Wat *a* is, dat kun je niet weten

Een pleidooi voor betekenisvolle algebra op school

Paul Drijvers (Red.)

eindredactie: Paul Drijvers
redactie: Sylvia Eerhart
ontwerp omslag: Nick Spier
druk: DVO Press, Culemborg

ISBN 90 - 70786 - 00 - 1

Wat a is, dat kun je niet weten

Misschien zal het onderwerp [van dit boek] je tamelijk moeilijk voorkomen, omdat het nog geen bekende kennis is en het verstand van beginners makkelijk verward wordt door vergissingen; maar voor jou zal het makkelijk te beheersen zijn, met jouw bezieling en mijn leraarschap; want scherp verstand ondersteund door goede lessen is een snelle weg naar kennis.

(Diophantus, *Aritmetica*, derde eeuw na Christus)

... want die methode, die men met een vreemd woord algebra noemt, schijnt die helderheid en dat gemak te bezitten, die je moet aantreffen in de ware wiskunde.

(René Descartes, *Regulae ad directionem ingenii*, 1627)

Voorwoord

Schoolalgebra staat volop ter discussie. Wat is het doel van algebraonderwijs en op welke manier kan dat in de 21ste eeuw worden gerealiseerd? Met dit boek wil het Freudenthal Instituut een positie in deze discussie innemen. De realistische benadering van algebraonderwijs is het uitgangspunt voor een pleidooi voor betekenisvolle algebra op school.

De moeilijkheden en mogelijkheden van schoolalgebra worden voor verschillende schooltypen en vanuit verschillende invalshoeken besproken, waarbij elke auteur eigen accenten legt. Daarmee geeft het boek een overzicht van recente ontwikkelingen. Daarnaast worden lijnen uitgezet naar de toekomst.

Vanzelfsprekend is dit boek geen eindpunt in deze discussie. Eerder hoopt het stof tot nadenken te bieden. De hier gepresenteerde visies en opvattingen geven richting aan de verdere ontwikkeling van algebra in het Voortgezet Onderwijs in Nederland en kunnen aanleiding zijn tot verdere standpuntbepalingen, beleidsvoornemens of concrete actiepunten. Op deze manier kan dit boek een bijdrage leveren aan de vernieuwing van het algebraonderwijs, waaraan blijkens de geluiden uit het veld grote behoefte bestaat.

Behalve door de auteurs is in verschillende stadia op concept-hoofdstukken gereageerd door Mieke Abels, Corine van den Boer, Peter Boon, Michiel Doorman, Koeno Gravemeijer, Vincent Jonker, Gerard Koolstra, Jan de Lange en Chris Zaal. Hoofdstuk 3 is tevens becommentarieerd door Wim Kuipers en Dion Oolthuis. Nick Spier ontwierp het omslag en Sylvia Eerhart verzorgde de layout en de productie. Het ministerie van OCW maakte dit boek mogelijk in het kader van de regeling expertisegelden VO.

Utrecht, januari 2006

Truus Dekker
Maarten Dolk
Paul Drijvers
Aad Goddijn
Martin Kindt
Henk van der Kooij
Martin van Reeuwijk
Monica Wijers

Inhoud

1 Oriëntatie op schoolalgebra

Paul Drijvers, Aad Goddijn, Martin Kindt

> There is a stage in the curriculum when the introduction of algebra may make simple things hard, but not teaching algebra will soon render it impossible to make hard things simple.
>
> (Tall & Thomas, [1], p. 128)

1.1 Schoolalgebra ter discussie

Het gaat niet goed met algebra in het voortgezet onderwijs. Bij de ‘afnemers’, bijvoorbeeld de technische universiteiten, nemen de klachten over de vaardigheden van de studenten elk jaar in hevigheid toe. De resultaten van instaptoetsen laten zien dat slechts weinig studenten enigszins aan de verwachtingen van de docenten voldoen. ‘Is dit wat het studiehuis oplevert?’, vraagt men zich af. ‘Inderdaad’, zou het antwoord van de vwo-docent kunnen zijn, ‘en het is dan ook niet zo aardig binnenkomende studenten meteen te toetsen op vaardigheden waarvan iedereen weet dat ze nauwelijks meer in het boek voorkomen’. Toch is dat niet het volledige antwoord. Van een leerling van vwo-6 zou je mogen verwachten dat hij ook een opgave aankan die niet helemaal spoort met de opgaven die in het boek zijn voorgekookt. Deze verwachting rekent op zelfstandigheid en initiatief van de lerende. En is dat niet wat we wilden (of moesten willen) met het studiehuis?

Laten we ook eens kijken naar de andere kant van ons voortgezet onderwijs, de beginsituatie. Aan de poort van het VO kwamen vroeger leerlingen binnen die in het algemeen redelijk konden rekenen. Cijferen, om het duidelijker te zeggen; misschien waren de leerlingen wel een beetje opgevoed tot niet-digitale rekenautomaatjes. Hoewel de accentverschuiving van cijferen naar schattend rekenen en ‘number sense’ in principe een goede is, zou het wel prettig zijn als brugklasleerlingen bijvoorbeeld 144 nog herkennen als 12 keer 12 en weten dat 12/16 en 3/4 iets met elkaar te maken hebben. De illusie dat die kennis nu nog bij de doorsneebrugklasser aanwezig is, hebben we inmiddels verloren. Het is geen beste startsituatie voor algebra op school.

Kijken we nu eens naar ons voortgezet onderwijs zelf. Hoe heeft het zich sinds pakweg 1992 ontwikkeld, vooral wat betreft de algebra? De in 1992 ingevoerde nieuwe onderbouw mikte op het middensegment van de leerlingenpopulatie. De bedoelde verschuivingen ten opzichte van de voorgaande periode gingen in de richting van meer betekenis voor algebra en minder nadruk op formele kwesties en vaardigheden die deze groep leerlingen later niet echt nodig heeft [2]. De politiek verwarde steevast het middensegment met het geheel. Wat bedoeld was als een programma met dezelfde onderwerpen voor iedereen maar met gedifferentieerde invulling op de verschillende niveau’s, werd al snel tot ‘gelijke monniken, gelijke kappen’. We weten nu allemaal – en velen wisten het toen al direct – dat de monniken niet gelijk zijn en dat de toenmalige lbo-leerling en de prille vwo’er veel te kort zouden komen. De een kreeg algebra voorgezet die hem boven de pet ging en de ander werd niet uitgedaagd.

Wat het vmbo van nu betreft lopen de opvattingen behoorlijk uiteen. Sommigen kiezen voor redzaamheid van de leerling: wiskunde en zeker algebra op zich zijn geen doelen meer, bruikbaarheid in de dagelijkse situatie en in de beroepsvakken is het enige criterium. Idealiter moet de leerling zijn algebra dan ook leren binnen de dagelijkse situatie en bij de beroepsvakken en niet meer in een aparte les. Anderen benadrukken dat het denk-redeneer-reflectiekarakter van de wiskunde als een doorlopende lijn ook voor deze leerlingen op geschikte wijze aan bod moet komen.

Wat het vwo betreft wagen we ons aan een harder standpunt: de vwo-leerling presteert zwaar onder de maat op algebraïsch gebied. We treffen in vwo-6 leerlingen aan die pittig argumenteren, hun verstand kunnen en durven gebruiken, werkstukken maken die er mogen zijn, en die in het openbaar met flair verdedigen. Maar wat algebra betreft zijn dezelfde leerlingen vaak hulpeloos. Een kleine hobbel in de vorm van een formule met een breuk brengt alle wiskundige activiteit tot staan. Treurig, en wat nog treuriger is: 'wij onderwijs' hebben ze zo gemaakt. Kijk eens naar een gemiddelde opgave van het Centraal Examen: als er al een formule in voorkomt, mag de leerling er niet veel meer mee doen dan laten zien dat hij vaag begrijpt wat er staat. Omvormen, afleiden, zelf opbouwen: het is gewoon niet nodig of het wordt voorgedaan. Het Centraal Examen functioneert (helaas) als baken wat betreft koers en niveau van het onderwijs en de gevolgen zijn niet uitgebleven.

Wat te doen? Met die vraag betreden we een mijnenveld van netelige kwesties:
- Meer tijd voor het oefenen van vaardigheden? Hoe dan, apart of in andere stof geïntegreerd?
- Meer ICT-gebruik? Is dat oude wijn in nieuwe zakken of levert het echt wat op?
- Wat willen we eigenlijk met algebra in vmbo, mbo, havo, vwo? Moet dat allemaal dezelfde algebra zijn of juist liever niet?
- Andere onderwerpen kiezen, een aangepast curriculum maken waarin de algebra-handicaps niet meer storen? Wat dan, en waarom?
- Zijn de problemen niet van alle tijden? Of zitten ze in de aard van het algebrabeestje zelf?
- Hoe halen we de algebra op school uit haar isolement?

Makkelijke antwoorden op deze vragen zijn er niet, en er zijn verschillende invalshoeken om tegen deze kwesties aan te kijken. Ondanks de diverse perspectieven zullen enkele uitgangspunten in dit boek regelmatig terugkeren. Drie daarvan noemen we nu al expliciet:
- Algebra moet een organisch in het wiskundeleerproces opgenomen onderdeel zijn en geen geïsoleerd stukje acrobatiek.
- Algebra moet voor de leerling zowel middel zijn om problemen op te lossen als een gebied waarin uitdagende vragen worden onderzocht.
- Bij algebra moeten inzicht en beheersing hand in hand gaan, zowel tijdens het leerproces als bij het toepassen.

Voor we op deze kwesties nader ingaan, is het van belang om beter af te bakenen wat we onder algebra verstaan, in de school en erbuiten.

1.2 Wat is algebra binnen en buiten school?

Het woord 'algebra' is een verbastering van het Arabische 'al-jabr' uit de titel van het boek 'Hisab al-jabr w'al-muqabala', geschreven door Abu Ja'far Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi. Al-Kwarizmi leefde in Bagdad, ongeveer van 780 tot 850. Onder 'al-jabr' verstaat al-Khwarizmi het wegwerken van aftrekkingen. Zo wordt bijvoorbeeld (als de meetkunde van rechthoeken en vierkanten naar onze notatie is omgezet) door 'al-jabr'

$$x^2 = 40x - 4x^2$$

herleid tot: $5x^2 = 40x$

'Al-jabr' is oorspronkelijk dus een naam voor een *techniek* bij het werken met verschillen. Al-muqabala, het tweede titelwoord, is ook een techniek, die van het reduceren als er alleen samen te nemen termen zijn, bijvoorbeeld van $5x^2 = 40x + 3x^2$ naar $2x^2 = 40x$.

Eigenaardig: een zeer specifieke methode voor het omgaan met gelijkheden werd later de naam voor een wiskundig vakgebied. Laten we daar eens een omschrijving uit een belangrijke moderne encyclopedie van de wiskunde naast leggen; het gaat nu om de algebra van de professionals in de wiskunde:

> One use of the word 'algebra' is the abstract study of number systems and operations within them, including such advanced topics as groups, rings, invariant theory, and cohomology. This is the meaning mathematicians associate with the word 'algebra'. When there is the possibility of confusion, this field of mathematics is often referred to as abstract algebra.
>
> (E. Weisstein, http://mathworld.wolfram.com)

Algebra is dus tot wel wat meer uitgegroeid: het onderzoeken van getalsystemen en hun operaties, waar heel geavanceerde vormen van bestaan. Ergens tussen het jaar 850 en 2000 is de schoolalgebra echter een eigen weg gegaan, want van de algebra volgens de moderne definitie vinden we in het voortgezet onderwijs niet veel meer terug. Bij schoolalgebra denken we nu vaak aan omgaan met variabelen, formules-tabellen-grafieken, vergelijkingen oplossen, differentiëren, modelleren, enzovoorts. Kortom: van allerlei en van alles een beetje. Zowel aan methode als aan inhoud wordt aandacht besteed, maar wel vaak op een hap-snapmanier. En soms lijkt het er op of alles bij wiskunde waar een letter in voorkomt, algebra moet heten. Voor het doel van dit boek is dat te vaag.

Kunnen wij voor de afbakening van de schoolalgebra iets leren van de professionals met hun structuren? Op dit moment niet echt veel. Nog niet zo heel lang geleden, in de periode van de New Math, werd de schoolalgebra sterk gestuurd in de richting van het verkennen van structuren. Gestuurd, door de academische wiskundige gemeenschap, zonder dat daar vanuit het onderwijs echt behoefte aan was. Maar die tijd is definitief voorbij.
Misschien kunnen we ons toch beter door Al-Kwarizmi laten inspireren en stellen dat, althans voor de schoolsituatie, algebra vooral een manier van werken is, waarbij ‘werken met formules die letters bevatten’ een belangrijke plaats inneemt, maar niet alles omvat. Algebra op school is sterk geassocieerd met *werkwoorden* als oplossen, manipuleren, en in mindere mate ook met generaliseren, formaliseren, structureren, abstraheren. Al komt bij die activiteit het nodige denkwerk kijken, de nadruk ligt veelal op het doen.

