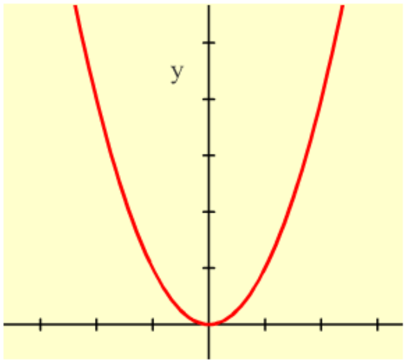
NAAM:

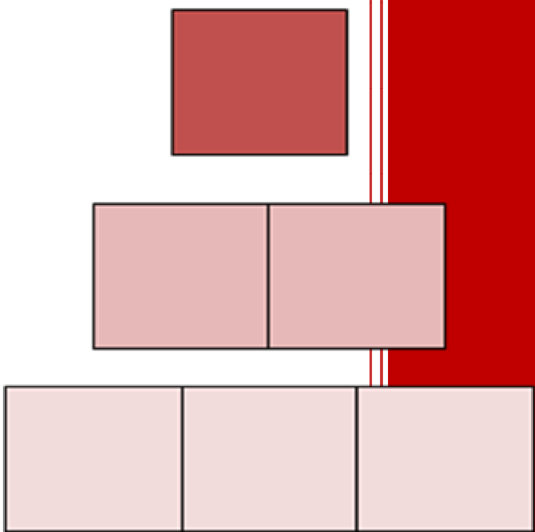
KLAS:

SaLVO!

11 Evenredigheden en Machten

x (m)	1	3	5	…	…	…
y (m^2)	1	…	…	49	121	729





WISKUNDE

KLAS 4 VWO

SaLVO!

Dit lesmateriaal is een onderdeel van het samenwerkingsproject SaLVO! dat als doel heeft om meer samenhangend onderwijs te ontwikkelen in de bètavakken.

Overzicht projectmateriaal

De leerlijn SaLVO! rond verhoudingen, verbanden, formules en grafieken is opgebouwd uit een aantal delen bij verschillende vakken:

biologie = B, economie = E, informatiekunde = I, natuurkunde = N, scheikunde = S en wiskunde = W.

deel	titel	vak(ken)	leerjaar
1	Verhoudingen en evenredigheden	W	2 HV
2	Een verband tussen massa en volume	N	2 HV
3	Vergroten en verkleinen	N, W	2HV
4	Omgekeerd evenredig verband	W	2/3 HV
5	Planeten en Leven	B, N, S, W	2/3 HV
6	Economie en procenten	E, W	3 HV
7	Verhoudingen bij scheikundige reacties	S	3 HV
8	Formules en evenredigheden	N	3HV
9	Vergelijkingen in de economie	E, W	3 HV
10	Exponentiële verbanden	I, N, W	3 HV
11	Evenredigheden en machten	W	4 HV
12	Verbanden beschrijven	N	4 HV
13	Exponentiële functies	B, N, S, W	5 V
14	Periodieke functies	N, W	5 V

Colofon

Project SaLVO! (Samenhangend Leren Voortgezet Onderwijs)

Auteurs Kees Rijke, Henk van der Kooij

Versie juni 2009

M.m.v. St. Bonifatiuscollege, Utrecht

Geref. Scholengemeenschap Randstad, Rotterdam

Freudenthal Inst. for Science and Mathematics Education, Univ. Utrecht

Voorwoord

Het blok *'Evenredigheid en machten'* is gemaakt voor vierdeklas vwo leerlingen en hoort bij het vak wiskunde. Dit blok gaat veel dieper in op de soorten evenredigheden en behalve recht evenredigheid en omgekeerde evenredigheid zullen er ook kwadratische evenredigheid en omgekeerd kwadratische evenredigheid behandeld worden. Daarnaast word je geleerd te kunnen rekenen met machten en zal je gaan leren wat machten met evenredigheden te maken hebben.

Inhoudsopgave

Evenredigheden en machten

1 Herhaling

In vorige blokken van het Salvo! – materiaal heb je geleerd wat (recht) evenredig betekent. Zowel bij wiskunde als bij natuurkunde heb je ermee geoefend.
We kunnen de theorie samenvatten met de volgende kadertjes :

Theorie 1

Twee grootheden die met elkaar samenhangen volgens het principe:

Als de ene grootheid met een getal wordt vermenigvuldigd dan wordt de andere grootheid met hetzelfde getal vermenigvuldigd

heten *recht evenredig*.

Theorie 2

Een verband tussen x en y waarbij y een constante maal x is, kan weergegeven worden met een formule van de vorm:

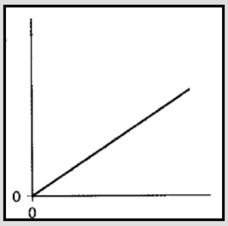
$y = c \cdot x$

Hierin heet c de *evenredigheidsconstante*.

Theorie 3

Van een recht evenredig verband (bijvoorbeeld $y = c \cdot x$) is de grafiek een rechte lijn door de oorsprong.

De evenredigheidsconstante c is van die lijn het *hellinggetal*, ook wel genoemd de *richtingscoëfficiënt* of de *steilheid*.



Theorie 4

De formule bij een recht evenredig verband (bijvoorbeeld $y = c \cdot x$) kan ook geschreven worden als

$$\frac{y}{x} = c$$

Die schrijfwijze kan gebruikt worden om te bepalen of een gegeven tabel behoort bij een recht evenredig verband.

We maken wat herhalingsopdrachten om te oefenen.

1. Tekenen op schaal

In een atlas staat er bij een kaart dat de schaal 1: 500000 is. Dat betekent dat 1 cm op de kaart in werkelijkheid 500.000 cm is ofwel 5 km.

a. Ik meet op de kaart 3,5 cm. Bereken hoeveel dat is in werkelijkheid.

b. Dordrecht en Breda liggen 32 km van elkaar. Bereken hoeveel cm dat is op de kaart.

c. Vul aan: Als op de kaart de afstand 2,5 keer zo groot genomen wordt, dan ...

2. x en y

In de volgende tabel geldt hetzelfde principe als hierboven:

Als x met een getal wordt vermenigvuldigd dan wordt y met hetzelfde getal vermenigvuldigd.

Vul de tabel verder in.

x en *y*							
x	4	2	10	...	...	...	2,5
y	140	...	...	770	385	1000	...

3. Stroopwafels.

In stroopwafels zit veel vet: 22,5 gram vet per 100 gram stroopwafel. Een pakje van 10 stroopwafels heeft een massa van 400 gram.

a. Bereken hoeveel vet er zit in 17 stroopwafels.

b. Bereken hoeveel stroopwafels ik moet eten om 126 gram vet binnen te krijgen.

c. Ik eet 1½ pakje stroopwafels op tijdens de wiskundeles. Bereken hoeveel vet ik dan eet.

4. De gier en de duif

Gieren zijn uitstekende zwevers. In pure glijvlucht – dus zonder vleugelslagen en zonder steun van stijgende luchtstromen – kan een gier elf meter horizontaal glijden op slechts één meter daling.

Bij een daling van 3 meter is de glijafstand dus 33 meter.

Gier	
Daling (in m)	*Glijafstand* (in m)
1	11
7	...
15	...
...	220
...	550

a. Vul de hiernaast staande tabel van de gier aan.

b. Bereken de glijafstand die behoort bij een daling van 15 meter.

c. Bereken de daling die behoort bij een glijafstand van 220 meter.

Duiven zie je ook vaak een stuk zweven zonder vleugelbeweging. Hun prestaties zijn wel wat minder.

d. Vul ook deze tabel verder in.

Duif				
Daling (in m)	4	2	10	...
Glijafstand (in m)	15	...	...	150

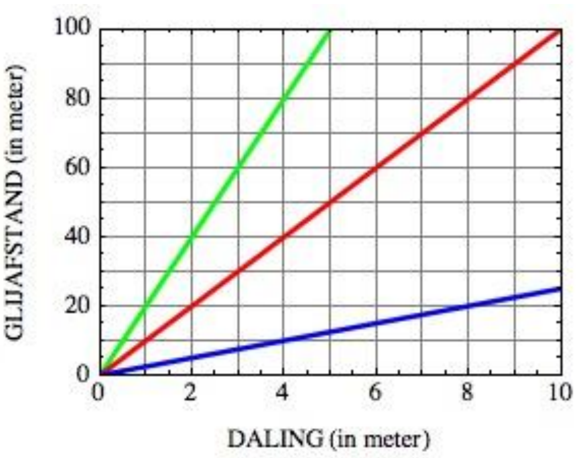
5. Finesse

Hiernaast zie je een grafiek met 3 rechte lijnen die door de oorsprong gaan. Ze behoren elk bij een recht evenredig verband tussen G (= glij-afstand) en D (= daling). Want voor zwevers geldt:

$$G = F \cdot D\ .$$

De evenredigheidsconstante F wordt bij zwevers genoemd: *de finesse* .

Zo kun je in de tabel hiernaast zien dat de finesse van de gier 11 is. Voor een gier geldt dus: $G = 11 \cdot D$.



zwever	F
zweefvliegtuig	35
albatros	20
Boeing 747	15
gier	11
gierzwaluw	10
koolwitje	4
vliegende eekhoorn	2,5
sprinkhaan	1,5

a. Geef van elk van de 3 lijnen de vergelijking in de vorm $G = F \cdot D$. De bedoeling is natuurlijk dat je de waarde van F invult.

