Wiskunde B-dag 2014

vrijdag 14 november, 9:00 – 16:00 uur

Lights Out

De wiskunde B-dag wordt gesponsord door

Warming up: speel het spel!

De opdracht gaat over het spelletje 'Lights Out' dat al sinds 1995 overal ter wereld wordt gespeeld. Het originele spel heeft een bord met in totaal 25 lampjes in een rooster van 5 rijen bij 5 kolommen. In de startsituatie zijn sommige lampjes aan. Het doel van Lights Out is, zoals de naam al zegt, om alle lampjes uit te krijgen. Je kunt lampjes aanklikken (het zijn eigenlijk knopjes met een lampje erin). Als je een lampje aanklikt schakel je het lampje om (dus: als het lampje aan was gaat het uit, en als het lampje uit was gaat het aan). Er is een belangrijke toevoeging: als je een lampje omschakelt door het aan te klikken, schakel je ook de directe buren (links, rechts, boven en onder) van dat lampje om.
Je zult vandaag ontdekken dat er wiskundig heel veel te puzzelen valt aan Lights Out! En daarbij ga je ook varianten van het spel onderzoeken op borden met andere afmetingen.

Voor deze Wiskunde B-dag kun je het spel spelen met een app. De online versie van deze app staat op: http://www.fisme.science.uu.nl/wisbdag/opdrachten/Lightsout/Lightsout.html
Een offline versie (alleen voor Windows computers) heeft jouw docent beschikbaar.

Nu als opwarmertje voor de dag eerst een paar Lights Out puzzels. Open de app en neem even de tijd om de mogelijkheden van de app te verkennen.

Puzzel 1 (*makkelijk*)
Maak in de app een 5×5 bord en gebruik de optie 'individuele lampjes omschakelen' om de startconfiguratie hiernaast te krijgen. Zet de optie 'individuele lampjes omschakelen' weer uit, en kies bij 'speel het spel' voor 'voer klikken direct uit'. Los de puzzel op (oftewel, zet alle lampjes uit). Een 0 betekent 'uit', een 1 betekent 'aan'. Deze puzzel kan worden opgelost met 5 klikken.

1	1	0	1	1
1	0	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1

Puzzel 2 (*medium*)
Los de volgende puzzel op (het kan met 6 klikken).

1	0	1	0	1
1	0	1	0	1
0	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	0	1	0	1

Puzzel 3 (*moeilijk*)
Is deze puzzel te lastig voor dit moment? Geen probleem!
Misschien denk je na veel vruchteloos klikken zelfs: *dat kan vast niet.* Dan heb je in dit geval geen gelijk. Maar je mag alvast wel weten dat van de 33 554 432 mogelijke startconfiguraties slechts 25% oplosbaar is. Oplosbaar betekent dat er een oplossing is; het is mogelijk om alle lampjes uit te krijgen. Niet-oplosbaar betekent dat, wat je ook probeert, het niet mogelijk is om alle lampjes uit te krijgen.
Later op de dag leer je technieken waarmee je bij een gegeven puzzel kunt beslissen *of* hij oplosbaar is en *hoe* je in zo'n geval een oplossing kunt vinden.

0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

Praktische zaken

De structuur van de opdracht en dagindeling

In deel EEN verken je Lights Out. Deel EEN is in principe bedoeld voor de ochtend. In dit deel probeer je zelf allerlei dingen uit. Er zijn heel wat vragen waar je iets moet tekenen of noteren. De vragen in dit deel zijn genummerd. Je kunt later (bijvoorbeeld ook in het tweede deel) verwijzen naar iets wat je gedaan hebt. Bijvoorbeeld zo: "Bij vraag 13 hebben we gezien dat ... . Dat gebruiken we nu weer."

De verkennende vragen, **[Verkenning]** genoemd, zijn bedoeld om je met iets nieuws te laten kennismaken en deze vragen worden niet opgenomen in je eindverslag. Voor de overige vragen, **[Opdracht]** genoemd, moet je een beantwoording met een correcte redenering opnemen in het eindverslag.

Waarschuwing! *Het laatste stuk (onderdeel E) van Deel EEN is behoorlijk pittig en nogal theoretisch. Werk daar alleen aan als je nog voldoende tijd in de ochtend hebt. Dit stuk is vooral van belang als je Hoofdopdracht D in deel TWEE wilt aanpakken.*

In deel TWEE (eigen onderzoek) werk je aan complexere en meer open problemen. Deel TWEE is bedoeld voor de middag. Je kunt daarbij gebruiken wat je geleerd hebt in deel EEN. Je behandelt één of meerdere van de Hoofdopdrachten A, B, en C. Je kunt ook Hoofdopdracht D erbij doen, dan heb je extra werk! Bedenk dat beantwoording van twee Hoofdopdrachten met voldoende diepgang meer op prijs wordt gesteld dan oppervlakkige behandeling van drie of vier Hoofdopdrachten. De beantwoording op deze Hoofdopdrachten neem je op in je eindverslag.

