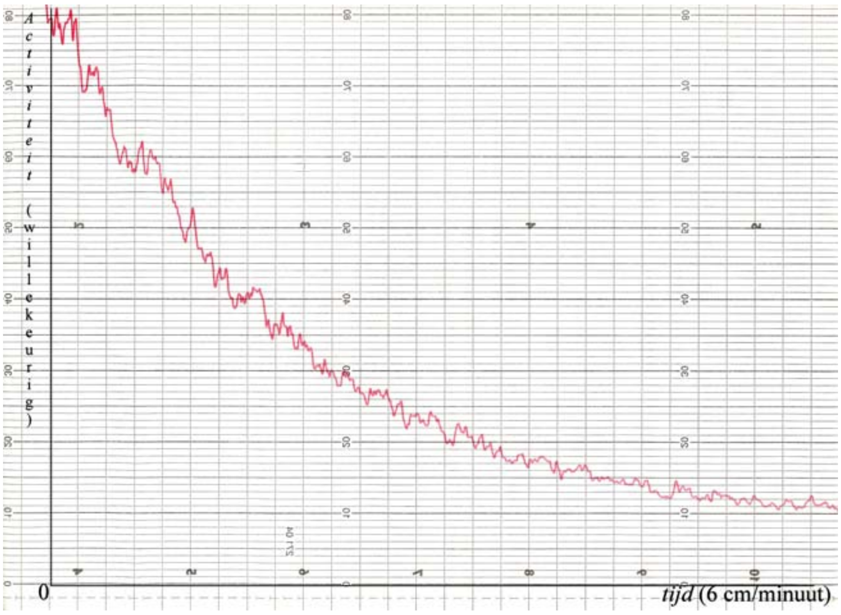
a. Geef dit in een formule weer, uitgaande van een beginhoeveelheid $N(0)$.
b. Hoeveel is er nog over van de beginhoeveelheid na 1,0 jr?
c. Hoe groot is de groeifactor per jaar?
d. Noteer nogmaals het verband tussen beginhoeveelheid en verlopen tijd, maar nu met de groeifactor per jaar.

51 Van een radioactieve stof is na 20 minuten nog 80% over.

a. Geef het gedrag van de stof in een formule weer.
b. Bepaal de groeifactor per minuut.
c. Hoe groot is de halveringstijd?
d. Als je na enige tijd nog de helft over hebt, hoe groot is dan op dat moment de halveringstijd? Wat kun je zeggen over de activiteit van de stof, vergeleken met de activiteit aan het begin?
e. Je hebt op een gegeven moment nog de helft van de stof over. Hoeveel tijd later heb je dan nog 40%?
f. Hoe groot is de kans dat een atoom van deze stof in 40 minuten vervalt?

52 Hieronder zie je een diagram van de activiteit van Radon 220. Het diagram is gemaakt met een x,t-schrijver die met een snelheid van 6 cm/minuut draaide. (Met behulp van experiment 2 van het ISP in Utrecht)

a. Bepaal uit de grafiek de halveringstijd van de activiteit.
b. Hoe zie je aan de grafiek dat radioactief verval een statistisch proces is?



c. Wat betekent dat voor de nauwkeurigheid waarmee je de halveringstijd bepaald hebt?
d. Bepaal de groeifactor per minuut.
e. Teken de grafiek die bij die groeifactor hoort. Klopt die met de werkelijke grafiek?

> ***Activiteit**:*
> *het aantal ioniserende deeltjes dat een hoeveelheid stof elke seconde uitzendt en daarmee ook het aantal radioactieve atomen dat per seconde vervalt naar een ander soort atoom*

53 Een bol met een massa van 1,0 kg van een radioactieve stof heeft een activiteit van 800 Bq.

a. Hoe groot is de activiteit van 0,5 kg stof als je de 1,0 kg in tweeën deelt?
b. Als een atoom vervalt, wordt het een atoom van een andere stof. De activiteit geeft dus ook aan hoeveel atomen elke seconde veranderen in een ander soort atoom en daarna (meestal) niet meer radioactief zijn. Als je lang genoeg wacht, is er van de radioactieve stof nog 0,5 kg over. Hoe groot is dan de activiteit van de bol nog?
c. Wat kun je dus zeggen over activiteit en hoeveelheid materiaal?