Het is niet nodig en ook bijna onmogelijk algebraïsche activiteit met stevig prikkeldraad en duidelijke hekken af te bakenen. Omdat we een tamelijk ruime afbakening willen, waar ook nog wel wat groeimogelijkheden in zitten (is gebruik van ICT, bijvoorbeeld van Excel, ook algebra?) gaan we uit van een lijstje met kenmerken.
Een hoofdkenmerk van een *algebraïsche activiteit* is dat er gewerkt wordt met getallen of getalstructuren. Naarmate een wiskundige activiteit daarbij meer of minder van de volgende kenmerken heeft, is het meer of minder ‘algebra’:

1. Er wordt impliciet of expliciet gegeneraliseerd.
2. Patronen van getalsverbanden en/of formules worden onderzocht.
3. Problemen worden opgelost door toepassing van algemene of situatieafhankelijke regels.
4. In redeneringen worden onbekende of nog niet vastgelegde hoeveelheden gebruikt.
5. Rekenkundige bewerkingen worden uitgevoerd met variabelen die met letters zijn aangeduid. Daarbij ontstaan formules.
6. Voor getalsoperaties en -relaties worden speciale symbolen gebruikt.
7. Tabellen en grafieken representeren formules en worden gebruikt om deze te onderzoeken.
8. Formules en expressies worden vergeleken en getransformeerd.
9. Formules en expressies worden gebruikt om contexten te beschrijven waarin maten en grootheden een rol spelen.
10. Oplossingsprocessen bevatten stappen die op rekenregels zijn gebaseerd, maar die in de context van het probleem niet per se betekenis hebben.

Uit deze kenmerken komt naar voren dat algebraïsche activiteit zich niet uitsluitend richt op het oplossen van een concreet probleem, maar daar ook enige afstand van neemt. Deze distantie leidt tot het opbouwen van een abstractere ‘algebrawereld’ waarin vooral generalisatie en formalisering een rol spelen. Toch blijft het van belang om verband te kunnen leggen met het oorspronkelijke, concrete probleem.

Laten we paar voorbeelden toetsen aan het lijstje van kenmerken:

– Het uitrekenen van 123 + 567: geen algebra.
– Het uitrekenen van 101×99, uitgaande van 100×100: algebra.
– Weten dat $-1 \times -1 = +1$: geen algebra. Min keer min is plus: wel algebra.
– Het gebruiken van de wet van Ohm (*V is I maal R)* is algebra.

- Vanuit een tabel een formule maken: algebra.
- Bewijzen dat $n(n+4)-(n+2)(n+3)$ onafhankelijk is van n: algebra.
- Is de irrationaliteit van $\sqrt{2}$ algebra? Het ligt er maar aan wat je er mee doet. Een redenering die met letters en deelbaarheden de irrationaliteit bewijst, is zeker algebra. Een meetkundige redenering met vierkanten misschien minder.
- Een grafiek tekenen van de groei van een boom? Nauwelijks als er omschrijvende woorden als steiler, dalen enzovoorts bij gebruikt worden. Meer, als we zulke steilheden numeriek zouden gaan vergelijken.
- Afleiden van $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ uit $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$: algebra.
- De productregel bewijzen: analyse plus algebra. De productregel gebruiken bij bekende functies: algebra.
- Integreren van x^2 over een interval? Wat betreft het begrijpen van de integraal als een limiet van overdekkende rechthoeken: nee. Wat betreft afhandelen via terugzoeken van de primitieve op grond van de formulestructuur: ja.

De lijst van kenmerken van schoolalgebra – we zullen in dit boek verder algebra schrijven als we schoolalgebra bedoelen – is natuurlijk niet volledig, kan en hoeft dat ook niet zijn. Met het oog op enige afbakening is ze echter wel werkbaar. De lijst en de voorbeelden maken ook duidelijk dat algebra een belangrijke ondersteunende rol speelt bij andere deelgebieden van de wiskunde en bij andere exacte vakken. Toch wordt de algebra tekort gedaan als ze alleen als dienstbaar wordt beschouwd; dat kan leiden tot een ‘doeldidactiek’ die elke mogelijkheid tot reflectie uitsluit.

De omschrijving van algebra als een specifiek soort activiteit legt ons wel een vraag voor: hoe kunnen we voorkomen dat die activiteiten losse onafhankelijke trucjes worden, hoe zorgen we dat ze een samenhangend en vruchtbaar geheel gaan vormen? Een stap naar een antwoord zet Freudenthal in het hoofdstuk ‘De algebraïsche taal’ in zijn *Didactische fenomenologie van wiskundige structuren* [3]. Aan het slot daarvan beschrijft hij schetsmatig enkele belangrijke algebraïsche *strategieën*, die van belang zijn omdat ze de micro-methoden en vaardigheden in een groter verband plaatsen. Freudenthal noemt bijvoorbeeld:

- het algebraïsch vertalen van een situatie of probleem;
- het gebruik van analogieën tussen situaties;
- het algebraïsch permanentieprincipe.

Dit laatste is het idee dat we bijvoorbeeld het product van negatieve getallen zodanig vastleggen, dat gewenste eigenschappen als $a \cdot b = b \cdot a$ en $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ voor alle combinaties van positief en negatief blijven gelden. Ook hier kan het lijstje langer gemaakt worden en kan vooral per schooltype en niveau veel onderscheid gemaakt worden.
Dit alles leidt tot de volgende voorzichtige ‘intentieverklaring’:

> *Schoolalgebra moet vooral een samenhangend, begrijpbaar en toepasbaar geheel van technieken zijn, waarin ...*

en vul dan de kenmerken van het lijstje op de vorige pagina maar in.

1.3 Aspecten van schoolalgebra

Met deze eerste poging om af te bakenen wat we onder schoolalgebra verstaan, zijn we er natuurlijk nog niet: binnen de schoolalgebra zijn verschillende invalshoeken te onderscheiden. In de vakdidactische literatuur worden de volgende aspecten van schoolalgebra genoemd [4]:

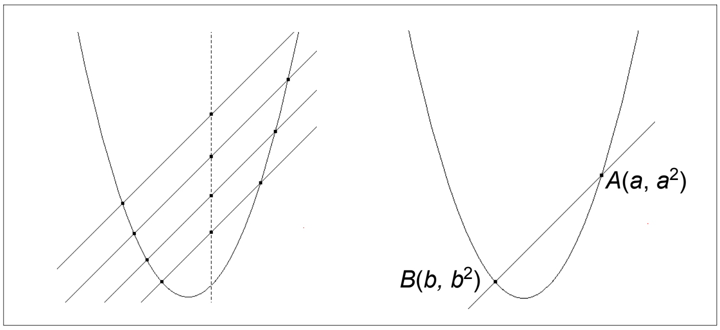
1. algebra om problemen op te lossen;
2. algebra van verbanden en functies;
3. algebra van patronen en structuren;
4. de taal van de algebra.

Bij de eerste drie gaat het vooral om de manier waarop algebra binnen en buiten de wiskunde gebruikt wordt, bij de vierde om de aard van het fenomeen zelf. Hieronder lichten we deze vier aspecten nader toe.

Algebra om problemen op te lossen

Algebra is een hulpmiddel bij het oplossen van problemen. Deze problemen zijn afkomstig uit de wiskunde zelf, bijvoorbeeld uit meetkunde, analyse of kansrekening, maar ook uit andere exacte vakken, economische wetenschappen, levenswetenschappen, of dagelijkse (beroeps)praktijk.

Het voorbeeld in figuur 1 heeft een meetkundige achtergrond. In het linkerscherm is met het meetkundeprogramma Cabri een parabool geconstrueerd. Deze wordt gesneden door enkele evenwijdige lijnen. We letten nu op de middens van de snijpunten van de lijnen en de parabool. De meetkundige plaats van deze middens lijkt een verticale halve rechte te zijn. Maar is dat echt zo? En hoe kunnen we de positie van die lijn weten?



figuur 1: Een parabool snijden met een lijn met vaste richting

Dit probleem laat zich goed met algebra aanpakken. Stel dat een lijn met voorgeschreven richting de parabool in twee punten snijdt. We noemen de x-coördinaten a en b, dus de punten zijn $A(a, a^2)$ en $B(b, b^2)$, zoals in het rechterscherm van figuur 1.

De richtingscoëfficiënt van AB is nu $\dfrac{a^2 - b^2}{a - b}$.

Omdat we in de *meetkundige* situatie de richting van de lijnen vast hebben gekozen, weten we dat deze uitdrukking in a en b een vaste waarde heeft.

De *algebra* vertelt ons nu dat $\dfrac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b$.

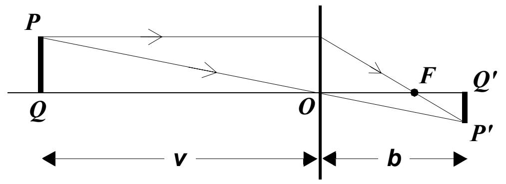
En we weten dat $a + b$ constant is. Dus $(a + b)/2$ is ook constant. Daar willen we het meetkundige feit uit kunnen afleiden dat de middens van AB op één lijn liggen. De verbinding algebra-meetkunde ligt nu voor de hand: de x-coördinaten van die middens zijn $(a + b)/2$ en dus constant.
Kijken we even terug naar de oplossing, dan zien we dat in het algebraïsch deel de vereenvoudiging van de uitdrukking voor de richtingscoëfficiënt een belangrijke schakel is. Van belang is ook de observatie dat de essentiële stappen, de ontbinding van $a^2 - b^2$ en het uitdelen van een factor $a - b$, essentieel algebraïsch zijn en geen direct zichtbare representanten hebben in de meetkundige situatie.
Ontbinden en uitdelen, maar natuurlijk veel meer technieken uit de algebra, spelen hun onzichtbare rol bij het oplossen van niet-algebraïsche problemen. Het voorbeeld van de parabool en de schuivende lijn laat zien dat bij dergelijke problemen ook parameters, zeg maar ‘variabele constanten’, kunnen voorkomen.

De vertaalslag van probleem naar algebra zal vaak bestaan uit het opstellen een of meer *vergelijkingen en ongelijkheden*. Een (of meer) van de voorkomende variabelen in het probleem is dan de *onbekende*, waarvan de numerieke waarde wordt gezocht. *Oplossen* van vergelijkingen wordt

dan de kern van het *oplossen* van het oorspronkelijke probleem.
In hoofdstuk 9 wordt nader ingegaan op de historische achtergrond van de rol van de algebra als dienstmaagd bij probleemoplossen in de meetkunde en in andere toepassingen.

Algebra van verbanden en functies

Algebra biedt ook middelen om verbanden tussen grootheden uit te drukken en te onderzoeken. Een voorbeeld van de algebraïsering van zo'n verband is de bekende lenzenformule (figuur 2).



$$\frac{1}{f} = \frac{1}{v} + \frac{1}{b}$$

figuur 2: De lenzenformule in beeld

De formule beschrijft de samenhang tussen drie grootheden: brandpunt-, voorwerp- en beeldafstand. Als de brandpuntafstand *f* en de voorwerpafstand *v* bekend zijn, is de beeldafstand *b* uit te rekenen en bevinden we ons in een vergelijkbare situatie als in de vorige paragraaf. Een interessantere vraag is echter: hoe verandert de beeldafstand bij een gegeven lens (dus *f* is vast) als het voorwerp van de lens af beweegt?
Er is hier een meetkundige oplossing mogelijk, die gebaseerd is op bovenstaande constructie. Als het lijnstuk *PQ* naar links beweegt, zal de hoek die de lijn *PO* maakt met de horizontale as kleiner worden met als gevolg dat *P'* als het ware naar *F* toe kruipt.
De vraag kan ook worden beantwoord via de volgende algebraïsche redenering. Bij een gegeven lens is de som $\frac{1}{b} + \frac{1}{v}$ constant. Als *v* groter wordt, dan wordt $\frac{1}{v}$ kleiner. Omdat het totaal $\frac{1}{b} + \frac{1}{v}$ niet verandert, moet $\frac{1}{b}$ wel groter worden, en dus wordt *b* kleiner. Andersom geldt natuurlijk: als *v* kleiner wordt, dan wordt *b* juist groter. Er is dus sprake van een gekoppelde verandering, waarbij de waarde van *b* afhangt van die van *v* en waarbij *f* een parameter is.

Het hier geschetste functionele verband tussen *v* en *b* laat zich het mooist algebraïsch vertegenwoordigen door een impliciete formule, dus zonder dat *b* expliciet uitgedrukt is in *v*. De functies die in ons wiskundeonderwijs veelvuldig voorkomen worden meestal met wel met expliciete formules beschreven, zoals in het volgende voorbeeld te zien is.

23 Een parachutist springt op 1200 m hoogte uit een vliegtuig. De eerste zes seconden maakt hij een vrije val. In de tabel hiernaast staat de afstand *a* in meters die na een tijd van *t* seconden is afgelegd.

tijd t in s	0	1	2	3	4	5	6
afstand a in m	0	5	20	45	80	125	180

a Maak een grafiek bij deze tabel. Zet de tijd *t* langs de horizontale as.
b Bij de grafiek hoort een kwadratische formule. Hoe kun je dit uit de tabel te weten komen?
c Leg uit waarom je een 'halve' parabool krijgt.
d Welke van de formules hiernaast hoort bij de tabel?

A $a = 5t$
B $a = t^2 + 5$
C $a = 5t^2$
D $a = 4t^2 + t$

figuur 3: Valweg als functie van tijd (Moderne wiskunde 8ste editie, 2Bvwo, p. 131)

Figuur 3 bevat een opgave uit Moderne wiskunde over het verband tussen de valweg van een parachutist en de valtijd. In de loop van de tijd neemt de valweg toe: weer een voorbeeld van gekoppelde verandering. In de opgave moet een formule worden gekozen die het verband tussen

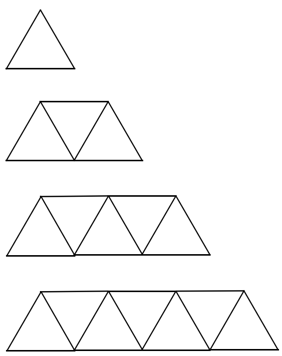
deze grootheden weergeeft. De expliciete formule is hier $a = 5t^2$. Terzijde merken we op dat het mooier zou zijn als de leerlingen deze formule zelf zouden opstellen; dan zou een opgave als deze moeten worden ingebed in een leerlijn rond het algebraïsch modelleren.[1]
Sinds de New Math beweging wordt bij functies ook wel de pijlnotatie gebruikt:

$$x \to 5x^2$$

Het voordeel van deze schrijfwijze is dat die het invoer-uitvoerkarakter van de functie goed weergeeft. De pijlennotatie nodigt bovendien uit tot het opsplitsen in de deelstappen ‘kwadrateren’ en ‘met 5 vermenigvuldigen’.
Bij algebra van verbanden en functies gaat het dus om (meestal functionele) verbanden tussen grootheden die in formulevorm worden weergegeven. Vaak zijn we, zoals in het voorbeeld van de lenzenformule, geïnteresseerd in het effect van verandering. Door deze nadruk op dynamiek staat algebra van verbanden en functies dicht bij de analyse.