Wat verwachten we van jou?

In je *eindverslag* beschrijf je de resultaten die je bij de *opdrachten* in Deel EEN en de Hoofdopdrachten in deel TWEE hebt gevonden.
Vertel je eigen verhaal zó dat het duidelijk en overtuigend is. Uiteraard gebruik je daarbij belangrijke toelichtende figuren als illustraties. Wees begrijpelijk voor anderen die niet aan de Wiskunde B-dag mee doen maar wel voldoende wiskunde beheersen. Dat betekent dat je ook de problemen helder moet introduceren en dat je, waar nodig en nuttig, teruggrijpt op wat je in deel EEN hebt verkend en beargumenteerd.
Kortom: je schrijft een eigen duidelijk verhaal, met wiskundige argumenten onderbouwd. De kwaliteit van je verslag telt zeker ook mee in de beoordeling!

Voor het eindverslag kan het nuttig zijn om al in de ochtend een en ander op te tekenen in een digitaal document. Bedenk ook dat het gehele verslag om 4 uur 's middags moet kunnen worden ingeleverd!

Informatie op Internet

Op Internet kun je veel informatie vinden over het spelen van Lights Out, maar deze informatie zal vaak eerder verwarrend dan verhelderend zijn voor de problemen waaraan je vandaag gaat werken.

Succes, maar vooral ook: veel plezier met deze wiskundige uitdaging!

Deel EEN

De ***positie*** van een lampje op het bord geef je aan met (*rij*, *kolom*). Een klik op lampje (i, j) wordt genoteerd als $K_{i,j}$. Als er maar één rij is klik je lampje j aan met K_j. Een ***klikserie*** is het uitvoeren van meerdere klikken, bijvoorbeeld $K_{1,3}$ $K_{4,2}$ $K_{3,3}$. De ***nulconfiguratie*** is de configuratie waarbij alle lampjes uit staan (dus op 0).

A: Klikseries

1. [Verkenning]

Deze configuratie op een 4×7 bord kun je maken met de app (gebruik 'Maak een bord' en 'Maak een configuratie'):

1	1	0	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1	0
0	1	0	1	1	0	0
0	0	0	0	0	1	0

Met de onderstreping is aangegeven welke lampjes aangeklikt gaan worden (je kunt dit zelf doen door in de app de optie ‘maak een plan’ te selecteren):

1	1	0	$\underline{0}$	$\underline{1}$	1	0
0	$\underline{0}$	$\underline{0}$	0	$\underline{1}$	1	0
0	$\underline{1}$	0	1	1	0	0
0	0	0	0	0	1	0

Voordat je op ‘voer het plan uit’ klikt kun je beredeneren dat na afloop lampje (2,3) niet is omgeschakeld en lampje (1, 5) wel.

a) Leg uit hoe dat samenhangt met het aantal aangeklikte buren.

b) Op een 1×99 bord zijn alle lampjes aan. Je voert de klikserie K_1 K_2 K_{50} K_{92} K_{94} uit. Welke lampjes staan nu uit?

2. [Verkenning]

Maak een willekeurige configuratie op een 1×6 bord, en schrijf deze startconfiguratie op.

a) Voer de klikserie K_1 K_3 K_4 K_5 K_3 K_5 uit en noteer de configuratie die je nu krijgt.

b) Zet het bord weer terug op de startconfiguratie en voer de klikserie K_1 K_4 uit. Noteer de configuratie die je nu krijgt.

c) De eindconfiguraties bij **vraag a) en b)** blijken identiek te zijn. Leg uit waarom dat zo moet zijn.

3. [Verkenning]

Maak een configuratie op een bord naar eigen keuze en schrijf deze startconfiguratie op. Bedenk een klikserie van drie klikken; noem ze *A, B en C*. Ga na dat *A B C* hetzelfde effect heeft als *B A C* en als *C A B*. Verklaar ook waarom dat zo moet zijn.

Samenvatting

- Dubbele klikken mag je verwijderen uit een klikserie. Alleen als een klik een *oneven* aantal keren voorkomt, doet de klik er iets toe.
- De volgorde van klikken in een klikserie is onbelangrijk.

Het voorgaande heeft belangrijke gevolgen, die deze dag voortdurend van belang zullen zijn.

Gevolg 1: Je kunt altijd weer terug.