Bovenste lijn: $G =$

Middelste lijn: $G =$

Onderste lijn: $G =$

b. Zoek in de tabel op bij welke zwever elke grafiek behoort.

c. Hoe zie je aan de grafieken A en B welke van de twee bij de beste zwever behoort?

d. Bepaal de finesse van de duif.

e. Hoe groot is de finesse van een vallende steen?

6. Evenredig?

Let op: niet alle verbanden tussen grootheden volgen bovenstaand principe!

a. Het kost 39 eurocent om een brief te versturen van 8 gram. Hoeveel kost het versturen van een brief van 16 gram?

b. Een theedoek droogt aan de waslijn in 30 minuten. In hoeveel tijd zijn 5 theedoeken droog aan de waslijn?

c. Kees loopt de 100 meter in 14,0 s. In hoeveel tijd loopt hij de 2000 m?

d. Als je met 1 zuivere dobbelsteen gooit, is de kans op een 2 precies 1/6. Hoe groot is de kans op dubbeltwee als je met 2 dobbelstenen gooit?

e. De sinus van 30^o is 0,5. Hoe groot is de sinus van 60^o?

7. Massa en volume

Tussen de massa van ijzer en het volume ervan bestaat een verband:

bij twee keer zoveel volume behoort ook twee keer zoveel massa.

Wij weten ook dat de massa gedeeld door het volume de dichtheid ρ van ijzer is. Als je die in BINAS opzoekt dan vind je een dichtheid ρ van (afgerond) $8 \cdot 10^3$ $kg \cdot m^{-3}$.

Bij een aantal volumes kan de massa worden gemeten. In de tabel hiernaast is een aantal meetwaarden van de massa m (in kilogram) en het bijbehorend volume V (in m^3) vermeld.

Natuurlijk staan in deze tabel waarden die een zekere onnauwkeurigheid vertonen.

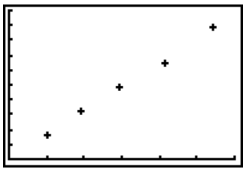
V (m^3)	m (kg)
$2{,}1 \cdot 10^{-6}$	$16{,}1 \cdot 10^{-3}$
$3{,}8 \cdot 10^{-6}$	$31{,}8 \cdot 10^{-3}$
$5{,}9 \cdot 10^{-6}$	$48{,}3 \cdot 10^{-3}$
$8{,}3 \cdot 10^{-6}$	$64{,}4 \cdot 10^{-3}$
$10{,}8 \cdot 10^{-6}$	$88{,}5 \cdot 10^{-3}$

Maar als je de 5 waarden van $\dfrac{m}{V}$ uitrekent, dan komt er telkens ongeveer hetzelfde uit.

a. Zet in je Grafische Rekenmachine (GR) de waarden van V in lijst L1 en de waarden van m in lijst L2 (via [STAT] – [EDIT]).

b. Bereken de 5 waarden van $\dfrac{m}{V}$ door middel van L3 = L2/L1. Rond de antwoorden op een goede manier af (via de 2e regel van [MODE]).

c. Maak nu de volgende PLOT in de GR en maak die tekening ook in je schrift: je brengt de 5 metingen in beeld via STATPLOT (zie het plaatje hiernaast, V horizontaal en m verticaal).



d. Teken in dat plaatje het evenredigheidsverband tussen de massa m en het volume V van ijzer erbij. Gebruik hiervoor het gemiddelde van L3 (via [LIST] – [MATH] – [MEAN]).

b (kg)	d (m)
$1{,}0 \cdot 10^4$	$0{,}51 \cdot 10^{-2}$
$2{,}0 \cdot 10^4$	$0{,}98 \cdot 10^{-2}$
$3{,}0 \cdot 10^4$	$1{,}55 \cdot 10^{-2}$
$5{,}0 \cdot 10^4$	$2{,}53 \cdot 10^{-2}$
$8{,}0 \cdot 10^4$	$4{,}08 \cdot 10^{-2}$

8. Belasting en doorzakken

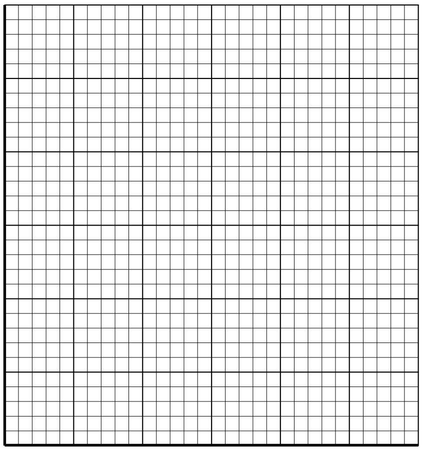
In de bouw worden vaak ijzeren balken gebruikt om muren van een bovenverdieping te ondersteunen als beneden een gedeelte van een muur wordt weggehaald. Zo'n balk moet stevig genoeg zijn. Dat wil zeggen dat hij niet te ver mag doorzakken (d) bij grote belasting (b).
In de tabel staat een serie metingen aan een ijzeren balk van 6 m lang.

a. Zet net als in de voorgaande opgave de 5 metingen uit in een PLOT.

b. Waarom zijn b en d recht evenredig?

c. Bereken de evenredigheidsconstante (op een goede manier afgerond). Zet de eenheid erbij!

d. Teken in de PLOT ook de grafiek van het recht evenredige verband erbij.



9. Sinaasappels

Als je bij de groenteman sinaasappels koopt is de prijs (in euro) recht evenredig met het aantal sinaasappels dat je koopt. Ik betaalde gisteren voor een doos van 94 sinaasappels 11,98 euro.

a. Maak hieronder een grafiek die dit verband weergeeft tot 1500 sinaasappels. Het aantal zet je horizontaal, de prijs verticaal.

b. Hoe groot is de evenredigheidsconstante (afronden op 3 cijfers achter de komma) en welke eenheid heeft die?

c. Iemand koopt uit zo'n doos 37 sinaasappels. Hoeveel moet hij daarvoor betalen?

d. Hoeveel sinaasappels kan ik kopen voor 37 euro?

Wat leer je in deze paragraaf?

Een marathonloper loopt een vaste afstand van 42,195 km. Als A (gemiddeld) langzamer loopt dan B, doet A er langer over. Hoe zit dat?

De tijd die je nodig hebt voor een marathon is *omgekeerd evenredig* met je (gemiddelde) snelheid.

Evenredigheden en machten

2 Omgekeerd evenredig

10. instap : WK afstanden schaatsen

Op het WK afstanden bij het schaatsen rijden sprinters de 500 m. Maar de één is sneller dan de ander. Iemand die twee keer zo snel is als een ander heeft voor die afstand half zoveel tijd nodig. Dat komt doordat voor alle rijders geldt: tijd maal snelheid is 500 m.

In de tabel rechts staan een aantal gereden tijden. Je kunt daarbij de (gemiddelde) snelheid berekenen.

t (s)	v (m/s)
30	...
35	...
40	...
45	...
50	...

a. Vul de tabel in.

b. Maak een grafiek van het verband tussen t en v voor $25 \leq t \leq 100$. Neem t horizontaal en v verticaal.

c. Bereken de tijd van een sprinter die de 500 m rijdt met een snelheid van 14 m/s.

d. Jan rijdt de 500 m 1½ keer zo snel als Jaap. Wat weet je dan van hun tijden?

e. Maak voor het verband tussen t en v een formule.

f. Maak net zo'n tabel en grafiek voor de 5000 meter. Gebruik reëele waarden. Denk eraan dat het wereldrecord ligt in de buurt van de 6,5 minuten.

g. Wat is de beste tijd van een schaatser die op deze afstand niet sneller kan dan gemiddeld 37 km/h?

h. Jan rijdt de 5000 m 1,2 keer zo snel als Jaap. Wat weet je dan van hun tijden?

Theorie 5

Twee grootheden die met elkaar samenhangen volgens het principe:

Als de ene grootheid met een getal wordt vermenigvuldigd, dan wordt de andere grootheid door hetzelfde getal gedeeld

heten *omgekeerd evenredig*.

Het verband tussen t en v voor de sprinters op de 500 m kun je schrijven met een formule: $t \cdot v = 500$.

Als je t weet, bereken je v met $v = \dfrac{500}{t}$ of ook $v = 500 \cdot \dfrac{1}{t}$.

Net zo kun je, als je v weet, t berekenen met $t = \dfrac{500}{v}$ of ook $t = 500 \cdot \dfrac{1}{v}$. Nu zie je waarom zo'n verband *omgekeerd evenredig* heet: t is evenredig met het omgekeerde van v en net zo is v evenredig met het omgekeerde van t .

11. x en y

In deze opgave kijken we naar het omgekeerd evenredig verband: y maal x is 60.

y	x	$1/x$
10	...	...
20	...	...
30	...	...
40	1,5	2/3
50	...	...
60	...	...

a. Schrijf hiervoor de formule op zó dat je ziet: y is evenredig met het omgekeerde van x.

b. Schrijf hiervoor de formule op zó dat je ziet: x is evenredig met het omgekeerde van y.

c. Neem $x = 8$ en bereken y.
Maak vervolgens x 20% groter. Wordt y dan 20% kleiner? Zo nee, hoe zit dat dan?

d. Bij deze opgave vind je een tabel. Vul die in. Controleer vervolgens dat y evenredig is met het omgekeerde van x.