Algebra van patronen en structuren

Algebra omvat ook het onderzoeken van regelmaat, patronen en structuren. Het gaat dan om het zien van een patroon in op het oog verschillende situaties en om het herkennen van een gemeenschappelijke algebraïsche structuur.
Met algebra van patronen en structuren kan al vroeg worden begonnen. Figuur 4 toont bijvoorbeeld een deel van een opgave uit de Amerikaanse methode die het Freudenthal Instituut voor Middle School heeft ontwikkeld [5]. In de opgave wordt beschreven hoe spanten voor de dakconstructie van een loods worden gemaakt door buizen in een driehoekig patroon aan elkaar te lassen. In het grotere kader van het onderzoeken hoe zo’n dakconstructie eruit ziet, is de taak voor de leerlingen om een tabel in te vullen die het verband geeft tussen het aantal buizen en de lengte van het spant. Vervolgens is de vraag om het patroon te beschrijven dat ze daarin zien.



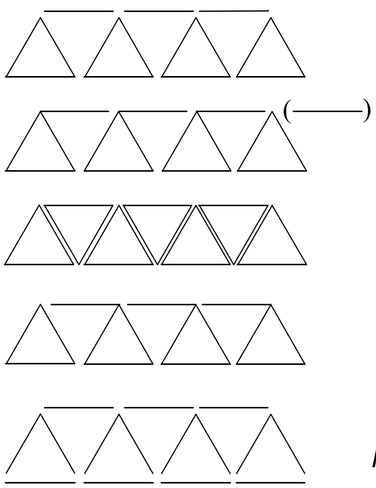
Aantal buizen	Lengte spant
3	1
7	

figuur 4: Spanten opbouwen met driehoeken van buizen

Het aardige aan dit probleem is dat het ruimte biedt voor het zien van verschillende patronen. Figuur 5 geeft enkele formules, gemaakt door leerlingen. Hierbij stelt *N* het aantal buizen voor en *L* de lengte van het spant, in buizen uitgedrukt. Behalve dergelijke directe formules noteerden leerlingen ook recurrente betrekkingen zoals ‘volgende = huidige + 4’. Zo’n diversiteit van formules is een kans voor de docent om leerlingen uit te dagen formules onderling te vergelijken en de eigen formule te verdedigen. Zijn ze allemaal goed? Hoe kun je inzien dat ze op hetzelfde neerkomen? Hoe hangen de directe en de recurrente formules samen?

1 In de natuurkunde wordt de afgelegde weg met *s* aangeduid en staat *a* voor versnelling. We pleiten ervoor om in de wiskundeboeken bij dergelijke conventies aan te sluiten.

In tegenstelling tot het eerder behandelde voorbeeld met de parabool en de schuivende lijn is de koppeling tussen structuur van de formule en meetkundige interpretatie van het patroon nu juist heel goed zichtbaar. Op verschillende niveaus, door te schuiven met lucifers of door algebraïsche bewerkingen uit te voeren, kan dan ook duidelijk worden dat de verschillende patronen zoals de leerlingen ze waarnemen, eenzelfde onderliggende algebraïsche structuur weergeven.



$N = 3L + (L-1)$

$N = 4L - 1$

$N = (3L) + 3(L-1) - 2(L-1)$

$N = 3 + 4(L-1)$

$N = L + 2L + (L-1)$

figuur 5: Patroonbeschrijvingen van leerlingen

Bij algebra van patronen en structuren gaat het dus om het onderzoeken, herkennen en formuleren van overeenkomsten, van algemene patronen en onderliggende algebraïsche structuren. Vaak speelt *generalisatie* hierbij een rol: vanuit specifieke gevallen wordt een niveausprong gemaakt naar het algemene geval, naar een klasse van gevallen. In het voorbeeld van de spanten geeft een regel als $N = 4L - 1$ het verband tussen de lengte van het spant en het aantal buizen *voor alle waarden* van N en L. De variabelen, hier N en L genoemd, stellen dan *gegeneraliseerde getallen* voor. In hoofdstuk 2 komt algebra van patronen en structuren nadrukkelijk aan de orde.

De taal van de algebra

Het vierde en laatste aspect van algebra heeft een ander karakter dan de vorige. Algebra maakt gebruik van een eigen gestandaardiseerde verzameling van tekens, symbolen en regels over hoe je iets kunt opschrijven; de algebra lijkt een eigen grammatica en syntaxis te hebben. Deze maken het mogelijk algebraïsche ideeën ondubbelzinnig en compact te formuleren. Deze compacte ondubbelzinnigheid is een van de redenen waarom algebra ook in andere vakken wordt toegepast. Meer daarover in hoofdstuk 6.

In hoofdstuk 9 wordt beschreven hoe deze compacte en intern consistente notatie van de algebra zich heeft ontwikkeld. Historisch blijkt dat vooral doordat algebra steeds onafhankelijker wordt van meetkunde, maar ook uit de ontwikkeling van een systeem waarin puur grammaticaal te zien is of een formule zinvol kan zijn. Wij herkennen bijvoorbeeld 'a b +' direct als onzinnig binnen het kader van ons notatiesysteem, terwijl $(a + b) \cdot c$ wel levensvatbaar is.

Het taalaspect van algebra betreft niet alleen het verkorten; het gebruik van de grammatica van de algebra gaat in de regel gepaard met formaliseren en abstraheren. Met algebraïsche taal worden algebraïsche ideeën uitgedrukt op een manier die afstand neemt van de oorspronkelijke concrete probleemstelling. In die zin is er sprake van abstraheren. Toch gaat het te ver om te zeggen dat algebra een taal *is*; wel *heeft* algebra een krachtige taal. In deze symbolische taal zijn variabelen slechts tekens of symbolen waarmee volgens welafgesproken regels kan worden gemanipuleerd.

Een belangrijk onderdeel van de algebraïsche activiteit is wat vaak het *vertalen* genoemd wordt van een probleem of situatie naar ‘algebra’. De term ‘vertalen’ is hier een zwaktebod. In feite gaat het om opbouwen van een structuur die de probleemvariabelen en hun onderlinge relaties in de situatie algebraïsch representeert, om modelleren dus. Andersom, een algebraïsche samenhang weer in woorden formuleren, in termen van het oorspronkelijke probleem, hoort uiteraard ook bij deze algebraïsche taalbeheersing.
Echte algebraïsche vertaalactiviteiten betreffen het omzetten van algebraïsche expressies in dagelijkse woorden en vooral andersom. Het is goed aandacht hieraan te besteden, bijvoorbeeld door in de klas af en toe een ‘algebradictee’ te houden. Leerlingen wordt dan gevraagd taaluitdrukkingen als algebraïsche expressies te noteren, zoals bijvoorbeeld:

- de helft van x
- een half keer x
- de som van het kwadraat van x en het kwadraat van y
- het kwadraat van x plus y

Merk op dat de laatste opdracht ambigu is: afhankelijk van de positie van de cesuur in de zin (“het kwadraat ... van x plus y ” of ”het kwadraat van x ... plus y ”) moet de expressie $(x+y)^2$ of x^2+y zijn. Haakjes spelen bij ‘algebrazinnen’ een belangrijke rol. De omkeeractiviteit, algebraïsche expressies omzetten in zinnen, is eveneens een goede oefening.

Verband tussen de vier aspecten

De vier genoemde aspecten van algebra staan natuurlijk niet los van elkaar. Figuur 6 laat zien hoe het accent vaak van het ene naar het andere aspect verschuift tijdens het werken aan een probleem.

Situaties met vaste en variabele kosten komen regelmatig voor in de onderbouw van havo en vwo en in vmbo-tl. Een reparateur van ‘witgoed’ hanteert bijvoorbeeld een voorrijtarief van € 30 en een uurtarief van € 45. Voor de kosten van een reparatie geldt dan het volgende algebraïsche verband:
$30 + \mathit{Reparatietijd} \times 45 = \mathit{Kosten}$
Bij het opstellen van deze formule ligt de nadruk op algebra van verbanden en functies, zeker als je nagaat hoe de kosten toenemen naarmate de reparatie langer duurt. Als de vraag is hoe lang de reparatie kan duren als je maar € 50 in huis hebt, dan komen we op het terrein van vergelijkingen, algebra bij probleemoplossen. Als we vervolgens de prijzen van verschillende reparateurs met elkaar vergelijken, gaat het herkennen van de algemene structuur van lineaire verbanden een rol spelen. In dit hele proces is de taal van de algebra het vehikel waarmee de ideeën worden uitgedrukt. Verkorting leidt tot $30 + R \times 45 = K$. Als we de context los laten en ons aan de gebruikelijke conventies voor volgorde houden (drie verwisselingen!) krijgen we de gedaante $y = 45x + 30$ of, algemener: $y = a \cdot x + b$.

figuur 6: Verschillende aspecten in de situatie van vaste en variabele kosten

Het viertal aspecten vormt ook een handvat om het Nederlandse algebraonderwijs globaal te vergelijken met dat van andere landen. In Nederland wordt veel aandacht besteed aan verbanden en functies, die vaak ontstaan uit min of meer realistische situaties. Deze situaties worden beschreven in natuurlijke taal, met tabellen of met grafieken. De verbanden worden vertaald in formules. De ‘drie-eenheid’ van tabellen–grafieken–formules heeft tegenwoordig een centrale plaats in het algebraprogramma, met name in de onderbouw. Van daaruit is de stap naar ‘terugzoekproblemen’ of vergelijkingen mogelijk en kan probleemoplossen aan de orde komen.
Patronen en structuren krijgen in Nederland niet zo veel aandacht. Een ander verschil met alge-

braonderwijs in veel andere landen is dat er in Nederland relatief veel ruimte wordt gegeven voor het ontwikkelen van informele methoden, terwijl formaliseren en de grammatica van de algebra zeker in vmbo en havo-A niet zo belangrijk worden gevonden. Ook aan het inslijpen van procedurele vaardigheden en het oefenen van basisroutines wordt niet zo veel tijd besteed.

1.4 Wat is moeilijk aan algebra?

Algebra is niet eenvoudig, niet om te leren en niet om te onderwijzen. Regelmatig blijkt algebra in de onderwijspraktijk voor veel leerlingen een struikelblok te zijn, dat drempels opwerpt voor het vervolgonderwijs. Als we ons realiseren dat algebra het resultaat is van een eeuwenlange ontwikkeling, is het niet zo gek dat een leerling dit proces niet een-twee-drie kan doorlopen. Toch is de vraag wat er nu zo moeilijk is aan het leren van algebra. Waar zit het probleem?
Het probleem hangt nauw samen met de aspecten van algebra die we genoemd hebben. Allereerst zijn daar de uiterlijke verschijnselen van de algebraïsche moeilijkheden: veelgemaakte fouten van allerlei aard. Je kunt ze algemeen duiden met nog niet of onvoldoende om kunnen gaan met het taal- en regelaspect van de zelfstandige algebra zoals hierboven beschreven. Ten tweede zijn daar de essentiële begripsmatige problemen, die we proberen te vatten onder de begrippenparen concreet-abstract, formeel-informeel en proces-object.

Veelgemaakte fouten

Wie kent niet de volgende verleidelijke vereenvoudiging, die leerlingen graag toepassen:

$$x^2 + y^2 = 25 \text{ dus } x + y = 5$$

Het idee erachter lijkt te zijn dat je ‘stuksgewijs kunt wortelen’:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2}$$

Helemaal absurd is die gedachte niet, want met x in plaats van + klopt het wel:

$$\sqrt{x^2 \times y^2} = \sqrt{x^2} \times \sqrt{y^2}$$

Ook bij werken met breuken treden dergelijke simplificaties op. De eerder genoemde lenzenformule wordt bijvoorbeeld ook wel eens vereenvoudigd:

$$\text{Als } \frac{1}{f} = \frac{1}{v} + \frac{1}{b} \text{ dan } f = v + b$$

Leerlingen zijn ook bereid in sin(a) + sin(b) de ‘sin’ buiten haakjes te brengen, log a/log b te vereenvoudige tot a/b en $(x + 4)^2$ te herleiden tot $x^2 + 4$ of misschien $x^2 + 16$.
Behalve om eenvoudige vergissingen, veroorzaakt door gebrek aan concentratie of tijdsdruk, kan het ook gaan om structurele fouten, die samenhangen met het feit dat leerlingen de algebraïsche ervaring missen die ‘een rood lampje doet oplichten’ bij het verwisselen van de volgorde van bewerkingen, zoals men bijvoorbeeld een deling of vermenigvuldiging alert moet zijn op het geval dat de noemer gelijk is aan 0. Het idee dat $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, zoals ook $2(a+b) = 2a + 2b$, is niet correct. Men kan dergelijk fouten tegengaan door te verwijzen naar getalsmatige of meetkundige voorbeelden. Wat echter opvalt, is dat zulke fouten in nieuwe, net iets complexere situaties weer terugkomen, die terwijl de leerling ze in de eenvoudige gevallen goed heeft leren vermijden. Algebra leren is in dit opzicht een groeiproces; niet voor niets gaat hoofdstuk 7 over het aanleren en onderhouden van vaardigheden. In dat hoofdstuk wordt een duidelijk pleidooi gehouden voor een balans tussen betekenisvol leren handelen en door het verstand geleide oefening in vaardigheid. Ook wordt ervoor gepleit om de te oefenen technieken op diverse niveau’s terug te laten keren.
De lijst van veelgemaakte fouten is te lang om hier uitputtend te bespreken, maar enkele hoofdgroepen mogen niet ontbreken. Het voorbeeld van de lenzenformule eerder in deze paragraaf laat zien dat fouten bij het werken met breuken veel voorkomen. Ook eenvoudige situaties met machten kunnen aanleiding zijn tot fouten, zoals $x^2 + x^3 = x^5$ of $x^3 \cdot x^2 = x^6$. Het vervelende met dergelijke fouten is dat ze zich vaak op ongelegen momenten voordoen, waarop het over iets anders

gaat dan de uit te voeren algebraïsche bewerking. Toch kan het nodig zijn om aan zulke fouten, zeker als ze een structureel karakter hebben, aandacht te besteden, omdat ze onderliggende misconcepties kunnen blootleggen. In veel gevallen zal het voldoende zijn om terug te vallen op de betekenis van de bewerking: wat betekent x^3, wat betekent x^2, en wat betekent het als je die twee met elkaar vermenigvuldigt?