4. [Verkenning]

Als je twee keer achter elkaar dezelfde serie klikken uitvoert, doe je elke klik dubbel. Wat gebeurt er dus, in één woord samengevat?

5. [Verkenning]

Als je vanuit een bepaalde startconfiguratie een klikserie hebt gevonden die je naar de nulconfiguratie brengt, en je doet dan dezelfde klikserie nog eens, wat wordt dan de eindconfiguratie?

Gevolg 2: De configuraties die oplosbaar zijn, zijn precies de configuraties die je door klikken vanuit de nulconfiguratie kunt maken.

6. [Verkenning]

Leg uit waarom gevolg 2 moet gelden.

7. [Verkenning]

a) Maak met de app een 3×4 bord. Druk op de knop ‘alle lampjes aan’. Druk op de knop ‘maak een plan’ en klik alle lampjes op de rand van het bord aan, ook in de hoekpunten. Druk *nog niet* op de knop ‘voer het plan uit’. Voorspel wat er zal gebeuren als je deze klikserie uitvoert.

b) Druk op de knop ‘voer het plan uit’. Klopt het resultaat met wat je hebt voorspeld?

c) Wat gebeurt er als je nogmaals alle lampjes op de rand van het bord aanklikt?

d) Onderzoek op deze manier ook wat er gebeurt als je op een n×n bord alle lampjes op de diagonaal ((1,1), (2, 2), (3, 3) tot en met (n, n)) als klikserie gebruikt.

e) Zet eerst alle lampjes uit via de knop die daarvoor is. Klik nu één keer op elk lampje. Voorspel het resultaat bij m×n borden voor enkele waarden van m en n.

8. [Opdracht A]

We bekijken nu een 1×n bord (voor n = 1, 2, 3, 4, …) waarbij in de startconfiguratie alle lampjes aan staan.
Bewering: Voor elke waarde van n bestaat er een klikserie waarmee de nulconfiguratie wordt bereikt.

a) Toon aan dat deze bewering waar is voor alle waarden van n.

b) Voor elke waarde van n bestaat er ook een kortste klikserie waarmee de nulconfiguratie kan worden bereikt. Onderzoek welk verband er bestaat tussen de lengte van zo'n klikserie en n.

B: Werken met nullen en enen en schakelschema's

Door een klik op een lampje worden dat lampje en ook de directe buurlampjes omgeschakeld. Hierdoor verandert dus de configuratie op het bord.
Een voorbeeld op een 4×5 bord. Het resultaat bij de klik $K_{3,3}$ kun je je zo voorstellen:

Startconfiguratie

1	1	0	1	0
1	0	0	0	1
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1

+

klik $K_{3,3}$

0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	1	1	0
0	0	1	0	0

=

Eindconfiguratie

1	1	0	1	0
1	0	1	0	1
0	1	0	0	0
0	1	0	0	1

De enen op het bord bij de startconfiguratie en bij de eindconfiguratie zijn de brandende lampjes.
De enen bij klik $K_{3,3}$ stellen iets anders voor. Namelijk dat die vijf lampjes door de klik worden omgeschakeld (van 'aan' naar 'uit' of andersom). De nullen geven hier aan dat er niet wordt geschakeld.

De 4×5 rechthoek onder $K_{3,3}$ noemen we het ***schakelschema*** van $K_{3,3}$

De '+' en '=' in de figuur geven aan dat je kunt 'berekenen' wat de eindconfiguratie wordt. Je moet daarbij de volgende 'rekenregels' in elke cel toepassen:
0 + 0 = 0 een lampje dat uit is en dat niet wordt omgeschakeld blijft uit,
1 + 0 = 1 een lampje dat aan is en dat niet wordt omgeschakeld blijft aan,
0 + 1 = 1 een lampje dat uit is en dat wordt omgeschakeld gaat aan,
1 + 1 = 0 een lampje dat aan is en dat wordt omgeschakeld gaat uit.

Het effect van twee achtereenvolgende klikken (eerst $K_{3,3}$ en dan $K_{2,4}$) kun je als volgt weergeven:

Startconfiguratie

1	1	0	1	0
1	0	0	0	1
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1

+

klik $K_{3,3}$

0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	1	1	0
0	0	1	0	0

+

klik $K_{2,4}$

0	0	0	1	0
0	0	1	1	1
0	0	0	1	0
0	0	0	0	0

=

Eindconfiguratie

1	1	0	0	0
1	0	0	1	0
0	1	0	1	0
0	1	0	0	1

Maar je kunt ook eerst het effect van de twee klikken samen berekenen en daarmee het effect van de klikserie ($K_{3,3}K_{2,4}$) bepalen:

Startconfiguratie

1	1	0	1	0
1	0	0	0	1
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1

+

$K_{3,3} + K_{2,4}$

0	0	0	1	0
0	0	0	1	1
0	1	1	0	0
0	0	1	0	0

=

Eindconfiguratie

1	1	0	0	0
1	0	0	1	0
0	1	0	1	0
0	1	0	0	1

De rechthoek onder $K_{3,3} + K_{2,4}$ heet het schakelschema van klikserie $K_{3,3}K_{2,4}$

Let op het verschil tussen klikserie en schakelschema!