Theorie 6

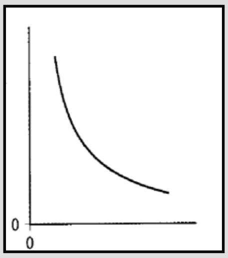
Een verband waarbij y evenredig is met het omgekeerde van x kan samengevat worden in een formule van de vorm:

$$y = c \cdot \frac{1}{x}$$

Hierin heet c de *evenredigheidsconstante*.
Je kunt het verband ook schrijven als:

$$y \cdot x = c$$

Dat is handig als je c nog moet bepalen. De grafiek van zo'n verband is een (stuk van een) hyperbool.



12. De wet van Boyle

De wet van Boyle luidt:

Van een bepaalde hoeveelheid gas is bij constante temperatuur het product van de druk en het volume constant. In formule: $p \cdot V = C$.

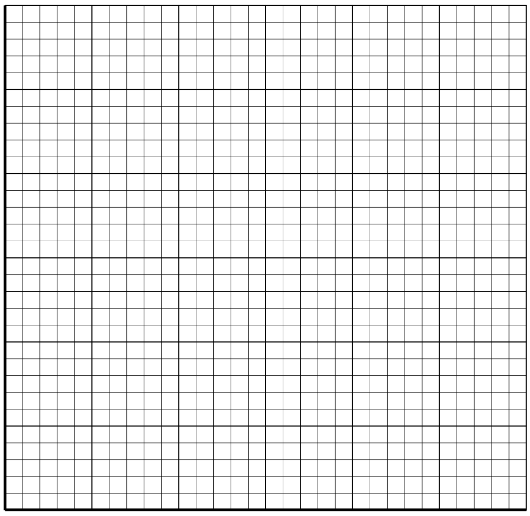
In deze opgave bekijken we een hoeveelheid gas met een volume van 6 liter en met een druk van 1,2 bar.

a. Bereken hoe groot de druk wordt als we deze hoeveelheid samenpersen tot 3 liter.

b. Bereken hoe groot het volume wordt als we de druk verkleinen tot 0,36 bar.

c. Hoe groot is C in dit geval?

d. Teken een grafiek van dit omgekeerd evenredig verband. Neem p op de horizontale as tussen 0,2 en 10 bar.



13. slotsom : Marathon

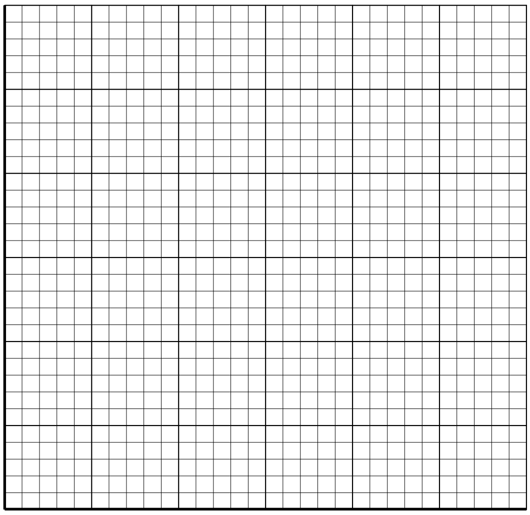
Een marathonloper loopt een vaste afstand van 42,195 km. Als de gemiddelde snelheid van loper A half zo groot is als van loper B, dan doet A er twee keer zo lang over als B. De tijd die een loper nodig heeft voor een marathon is *omgekeerd evenredig* met zijn gemiddelde snelheid.

a. B loopt met een gemiddelde snelheid van 20 km/h. Hoe lang doet A over de marathon?

b. In het dagelijks leven kom je veel omgekeerd evenredige verbanden tegen. Geef twee voorbeelden. Kun je er een formule bij maken?

c. Wat stelt de evenredigheidsconstante voor en welke eenheid heeft die?

d. Maak er ook een grafiekje bij.



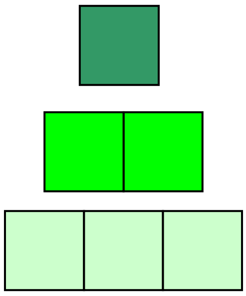
Evenredigheden en machten

3 Kwadratisch evenredig

Wat leer je in deze paragraaf?

Een boer zaait haver op een veld van 100 bij 100 meter (= 1 ha). Zijn buurman zaait haver op een veld van 200 bij 200 meter (= 4 ha).

De benodigde hoeveelheid haverzaad is *evenredig met het kwadraat* van de zijdelengte van een vierkant veld.



14. instap : Vierkanten

We bekijken vierkanten met zijdelengte x (in meters). We berekenen telkens de oppervlakte y (in vierkante meters).

a. Vul de tabel hieronder verder in.

x (m)	1	3	5	…	…	…
y (m²)	1	…	…	49	121	729

b. Hoe verandert de oppervlakte y als je x 5 keer zo groot maakt?

c. Waarom is y niet recht evenredig met x?

d. Waarom is y niet omgekeerd evenredig met x?

e. Schrijf de formule op die y uitdrukt in x.

f. We bekijken nu een strip van 3 vierkantjes met zijde x meter.
Als $x = 4$ m, is de oppervlakte $y = 3 \cdot 4^2 = 48$ m². Vul de tabel hieronder verder in.

x (m)	1	4	7	…	…	…
y (m²)	…	48	…	300	507	1452

g. Hoe verandert de oppervlakte y als je x 5 keer zo groot maakt?

h. Schrijf de formule op die y uitdrukt in x.

Theorie 7

Twee grootheden die met elkaar samenhangen volgens het principe:

Als de ene grootheid met een getal wordt vermenigvuldigd dan wordt de andere grootheid met het kwadraat van dat getal vermenigvuldigd

heten kwadratisch evenredig.

15. Remweg

De remweg *r* van een auto (bij constante remkracht) is evenredig met het kwadraat van de snelheid *v*. Dat betekent dat als de snelheid 2 keer zo groot is, de remweg 2^2 (= 4) keer zo groot is. Bij een snelheid van 50 km/h is de remweg 18,75 m.

a. Bereken de remweg bij een snelheid van 150 km/h.

b. Hoe verandert de remweg als je de snelheid 1,5 keer zo groot maakt?

c. Bereken de remweg bij een snelheid van 1 km/h.

d. Bereken de remweg bij een snelheid van 13 km/h.

e. Schrijf de formule op die *r* uitdrukt in *v*.

Theorie 8

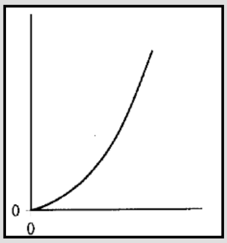
Een verband waarin y evenredig is met het kwadraat van *x* kan samengevat worden in een formule van de vorm:

$$y = c \cdot x^2$$

Hierin heet *c* de evenredigheidsconstante.
Je kunt het verband ook schrijven als:

$$\frac{y}{x^2} = c$$

Dat is handig als je *c* nog moet bepalen. De grafiek van zo'n verband is een (gedeelte van een) parabool.



16. Bol

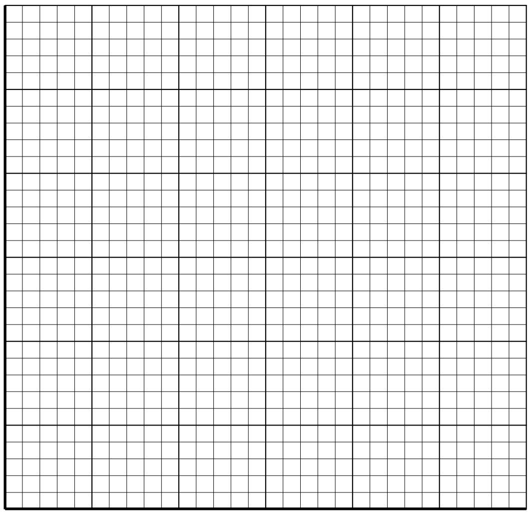
De oppervlakte A van een bol (in m²) is evenredig met het kwadraat van de straal r (in m).

a. Zoek in BINAS op wat de formule is bij dit verband.

b. Bereken de oppervlakte bij een straal van 1 m.

c. Hoe verandert de oppervlakte als je de straal 15 keer zo groot maakt?

d. Teken de grafiek van dit verband voor $0 \leq r \leq 10$.



e. Bereken de straal bij een oppervlakte van 100 m².

17. Windmolen

Bij experimenten met een windmolen is onderzocht hoe het door de windmolen geleverde vermogen P afhangt van de lengte L van de wieken. In de tabel hiernaast staan meetresultaten van L en P bij gelijke windsnelheid en dichtheid van de lucht.