Een andere manier om aandacht aan mogelijke structurele fouten te besteden, is om van de nood een deugd te maken door ze expliciet aan de orde te stellen, zoals gebeurt in de opgave in figuur 7, afkomstig uit Moderne wiskunde.

Iemand lost de vergelijking $2x\sqrt{x-3} = 4\sqrt{x-3}$ zo op:

$2x\sqrt{x-3} = 4\sqrt{x-3}$

$2x = 4$

$x = 2$

Er zijn twee fouten gemaakt. Welke?

figuur 7: Opgave uit Moderne wiskunde (1984), bovenbouw havo, 4/5

Leerlingen maken bij algebra veel fouten, die met name als ze structureel zijn op hiaten in zowel vaardigheid als inzicht wijzen. Op het maken van fouten, gebrekkige algebraïsche vaardigheden, oefenen en feedback wordt uitgebreider ingegaan in hoofdstuk 7.

Concreet en abstract

Wat zijn nu de belangrijkste begripsmatige ‘bottle necks’ bij het leren van algebra? Een eerste moeilijkheid is de overgang concreet–abstract. In het Nederlandse algebraonderwijs vormen concrete, betekenisvolle situaties veelal de aanleiding voor algebra. Eerder in dit hoofdstuk leidde de context van een reparatie tot het verband $30 + Reparatietijd \times 45 = Kosten$. Concrete vragen rond deze context kunnen opgelost worden zonder algebra, bijvoorbeeld met terugrekenen. Op het moment dat leerlingen een ander perspectief innemen, kan algebra wel belangrijk worden. Denk aan het perspectief van de monteur, die wellicht van tevoren een globale prijsindicatie moet kunnen geven, of dat van de bedrijfsleider, die de tariefstelling wil vergelijken met die van de concurrentie. Ook zijn er andere toepassingen die tot een algebraïsch identieke situatie leiden. Dergelijke perspectiefwisselingen kunnen de behoefte aan *abstraheren* oproepen: het loslaten van de concrete context en opbouwen van een overstijgende wereld van algebraïsche objecten en operaties. Dat is moeilijk: het loslaten van een vertrouwd referentiekader en het opbouwen van een nieuw. Van Hiele [6] spreekt in dit verband van de overgang van het grondniveau naar het eerste niveau, waarop een betekenisvol relatienetwerk van wiskundige objecten ontstaat. Als abstractie inderdaad plaatsvindt, dan kan die abstracte wereld van de algebra steeds concreter worden voor de leerling. De kern van het probleem van concreet en abstract is dus vooral dat de oorspronkelijk abstracte algebrawereld voor de leerlingen een betekenisvolle ‘realiteit’ wordt, die daarnaast ook functioneert bij het oplossen van concrete problemen.

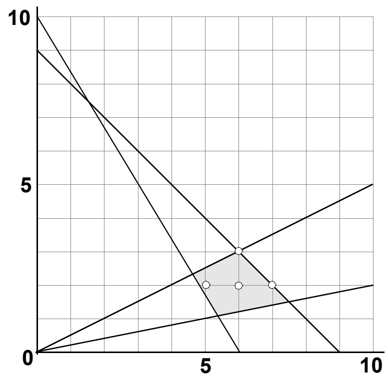
In sommige gevallen zijn de concrete probleemsituaties zodanig, dat het niet nodig is om de wereld van de abstractere algebra te betreden; dat kan dan ook maar beter achterwege blijven.
Het subtiele spel tussen het contact houden met de concrete context en het (tijdelijk) loslaten daarvan voor het zuivere algebrawerk is niet eenvoudig, zeker niet in die gevallen waarin het blijven denken aan de concrete situatie blokkerend werkt bij wat wel ’verticaal mathematiseren’ wordt genoemd.
Neem bijvoorbeeld het oude lineaire programmeringsprobleem in figuur 8.
De ondernemer, algebraïsch geschoold als hij is, redeneert als volgt.
Stel dat ik *x* geschoolden en *y* leerjongens aan het werk heb.

Er kunnen hoogstens 9 man personeel zijn, dus $x + y \leq 9$.
Samen moeten ze minstenstens 30 stuks vervaardigen, dus $5x + 3y \geq 30$.
Volgens de vakvereniging moet zijn voldaan aan: $x \geq 2y$. En de wet schrijft voor: $x \leq 5y$.

Een ’kleine’ ondernemer heeft een bedrijf, waarin hij hoogstens negen man personeel te werk kan stellen. Dat personeel bestaat uit geschoolden en ongeschoolden (leerjongens). Van het product dat er in dit bedrijf wordt vervaardigd kan een geschoolde 5 stuks per dag afmaken en een leerjongen 3 stuks. Wil hij zijn klanten niet te lang laten wachten, dan moet hij zeker 30 stuks per dag klaar krijgen. *Hij vraagt zich nu af hoeveel geschoolden en hoeveel leerjongens hij het beste in dienst kan hebben*.
Dat hangt vanzelfsprekend nog van meer factoren af dan hierboven genoemd zijn. Zo wil de vakvereniging niet hebben dat hij minder dan twee geschoolden per leerjongen in dienst heeft, maar de wet staat niet toe meer dan vijf geschoolden per leerjongen te hebben. De beloning van de beide soorten werknemers speelt natuurlijk ook een rol. Een geschoolde verdient € 40 per dag en een leerjongen € 20 per dag. Tenslotte moet de ondernemerer nog rekening mee houden dat hij voor elk afgeleverd stuk werk € 25 ontvangt.

figuur 8: Opgave over lineair programmeren uit Pythagoras, jaargang 5 nr. 1, 1965

Deze vier ongelijkheden kunnen worden weergegeven in een coördinatenvlak en dat leidt tot een vierhoekig gebied (figuur 9). De vier roosterpunten in het gebied geven nu de mogelijke personeelsverdelingen en na het berekenen van de winst in elk van de vier gevallen blijkt dat de voordeligste samenstelling bestaat uit 7 geschoolden en 2 leerjongens.



figuur 9: Het toegestane gebied

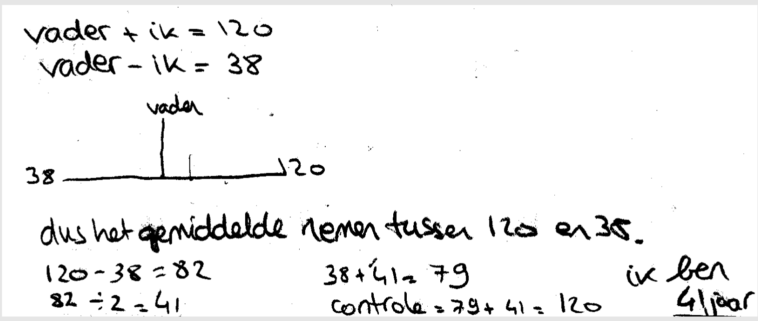
Een verleidelijke misstap bij het opstellen van de voorwaarden is de redenering: *x* geschoold, *y* ongeschoold, 2 geschoolden per leerling, dat geeft $2x = y$. Deze verwisseling staat in de literatuur bekend als het Student-Professor probleem [7] en kan het best worden ontzenuwd (of liever nog voorkomen!) door eerst even aan concrete aantallen te denken: als er 3 leerjongens zijn, dan ...
Een andere moeilijkheid is voor sommige leerlingen dat een voorwaarde met betrekking tot het totaal aantal werknemers (hier $x + y \leq 9$) verrekend wordt met een voorwaarde over het totaal aantal producten (hier $5x + 3y \geq 30$). Dat heeft wel iets weg van het optellen van appels en peren. Weliswaar speelt hier het snijpunt van de lijnen $x + y = 9$ en $5x + 3y = 30$ toevallig geen rol, maar er zijn tal van dergelijke problemen te bedenken waarbij zo’n snijpunt wél essentieel is. In dat geval kan de leerling zich tijdens het proces van oplossen maar het best concentreren op de pure algebra en de context even laten voor wat zij is.

Informeel en formeel

Een tweede moeilijkheid bij het leren van algebra is het formaliseren. Hoewel formaliseren en abstraheren vaak samengaan, zijn het toch verschillende zaken. Bij formaliseren gaat het er ten eerste om dat de probleemaanpak wordt gesystematiseerd en gestandaardiseerd, en daarmee breder toepasbaar wordt. Een tweede aspect van formalisering is dat de procedure wordt genoteerd in de ‘officiële’ taal van de algebra en dat de bewerkingen gehoorzamen aan de grammaticale regels van de algebra. Bij formaliseren wordt de syntax belangrijker dan de semantiek: de formele algebra is rijk aan syntactische regels en conventies, maar zeker voor de leerling vaak arm aan betekenis.

Leerlingen benaderen problemen in eerste instantie vaak informeel met behulp van gewone taal en eigen representaties. Neem bijvoorbeeld het bekende probleem van de leeftijden in figuur 10. Onder de opgave staat de oplossing van een leerling van vwo-3 in informele, of misschien beter gezegd preformele, notatie. Ze gebruikt woordvariabelen, tekent een deel van de getallenlijn en vindt de oplossing. Haar methode heeft al een vrij algemeen karakter maar is nog niet in algebrataal geformuleerd. Deze situatie vraagt nauwelijks om verdere formalisering.

Als ik de leeftijd van mijn vader optel bij die van mezelf, krijg ik 120.
Als ik mijn leeftijd van die van mijn vader aftrek, is de uitkomst 38.
Hoe oud ben ik? Hoe heb je dat gevonden?



figuur 10: Preformele oplossing van het bekende leeftijdenprobleem

Toch streven we in het algebraonderwijs, zeker in havo en vwo, veelal ook naar verdergaande formalisering. Het gebruik van de formele taal van de algebra biedt voordelen, zeker als het gaat om het uitwisselen van ideeën en om het compact weergeven van complexe situaties. Daarnaast laat een geformaliseerde methode zich ook eenvoudiger automatiseren en toepassen dan een informele, die meer een ad-hoc-karakter lijkt te hebben.

Het leren is dus vaak gericht op de overgang van het informele niveau, dat meestal een contextgebonden karakter heeft, via het preformele niveau, waarin als het ware de methode klaar staat voor formalisering zonder dat de algebrataal wordt gebruikt, naar het formele niveau met de conventionele algebrataal. Dat is een lastig proces, dat overigens vaak samengaat met de sprong van concreet naar abstract. Het is belangrijk dat leerlingen gelegenheid hebben voor het ontwikkelen van eigen representaties en informele methodes, die zich vervolgens geleidelijk formaliseren. Enerzijds vraagt dit proces van progressieve formalisering tijd, die in het onderwijs niet altijd wordt geboden; in de praktijk wordt formalisering niet zelden geforceerd zonder zich op natuurlijke wijze te ontwikkelen, waardoor de formele aanpak geen basis heeft waarop de leerling kan terugvallen. Anderzijds kan het niet de bedoeling zijn om de informele en preformele fase te lang te laten duren, zodat de formalisering nodeloos wordt uitgesteld.

Proces en object

Een derde moeilijkheid bij het leren van algebra is gelegen in het objectkarakter van algebraïsche expressies en formules. In eerste instantie heeft een formule voor leerlingen vaak het karakter van een *procesbeschrijving*, een rekenvoorschrift of een stappenplan. Om maar weer het eerder gebruikte voorbeeld van de reparatiekosten aan te halen: $30 + Reparatietijd \times 45 = Kosten$ geeft vanuit die optiek aan hoe je uit de reparatietijd de kosten kunt berekenen. Als de reparatietijd 1,5 uur is, 'pak dan die 1,5, doe die keer 45, tel er 30 bij op, en die uitkomst is het bedrag'. De tekens +, x en = krijgen dan in de ogen van de leerling een actiekarakter en lijken aan te sporen tot het uitvoeren van een berekening. Omdat leerlingen zo'n expressie veelal van links naar rechts lezen, is het niet ondenkbaar dat ze $(30 + Reparatietijd) \times 45$ berekenen.
Met dit beeld van formules en expressies kom je in de algebra echter niet ver. Vaak valt er niets uit te rekenen. Een formule als $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ heeft geen proceskarakter; er wordt aangegeven dat de uitdrukking links van het gelijkheidsteken gelijkwaardig is aan de uitdrukking aan de andere kant. Het gelijkheidsteken staat dus niet voor 'en dat geeft dan als uitkomst...' maar voor 'is equivalent met'[1]. Ook de plus heeft een ander karakter: in plaats van 'pak *a* en tel er *b* bij op' staat de + in $(a+b)^2$ voor 'de som van *a* en *b*'. De expressie $(a+b)^2$ is geen procesbeschrijving maar een *algebraïsch object* [3].