54 Gooien met dobbelstenen en afvallen als je twee gooit.

a. 120 mensen gooien met een dobbelsteen. Hoeveel mensen gooien een 2 verwacht je? En bij een volgende worp als je als je twee gegooid hebt afvalt?
b. 60 mensen gooien een dobbelsteen. Hoeveel mensen gooien dan een twee verwacht je? En bij de tweede beurt?
c. En als er veertig mensen een dobbelsteen gooien?
d. Wat kun je bij het gooien zeggen over de groeifactor? Waar wordt de groeifactor door bepaald?
e. Op wat voor manier zit de hoeveelheid mensen die een dobbelsteen gooit in deze vragen verwerkt?

Exponentiële verbanden
10 Logaritme als natuurlijke maat

Wiskundig is de logaritme de inverse functie van een machtsfunctie. Dat kun je goed gebruiken als je bijvoorbeeld achter de groeifactor wilt komen. De logaritme wordt echter ook nog op een andere manier veel gebruikt in de natuurwetenschappen.

Paragraafvraag	**Waarom is de logaritme van een grootheid soms een betere maat dan de grootheid zelf?**

Instap

Welke verschillen in gewicht nemen mensen nog waar?
Neem een aantal gelijke lege frisdrankblikjes. Vul deze met verschillende hoeveelheden water. Vul ze bijvoorbeeld tot 100 g, 103 g, 105 g, 110 g en 112 g. Geef ze een letter en laat verschillende leerlingen voelen welke blikken even zwaar of zwaarder zijn. Pas eventueel het aantal gram wat aan.

Probeer vast te stellen welke verschillen personen nog net voelen in gewicht.

a. Een ander groepje doet hetzelfde bij dezelfde personen maar nu met waterflesjes en waarden rond de 400 g.

b. Andere groepjes werken met 2liter flessen met bijvoorbeeld 1,80 kg, 1,84 kg, 1,90 kg en 2,00 kg.

c. Vat de ervaringen in een enkele conclusie samen.

Ernst Heinrich Weber heeft in 1830 al onderzoek gedaan naar het verband tussen 'objectief zwaar' en 'subjectief zwaar', meer in het algemeen tussen prikkel in de buitenwereld en waarneming in de hersenen. Weber had daarbij verschillende zaken opgemerkt. Hoe kleiner het oorspronkelijke gewicht, hoe sneller het zintuig een verandering in het gewicht opmerkt. Er is een verband tussen de nog juist waargenomen verandering en de grootte van de oorspronkelijke prikkel. Na nog wat experimenteren vond Weber: de verandering van de prikkel gedeeld door de oorspronkelijke prikkel is constant. Met andere woorden, als je van 1,0 tot 1,1 kg nog net merkt (verandering: 0,1 kg, is tien procent van 1,0 kg), dan merk je ook het verschil tussen 10 en 11 kg (ook tien procent), maar van 10,0 kg naar 10,1 kg merk je nog niet. Onze zintuigen meten in verhoudingen, niet in verschillen.

De menselijke zintuigen werken in percentages in plaats van met hoeveelheden
(Ernst Heinrich Weber)

Weber ontdekte dat alle zintuigen in percentages werken waar natuurkundigen in verschillen denken: ook tastzin, helderheid, kleur, smaak, gehoor enzovoort. Weliswaar zijn sommige mensen gevoeliger dan andere -- zij hebben minder procenten nodig om een verschil te merken -- maar per proefpersoon en per zintuig klopt het ongeveer. Voor gewichten geldt dat een toename van drie procent nog net merkbaar is.

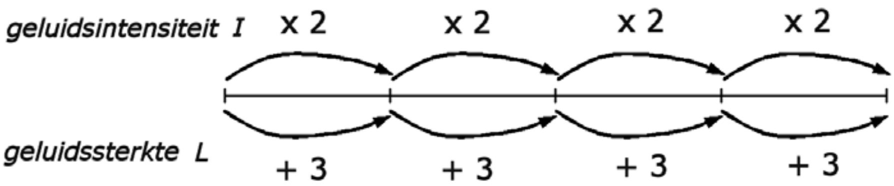
Weer anders: als wij menen dat er net een merkbaar verschil in gewicht is, geldt (bijvoorbeeld) voor het gewicht $g = g_0 1,03^1$;

Wij nemen een twee maal zo groot verschil waar, dan geldt $g = g_0 1,03^2$; bij een waarneming van 3 maal verschil $g = g_0 1,03^3$

De sensatie is evenredig met de logaritme uit de prikkel
(Wet van Weber, geformuleerd door Gustav Fechner)

Hieruit zie je dat de sensatie van meer gewicht zich gedraagt als de exponent en dan kun je met gebruik van de logaritme de wet van Weber aangeven zoals die door Gustav Fechner is geformuleerd: *de sensatie is evenredig met de logaritme van de prikkel*.