L (m)	P (W)
2	$4{,}8 \cdot 10^3$
5	$29{,}4 \cdot 10^3$
8	$77{,}0 \cdot 10^3$

a. Zet in je GR de waarden van L in lijst L1 en de waarden van P in L2.

b. Bereken de 3 waarden van $\frac{P}{L^2}$ door middel van L3 = L2/L1².

c. Bereken van de 3 waarden in L3 het gemiddelde.

d. Welke formule geeft nu het kwadratisch evenredig verband het beste weer?

e. PLOT deze metingen in de GR en maak de tekening van deze plot ook hieronder. (*L* hor / *P* vert).

f. Teken daarin ook de grafiek die het in vraag **d.** gevonden verband $P=c \cdot L^2$ weergeeft.

x	y
1,5	5,6
3,5	30,6
5,0	62,5

18. x en y

Hiernaast staat een tabel die behoort bij een verband waarbij y evenredig is met het kwadraat van x. Er is dus een constante c met $y = c \cdot x^2$.
Elk van de 4 vragen begint met de waarden in deze tabel**.**

a. We maken de 3 waarden van y 4 keer zo klein. Bereken de 3 waarden van x die daarbij horen.

1.
2.
3.

b. Bij elke waarde van x maken we de waarden van y 4 keer zo klein. Die nieuwe waarden van y zijn ook evenredig met het kwadraat van x. Bereken de constante die daarbij hoort.

c. We maken de 3 waarden van x 10 keer zo groot. Bereken de 3 waarden van y die daarbij horen.

d. Bij elke waarde van y maken we de waarden van x 10 keer zo groot. De waarden van y zijn ook evenredig met het kwadraat van de nieuwe waarden van x. Bereken de constante die daarbij hoort.

19. slotsom : Boer

a. Een boer zaait haver op een veld van 100 bij 100 meter (= 1 ha). Hij zaait 150 kg op 1 hectare en haverzaad kost 2 euro per kg. Dat kost in totaal ...?

b. Zijn buurman zaait op een veld van 200 bij 200 meter. Hoeveel kost hem dat?

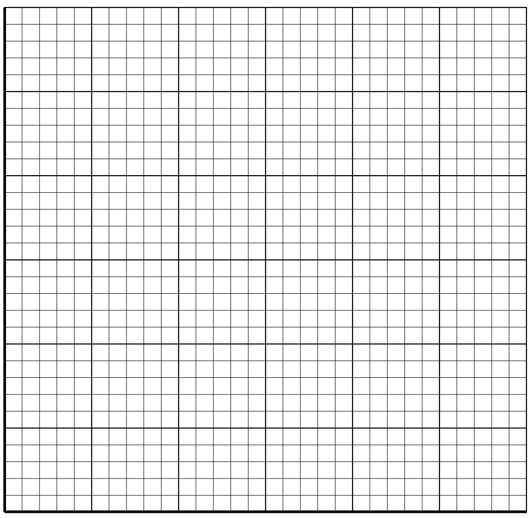
c. Welke verhouding is er tussen deze twee bedragen?

d. In het dagelijks leven kom je meer kwadratisch evenredige verbanden tegen. Geef zelf ook een voorbeeld.

e. Kun je er een formule bij maken?

f. Wat stelt de evenredigheidsconstante voor en welke eenheid heeft die?

g. Maak er ook een grafiekje bij.



Evenredigheden en machten

4 Omgekeerd kwadratisch evenredig

Wat leer je in deze paragraaf?

Ik stort een vierkante betonnen vloer met een hoeveelheid beton van 2,5 m^3. Ik kan daarmee een vloer van 5 m bij 5 m storten die 10 cm dik is of een vloer van 10 m bij 10 m die 2,5 cm dik is.

De dikte van de betonlaag is *evenredig met het omgekeerde kwadraat* van de zijdelengte van de vierkante vloer.

20. instap : Brandende Lamp

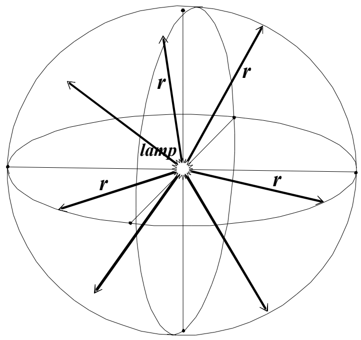
De verlichtingssterkte door lamplicht is kleiner naarmate je verder van een lamp zit, dat weet iedereen. De lamp zelf brandt wel met een constante lichtsterkte, maar de afstand heeft grote invloed op het effect. Het licht wordt namelijk verdeeld over alle plekken op dezelfde afstand van de lamp. Hoe verder weg, hoe groter het boloppervlak waarover het licht verdeeld wordt.

In BINAS kun je vinden dat voor de oppervlakte van een bol geldt:

$$A = 4\pi \cdot r^2$$

De verlichtingssterkte volgt dit principe: als dezelfde hoeveelheid licht verdeeld wordt over een 4 keer zo groot oppervlak, wordt de verlichtingssterkte 4 keer zo klein.

Een lamp schijnt gelijkmatig in alle richtingen. Dus alles wat zich op 1 meter afstand van de lamp bevindt, wordt even sterk verlicht.



bolvormige verspreiding

a. We bekijken nu de verlichtingssterkte op een afstand van 2 meter. De boloppervlakte op die afstand is 4 keer zo groot als bij een afstand van 1 meter. Wat gebeurt er met de verlichtingssterkte?

b. Hoe verandert de verlichtingssterkte als je de afstand 15 meter maakt?

c. Op welke afstand is de verlichtingssterkte 64 keer zo klein?

d. Op welke afstand is de verlichtingssterkte 100 keer zo groot?

Theorie 9

> Twee grootheden die met elkaar samenhangen volgens het principe:
>
> *Als de ene grootheid met een getal wordt vermenigvuldigd dan wordt de andere grootheid door het kwadraat van dat getal gedeeld*
>
> heten *omgekeerd kwadratisch evenredig*.

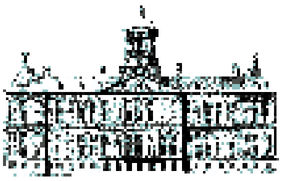
21. Boek lezen

Een 100 Watt lamp op 2 meter van je boek is sterk genoeg om bij te kunnen lezen. Hoeveel van zulke lampen moet je bij elkaar zetten om op een afstand van 10 meter dezelfde verlichtingssterkte te krijgen?

22. Oog

Bij deze vraag kun je je verbazen over de kwaliteit van het menselijk oog.

Op een afstand van 1 meter kun je zonder gevaar naar een brandende lamp van 40 watt kijken. Zo sterk is die niet. Bij helder weer, als er niets tussen jou en de lamp staat en als er geen ander storend licht is, kun je zo'n lamp op 20 kilometer afstand nog goed zien! Toch is de verlichtingssterkte op die afstand heel wat minder. Met welke factor is die verkleind?



23. Flitsers

Toeristen in Amsterdam fotograferen het paleis op de Dam ook wel 's nachts. Met een flitser moet dat kunnen, wordt er gedacht.

Zo'n flitser is juist sterk genoeg om in een kamer op 5 meter afstand daglicht te suggereren op de foto. Het fototoestel ontsteekt dan de flitser op vol vermogen.

a. Wat zou je de toerist vertellen, die op 50 meter van het paleis staat?

b. Met hoeveel flitsers die tegelijk worden ontstoken, zou het misschien toch lukken?

r (m)	I ($W\cdot m^{-2}$)
0,50	30,0
0,80	12,4
1,10	6,6
1,40	4,1

24. Geluidsbron

Wanneer je een puntvormige geluidsbron gebruikt in plaats van een puntvormige lichtbron, krijg je een vergelijkbaar effect: het geluid verspreidt zich gelijkmatig in alle richtingen en de geluidsintensiteit neemt af met toenemende afstand tot de bron.

Bij een experiment is op verschillende afstanden r (in m) tot de geluidsbron de geluidsintensiteit I (in $W\cdot m^{-2}$) gemeten.
In de tabel vind je de meetresultaten.

a. Zet in je GR de waarden van r in L1 en van I in L2.

b. Bereken de 4 waarden van $r^2 \cdot I$ door middel van $L_3 = L_2 \cdot L_1^2$.

c. Bereken van de 4 waarden in L3 het gemiddelde.

d. Welke formule geeft nu het omgekeerd kwadratisch evenredig verband het beste weer?

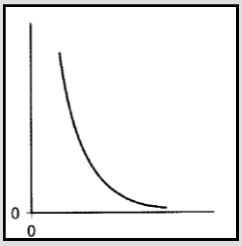
e. PLOT deze metingen in de GR en maak de tekening van deze plot ook hieronder (r hor. en I vert.).

f. Teken daarin ook de grafiek die het in vraag d. gevonden verband weergeeft.

Theorie 10

Een verband waarin y evenredig is met het omgekeerde kwadraat van x kan samengevat worden in een formule van de vorm:

$$y = \frac{c}{x^2} = c \cdot \frac{1}{x^2}$$



Hierin heet c de evenredigheidsconstante.

Je kunt het verband ook schrijven als:

$$y \cdot x^2 = c$$

Dat is handig als je c nog moet bepalen.

De grafiek lijkt op een hyperbool (maar is toch anders).

25. Vermogen

Het vermogen P van een geluidsbron wordt vastgelegd als de intensiteit van het geproduceerde geluid op een afstand van 1 m van de bron.

a. Ga na dat met deze afspraak de formule uit de vorige opgave verandert in: $I = \dfrac{P}{r^2} = P \cdot \dfrac{1}{r^2}$.

b. Maak in je GR de grafiek van I als functie van r voor een geluidsbron met een vermogen van 1 W (= op een afstand van 1 m de pijngrens). Neem r tussen 1 m en 10 m.

c. Bereken op welke afstand de intensiteit 0,1 W•m^{-2} is.

d. Bereken op welke afstand de intensiteit de gehoorgrens bereikt van 10^{-12} W•m^{-2}.

e. Bij een andere bron wordt een intensiteit gemeten van 0,00025 W•m^{-2} op een afstand van 0,03 km. Bereken het vermogen van die geluidsbron.