De acties of processen die op zo'n algebraïsch object kunnen worden uitgevoerd, zijn van een hogere orde, zoals bijvoorbeeld herleiden, vereenvoudigen, oplossen of elimineren. Als we de vergelijking $x^2 + y^2 = 25$ naar *y* oplossen, is het resultaat zelf ook weer een expressie. Dat is een object dat dan weer aan verdere algebraïsche bewerkingen onderworpen kan worden.

Algebraïsche uitdrukkingen zijn dus objecten, maar worden in ons onderwijs aanvankelijk, naar analogie van het rekenen met getallen, als procesbeschrijvingen opgevoerd. Het opereren op objectniveau kent een hogere drempel dan de proceskant. Zo blijkt bijvoorbeeld dat leerlingen het lastig vinden om een expressie als oplossing van een vergelijking te accepteren, omdat 'je dan nog niet weet hoeveel het is'. Een van de moeilijkheden van algebra is dan ook dat leerlingen een algebraïsche expressie als proces én als object moeten kunnen beschouwen en gevoel moeten krijgen voor welke blik op welk moment geschikt is. Flexibiliteit ten aanzien van procesdenken en objectdenken is dan ook belangrijk. Bij het rekenen staat in het algemeen het proces voorop. Vooral daarom wordt gesproken van een didactische kloof tussen rekenen en algebra [7].

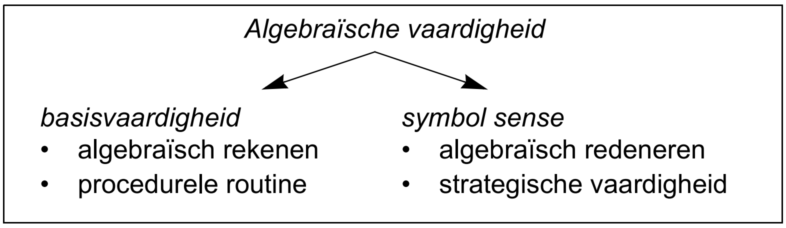
1.5 Basisvaardigheden en symbol sense

Een van de doelen van het algebraonderwijs is dat leerlingen *basisvaardigheden* ontwikkelen in het uitvoeren van algebraïsche bewerkingen. Denk bijvoorbeeld aan het oplossen van eenvoudige vergelijkingen en het vereenvoudigen van uitdrukkingen. Kemme [8] spreekt in dit verband van specifieke algebraïsche vaardigheden ofwel algebraïsch rekenen. Hoe ver de beheersing van deze 'algebraïsche rekenvaardigheid' moet gaan, is onderwerp van discussie. Het lijkt echter wel duidelijk dat het belangrijk is om een aantal basisbewerkingen te ontwikkelen, zodat deze geroutineerd en zonder veel fouten kunnen worden uitgevoerd. Dat vraagt behalve inzicht ook oefening en onderhoud, en daarop wordt in de hoofdstukken 7 en 8 nader ingegaan.
Maar algebra is veel meer dan het beheersen van basisvaardigheden; het gaat ook om het kiezen van een verstandige strategie om een probleem aan te pakken, het houden van overzicht op het oplossingsproces, het opstellen van een model, het globaal kijken naar expressies, het verstandig kiezen van vervolgstappen, het onderscheiden van relevante en minder relevante kenmerken, het zinvol interpreteren van resultaten, enzovoorts. Kemme [8] noemt dit algebraïsch redeneren. Dit type meta-kennis wordt in de vakliteratuur wel *symbol sense* genoemd. Symbol sense is voor al-

1 In oudere algebramethoden wordt wel een speciale notatie voor equivalentie gebruikt: $(a+b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$

gebra wat 'number sense' is voor rekenen: een soort algebraïsche expertise die vaak op de achtergrond een rol speelt bij het plannen en uitvoeren van basisbewerkingen. Belangrijke trefwoorden zijn flexibiliteit, wendbaarheid en redzaamheid. In het Nederlands zouden we symbol sense kunnen aanduiden met 'algebraïsche geletterdheid'.
Arcavi en Fey [9] beschrijven een aantal concrete vaardigheden die in hun ogen deel uitmaken van symbol sense. We lichten er een paar uit:

- De kracht van symbolen met inzicht en gevoel kunnen gebruiken. Dat betekent ook het vermogen om een symbolische methode te verlaten als zich betere alternatieven aandienen.
- Een algebraïsche expressie niet alleen kunnen manipuleren, maar ook globaal kunnen 'lezen' en de structuur ervan doorzien.
- Op basis van een formule kunnen inschatten hoe een grafiek of tabel er ongeveer uitziet.
- Twee verschillende formules globaal kunnen vergelijken en hun verhouding kunnen inschatten.
- Afhankelijk van de probleemstelling een geschikte algebraïsche representatie kunnen kiezen.



figuur 11: Tweedeling binnen algebraïsche vaardigheid

Binnen algebraïsche vaardigheid onderscheiden we dus basisvaardigheid en symbol sense. Figuur 11 geeft dit onderscheid weer. Een van de lastige kanten van algebra is het combineren van deze twee elementen, het samenspel tussen routine om basisbewerkingen te kunnen uitvoeren en impliciete metavaardigheden die daarbij op de achtergrond een rol spelen. Natuurlijk is een scherpe grens tussen basisvaardigheid en symbol sense niet goed te trekken en kan het een niet zonder het ander bestaan. Van een groot belang is dus een juiste balans tussen vaardigheid en inzicht, tussen doen en denken. Toch zal het idee van deze tweedeling en het belang van symbol sense verschillende keren in dit boek terugkomen. Op deze plaats volstaan we met de constatering dat de ontwikkeling van symbol sense in het algebraonderwijs vaak weinig expliciete aandacht krijgt.

1.6 Algebra op school: waarom en hoe?

Waarom algebra op school?

Zoals het citaat van Tall en Thomas aan het begin van dit hoofdstuk duidelijk maakt, vraagt het leren van algebra een investering die in eerste instantie kostbaar is, maar die in tweede instantie, zeker bij exacte vervolgopleidingen, onmisbaar en rendabel blijkt te zijn. Juist vanwege de afstand die algebra neemt tot de oorspronkelijke betekenis, is het bijzonder krachtig gereedschap:

> In fact, from one point of view, this is one of the strengths of symbols − they enable us to detach from, and even "forget", their referents in order to produce results efficiently. (Arcavi, [9], p. 26)

Dit geldt vooral voor leerlingen van havo en vwo die voor een exacte vervolgopleiding opteren. Ook voor leerlingen die in vervolgopleiding en beroep nauwelijks met wiskunde in aanraking zullen komen, is enige mate van algebrakennis echter van belang. Algebra kan immers ook een middel zijn om verschijnselen uit werk of omgeving te ordenen en te sorteren, om patronen en regelmaat te ontdekken en daarmee te redeneren. In die zin is algebra een onderdeel van gecijferdheid zoals die voor iedereen relevant is, en die helpt om een weg te vinden in een samenleving vol

cijfers, procedures en patronen. Algebraonderwijs dat zich hierop richt, heeft een ander karakter dan wanneer het voorbereidt op een exacte vervolgopleiding. Voor leerlingen die weinig meer met wiskunde van doen zullen hebben, is algebra eerder een middel om met praktische problemen om te gaan dan een doel op zichzelf. Het gaat dan om een informele, toepassingsgerichte en realiteitnabije benadering van algebra.
Algebraonderwijs levert dus een bijdrage aan een adequate voorbereiding van de leerling op het vervolgonderwijs en op een beroepspraktijk, mits afgestemd op de behoeften van de doelgroep.

Visie op het leren van algebra

Uitgangspunt van dit boek is een visie op het leren van algebra, die voortkomt uit het meer algemene perspectief van realistisch wiskundeonderwijs. Deze visie vatten we als volgt samen:

- Algebra is mensenwerk.
  Algebra is in de loop van de eeuwen door mensen geconstrueerd. Vanuit dit cultuurhistorisch perspectief is het belangrijk dat leerlingen algebra niet ervaren als een star en onwrikbaar gegeven, maar als een menselijke constructie van middelen en kennis die van pas komen bij het oplossen van herkenbare problemen.
- Algebra is hersenwerk.
  Dat betekent dat er nagedacht moet worden, maar ook dat leerlingen iets ervaren van de distantie tot de concrete problemen, die bij het werken met algebra vaak ontstaat. Een context zal een proces in gang zetten waarin contextoverstijgende reflecties leiden tot de ontwikkeling van algebra op een meer abstract niveau, algebra als abstracte wereld van wiskundige objecten. Het hersenwerk omvat een combinatie van vaardigheden en inzichten, die in het algemeen niet los van elkaar staan.
- Algebra is eigen werk.
  Leerlingen kunnen vanuit hun intuïties en ideeën zelf representaties ontwerpen, en algebra ontwikkelen via een weg van progressieve formalisering. Op die manier kunnen leerlingen zich algebra ‘eigen maken’.
- Algebra heeft zin.
  Of de leerling algebra nu op een concreet of een abstract niveau gebruikt, cruciaal is dat het werk als betekenisvol wordt ervaren. Soms vereist dit een concrete probleemsituatie uit de belevingswereld van de leerling. In andere gevallen ligt de betekenis voor de leerling besloten in een meer abstracte, theoretische context. Waar het om gaat, is dat de probleemsituatie ‘experientially real’ is, dus door de leerlingen als echt en betekenisvol wordt ervaren. Dit uitgangspunt verklaart de ondertitel van dit boek.

Nadere uitwerking in dit boek

De bovenstaande visie op algebra vormt de basis voor dit boek. Omdat zo’n globale kijk voor verschillende leerlingen een verschillende uitwerking moet krijgen, besteden we aandacht aan algebraonderwijs op diverse niveaus. In de hoofdstukken 3, 4, en 5 wordt de visie geconcretiseerd voor het leren van algebra in respectievelijk vmbo, onderbouw van havo en vwo en tweede fase van havo en vwo. Havo en vwo krijgen dus veel aandacht, omdat algebra daar een grotere rol speelt dan in het vmbo. Voorafgaand aan deze hoofdstukken komt in hoofdstuk 2 de verhouding tussen rekenen en algebra aan de orde.
Dan volgen enkele hoofdstukken met een meer thematisch karakter. In hoofdstuk 6 komt aan de orde op welke manier algebra bij natuurkunde en technische vakken wordt gebruikt. Hoofdstuk 7 gaat in op de kwestie van het (productief) oefenen van vaardigheden. De rol van ICT bij het leren van algebra is het onderwerp van hoofdstuk 8.
Aan het einde kijken we terug en vooruit. In hoofstuk 9 wordt de historische ontwikkeling van algebra globaal beschreven en in het nawoord proberen we de lijnen door te trekken naar de toekomst.

Literatuur

1 Tall, D. & Thomas, M. (1991). Encouraging versatile thinking in algebra using the computer. *Educational Studies in Mathematics, 22*.

2 Team W12-16 (1992). *Achtergronden van het nieuwe leerplan wiskunde 12-16, Band 1*. Utrecht: Freudenthal Instituut.

3 Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.

4 Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (Eds.) (1996). *Approaches to algebra, perspectives for research and teaching*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
Stacey, K., Chick, H. & Kendal, M. (2004). *The future of the teaching and learning of algebra*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

5 Wijers, M., Roodhardt, A., van Reeuwijk, M., Dekker, T., Burrill, G., Cole, B.R. & Pligge, M.A. (2006). Building formulas. In Wisconsin Centre for Education Research & Freudenthal Institute (Eds.), *Mathematics in Context*. Chicago, USA: Encyclopedia Britannica Inc.
Reeuwijk, M. van & Wijers, M. (1994). Formules en variabelen in context. *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs, 13*(3), 4-7.

6 Hiele, P.M. van (1973). *Begrip en inzicht, werkboek van de wiskundedidactiek*. Purmerend: Muusses.

7 Amerom, B. van (2002). *Reinvention of early algebra*. Utrecht: CD-beta press.
Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Braunschweig: Vieweg.

8 Kemme, S. (2002). Welke algebra is nodig voor klas 4? *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs, 21*(3), 29-31.

9 Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics, 14*(3), 24-35.
Arcavi, A. (2005). Developing and using symbol sense in mathematics. *For the Learning of Mathematics, 25*(2), 42-47.
Fey, J. (1990). Quantity. In Steen, L.A. (Ed.), *On the shoulders of giants: new approaches to numeracy*, pp. 61-94. Washington D.C.: National Academy Press.

10. Riet, S.P. van 't (1979). Setvorming en wiskundeonderwijs I. *Euclides, 55* (2), 41-49.

2 Van rekenen naar algebra

Truus Dekker, Maarten Dolk

Algebra, is dat niet gewoon voortgezet rekenen? Zo simpel ligt het niet. In de praktijk is de relatie tussen rekenen en algebra niet eenvoudig; de overgang van het basisonderwijs naar het voortgezet onderwijs is daarbij een extra complicatie. In het voortgezet onderwijs wordt wel gerekend, maar op een andere manier dan in het basisonderwijs. In het basisonderwijs wordt nauwelijks aandacht besteed aan algebraïsch denken, terwijl daarvoor met jonge kinderen al wel degelijk kansen liggen. Belangrijke aspecten hierbij zijn impliciet redeneren en generaliseren. Als in het basisonderwijs een aanzet wordt gegeven tot de ontwikkeling van het algebraïsch denken, ontstaat een doorgaande leerlijn voor algebra, die de kloof tussen rekenen en algebra en bovendien tussen basisonderwijs en voortgezet onderwijs kan verkleinen. In dit hoofdstuk wordt aangegeven op welke manier zo'n leerlijn gestalte zou kunnen krijgen.