Samenvatting
- een klikserie vertelt op welke lampjes geklikt wordt;
- het schakelschema van de klikserie geeft aan welke lampjes omgeschakeld worden.

9. [Verkenning]

Kies een bord, bijvoorbeeld 7×4, en bedenk een klikserie van 3 klikken. Het schakelschema bij deze klikserie vind je zo: Zet alles lampjes uit en voer je klikserie uit. Klaar! Leg uit waarom je nu het schakelschema van de klikserie op het scherm ZIET.

10. [Verkenning]

Hoe ziet, op een 7×7 bord, het schakelschema er uit als bij de klikserie de lampjes van de Britse vlag worden aangeklikt: alle lampjes op de twee diagonalen en alle lampjes in rij 4 en kolom 4.

11. [Verkenning]

Op een gegeven bord kunnen aardig wat echt verschillende klikseries worden uitgevoerd (*echt verschillend* betekent: elk lampje hoogstens één keer aanklikken en de volgorde is niet belangrijk).

a) Hoeveel echt verschillende klikseries zijn er op een 1×4 bord?

b) Hoeveel echt verschillende klikseries zijn er op een 2×2 bord?

c) Zoek klikseries voor de volgende 4 schakelschema's (op 1×4 en op 2×2):

1	0	0	1

0	1	0	0

0	0
0	1

1	0
0	1

12. [Opdracht B]

Denk aan het 1×5 bord. Denken en redeneren is bij deze opdracht genoeg; proberen op de app helpt je niet echt veel verder.
In **vraag 8** heb je gevonden dat je vanuit de nulconfiguratie van het 1×5 bord met twee klikken alles aan kunt zetten, en natuurlijk ook uitzetten. K_1 K_4 was zo'n klikserie. K_1 schakelt twee lampjes om, K_4 de andere drie. Het schakelschema heeft vijf enen.
Maar het kan ook anders…

a) Het schakelschema van klikserie K_1 K_4 is hetzelfde als dat van K_2 K_5. Ga dat na.

We zeggen het zo: K_1 K_4 en K_2 K_5 zijn ***gelijkwerkende klikseries***.
Dat is natuurlijk alleen bijzonder als de klikseries zelf verschillend zijn.
Je zou kunnen denken dat dit een heel uitzonderlijke situatie is. Maar dat is helemaal niet zo! We gaan er nu in een paar stappen achter komen dat er een heleboel paren gelijkwerkende klikseries op een 1×5 bord te vinden zijn!

b) Als je K_1 K_4 K_2 K_5 uitvoert, dan gebeurt er uiteindelijk niets. Waarom is dat zo?

Zo'n klikserie die niets doet, noemen we voortaan een ***stille klikserie.***

c) Leg uit waarom ook de klikseries K_1 K_2 en K_4 K_5 gelijkwerkend zijn.

d) Vind een klikserie die gelijkwerkend is met de klikserie die alleen uit K_1 bestaat.

In twee gelijkwerkende klikseries kunnen best klikken voorkomen die in allebei de series staan. Dat heb je nu nodig.

e) Vind een klikserie die gelijkwerkend is met K_1 K_2 K_3

Met het volgende recept kun je gelijkwerkende klikseries vinden:
Zet achter een zelfgekozen klikserie de reeks K_1 K_2 K_4 K_5 en gooi de dubbele klikken eruit.
De klikserie die je dan krijgt is gelijkwerkend als de klikserie waarmee je begon.

f) Controleer dat dit recept werkt bij de voorgaande voorbeelden en geef een verklaring waarom het recept werkt.

g) Op het 1×5 bord bestaan 16 paren van gelijkwerkende klikseries. Waarom is dat zo?

13. [Verkenning]

a) Ook op een 1×8 bord kun je gelijkwerkende klikseries maken. Maak een partner voor K_1 K_4 K_7

b) Wat is het kleinste bord waarop gelijkwerkende klikseries bestaan?