26. Slotsom : Beton

a. Ik stort een vierkante betonnen vloer met een hoeveelheid beton van 2,5 m^3. Ik kan daarmee een vloer van 5 bij 5 meter storten die 10 cm dik is of een vloer van 10 bij 10 meter die 2,5 cm dik is. Reken na dat de dikte van de betonlaag evenredig is met het omgekeerde kwadraat van de zijdelengte van de vloer.

b. In het dagelijks leven kom je meer omgekeerd kwadratisch evenredige verbanden tegen. Geef zelf ook een voorbeeld.

c. Kun je er een formule bij maken?

d. Wat stelt de evenredigheidsconstante voor en welke eenheid heeft die? Maak er ook een grafiekje bij.

Evenredigheden en machten

5 Eigenschappen van machten

Wat leer je in deze paragraaf?

Kun je al aardig rekenen met machten?

We gaan in deze paragraaf de eigenschappen langs en we gaan flink oefenen !!

In deze paragraaf bekijken we eigenschappen van machten. Bij het machtsverheffen kom je “rare” exponenten tegen: negatieve of gebroken of decimale exponenten. Daarom is het nuttig om er apart aandacht aan te schenken.

Je weet wat een machtsverheffing is. Kijk maar naar deze voorbeelden:

$5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ en $3^2 \cdot t^3 = 3 \cdot 3 \cdot t \cdot t \cdot t$

Theorie 11

Een machtsverheffing heeft de vorm

$$a^b$$

Hierin is a het grondtal en b de exponent. Als b een positief geheel getal is geldt:

$$a^b = a \cdot a \cdot a \ (b \, keer)$$

27. Beantwoord de volgende vragen :

a. Schrijf de betekenis op van en bereken:

$3^4 =$ $\qquad$ $0{,}9^6 =$

$2^8 =$ $\qquad$ $10^5 =$

b. Leg uit dat je 4^3 kunt schrijven als 2^6 .

c. Hoe kun je 27^4 ook schrijven?

d. Schrijf korter:

$\frac{10^{15}}{10^{11}} =$

$5^3 \cdot 5^4 =$

In de voorgaande opgave kun je het vermoeden krijgen dat er algemene eigenschappen zijn voor machtsverheffen. We zullen ze stuk voor stuk bespreken.

Theorie 12

Eigenschap 1 van het machtsverheffen:
Bij het vermenigvuldigen van machten met hetzelfde grondtal kunnen de exponenten worden opgeteld.

In formule: $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$

28. Vul de volgende voorbeelden in:

a. $5^{13} \cdot 5^{14} = 5^{\cdots}$

b. $8^2 \cdot 8^7 = 8^{\cdots}$

c. $23^{23} \cdot 23^{24} = 23^{\cdots}$

d. $a^{3x} \cdot a^2 = a^{\cdots}$

29. Leg uit :

a. dat $7^8 \cdot 8^7$ niet als één macht geschreven kan worden.

b. dat $9^9 \cdot 9^9$ wel als één macht geschreven kan worden. Hoe?

c. dat $4^5 \cdot 2^8$ wel als één macht geschreven kan worden. Hoe dan?

Theorie 13

Eigenschap 2 van het machtsverheffen:
bij het delen van machten met hetzelfde grondtal kunnen de exponenten worden afgetrokken.

In formule: $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$

30. Vul de volgende voorbeelden in :

a. $\dfrac{5^{17}}{5^{10}} = 5^{\cdots}$

b. $\dfrac{8^{100}}{8^{35}} = 8^{\cdots}$

c. $\dfrac{123^{45}}{123^{19}} = 123^{\cdots}$

d. $\dfrac{a^{3x}}{a^{2}} = a^{\cdots}$

31. Leg uit dat :

a. $\dfrac{7^8}{8^7}$ niet als één macht geschreven kan worden.

b. $\dfrac{9^{99}}{9^9}$ wel als één macht geschreven kan worden. Laat zien hoe?

c. $\dfrac{4^{25}}{2^{18}}$ wel als één macht geschreven kan worden. Hoe dan?

Theorie 14

Eigenschap 3 van het machtsverheffen: bij het berekenen van een macht van een macht kunnen de exponenten worden vermenigvuldigd. In formule: $\left(a^{p}\right)^{q} = a^{p \cdot q}$

32. Vul de volgende voorbeelden in :

a. $\left(5^{13}\right)^{7} = 5^{\cdots}$

b. $\left(8^{2}\right)^{7} = 8^{\cdots}$

c. $\left(23^{23}\right)^{10} = 23^{\cdots}$

d. $\left(a^{3x}\right)^{2} = a^{\cdots}$

33. Schrijf als een macht met behulp van de 3 regels :

a. $\left(x^{12}\right)^{10} \cdot \left(x^{9}\right)^{8} = x^{\cdots}$

b. $\left(3^{2x}\right)^{3} \cdot \left(3^{4}\right)^{5x} = \ldots^{\cdots}$

c. $\left(a^{12}\right)^{7} \cdot \left(a^{6}\right)^{14} = \ldots^{\cdots}$

d. $\dfrac{\left(p^{15}\right)^{4}}{\left(p^{3}\right)^{6}} = \ldots^{\cdots}$

Theorie 15

Eigenschap 4 van het machtsverheffen:
elk getal (≠ 0) tot de macht 0 is 1.

In formule: $a^{0} = 1,\ a \neq 0$

Voorbeeld

Wat zou 5^{6-6} zijn?

We weten: $5^{6-6} = \dfrac{5^{6}}{5^{6}} = 1$. Dus: $5^{0} = 1$

En zo'n redenering kun je maken voor elk getal (≠ 0).

34. Bereken op dezelfde manier als hierboven:

a. $4^0 =$

b. $1^0 =$

c. $10^0 =$

d. $1000^0 =$

35. Los op :

a. $3^{x} = 1$

b. $5^{2x-3} = 1$

c. $1000^{100x+10} = 1$

36. Los op :

a. $3^{x^2-1} = 1$

b. $8^{x^3-8} = 1$

Theorie 16

Eigenschap 5 van het machtsverheffen:
a^{-p} is het omgekeerde van a^p.

In formule: $a^{-p} = \dfrac{1}{a^p}$, $a \neq 0$

Je weet waarschijnlijk wel: $10^{-2} = 0,01$.

Dat kun je zo uitleggen: $10^{-2} = \dfrac{10^6}{10^8} = \dfrac{1}{10^2}$.

37. Vul de open plekken in de onderstaande rij sommen in :

a. $1000 = 10^{\cdots}$ b. $100 = 10^{\cdots}$ c. $\dfrac{1}{10} = 10^{\cdots}$

d. $1 = 10^{\cdots}$ e. $10 = 10^{\cdots}$ f. $\dfrac{1}{10^2} = 10^{\cdots}$

38. Schrijf met een negatieve exponent :

a. $\dfrac{1}{5^{10}} = 5^{\cdots}$ b. $\dfrac{8^{10}}{8^{35}} = 8^{\cdots}$

c. $\dfrac{1}{23^{19}} = \ldots^{\cdots}$ d. $\dfrac{1}{x^y} = \ldots^{\cdots}$

Theorie 17

Eigenschap 6 van het machtsverheffen:
een macht met een breuk in de exponent is te schrijven als een wortel

In formule: $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$, $q \neq 0$, $a \geq 0$

Voorbeeld 1

Wat is $5^{1/2}$?

Volgens eigenschap 1 is $5^{1/2} \cdot 5^{1/2} = 5^{1/2+1/2} = 5^1 = 5$.

Kennelijk is $5^{1/2}$ het getal waarvan het kwadraat 5 is. Dat getal schrijven we als $\sqrt{5}$.

Voorbeeld 2

Wat is $7^{2/3}$?

We weten: $7^{2/3} \cdot 7^{2/3} \cdot 7^{2/3} = 7^{\,2/3+2/3+2/3} = 7^2$.

Kennelijk is $7^{2/3}$ het getal waarvan de derde macht 7^2 is.

Dat getal schrijven we als $\sqrt[3]{7^2}$.

39. Leg op dezelfde manier uit dat

a. $3^{4/5} = \sqrt[5]{3^4}$

b. $10^{2/3} = \sqrt[3]{10^2}$

40. Schrijf zonder gebroken exponent :

a. $8^{3/4}$

b. $6^{2/5}$

c. $4^{1/2}$

d. $5^{1,25}$

41. Los op :

a. $3^x = \sqrt[3]{3}$

b. $3^{x+2} = \sqrt[9]{3}$

c. $\sqrt[4]{5^x} = 125$

d. $\sqrt{3^x} = \sqrt[3]{81}$

42. Schrijf als één macht :

a. $x^2 \cdot \sqrt{x} =$

b. $\dfrac{1}{a \cdot \sqrt[3]{a}} =$

c. $\dfrac{p^2}{\sqrt{p}} =$

d. $\dfrac{\sqrt[4]{p^2}}{\sqrt[3]{p^4}} =$

43. Schrijf als :

a. een macht van 5:

$2 \cdot 5^6 + 3 \cdot 5^6$

b. een macht van 10:

$3 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^4$

c. een macht van 2:

$5 \cdot 4^7 - 3 \cdot 4^7$

44.

a. Voor welke gehele getallen p ligt $3^4 \cdot 9^p$ tussen 10^{-4} en 10^4?

b. Voor welke gehele getallen a ligt $\dfrac{9^{10}}{3^a}$ tussen 10^{-3} en 10^6?