2.1 Inleiding

Over de lessen rekenen in het basisonderwijs en in het voorgezet onderwijs wordt al heel lang verschillend gedacht door de betreffende docenten. Veel wiskundeleraren uit het voortgezet onderwijs lijken te denken dat hun leerlingen niet goed hebben leren rekenen voor ze bij hen in de klas kwamen, terwijl leerkrachten uit het basisonderwijs eerder geneigd zijn te zeggen dat het rekenen in de beginjaren van het voortgezet onderwijs te weinig wordt onderhouden. Het is onduidelijk of er hier sprake is van een overgangsprobleem dat opgelost kan worden door onderling betere afspraken te maken over de inhoud van het onderwijs of dat het onderwijs in een of beide schooltypen beneden de maat blijft. Deze discussie is al jaren aan de gang zoals uit de volgende voorbeelden blijkt.

In de eerste jaargang van Euclides[1] (1924/25) schreef Beth dat het peil van zowel het lagere als het voortgezet onderwijs, in het algemeen gesproken, gedaald was [1]. In die tijd was de discussie deels gericht op de vraag wat er van de theorie der rekenkunde in het voortgezet onderwijs aan de orde diende te worden gesteld. Beth verzuchtte dat herleiden van samengestelde breukvormen en vierkants- en kubiekworteltrekken weinig aan de begripsvorming bijdroeg. Korte tijd later beschreef Wijdenes (1926/27) zijn rekenlessen in de eerste klas van de HBS [2]. Duidelijk wordt dat hij zich daarbij juist op het letterrekenen richtte. Hij onderscheidde dit van algebra. Letterrekenen omvatte volgens hem het eerste manipuleren met symbolen, bijvoorbeeld optellingen als $2a + 3c + 9a + 2b$ omzetten naar $11a + 2b + 3c$. Ook het verwisselen ($a + b = b + a$) en het lezen van formules kwamen hierbij aan de orde. Wat hij op dat moment nog onder rekenen liet vallen, wordt tegenwoordig algebra genoemd. Die grensafbakening kwam veel later opnieuw aan de orde op het moment dat men discussieerde over algebra in het basisonderwijs. Wijdenes (1952/53) toonde zich toen een voorstander van het idee dat de lagere school een inleiding geeft van het letterrekenen [3]. De negatieve getallen en zeker regels als 'min maal min is plus' leken tot het domein van de algebra en daarmee van het voortgezet onderwijs te behoren.

In 1989 publiceerde een groep opleiders uit Pabo, NLO, ULO en MO-opleidingen wederom over ontwikkelingen op de grens van basis- en voortgezet onderwijs [4]. Aan de hand van het thema negatieve getallen verkende deze groep het schemergebied tussen basis- en voortgezet onderwijs, waarin u dit hoofdstuk kunt plaatsen.

1 Tijdschrift van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Wij richten ons voornamelijk op de relatie tussen rekenen en algebra, in het bijzonder op aanzetten tot algebraïsch denken die al vroeg in de basisschool kunnen beginnen. Verder besteden we aandacht aan het voortbouwen op rekenkundige strategieën en de ontwikkeling van rekenkundige vaardigheden in het voortgezet onderwijs. De voorbeelden die we gekozen hebben komen allemaal uit de algebra-leerlijn Patronen en regelmaat. Ze kunnen overigens met vele andere voorbeelden uit de overige leerlijnen worden aangevuld.

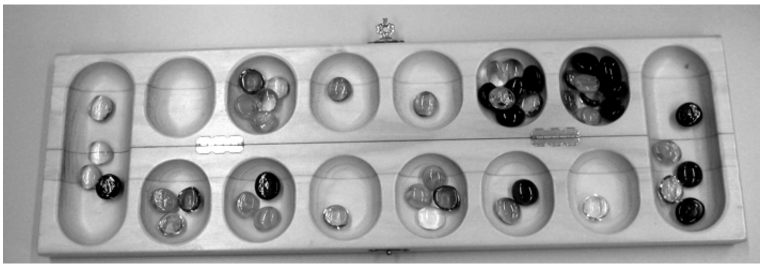
2.2 Algebra en algebraïsch denken

In het eerste hoofdstuk zijn verschillende facetten van de (school)algebra beschreven. Zo wordt onder andere opgemerkt dat het gebruik van de werkwoordsvorm belangrijk is. Hiermee treden de schrijvers van dat hoofdstuk in de voetsporen van Freudenthal die ook voorstelde niet over 'mathematics' maar over mathematiseren te spreken [5]. In het verlengde hiervan prefereren wij de term 'algebraïsch denken' boven 'algebra'. Algebraïsch denken omvat bijvoorbeeld gegeneraliseerd (letter)rekenen, de ontwikkeling van wiskundige modellen en de ontwikkeling van de taal van de algebra.
Usiskin onderscheidt vijf aspecten in deze taal: onbekenden, formules, gegeneraliseerde patronen, plaatswaarde en relaties [6]. Deze aspecten van algebra als taal zijn ook van belang voor algebraïsch denken, maar ze zijn geen onderwijsdoel op zich.

Naar ons idee zijn de volgende wiskundige activiteiten belangrijk voor het ontwikkelen van algebraïsch denken:

- het impliciet en expliciet redeneren en generaliseren;
- het ontwikkelen van denkmodellen;
- het construeren van fundamentele algebraïsche ideeën;
- het waarnemen, verwoorden, onderzoeken en visualiseren van patronen en relaties;
- het probleemoplossen.

Heel jonge kinderen ontwikkelen soms al hun eigen manier van wat we algebraïsch denken kunnen noemen. Susan van drie speelt bijvoorbeeld samen met haar oma Mankala, een spel met mooi gekleurde steentjes dat je kunt spelen als je nog niet kunt tellen (figuur 1). Wie aan het eind van het spel de meeste steentjes over heeft, wint.



figuur 1: Het spel Mankala[1]

Oma: Ik denk dat jij gewonnen hebt, Susan. Jouw hoopje stenen is het grootst.
Susan aarzelt, ze is duidelijk niet overtuigd.
Susan: Jij kunt tellen, oma, dan moet jij ze tellen.
Oma: Een, twee, drie, vier,..... Ik heb er 20 en jij hebt er 24. Jij hebt er dus meer. Jij hebt gewonnen!
Susan is nog steeds niet overtuigd. Getallen zeggen haar natuurlijk ook nog niets.
Susan: Ik kan ook zo doen. Steeds eentje van jou en dan eentje van mij.
De dubbele rij steentjes groeit en groeit; jawel hoor, de rij van Susan is langer.
Dus ...... maar dan kent u Susan niet. Ze veegt de twee rijen ieder apart weer op een hoopje en zegt:
Mijn hoopje is groter, dus ik heb gewonnen.

1 Er is ook een digitale versie beschikbaar op http://www.elf.org/mankala/Mankala.html

Wat Susan betreft is het nu duidelijk hoe je kunt weten wie het spel wint. Ze heeft zelf een methode bedacht en die klopt met wat oma ook al zei. Maar ze heeft dat niet op gezag van oma aangenomen. Ze kan de grootte van twee hoeveelheden vergelijken ook al kan ze nog niet tellen en ze gebruikt die methode later ook om te kijken wie meer knikkers heeft, zij of haar zusje. Redeneren, generaliseren, ontwikkelen van een denkmodel, het zit er, zij het nog impliciet, allemaal in.
Eigenlijk zou je willen dat alle kinderen op school vergelijkbare ervaringen opdoen die dan ook nog op het juiste moment door de leerkracht worden opgemerkt. Dat is natuurlijk niet mogelijk, maar het rekenonderwijs op de basisschool biedt voldoende aanleidingen om algebraïsch denken aan de orde te stellen. Daar is wel sturing door de leerkracht voor nodig, het gaat niet vanzelf.
Een voorbeeld ter verduidelijking. Je kunt aan leerlingen vertellen dat ons systeem van getallen opschrijven inhoudt dat de 2 in 23 in feite 20 betekent en de 3 dat er 3 eenheden zijn. Dat zullen de leerlingen waarschijnlijk wel op gezag van de leerkracht willen aannemen. Maar het kan ook anders. Dan bedenkt de leerkracht zinvolle activiteiten, stuurt bij, helpt organiseren, stelt vragen; de kinderen ontdekken nieuwe patronen en structuren en proberen elkaar en zichzelf te overtuigen. Tijdens een klassengesprek en/of tijdens gesprekken met individuele leerlingen probeert de docent zicht te krijgen op de ontwikkeling die de leerlingen doormaken en ze maakt gebruik van hun worsteling om greep te krijgen op een nieuw concept. Als je zelf hebt ontdekt hoe het getalsysteem in elkaar zit, zul je dat niet zo snel vergeten als wanneer je slechts verteld is wat er aan de hand is. Dat helpt wanneer je later in het voortgezet onderwijs met de opbouw van verschillende getalsystemen te maken krijgt en het helpt je fundamentele algebraïsche ideeën vanaf een informeel niveau zelf verder te ontwikkelen. Daar horen vragen bij als: Zit er een bepaald patroon in? Is dat altijd zo? Kun je dat zeker weten?

Hoe zoiets in de dagelijkse lespraktijk kan gebeuren, zien we in video-opnamen van de activiteit Taking Inventory [7]. Hier blijkt hoe kinderen zelf methoden ontwikkelen en samen redeneren en generaliseren.
Leerlingen van 5 tot 6 jaar gaan spullen in het lokaal tellen. Want, zo zegt Jodi, de leerkracht, dan weten we hoeveel we van alles hebben en als iemand dan iets geleend heeft, weten we zeker of het weer terug is. Weten jullie nog dat we scharen kwijt waren? Een zinvolle opdracht en voldoende open om kinderen er op verschillende niveaus aan te laten werken. Sommige kinderen tellen alles – en dat is soms veel – één voor één, anderen maken pakketjes van vijf en dan van tien om het tellen te vereenvoudigen. Een groepje leerlingen dat enveloppen met inhoud telt, heeft pakketjes van tien gemaakt met een elastiek erom, blokjes worden kleur bij kleur gelegd. Er wordt gediscussieerd over hoe je honderdtwintig schrijft, moet dat zijn 10020 of 120?
Op een gegeven moment, na een gesprek over handiger tellen door pakketjes te maken, maakt Jodi een tabel, met de indeling: soort – aantal pakketjes van 10 – aantal losse objecten – totaal aantal objecten, en de leerlingen laten hun resultaten noteren. Jodi vraagt voortdurend en in wisselende volgorde: ‘Hoeveel pakketjes (van blokjes, van boeken, van enveloppen, enz.) heb je geteld? Hoeveel losse heb je? Hoeveel zijn dat er samen?’, totdat Cosmo, die eerst dacht dat twee pakketjes van 10 en drie losse samen dertien is, ineens ziet dat er een patroon ontstaat en roept: ‘Het bord! Nee, het staat op het bord!’
Twee pakketjes van 10 en 3 losse ziet er hetzelfde uit als het totaal van 23.

soort	*pakketjes van 10*	*los*	*totaal*
boeken	4	7	47
enveloppen	8	2	82
blokken	2	3	23
	1	2	14?

Verwarring heeft plaatsgemaakt voor nadenken over een patroon dat ontstaat. De waarom-vraag moet echter nog beantwoord worden. Jodi stelt in de klassendiscussie de vraag of het altijd zo werkt met groepjes van 10 en losse. Als een kind dan opmerkt ‘ik weet het niet zeker’, vraagt ze wat er nodig is om hem te overtuigen. Zekerheid, elkaar overtuigen, dit patroon kan altijd zo, daar begint algebraïsch denken. Niet alleen kennis van het tientallig getalsysteem maar zelf ontwikkelde kennis óver het getalsysteem. Wanneer Jodi tenslotte van een groepje overneemt: 14 in totaal, één pakketje, 2 losse, denken sommige kinderen eerst dat het algemene patroon doorbroken wordt, tot een meisje zegt: ‘Volgens mij is het gewoon fout en moet die 14 misschien 12 zijn.’ Opluchting, het klopt nog steeds.
Sommige kinderen bereiken een bepaald niveau eerder dan andere. Zij gebruiken die kennis om anderen in hun groepje te helpen en samen verder te komen.

Denken over getalstructuren kan in het basisonderwijs al op jonge leeftijd plaatsvinden en is te beschouwen als een voorbeeld van algebraïsch denken. De leerkracht zorgt voor sturing en stelt vragen die de kinderen helpen hun gedachten te ordenen en (wiskundig) te redeneren. Door het integreren van activiteiten gericht op het ontwikkelen van algebraïsch denken in het gangbare curriculum van het basisonderwijs wordt de overgang van rekenen naar voortgezet rekenen maar ook naar algebra in het voortgezet onderwijs gemakkelijker.