14. [Verkenning]

a) Er zijn op elk bord evenveel mogelijke configuraties als mogelijke klikseries. Waarom is dat zo?

b) Maar soms zijn er niet evenveel schakelschema's als klikseries.
Waarom is dat zo?

Herinner je nog even wat we vonden bij **vraag 6**:

De configuraties die oplosbaar zijn, zijn precies de configuraties die je door klikken vanuit de nulconfiguratie kunt maken.

c) Dus kun je op sommige borden niet elke configuratie vanuit de nulconfiguratie bereiken. Waarom is dat zo?

Dus zijn er op sommige borden startconfiguraties waarvoor je geen klikserie kunt vinden die resulteert in de nulconfiguratie.
Jammer, jammer.... Maar wel goed dat we het nu weten.

Laten we dus gaan zoeken naar wat wél opgelost kan worden en hoe.

C: 1×n borden en het ‘onderling omschakelen’ van lampjes

In dit gedeelte leer je een techniek kennen waarmee je behoorlijk ver komt op 1x*n* borden. Het is een kennismaking. In Hoofdopdracht A in deel TWEE kun je zelf het werk afmaken.

15. [Verkenning]

Bij deze verkenning gebruik je een 1×*n* bord, met $n > 3$.

a) Welk schakelschema hoort bij de klikserie $K_2\ K_3$?
Wat betekent dat voor de lampjes 1 en 4? En voor de lampjes 2 en 3?

b) Welk schakelschema hoort bij de klikserie $K_j\ K_{j+1}$?
Wat betekent dat voor de lampjes j - 1 en j +2?

c) Welk schakelschema hoort bij de klikserie K_1K_2 en bij de klikserie $K_{n-1}\ K_n$?
Welke lampjes worden nu omgeschakeld?

Dit idee van twee buurlampjes aanklikken kun je toepassen op alle 1×*n* borden.

16. [Verkenning]

Op dit 1×15 bord is met kruisjes aangegeven welke lampjes worden aangeklikt:

			x	x		x	x		x	x				

Welk schakelschema hoort bij deze klikserie?

Met deze techniek kun je dus twee lampjes die onderling op afstand 3 liggen allebei omschakelen, zonder dat er andere lampjes omgeschakeld worden. We noemen dit ‘onderling omschakelen’. Door herhalen overbrug je ook afstanden die een veelvoud van 3 zijn. In het voorbeeld was dat een afstand 9.

17. [Opdracht C]

Als voorbeeld bekijken we een 1×10 bord.
De lampjes van de groep {1, 4, 7, 10} kunnen met deze techniek elkaar onderling omschakelen.

a) Welk groepje van onderling omschakelbare lampjes krijg je bij lampje 2?
En bij lampje 3?

Ook de lampjes 1 en 2 zijn onderling omschakelbaar, net zoals 9 en 10.

b) Op een 1×10 bord branden alleen de lampjes 1, 3, 7 en 9.
Bedenk (gebruik 'maak een plan') een klikserie waarmee je de nulconfiguratie bereikt.

c) Nu branden alleen de lampjes 1, 3 en 8.
Met welke klikserie krijg je nu de nulconfiguratie?

D: Jagen

Een techniek die op internet vaak genoemd wordt als een manier om Lights Out puzzels te benaderen heet *jagen*.
Bij een gegeven startconfiguratie kun je op alle rijen behalve de onderste rij alle brandende lampjes uitzetten. Dit doe je als volgt: Stel, op rij i branden een aantal lampjes. Klik in rij i+1 (dus de rij eronder) op de lampjes in die kolommen waar in rij i het lampje aan staat. Begin met de bovenste rij en werk zo van boven naar beneden.

Een voorbeeld
Bij de gegeven startconfiguratie op een 4×3 bord hieronder zorgt de klikserie $K_{2,1}$ $K_{2,3}$ (de onderstreepte lampjes in rij 2) er voor dat de lampjes (1, 1) en (1, 3) worden uitgezet. Daarna zorgt $K_{3,1}$ $K_{3,3}$ in rij 3 er voor dat de twee brandende lampjes op rij 2 worden uitgezet. Tot slot zorgt $K_{4,3}$ in rij 4 er voor dat het brandende lampje op rij 3 wordt uitgezet.

Startconfiguratie

1	0	1
$\underline{0}$	0	$\underline{0}$
0	0	1
0	1	0

→

Rij 1 uitgezet

0	0	0
1	0	1
$\underline{1}$	0	$\underline{0}$
0	1	0

→

Rij 2 uitgezet

0	0	0
0	0	0
0	0	1
1	1	$\underline{1}$

→

Rij 3 uitgezet

0	0	0
0	0	0
0	0	0
1	0	0

18. [Verkenning]

a) Maak de startconfiguratie die hierboven staat en zet de drie eerste rijen uit met jagen.