Evenredigheden en machten

6 Algemeen: evenredig met een macht

Wat leer je in deze paragraaf?

Planeten draaien om de zon.

Tussen de omloopstijd T en de afstand tot de zon R is er een machtsverband:

$$T = c \cdot R^{1,5}.$$

Let op: de exponent is géén geheel getal!

In de vorige paragrafen hebben we achtereenvolgens gekeken naar:

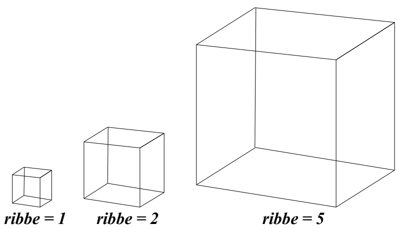
(1) y is evenredig met x	(par 1)
(2) y is evenredig met x^{-1}	(par 2)
(3) y is evenredig met x^2	(par 3)
(4) y is evenredig met x^{-2}	(par 4)

In paragraaf 5 hebben we de betekenis geleerd van machten van x met een negatieve of gebroken exponent.

In deze paragraaf zien we voorbeelden van verbanden waarbij y evenredig is met een positieve, negatieve of gebroken macht van x.

We beginnen met een voorbeeld waarbij de exponent van het machtsverband 1, 2 of 3 is.

45. instap : Kubussen



Hiernaast zie je drie kubussen, met een ribbe van 1 meter, 2 meter en 5 meter. We kijken er op 3 verschillende manieren naar:

(1) als *draadkubussen* van dun staafmateriaal, met een diameter van 1 cm

(2) als *plaatkubussen* van plaatmateriaal met een dikte van 4 mm (dus alleen de 6 zijvlakken)

(3) als *massieve* kubussen. De dichtheid van staal is bij benadering $8 \cdot 10^3$ $kg \cdot m^{-3}$.

De massa van al deze kubussen hangt af van het type en van de afmetingen.

kubussen

lengte ribbe (=L)	massa draad-kubus	massa plaat-kubus	massa massieve kubus
1 m	...	...	...
2 m	...	...	...
3 m	...	...	...
4 m	...	...	...
5 m	...	...	...
10 m	...	...	...

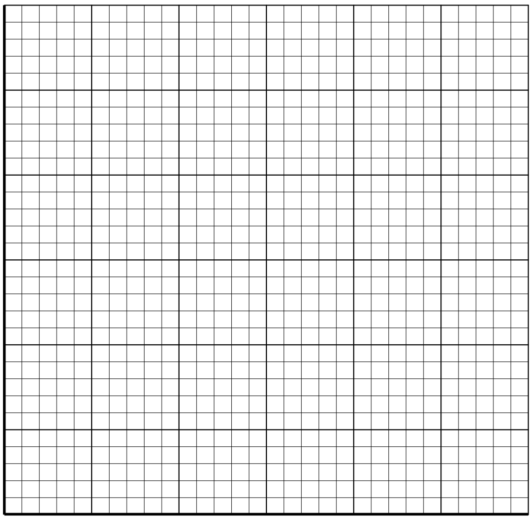
Het staafmateriaal van een *draadkubus* heeft per meter een massa van 0,63 kg.

a. Hiernaast vind je een tabel. Vul de kolom *"massa draadkubus"* in.

b. De massa van zo'n draadkubus is recht evenredig met de lengte van de ribben. Zoek de 4 theorieblokken op in paragraaf 1: "*Herhaling*". Controleer het principe uit ***theorie 1***.

c. Stel de formule op volgens ***theorie 2***.
Noem de massa m en de ribbelengte L.

d. Teken de grafiek van dit verband volgens ***theorie 3***.



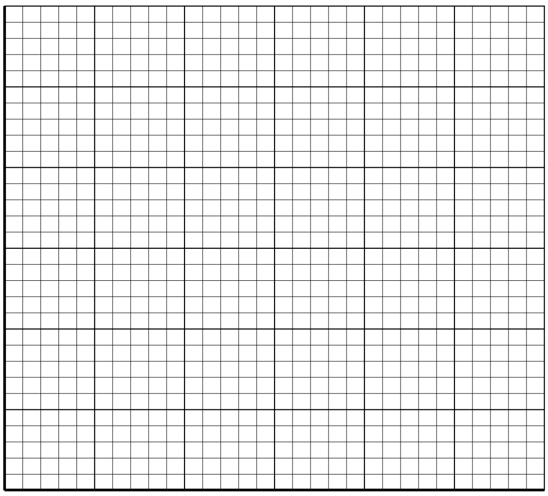
e. Geef ook de andere schrijfwijze van de formule volgens ***theorie 4***.

f. Het plaatmateriaal van een *plaatkubus* heeft per vierkante meter een massa van 32 kg. Vul in de tabel de kolom “*plaatkubus*” in.

g. De massa van zo’n plaatkubus is evenredig met het kwadraat van de ribbelengte L. Zoek de 2 theorieblokken op in paragraaf 3: “*Kwadratisch evenredig*”. Controleer het principe uit ***theorie 7***.

h. Stel de formules op volgens ***theorie 8***. Noem de massa m en de ribbelengte L.

i. Teken de grafiek van dit verband voor 0 m ≤ L ≤ 10 m.

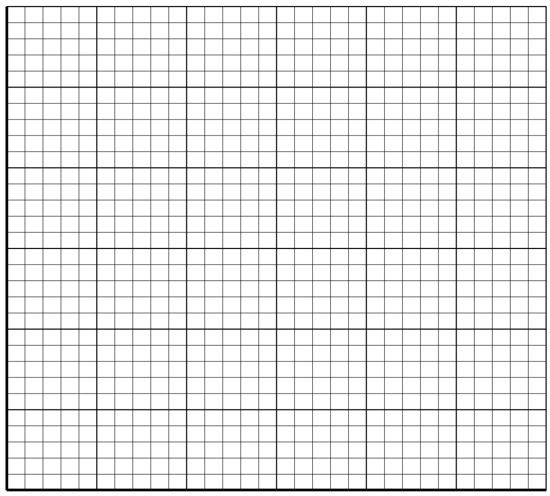


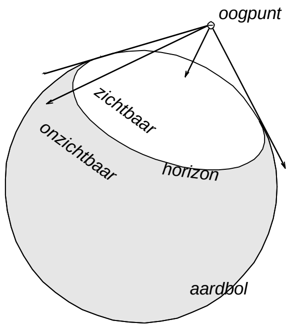
j. Een massieve kubus met een ribbe van 1 m heeft een massa van $8 \cdot 10^3$ kg. Vul in de tabel de kolom "*massieve kubus*" in.

k. De massa van zo'n plaatkubus is niet recht evenredig en ook niet kwadratisch evenredig met de lengte van de ribben. Hoe dan wel?

l. Stel voor deze evenredigheid formules op. Noem de massa m en de ribbelengte L.

m. Teken de grafiek van dit verband voor 0 m ≤ L ≤ 10 m.





Nu gaan we een machtsverband bekijken waarbij de exponent ½ is.

46. Uitzicht op de horizon

Als je hoog staat, kun je meer zien. Natuurlijk omdat je dan over mensen, muren en bomen heen kunt kijken. Maar er is nog iets anders, en dat telt juist als er geen obstakels zijn: als je vanaf een vuurtoren over zee kijkt, is ook de *horizon* veel verder weg dan wanneer je op het strand staat.

Omdat de aarde een bol is, kun je altijd maar een beperkt stuk van de aarde zien, hoe hoog je ook staat. De horizon geeft de grens aan.

In dit voorbeeld bestuderen we het verband tussen *ooghoogte* en *horizonafstand*.

oog-hoogte h (in m)	horizon-afstand d (in km)
10,0	11,0
13,0	12,5
16,0	14,0
19,0	15,2
22,0	16,4
61,0	27,3
64,0	28,0
67,0	28,6

In de tabel staat de afstand d (in km) tot de horizon aangegeven bij verschillende ooghoogten boven het aardoppervlak h (in m). De hoogten zijn die van enkele verdiepingen van een hotel op de boulevard met uitzicht op zee. De gegeven afstanden zijn afgeronde getallen.

a. Ooghoogte h en horizonafstand d zijn niet recht evenredig.
Aan diverse regels van de tabel kun je dat snel zien. Licht dat toe met voorbeelden uit de tabel.

b. Op een dubbele hoogte kun je dus niet twee keer zo ver zien.
In de tabel komen wel de afstanden 14 km en 28 km voor (zie de pijl bij de tabel). Wat valt hierbij op aan de bijhorende hoogten h?