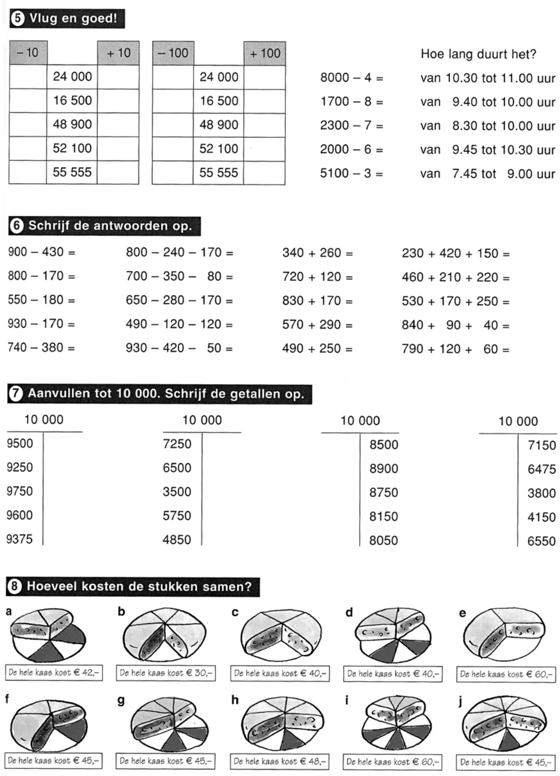
2.3 Een doorgaande leerlijn rekenen

Er wordt veel gerekend op de basisschool, de meeste scholen hebben elke dag rekenen op het programma staan. We schatten dat tussen de tien en twintig procent van de schooltijd wordt besteed aan rekenen. Bij het rekenen vindt slechts in beperkte mate differentiatie plaats; veelal krijgen de kinderen klassikale instructie en verwerken zij vervolgens de oefenstof gedifferentieerd naar niveau en tempo [8].

Wie een willekeurig schoolboek voor de Nederlandse basisschool doorbladert, ziet direct dat het hoofdzakelijk bestaat uit werken met getallen (ongeveer 80%) en meten/meetkunde (naar schatting 20%). Wat verder vooral opvalt, is dat er van alles door elkaar gedaan wordt gedurende de rekenles. Op een willekeurige bladzijde uit een boek voor groep 6 komt voor (figuur 2):

- Een rijtje grote getallen, bijvoorbeeld 52100, 10 eraf, 10 erbij, 100 eraf, 100 erbij;
- Een rijtje 'mooie' getallen boven de 1000, een klein getal eraf, bijvoorbeeld 2300 – 7;
- Hoe lang duurt het? Rekenen met tijdstippen, bijvoorbeeld van 8.30 tot 10.00 uur;
- Optellen en aftrekken van twee of drie getallen boven de 100;
- Aanvullen tot 10 000, bijvoorbeeld 7 250;
- In stukken verdeelde kaas; hoeveel kost het hele stuk? Bijvoorbeeld $\frac{2}{3}$ van de kaas afgebeeld, de hele kaas kost € 60,-.

De indeling van de opgaven op deze manier is heel geschikt voor het oefenen en onderhouden van rekenalgoritmes. Ongetwijfeld zal er een zekere opbouw zitten in de verschillende soorten opgaven door het boek heen en over de jaren. Om dat zeker te weten is een diepgaander studie van verschillende lesmethoden voor het basisonderwijs nodig dan in het kader van dit hoofdstuk paste. Wat we ons overigens ook moeten realiseren is dat niet alle leerlingen op de basisschool hetzelfde eindniveau van rekenen bereiken. Voor sommigen zal dit misschien blijven steken op het niveau van groep 6 terwijl anderen niet alleen het niveau van groep 8 bereiken maar ook nog extra opdrachten maken. Docenten in het voortgezet onderwijs moeten zich hiervan bewust zijn. De verschillen kunnen groot zijn, zelfs in een min of meer homogene groep als bijvoorbeeld die van een havo-brugklas.



5 Vlug en goed!

– 10		+ 10	– 100		+ 100
	24 000			24 000	
	16 500			16 500	
	48 900			48 900	
	52 100			52 100	
	55 555			55 555	

8000 – 4 =
1700 – 8 =
2300 – 7 =
2000 – 6 =
5100 – 3 =

Hoe lang duurt het?
van 10.30 tot 11.00 uur
van 9.40 tot 10.00 uur
van 8.30 tot 10.00 uur
van 9.45 tot 10.30 uur
van 7.45 tot 9.00 uur

6 Schrijf de antwoorden op.

900 – 430 =	800 – 240 – 170 =	340 + 260 =	230 + 420 + 150 =
800 – 170 =	700 – 350 – 80 =	720 + 120 =	460 + 210 + 220 =
550 – 180 =	650 – 280 – 170 =	830 + 170 =	530 + 170 + 250 =
930 – 170 =	490 – 120 – 120 =	570 + 290 =	840 + 90 + 40 =
740 – 380 =	930 – 420 – 50 =	490 + 250 =	790 + 120 + 60 =

7 Aanvullen tot 10 000. Schrijf de getallen op.

10 000	10 000	10 000	10 000
9500	7250	8500	7150
9250	6500	8900	6475
9750	3500	8750	3800
9600	5750	8150	4150
9375	4850	8050	6550

8 Hoeveel kosten de stukken samen?

a De hele kaas kost € 42,–
b De hele kaas kost € 30,–
c De hele kaas kost € 40,–
d De hele kaas kost € 40,–
e De hele kaas kost € 60,–
f De hele kaas kost € 45,–
g De hele kaas kost € 45,–
h De hele kaas kost € 48,–
i De hele kaas kost € 60,–
j De hele kaas kost € 45,–

figuur 2: Pagina uit De wereld in getallen, groep 6, Rekenboek B

In het voortgezet onderwijs staat voortgezet rekenen op het programma en er wordt ook inderdaad veel gerekend. Breuken en procenten worden herhaald en bijgehouden, hoewel een grote groep leerlingen er moeite mee blijft houden. Er wordt meer naar inzicht gevraagd dan naar het vlot kunnen uitvoeren van rekenalgoritmes. Dat laatste geldt vooral voor leerlingen die de rekenalgoritmes al goed kunnen uitvoeren. Voor de docenten in het basisonderwijs en in het voortgezet onderwijs is niet altijd duidelijk dat rekenen een iets ander karakter krijgt en dat geldt ook voor de leerlingen. Die zeggen in de brugklas soms: ‘Vroeger kon ik heel goed rekenen maar nu snap ik het gewoon niet meer.’

Denk bijvoorbeeld aan het eerder gegeven voorbeeld over de plaatswaarde van cijfers in een getal. In het VO wordt van leerlingen verwacht dat ze ons dagelijkse getalsysteem begrijpen, maar ook andere systemen zoals het tweetallig talstelsel komen wellicht aan de orde. Werken met breuken betekent niet alleen de rekenregels goed kunnen hanteren maar ook leren dat er oneindig veel breuken zijn, breuken aangeven op een getallenlijn, breuken gebruiken in allerlei situaties, de relatie met decimale getallen begrijpen.

De rekenmachine wordt standaard gebruikt maar er wordt ook veel nadruk gelegd op schatten, handig cijferen en vooral ook op het interpreteren van een antwoord. Kan dit antwoord wel kloppen in de gegeven situatie? Hoeveel decimalen zijn binnen deze context redelijk? Moet je naar beneden of juist naar boven afronden? Minder cijferen, meer inzicht in de structuur van de getallen en handig rekenen. Zelf beoordelen of de rekenmachine wel of niet nuttig is in bepaalde situaties. Voor veel leerlingen lijkt het overigens wel alsof de rekenmachine de beste keuze is in álle situaties, zelfs al moet je 3 x 3 uitrekenen!

Er wordt in het voortgezet onderwijs in totaal veel minder tijd aan rekenen besteed dan op de basisschool; meestal zijn in de onderbouw twee of drie lesuren (van 50 minuten per week) voor wiskunde beschikbaar, waar rekenen maar een klein deel van uitmaakt. Met name in het vmbo-bb-kb maakt voortgezet rekenen wel een groter deel uit van een opleiding tot ‘wiskundige geletterdheid’, gericht op het zich kunnen handhaven in de maatschappij. Natuurlijk valt er te twisten over de hoeveelheid rekenen en cijferen die in de wiskundeboeken voorkomt, maar er is in ieder geval een doorgaande lijn zichtbaar, van rekenen naar voortgezet rekenen, van basisschool naar voortgezet onderwijs. De eisen die aan de rekenvaardigheid van de leerlingen worden gesteld veranderen echter in het voortgezet onderwijs, wat de ervaren kloof tussen basis- en voortgezet onderwijs wellicht verklaart. Docenten van beide onderwijssoorten kunnen wat dat betreft nog wel een en ander van elkaar leren. De eerder genoemde aanzetten tot algebraïsch denken, tot nadenken óver in plaats van alleen werken met getalsystemen kunnen daarbij helpen.

2.4 Een doorgaande leerlijn algebra?

We zagen dat er een doorgaande leerlijn is van rekenen op de basisschool naar rekenen in het voortgezet onderwijs. Is er ook zo'n doorgaande lijn te zien van algebraïsch denken en informele algebra op de basisschool naar meer formele algebra in het voortgezet onderwijs? In de basisschoolboeken die we hebben bekeken blijft het bij incidenteel voorkomende onderwerpen zonder onderlinge samenhang, op dezelfde manier als verschillende onderdelen van het rekenen worden aangeboden. Negatieve getallen bijvoorbeeld lenen zich heel goed voor een kennismaking op de basisschool. In een van de basisschoolboeken worden ze goed geïntroduceerd via de context van temperatuur en het aflezen van thermometers. Er wordt ook een vraag gesteld die vooruitloopt op het rekenen met negatieve getallen, namelijk:

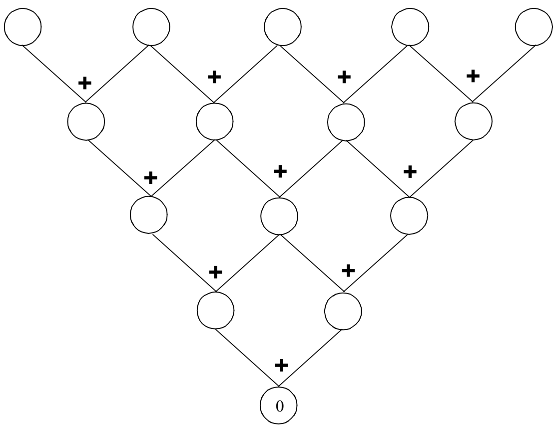
- Wat is het verschil tussen 4º en –1º?
  (Beter zou zijn: De temperatuur was 's morgens heel vroeg nog –1º maar het werd later die dag wel 4º. Hoeveel graden is het in de loop van de dag warmer geworden?)

Het geheel bestaat uit één losstaande opgave, tussen de andere opdrachten door. In het volgende deeltje worden negatieve getallen toegepast om coördinaten in een assenstelsel te gebruiken.
Het is uiteraard mogelijk om aan de losse opgaven zoals ze in het boek voorkomen een onderwijsleergesprek te verbinden en in de klas meer voorbeelden te bespreken en meer opgaven te maken. Of en hoe dat gebeurt, hangt af van de leerkracht. Sommige leerkrachten zullen geneigd zijn om zo'n wiskundig onderdeel maar over te slaan omdat het nauwelijks belangrijk gevonden wordt. Vaak is de eigen wiskundige kennis ook onvoldoende om te weten wat het nut is van zo'n onderwerp. Juist het feit dat de opdrachten zo los voorkomen nodigt dan uit om ze niet te laten maken. Generaliseren (geldt dat altijd en hoe weet je dat?), abstraheren (losmaken van de context) en formaliseren (gebruiken van symbolen en formules) zijn nu niet zichtbaar in de basisschoolboeken. Er zijn echter ook binnen de bestaande lesmethoden goede mogelijkheden om ze aan de orde te laten komen. Die mogelijkheden zou je als leerkracht moeten aangrijpen om de doorgaande lijn ook voor de leerlingen zichtbaar te maken. Hoe zou bijvoorbeeld de introductie van negatieve getallen kunnen plaatsvinden op een manier die algebraïsch denken bevordert en die beter voorbereidt op wat er later in het voortgezet onderwijs verwacht wordt?

De introductie zou bij voorkeur met verschillende contexten moeten plaatsvinden. Die contexten kunnen ook gevonden worden buiten de rekenles, bijvoorbeeld wanneer er in de krant gesproken wordt over een dreigende dijkdoorbraak of wanneer het tijdens de aardrijkskundeles over polders gaat: Hoe hoog is de dijk boven NAP, hoeveel centimeter is het water in de sluis beneden NAP? Als het ‘s winters vriest, komt het aflezen van de thermometer vast wel aan de orde. Maar ook werken met geld over en geld tekort kan de aanleiding zijn. Tijdens een rekenspelletje laten terugtellen van 100 met sprongen van 7 is een andere mogelijkheid die al wat formeler is. Gaat iemand

in de klas uit zichzelf verder dan 2? Wat betekent het eigenlijk dat je de som 26 – 34 = ... niet kunt uitrekenen?
Dan volgt de uitbreiding van de getallenlijn die de leerlingen al eerder, maar toen alleen met positieve getallen, hebben gezien en gebruikt. Leerlingen komen vaak zelf op het idee om de getallenlijn uit te breiden onder de nul. Bestaan er ook negatieve breuken, negatieve decimale getallen? Op deze manier ontstaat er inzicht in de uitbreiding van het getalsysteem op een manier die voor de meeste leerlingen in het basisonderwijs mogelijk is.