Mensen horen ook in percentages van de geluidsintensiteit. Geluid dat qua intensiteit steeds een factor twee groter wordt, ervaren wij steeds als evenveel sterker: Als de intensiteit twee maal zo goot wordt, dan wordt het geluidsniveau 3 dB meer.



In feite komt het er op neer, dat mensen de exponent van de intensiteit als sterkte ervaren.
Vandaar dat in dergelijke situaties vaak een logaritmische functie gebruikt wordt om een grootheid vast te leggen die mensen met hun zintuigen kunnen waarnemen.

Geluidsniveau L wordt uitgedrukt als $L = 10\log\left(\dfrac{I}{10^{-12}}\right)$ met L in dB.

De fysische grootheid I waarin het vermogen van de bron verstopt zit, wordt zo netjes vergeleken me een standaardgrootte en via de logaritme wordt de procentuele verandering omgezet naar een lineaire grootheid.

55 Machten van tien

Bekijk met een klein groepje de applet "machten van tien" op
http://micro.magnet.fsu.edu/primer/java/scienceopticsu/powersof10/index.html
Bediscussieer op welke manier je al de plaatjes van de applet het beste op één lijn kunt weergeven, met de orde van grootte van de afstand die in het plaatje te zien is ook aangegeven.

56 Aardbevingen en de schaal van Richter

De sterkte van aardbevingen wordt met verschillende schalen gemeten. Alle schalen hebben met elkaar gemeen dat ze logaritmisch zijn. Charles Richter (1900 – 1985) gebruikte de sterkte van de uitslag van een seismogram op 100 km afstand van de oorzaak van de beving als maat voor de aardbeving.
Een uitslag van 1,0 mm op een afstand van 100 km van een bepaalde seismograaf werd gedefinieerd als sterkte 3, terwijl de schaal verder logaritmisch is. Een uitslag van 10 mm op een afstand van 100 km betekent dan een aardbeving van magnitude 4 op de schaal van Richter. Een magnitude 3 is meestal net voelbaar. Elke toename van 1 in de magnitudeschaal blijkt overeen te komen met een 30voudige hoeveelheid energie die vrij komt bij de beving.

a. Hoe sterk is op de schaal van Richter een beving met een uitslag van 100 mm op 100 km afstand? Wat betekent dat voor de hoeveelheid energie, vergeleken met een beving met magnitude 3?
b. Leg uit waarom een logaritmische schaal hier een goede keuze is geweest.

57 Geluidsbescherming

Een grote weg maakt op een afstand van 1,0 km nog een geluid met L= 80 dB. Via geluidsschermen is men in staat om de hoeveelheid geluidsenergie op die afstand met een factor 8 te reduceren!

a. Hoe groot is de intensiteit op 1,0 km afstand?
b. Hoe groot wordt de intensiteit op die afstand?

c. Bereken de nieuwe geluidsterkte op die afstand.
d. Hoe groot wordt de geluidsterkte als men in staat is om de geluidsintensiteit met een factor 16 te reduceren?

58 Koor

Een koor is aan het repeteren. Het blijkt dat het muziekstuk moeilijk uit te voeren is omdat met het orkest erbij het koor te weinig geluid heeft voor bepaalde passages. Voor het mooie zou het koor met een geluidsniveau van 106 dB moeten zingen in plaats van met 100 dB. Het koor bestaat uit 60 mensen. Het bestuur van het koor besluit om aan bevriende koren versterking te vragen.

a. Bereken hoeveel mensen het koor erbij moet vragen om aan de gewenste geluidsterkte te komen.
b. Is versterking van het koor een reële optie?

Bespreking **Conclusie trekken**

Met een paar voorbeelden heb je nu gezien dat sommige grootheden zijn aangepast door de logaritme te nemen.

a. Geef (individueel) in een paar regels aan waarom de logaritme van een grootheid soms een betere maat geeft voor het beschrijven van verschijnselen dan de grootheid zelf.
b. Bediscussieer je conclusie in een klein groepje van twee of drie leerlingen en maak een gezamenlijke conclusie.

Je docent zorgt voor een klassikale afsluiting, waarin de conclusies van elk groepje worden besproken.