Kennelijk geldt dat als de ooghoogte vier keer zo groot wordt, dat dan de horizonafstand twee keer zo groot wordt.
Ander voorbeeld: als h 6,4 keer zo groot wordt, wordt d 28/11 = 2,54 keer zo groot.
En $\sqrt{6{,}4} = 2{,}53$.......

c. Waarmee is kennelijk de horizonafstand d evenredig?

d. Reken op de een of andere manier uit hoe ver de horizon weg is, als je oog zich op 1,0 m boven de zeespiegel bevindt.

e. Geef bij dit verband een passende formule

d = ...

We hebben in de voorgaande voorbeelden twee nieuwe vormen van evenredigheid gevonden.

1. Bij de massieve kubussen is de massa evenredig met de derde macht van de lengte van de ribben.
2. Bij de aardbol is de horizonafstand evenredig met de wortel uit de ooghoogte, ofwel met de ooghoogte tot de macht ½ .

In het kadertje aan het begin van de paragraaf vind je een van de wetten van Kepler. Daarin zie je dat er een verband is met de exponent 1,5.

In het algemeen spreken we over **machtsverbanden**. Vandaar dit theorieblok:

Theorie 18

Twee grootheden die met elkaar samenhangen volgens het principe:

Als de ene grootheid met een getal wordt vermenigvuldigd dan wordt de andere grootheid met een macht van dat getal vermenigvuldigd

heten evenredig met een macht.

Als y evenredig is met een macht van x, dan is de bijbehorende formule van de vorm:

$$y = c \cdot x^n$$

Hierbij mag *n* een positief, negatief of gebroken getal zijn.

47. Overzicht

In de paragrafen 1 tot en met 4 zijn vier vormen van evenredigheid met een macht besproken. Zie ook het overzichtje aan het begin van deze paragraaf.
Geef voor elk van die vier gevallen de algemene formule, de waarde van de exponent n en maak daarbij ook een schets van de grafiek.

Paragraaf 1 Formule:	Paragraaf 3 Formule:
Paragraaf 2 Formule:	Paragraaf 4 Formule:

48. Kinetische energie

Bij natuurkunde leer je de formule voor kinetische energie: $E_k = \frac{1}{2} m v^2$.

a. De kinetische energie E_k is recht evenredig met de massa. Wat is de evenredigheidsconstante?

b. De kinetische energie E is kwadratisch evenredig met de snelheid. Wat is de evenredigheidsconstante?

c. Schrijf de formule in de vorm $v = \ldots$ en formuleer op dezelfde manier de twee evenredigheden die daarin kunnen worden gezien.

49. Planetenbanen

Johannes Kepler bestudeerde in de 17^e eeuw de banen van de planeten om de zon. Hij vond een verband tussen de afstand van de planeten tot de zon R en de omloopstijd T. Het resultaat daarvan ligt vast in een van de wetten van Kepler.

In de tabel vind je van een aantal planeten de afstand tot de zon. De eenheid A.E. die daarbij wordt gebruikt is de Astronomische Eenheid ($1{,}5 \cdot 10^{11}$ m). Dat is de afstand van de aarde tot de zon.

Planeet	Afstand tot de zon R (in AE)	Omlooptijd T (in dagen)
Mercurius	0,387	88
Venus	0,732	225
Aarde	1,000	365
Mars	1,524	687
Jupiter	5,203	4330
Saturnus	9,539	10800
Uranus	19,182	30700
Netunus	30,058	60200
Pluto	39,439	91300

a. In het infokadertje aan het begin van de paragraaf vind je de formule $T = c \cdot R^{1,5}$. Ga na dat die formule redelijk klopt.

b. Bereken de waarde van c.

c. Hoe zou jij die formule kunnen terugvinden als je wist dat er een machtsverband is tussen T en R?

d. Schrijf het verband in de vorm $R = \ldots$

50. Boekenplanken (1)

Als boekenplanken aan beide uiteinden worden ondersteund, dan buigen ze wat door onder invloed van de belasting (en het eigen gewicht). In het midden is de doorbuiging natuurlijk het grootst. De mate waarin de plank doorbuigt is afhankelijk van de kwaliteit van het materiaal waaruit de plank gemaakt is, van de belasting en van de afmetingen van de plank. De volgende formule geeft dat verband voor MDF (= Medium Density Fibreboard).

Betekenis van de variabelen	
u	Doorbuiging in mm
m	Belasting in kg
E	Elasticiteitsmodulus in $N \cdot mm^{-2}$
L	Lengte plank in mm
b	Breedte plank in mm
d	Dikte plank in mm

$$u = 1{,}53 \cdot \frac{m \cdot L^3}{E \cdot b \cdot d^3}\ .$$

a. u is evenredig met een macht van m, van L, van b, van d. Formuleer deze 4 machtsverbanden in woorden.

b. Hoe minder een plank doorbuigt, des te beter de kwaliteit van het materiaal. Behoort bij een betere kwaliteit een grotere waarde van E of juist een kleinere?

c. b is evenredig met een macht van L (de andere variabelen houden we constant). Welke exponent heeft dit machtsverband?

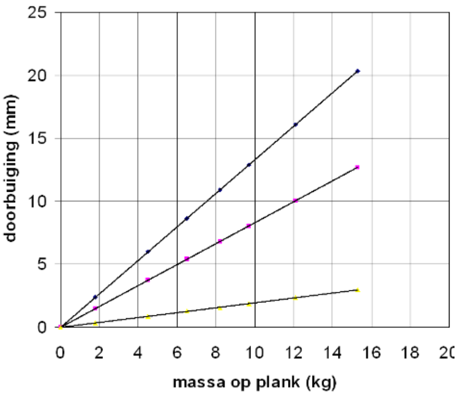
d. Wat is de evenredigheidsconstante?

e. d is evenredig met een macht van u (de andere variabelen houden we constant). Welke exponent heeft dit machtsverband?

f. Wat is de evenredigheidsconstante.

51. Boekenplanken (2)

In deze opgave bestuderen we boekenplanken met een vaste lengte van 1000 mm en een vaste breedte van 300 mm. De waarde van E is (nog) niet bekend.
In bijgaande figuur zie je 3 grafieken van het verband tussen m en u bij de diktes 10 mm, 12 mm en 20 mm.



a. Verklaar waarom de grafieken rechte lijnen door de oorsprong zijn.

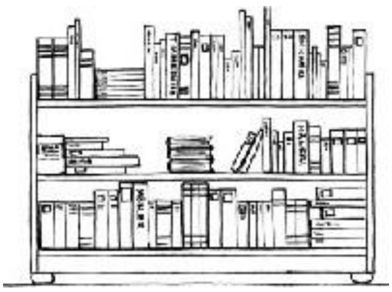
b. Bereken in elk van de 3 gevallen uit de grafiek door nauwkeurig meten de evenredigheidsconstante in $u = c \cdot m$.

c. Onderzoek met behulp van de formule en de gegeven grafieken wat de waarde van E is van dit materiaal.

52. Boekenplanken (3)

Ik wil graag een boekenplank die niet teveel doorzakt. Een doorbuiging van 5 mm vind ik nog acceptabel. De kwaliteit van het door mij gekozen MDF is $E = 2100\ \text{N}\cdot\text{mm}^{-2}$.

Vanwege de aanblik wil ik geen planken van minder dan 40 cm lang, terwijl er boeken tot 20 cm breed op moeten passen. Blijft nog over om te kiezen: de belasting en de dikte van het materiaal. Planken die meer dan 20 mm dik zijn vind ik niks.



a. Wat adviseer je mij?

b. Graag argumenten bij het advies !

Evenredigheden en machten

7 Gemengde opdrachten

53. Roeien
(naar: Machtige Functies, Profi-team 1996)

In de roeisport wordt geroeid met boten voor 1, 2, 4 of 8 roeiers. Hiernaast zie je een tabel met gegevens.

De vermelde snelheden zijn gerealiseerd door topploegen.

Er is uitvoerig onderzoek gedaan naar welke variabelen invloed hebben op de maximale snelheid van een wedstrijdboot.

Voor het gemak laten we allerlei details achterwege (zoals: hebben de roeiers 1 of 2 riemen, is er een stuurman of niet?) en bestuderen we dit probleem in zijn eenvoudigste vorm.

Aantal Roeiers N	Boot-Lengte L (in m)	Top-snelheid v (in km/h)
1	7,93	16,8
2	9,76	18,5
4	11,57	20,7
8	18,28	22,3

Er is een model gevonden dat de totale kracht (bij benadering) berekent die de roeiers moeten leveren om een bepaalde snelheid te bereiken.

Er geldt: De totale kracht F is evenredig met $L^2 \cdot v^3$, dus in formule:

$$F = c \cdot L^2 \cdot v^3 .$$

Hierbij is de constante c voor elk boottype anders.

a. Je ziet dat F kwadratisch evenredig is met L. Dat betekent bijvoorbeeld dat:

Als een ‘twee zonder stuurman’ gaat roeien in een twee keer zo lange boot en ze bereiken dezelfde snelheid dan moeten ze daarvoor een .... keer zo grote totale kracht F leveren.

b. Formuleer net zo’n bewering om aan te geven wat het betekent dat F evenredig is met de derde macht van v.

c. Stel dat een ‘vier’ met uiterste krachtsinspanning een snelheid kan halen van 20 km/h. Hoeveel procent van deze uiterste krachtsinspanning moeten deze roeiers leveren voor een snelheid van 10 km/h? En voor een snelheid van 19 km/h?