Als je de startconfiguratie wilt oplossen, ben je er na het jagen bijna; alleen die onderste rij nog. Voor die rij is er een trucje, waarvan je eerst gaat zien *dat* het werkt, dus dat je daarmee inderdaad de nulconfiguratie bereikt.

b) Klik nu op lampje (1, 3) en jaag weer de lampjes naar beneden.
Verrassing! Je komt uit op de nulconfiguratie!

De voor de handliggende vraag is nu: hoe moet je op het mysterieuze idee komen dat je (1,3) moet aanklikken en niet een ander lampje of een combinatie van lampjes in de eerste rij? Want je houdt niet van hocus-pocus, toch?
Het eerlijke antwoord is:
In rij 1 zijn alle acht mogelijke combinaties van klikken gewoon stuk voor stuk uitgeprobeerd. Klikken op alleen (1,3) bleek de goede. Het was even zoeken, maar het is wel beperkt tot het uitvoeren van de acht mogelijke klikseries in de eerste rij.
Wel gaan we even na wat er precies gebeurd is tijdens het jagen na de klik op (1,3).

19. [Verkenning]

Begin met een leeg 4×3 bord.

a) Klik op lampje (1,3). **Heel belangrijk:** Gebruik niet ‘individuele lampjes omschakelen', maar klik op (1,3) vanuit 'voer klikken direct uit'.

b) Jaag naar beneden.

Je eindresultaat is precies het eindresultaat van het jagen vanuit de gegeven startconfiguratie!

In het echte plan, bij **vraag 18**, deden we achtereenvolgens:
- jagen vanuit de startconfiguratie
- klikken op (1,3)
- weer jagen
... *en het was klaar*.

c) Leg uit waarom dat ‘*en het was klaar’* te verwachten was.

Bij andere lampjes en combinaties daarvan gaat het net zo.
Het proberen van die acht mogelijkheden op de eerste rij moet nu wel even eerst gebeuren!

Voor het 4×3 bord zijn er in rij 1 maar 8 mogelijke klikseries. Het resultaat van starten met lampje (1,3) heb je al gezien in **vraag 18**.

20. [Verkenning]

Begin steeds met een nulconfiguratie op het bord en start meteen met 'voer klikken direct uit' (dus **niet** met ‘individuele lampjes omschakelen').
Jaag voor de acht mogelijke klikseries vanuit een leeg bord naar de vierde rij en noteer de eindconfiguraties in de tabel (voor lampje (1,3) is het al ingevuld):

klikserie in rij 1	***jaagresultaat in rij 4***
geen klikken	....
alleen (1, 1)	....
alleen (1, 2)	....
alleen (1, 3)	1 0 0
(1, 1) en (1, 2)	....
(1, 1) en (1, 3)	....
(1, 2) en (1, 3)	....
alle drie lampjes	....

21. [Verkenning]

Neem nu een willekeurige startconfiguratie op een 4×3 bord waarvan je de oplossing wilt weten (als die er is...). Noem die startconfiguratie *A*.
Via jagen bereik je een situatie met alleen in rij 4 mogelijk nog enen. Met wat geluk eindig je direct op de nulconfiguratie, maar dat is eerder uitzondering dan regel!
Als er nog wel enen zijn in rij 4, dan ga je op zoek naar een klikserie, vanuit de nulconfiguratie, die na jagen hetzelfde resultaat heeft in rij 4 als het jagen van *A* opleverde.
Dus: Zoek in de tabel de bijpassende klikserie in rij 1 op het lege bord die, na jagen, het resultaat van het jagen van *A* oplevert.

Laat zien dat deze strategie van jagen en (indien nodig) nog een keer jagen, inderdaad werkt.

22. [Opdracht D]

Er zijn 2^{12} configuraties mogelijk op een 4×3 bord. Waarom is het in dit voorbeeld zeker dat bij al die 2^{12} gevallen het jaagresultaat in rij 4 inderdaad in de tabel van **vraag 20** te vinden is?

E: Configuraties en machten van 2

In dit verkenningsdeel gaat het er heel algemeen aan toe: je leert niets over oplossen van specifieke situaties. Maar je krijgt wel een mooi inzicht over het geheel van mogelijke configuraties op wat voor bord dan ook. En over hoeveel startconfiguraties oplosbaar zijn. Sleutelwoorden bij dit deel zijn: *Handig tellen* en *slim indelen*.