We gaan nu een skiffeur (die roeit alleen) vergelijken met een ‘vier’. Voor het gemak stellen we voor de beide evenredigheden die daarbij horen de constante c gelijk aan 1.

d. Schrijf op hoe de machtsverbanden tussen F en v eruit zien voor beide boten.

e. Teken met behulp van een PLOT de beide grafieken in 1 figuur voor $0 \leq v \leq 25$.

f. Teken in dezelfde figuur het verband tussen de kracht per roeier van de 'vier' (=F_{vier}) en de snelheid v.

g. Stel dat de skiffeur en de 'vier' beide varen met een snelheid van 14,5 km/h. Wie levert dan meer kracht: de skiffeur of een roeier van de 'vier'?

h. Stel nu dat beide boten hun snelheid opvoeren van 14,5 km/h tot 16,8 km/h. Vul voor die situatie het volgende vergelijkende schema in:

v (km/h)	F_{skiff}	F_{vier}	F_{skiff} / F_{vier}
14,5	...	...	...
16,8	...	...	...

i. Leg uit waarom in de laatste kolom hetzelfde getal komt te staan.

j. Vind je op grond van deze uitkomst de keus: 'voor het gemak stellen we in beide gevallen $c = 1$' realistisch?

54. Roeien (2)

Nu gaan we nog wat dieper in op het verband tussen het aantal roeiers N, de lengte van de wedstrijdboten L en de gerealiseerde topsnelheden v. We veronderstellen dat de totale kracht die daarbij door de roeiers wordt geleverd, evenredig is aan het aantal roeiers.

a. Waarom geldt dan: N is evenredig met $L^2 \cdot v^3$?

b. Bereken voor elk van de vier waarden van N in de tabel de waarde van $L^2 \cdot v^3$.

Aantal Roeiers N	Boot-Lengte L (in m)	Top-snelheid v (in km/h)	$L^2 \cdot v^3$
1	7,93	16,8	
2	9,76	18,5	
4	11,57	20,7	
8	18,28	22,3	

c. Klopt de in vraag a. genoemde evenredigheid?

d. Bereken hoe lang de boot van de ‘acht’ zou moeten zijn om ook bij deze evenredigheid te passen.

e. N blijkt evenredig te zijn met een macht van de topsnelheid. De exponent van dat machtsverband is ongeveer 7,2. Geef de formule van dat verband.

f. Een goede skiffeur haalt een topsnelheid van 17 km/h. Bereken hoeveel van zulke toproeiers in een boot zouden moeten zitten die een twee keer zo grote topsnelheid heeft.

55. Oppervlakte en inhoud (1)
(naar: Machtige Functies, Profi-team 1996)

Waarom krijgen kleinere dieren het sneller koud dan grotere? Veronderstel even dat twee dieren gelijkvormig zijn. Dat dus de een als het ware een verkleinde kopie is van de ander.

En stel dat alle lengtematen van het grote dier 5 keer zo groot zijn als van het kleinere.

a. Heeft het grootste dier een 5 maal zo grote massa als het kleinste? Zo nee, hoe zit dat dan?

b. Heeft het grootste dier een 5 maal zo grote huidoppervlakte als het kleinste? Zo nee, hoe zit dat dan?

56. Oppervlakte en inhoud(2)

Laten we eerst eens kijken naar twee kubussen. De ene heeft een 5 maal zo grote ribbelengte *r* als de andere. Kies voor de volgende opgave zelf een ribbelengte *r* voor de kleinste kubus.

a. Bereken van beide kubussen de oppervlakte A.

b. Bereken ook voor beide kubussen het volume V.

c. Vul in:

De oppervlakte A van een kubus is evenredig met r tot de macht …

d. Vul in:

Het volume V van een kubus is evenredig met r tot de macht …

e. Verklaar dat A^3 evenredig is met V^2

f. Verklaar dat A evenredig is met $V^{2/3}$

57. Oppervlakte en inhoud(3)

Uit het voorbeeld van de kubussen blijkt dat bij vergroting van een lichaam zal gelden:

$$A = c \cdot V^{2/3}.$$

De waarde van *c* hangt af van de vorm van het lichaam.

Een gevolg hiervan is dat draagbalken, pilaren, poten van dieren, boomstammen, enz. die vergroot worden, naar verhouding dikker moeten zijn om de massa te kunnen dragen.
Een ander gevolg heeft te maken met het warmteverlies van mensen en dieren. Want warmte*verlies* is evenredig met de huidoppervlakte. Maar de warmte*productie* is evenredig met de lichaamsmassa.

Door de bioloog *K. Meeh* is het verband onderzocht tussen lichaamsmassa *m* en huidoppervlakte *A*. De coëfficiënt *c* in de formule

$$A = c \cdot m^{2/3} \quad (m \text{ in kg}, A \text{ in dm}^2)$$

heet daarom de Meeh-coëfficiënt. (Mag je in de formule zomaar *m* nemen in plaats van *V*?) Elk voorwerp, dier, mens met een bepaalde vorm heeft zo'n coëfficiënt.

We kijken eerst naar dit getal in het geval van een aantal kubus-bouwseltjes. Daarvoor vergelijken we de oppervlakte *A* met het volume *V*.

De coëfficiënt van Meeh

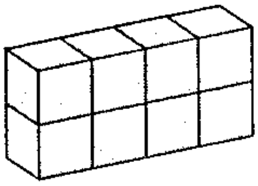
Zie: K. Meeh, Oberflächenmessungen des menschlichen Körpers. In: *Zeitschrift Fur Biologie* 1879

"Meeh marked shapes on the body and used tracing paper to copy the marked areas, calculating the area of the tracing paper by either geometry or weighing the paper. Cylindrical areas of the body were wrapped in strips of millimetre-wide paper. A total of 16 subjects (10 adults and 6 children) were studied and the following relationship proposed (BSA = Body surface area):

"BSA = 12.312 x Weight"

S. Gibson and A. Numa in: ***The importance of metabolic rate and the folly of body surface area calculations,*** **Anaesthesia** (Vol 58, 1 , Jan 2003)

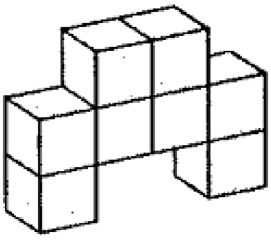
We beginnen met 8 kubussen die gestapeld zijn in twee rijtjes van 4. De ribbelengte van 1 kubus is r.

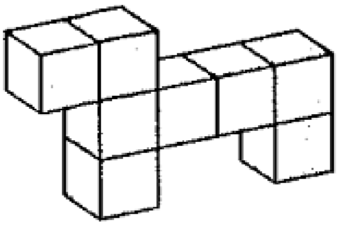


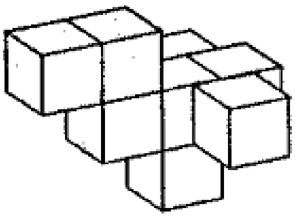
a. Bereken van deze figuur de oppervlakte A.

b. Bereken van deze figuur het volume V.

c. Bereken de *Meeh-coëfficiënt* c van dit lichaam.







d. Hiernaast staan nog 3 van deze bouwsels. Bereken van elke figuur de *Meeh-coëfficiënt* c.

1:

2:

3:

e. Onderzoek dat de mogelijke waarden voor de Meeh-coëfficiënt c voor diverse bouwsels van 8 kubussen tussen 6 en 12 liggen.

f. Onderzoek die waarden ook voor bouwsels van 1, 2 en 4 kubussen.

58. Oppervlakte en inhoud(4)

Nu kijken we tenslotte nog naar mens en dier.
Tussen de lichaamsmassa *m* en de huidoppervlakte *A* bestaat dus een verband:

$$A = c \cdot m^{2/3} \quad (m \text{ in kg}, A \text{ in dm}^2)$$

Meeh - coëfficiënten	
mens	11,2
aap	11,8
vleermuis	57,5
muis	9,0
koe	9,0
paard	10,0
egel	7,5
slang	12,5
vogel	10,0
hond (< 4 kg)	10,1
hond (> 4 kg)	11,2

Voor mensen is de waarde van c die in het bovenstaande Engelse citaat vermeld wordt, later bijgesteld naar 11,2. In de tabel vind je voor een aantal dieren en voor de mens de waarde van *c*.

a. Waarom zou een vleermuis zo'n grote coëfficiënt hebben?

b. Waarom is bij een aap de constante *c* groter dan bij een mens?

c. Plot voor de gemiddelde mens de grafiek van *A* als functie van *m*.

d. Maak een schatting van je eigen huidoppervlakte in m².

59. Botten

Galileo Galileï (17e eeuw) was misschien wel de eerste die met behulp van wiskundig inzicht vragen probeerde te beantwoorden als: Waarom zijn de poten van een tijger naar verhouding dikker dan die van een poes?
Om te laten zien dat het bot van een groot zoogdier onevenredig dik is in vergelijking met een gelijksoortig bot van een veel kleiner dier, maakte Galileï onderstaande illustratie.

a. Galileï's bedoeling was om het grote bot 3 keer zo lang en 9 keer zo breed als het kleine te tekenen. Waarom tekende hij dat zo?

b. Leg uit dat om dezelfde draagkracht te houden het grote bot ongeveer 5,2 keer zo dik getekend moet worden.