Waarschuwing! *Dit stuk is behoorlijk pittig en nogal theoretisch. Werk hier alleen aan als je nog voldoende tijd in de ochtend hebt. Dit stuk is vooral van belang als je Hoofdvraag D in deel TWEE wilt aanpakken.*

23. [Verkenning]

Op het 4×3 bord heb je in totaal 12 lampjes. Elk van die lampjes kan aan zijn of uit. Er zijn dus 2^{12} mogelijke configuraties. Ook het 2×6 bord en het 1×12 bord hebben 2^{12} configuraties. Voor het aantal configuraties is alleen het totaal aantal lampjes van belang. Niet de vorm van het bord! Dit aantal geven we aan met N.

Wat is het aantal mogelijke klikseries op een bord met N lampjes? We rekenen daarbij 'niets klikken' ook als een klikserie.

Klassen van verbonden configuraties

Via een schakelschema (geleverd door een klikserie) kun je van een configuratie naar een andere configuratie komen. Je weet al:

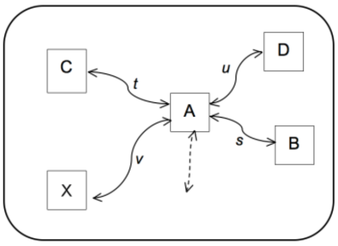
- Als je via een schakelschema s van configuratie A naar configuratie B kunt, dan kun je ook via s van B naar A. We noemen A en B in zo'n geval **verbonden configuraties**. Let op: A is ook verbonden met zichzelf, door het schakelschema met allemaal nullen (dus: niets doen)!
- Als je via een schakelschema s van configuratie A naar configuratie B kunt en van A ook via een ander schema t naar C, dan kun je ook van B naar C komen met een klikserie. Anders gezegd: Configuraties die verbonden zijn met A zijn ook onderling verbonden.

24. [Verkenning]

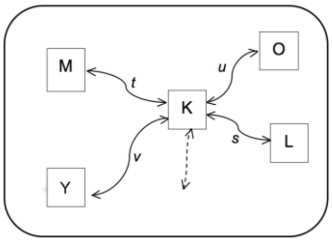
Verklaar: het aantal met configuratie A verbonden configuraties is gelijk aan het aantal mogelijke schakelschema's.

Ter herinnering: vaak zijn er minder schakelschema's dan alle mogelijke klikseries en dus minder schakelschema's dan mogelijke startconfiguraties.
(Als je dat niet gelooft, tel dan maar eens het aantal mogelijke configuraties op een 1×2 bord en ook het aantal mogelijke klikseries en het aantal schakelschema's.)

De hele verzameling van met A verbonden configuraties noemen we de **configuratie-klasse van *A***. In het plaatje zijn een paar verbindingen tussen A en andere configuraties getekend. Het plaatje is uiteraard niet volledig; er zijn er vast veel meer. Vanuit A gaat voor elk schakelschema dat er bestaat een pijltje naar een met A verbonden configuratie. De configuraties binnen de configuratie-klasse zijn ook allemaal onderling verbonden door schakelschema's, maar dat is niet afgebeeld. De afgeronde rechthoek stelt de begrenzing van de configuratie-klasse van A voor.



Als configuratie K niet in de configuratie-klasse van A zit, dan heb je ook vanuit K voor elk schakelschema dat er bestaat een pijltje naar een met K verbonden configuratie. Al die configuraties samen vormen dan de configuratie-klasse van K.



Zo kun je doorgaan. Uiteindelijk is de hele verzameling configuraties verdeeld in configuratie-klassen.

25. [Verkenning]

Stel je voor: A en K zijn niet verbonden en X is een configuratie in de configuratie-klasse van A en Y is een configuratie in de configuratie-klasse van K. Dan zijn X en Y niet met elkaar verbonden.

a) Kun je dat beredeneren?
Je verklaring kan bijvoorbeeld beginnen met de opmerking:
'als X en Y *wel* verbonden waren, dan waren ... en ... ook ...'

Je kunt het zo zeggen: de configuratie-klassen van A en van K zijn compleet gescheiden.

b) Alle oplosbare startconfiguraties zitten samen in één configuratie-klasse. Leg dat uit!

Ook geldt natuurlijk: Als B in de configuratie-klasse van A zit, geldt dat configuratie-klasse van B precies dezelfde is als de configuratie-klasse van A.

Samenvatting

De verzameling van alle configuraties is ingedeeld in configuratie-klassen.

- Alle configuraties in één configuratie-klasse zijn onderling verbonden;
- Configuraties in verschillende configuratie-klassen zijn niet verbonden.

26. [Verkenning]

a) Als je de aantallen configuraties in alle configuratie-klassen bij elkaar optelt, kom je uit op 2^N. Waarom is dat zo?

b) Waarom zijn alle configuratie-klassen even groot? En hoe groot (vergeleken met het aantal schakelschema's)?

c) Verklaar nu deze vergelijking:

(Aantal configuratie-klassen) × (Aantal schakelschema's) = 2^N.

d) Waarom kunnen de getallen voor 'Aantal configuratie-klassen' en voor 'Aantal schakelschema's alleen maar van de vorm 2^p zijn met p = 0, 1, 2, 3, ...?

e) Leid af en licht toe (gebruik een eerdere opmerking uit de verkenningen):

(Aantal configuratie-klassen) × (Aantal oplosbare configuraties) = 2^N.

Deel TWEE: Eigen onderzoek

In deel EEN zijn verschillende technieken verkend zoals *onderling omschakelen* (met het vormen van groepjes lampjes die onderling bereikbaar zijn) en *jagen.* Ook zijn een paar termen gebruikt: *schakelschema*, *gelijkwerkende klikseries* en *stille klikserie*. Deze technieken en termen zullen hun nut bewijzen als je aan de gang gaat met de volgende Hoofdopdrachten.

Maak een verstandige keus: Bedenk dat beantwoording van twee Hoofdopdrachten met voldoende diepgang meer op prijs wordt gesteld dan oppervlakkige behandeling van drie of vier Hoofdopdrachten.

Hoofdopdracht A: 1×*n* borden

Gegeven is een 1×*n* bord met een willekeurige startconfiguratie. Gebruik de verkenningen uit deel A om uit te zoeken welke startconfiguraties wel/niet oplosbaar zijn op een 1×*n* bord. Probeer dit te analyseren voor alle waarden van *n*.

Hoofdopdracht B: Jagen

'Jagen' en 'stille klikseries' kunnen handig worden gebruikt bij een analyse van een willekeurige startconfiguratie op een *m*×*n* bord om te zien of een gegeven start-configuratie oplosbaar is.

a) Analyseer de startconfiguraties op een 5×5 bord (het originele spel) die oplosbaar blijken te zijn. Gebruik daarbij alle mogelijke eindconfiguraties van jagen op de eerste rij vanuit de nulconfiguratie.

b) Kun je nu wel puzzel 3 uit de 'warming up' oplossen via een gerichte klikserie?

0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

c) Wat valt er te ontdekken aan een *m*×*n* bord met een willekeurige startconfiguratie? Analyseer bijvoorbeeld de *m*×3 borden.

Hoofdopdracht C: Alles aan, alles uit

Er wordt beweerd dat op elk *m*×*n* bord dat geheel gevuld is met enen er een klikserie te vinden is die leidt naar de nulconfiguratie. Bij 1×*n* borden is dat al onderzocht in **vraag 8**.

a) Onderzoek de oplosbaarheid op een 2×*n* bord.

b) Onderzoek een paar andere gevallen, zoals een *n*×*n* bord voor *n*= 2, 3 en 4.

Hoofdopdracht D: configuratie-klassen en klikseries

Deze hoofdopdracht grijpt terug op wat is verkend in deel EEN, onderdeel E. Als je dat stuk van deel EEN hebt overgeslagen vanwege tijdgebrek, heeft het geen zin om deze hoofdopdracht te proberen!

Een mooie stelling:

Aantal configuratie-klassen = Aantal stille klikseries

a) Onderzoek deze stelling.

   Hint: Maak een indeling van de klikseries in bundels van gelijkwerkende klikseries.

b) Nog meer leuke onderzoeksvragen:

   1. Het aantal oplosbare startconfiguraties op een m×n bord.

   In dat geval hebben we $N = m \times n$. Ga uit van $m \geq n$.
   Als je jaagt bij een gegeven startconfiguratie, kom je uit op een eindconfiguratie met alleen nullen in rij 1, 2, t/m m -1 en mogelijk ook enen in rij m.

   Twee gegevens die je kunt gebruiken (beredeneer uiteraard de correctheid daarvan):

   - Een startconfiguratie en zijn eindconfiguratie liggen in dezelfde configuratie-klasse.
   - Er zijn hoogstens 2^n verschillende eindconfiguraties na jagen, dus ook hoogstens 2^n configuratie-klassen.

   → Toon aan dat, in het geval van een $m \times n$ bord met $m \geq n$, er altijd minstens $2^{(m-1) \cdot n}$ oplosbare configuraties zijn.

   2. Op een 5×5 bord is slechts 25% van alle startconfiguraties oplosbaar.

   → Hoe kun je dat beredeneren?

   Hint: Gebruik wat je hebt gevonden bij Hoofdopdracht B en bij de verkenningen van deel EEN, onderdeel E