Simpele operaties zoals optellen of vermenigvuldigen met een geheel (positief) getal kunnen ook, vooral wanneer de leerlingen steun hebben aan de getallenlijn. In het voorbeeld 'Taking Inventory' zagen we al dat jonge kinderen kennis opbouwen over het getallensysteem. Nadat de negatieve getallen zijn ingevoerd, wordt duidelijk dat dit getalsysteem is uitgebreid: we hebben ineens veel meer getallen tot onze beschikking. Die constatering leidt tot een hele serie vragen. Kun je algemene regels opstellen voor het optellen van twee positieve getallen, twee negatieve getallen of een positief en een negatief getal? Hoe kun je laten zien dat jouw algemene regel steeds opgaat (met behulp van de getallenlijn bijvoorbeeld)? In het voortgezet onderwijs wordt deze kennis herhaald en wordt erop voortgebouwd met vermenigvuldigen en delen van een positief en een negatief getal en met het heel abstracte vermenigvuldigen en delen van twee negatieve getallen, bijvoorbeeld via het begrip richtingscoëfficiënt. En wordt er geoefend met de bewerkingen, dan gebeurt dat op een manier die leerlingen uitdaagt, zoals het voorbeeld van Martin Kindt[1] in figuur 3 laat zien.



figuur 3: Het vullen van een getallenboom

En nee, er ontbreken geen getallen in dit voorbeeld. Leerlingen worden uitgedaagd om zelf getallen te vinden die passen in deze boom, zodat het eindantwoord nul wordt. Ze gebruiken decimale getallen of zelfs breuken bij deze eigen producties. Of ze maken het probleem voor zichzelf lastiger door bijvoorbeeld niet onderaan te beginnen maar alvast ergens halverwege een groot getal in te vullen. Zo kan elke leerling op zijn of haar eigen niveau werken en oefenen met de bewerkingen.

Op dit moment is er geen duidelijk doorgaande lijn algebra zichtbaar van basisschool naar voortgezet onderwijs. Er worden wel wat voorzichtige aanzetten gegeven maar die blijven steken in losstaande opgaven zonder veel onderlinge samenhang. Dat maakt het ook voor de leerkrachten moeilijk om algebraïsch denken in het basisonderwijs te bevorderen en algebra op een informele manier te ontwikkelen zodat daar in het voortgezet onderwijs op kan worden voortgebouwd. Daar zou tijdens de opleiding van leerkrachten ook al aandacht aan besteed moeten worden, zodat ze

1 Dit voorbeeld en veel van de hierna volgende komen uit de bundel *Oefeningen in Algebra* van Martin Kindt [9].

de mogelijkheden die er zijn ten volle kunnen benutten. Verder is het de vraag of wiskundedocenten in het voortgezet onderwijs voldoende weten over wat er al aan voorbereiding op hun vak gedaan wordt op de basisschool.

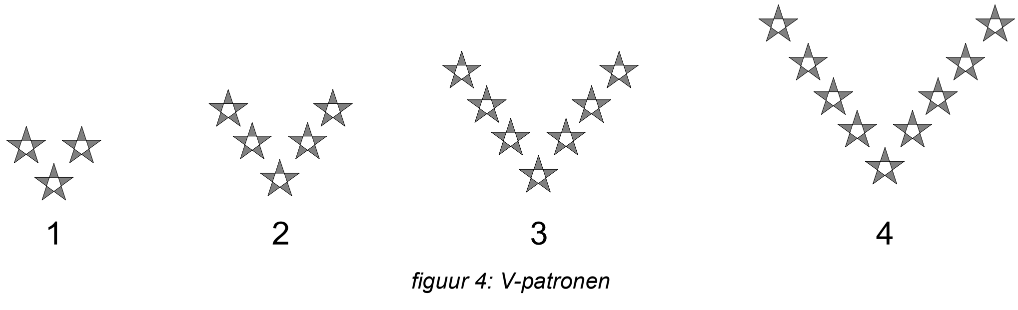
2.5 Algebraïsch denken op de basisschool: een uitgewerkt voorbeeld

Hoe zou je op de basisschool al kunnen voorbereiden op de algebra die in het voortgezet onderwijs aan de orde komt? In het voorgaande werden kort al enkele voorbeelden genoemd. In dit deel schetsen we een uitgewerkt algebraprogramma uit de praktijk.
Hoe zorg je ervoor dat leerlingen geen regeltjes uit het hoofd leren maar wiskundig/algebraïsch leren denken? De opdrachten moeten de leerlingen in ieder geval de gelegenheid geven om hun eigen wiskundige begrippen op te bouwen, uit te breiden en te generaliseren op basis van bekende rekenkundige bewerkingen. En dan niet met een incidentele opdracht tussen de rekenopdrachten door, maar met een serie opgaven waarin een zekere opbouw duidelijk wordt. Daarnaast moeten de opdrachten op een zodanige manier worden aangeboden dat er door leerlingen op verschillende niveaus aan gewerkt kan worden want de verschillen in niveau zijn tegen het einde van het basisonderwijs vaak al groot.

Het uitgebreide voorbeeld hieronder komt uit de methode Mathematics in Context (MiC), die door het Freudenthal Instituut is ontwikkeld voor de Amerikaanse Middle School (leerlingen van 10-14 jaar). Daar is gezorgd voor een doorlopende leerlijn voor algebra. Elk jaar werken de leerlingen een aantal boekjes (hoofdstukken) door waarin een bepaald domein uit de wiskunde centraal staat: algebra, rekenen, meetkunde en meten, statistiek. Maar ook als het hoofdonderwerp bijvoorbeeld algebra is wordt er veel gerekend; de rekenvaardigheden moeten immers toegepast en onderhouden worden. Rijtjes van min of meer dezelfde opgaven, zoals in de Nederlandse methoden, zul je er niet in vinden. Er wordt, net als in Nederland, veel aandacht besteed aan eigen oplossingsmethoden van de leerlingen; veel opgaven bieden mogelijkheden om ze op verschillende niveaus op te lossen. Leerlingen gebruiken eerst informele, dan preformele en tenslotte formele algebraïsche denkmodellen en methoden. Vaak zie je dat een leerling teruggrijpt op eerder gebruikte informele strategieën wanneer er een nieuw concept aan de orde komt. Dat helpt hem beter te begrijpen waar het om gaat, eigen wiskundige kennis op te bouwen en niet iets onbegrepen op gezag van de leraar aan te nemen. De ervaringen met MiC hebben geleerd dat leerlingen op jonge leeftijd al heel goed algebraïsch kunnen denken. Om die reden gaan we wat dieper op de algebralijn van MiC in. Binnen de algebra van MiC worden drie doorgaande leerlijnen onderscheiden: Patronen en regelmaat, Beperkingen en voorwaarden, en Veranderingen en groei.

Patronen en regelmaat

Bij het beschrijven van patronen en regelmaat worden codes en symbolen gebruikt en informele zowel als preformele algebrataal; expressies en formules die nauw aan de situatie gerelateerd zijn, spelen een rol. Een karakteristiek voorbeeld staat in figuur 4.



figuur 4: V-patronen

Het patroon hierboven kan eindeloos worden voortgezet. Hoe ziet patroon nummer 5 eruit? Nummer 10? Nummer 100? Een willekeurig patroon uit de rij?

In informele algebrataal kan het patroon beschreven worden als:

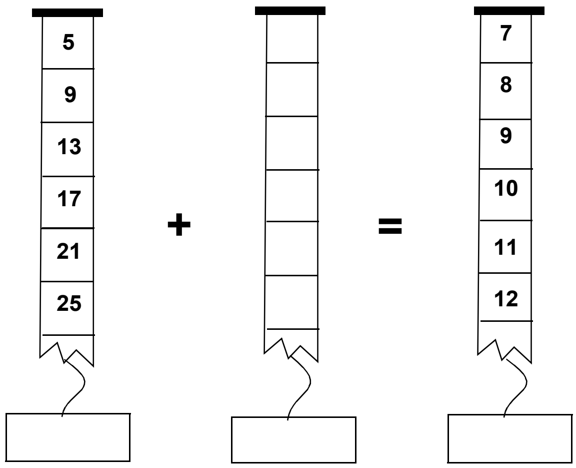
Het dubbele van het nummer van de rij en dan nog eentje erbij.

Preformeel kan dat iets zijn zoals

2 × patroonnummer + 1

Formeel is: $2n + 1$, n start bij 1

Wanneer twee expressies moeten worden opgeteld, gaat dat eerst weer informeel met behulp van het bepalen van expressies die horen bij getallenstroken. In figuur 5 staat een voorbeeld van een preformeel niveau. Je kunt de optellingen per stap en per strook uitvoeren en daarna de bijbehorende expressies zoeken. Sommige leerlingen, die al op een preformeel niveau kunnen werken, bepalen direct de expressies bij de stroken met getallen en vinden de ontbrekende expressie, waarbij ze de getallen op de stroken als controle gebruiken. De getallenstroken kunnen in elk geval door alle leerlingen nog als een steuntje gebruikt worden.[1]



figuur 5: Rekenen met stroken

Op een formeel niveau wordt de volgende vraag gesteld:

Vul de open gebleven plaats in: $(5 + 4n) + \ldots\ldots = 7 + n$

Steeds kunnen de leerlingen terugvallen op de bron en de betekenis van het probleem. Sommige leerlingen zullen een getallenstrook maken om de laatste opgave op te lossen maar het hoeft niet.

Beperkingen en voorwaarden

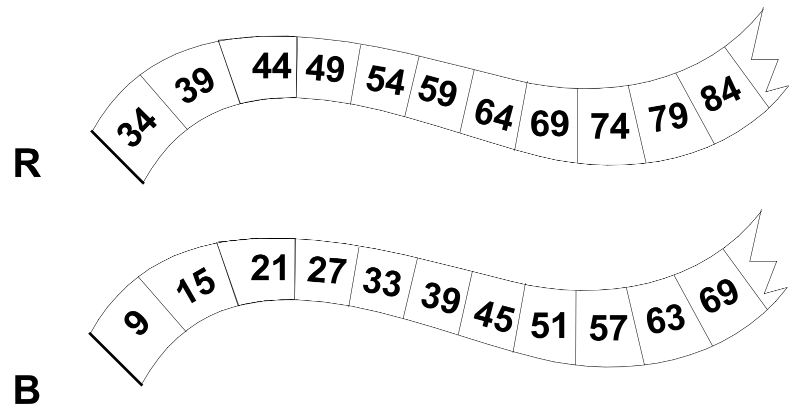
Vergelijkingen en ongelijkheden zijn de formele algebraïsche gereedschappen die horen bij het beschrijven en oplossen van situaties die in deze leerlijn aan de orde komen. Net als in de rest van MiC worden problemen meestal binnen een context gesteld.

De drie leerlijnen zijn overigens niet onafhankelijk van elkaar maar met elkaar verweven. De getallenstroken uit het volgende voorbeeld hebben een iets andere vorm dan die hiervoor (figuur 6). De vraag is: Komt er bij de volgende twee stroken ooit een keer hetzelfde getal voor?

Deze vraag leidt tot de constatering dat het verschil tussen de getallen op de twee stroken dan gelijk moet zijn aan nul, tot het besef dat dit neerkomt op het oplossen van de vergelijking:

$$34 + 5n = 9 + 6n$$

1 Oefenen met strokenalgebra kan via www.wisweb.nl.



figuur 6: Een ander type stroken

Handiger is om het verschil tussen de expressies uit te rekenen en te bekijken wanneer dat gelijk wordt aan nul:

$$\begin{array}{l} 34 + 5n \\ \underline{\;\,9 + 6n\;}\; - \\ 25 - \;\; n \end{array}$$

Nu is het simpel: 25 – n = 0 als n = 25 dus ja, op de stroken komt ooit hetzelfde getal voor en wel in het 25e vakje van de strook.

Veranderingen en groei

De lijn Veranderingen en groei zit dicht tegen de analyse aan en gaat om situaties waarin continue processen worden beschreven. Grafieken spelen een belangrijke rol ; we geven in dit hoofdstuk verder geen voorbeelden van deze leerlijn.

Het voorbeeld op de volgende pagina is bestemd voor tienjarige leerlingen en past in de leerlijn Patronen en regelmaat net zoals alle voorbeelden in dit hoofdstuk. Deze leerstof komt in de Nederlandse schoolboeken voor het basisonderwijs nauwelijks voor, maar zou daarin heel goed een plaats kunnen vinden.

In het algebraboekje *Patronen en Symbolen* [10] krijgen de kinderen deze opgaven voorgelegd nadat in een serie inleidende vragen de begrippen even en oneven getallen zijn opgefrist. De leerlingen hebben al symbolen en codes gebruikt als een soort verkorting om een patroon te beschrijven. In dit voorbeeld worden symbolen gebruikt om de werkelijke objecten, vogels, weer te geven. Er wordt voorbereid op een veralgemenisering van het patroon (vraag 1C). De gegevens worden georganiseerd in een tabel en de leerlingen maken een formule in woorden (vraag 4). De laatste vraag, vraag 5, herhaalt een eigenschap van oneven getallen, namelijk:

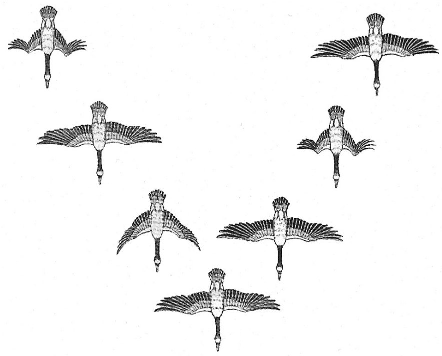
oneven + oneven = even.

Uiteraard hoort ook bij deze serie opgaven een klassengesprek. Als leerlingen in groepjes werken, kunnen ze eerst met elkaar overleggen en elkaar proberen te overtuigen voordat ze dat voor de hele klas doen in een algemene discussie.

Dit materiaal is uitgeprobeerd op een Nederlandse basisschool, aan het eind van groep 6. De leerlingen van de school waar dit materiaal werd uitgeprobeerd hadden nooit eerder een dergelijke opdracht gemaakt. De school ligt vlak bij het IJsselmeer en de meeste kinderen hebben wel eens groepen vogels in V-vorm zien vliegen, we spraken daar uitgebreid over. De context is dus heel vertrouwd. In het echt zie je zelden zulke perfecte V-vormen. ‘Maar’, zei een van de leerlingen, ‘we kunnen wel even doen alsof!’

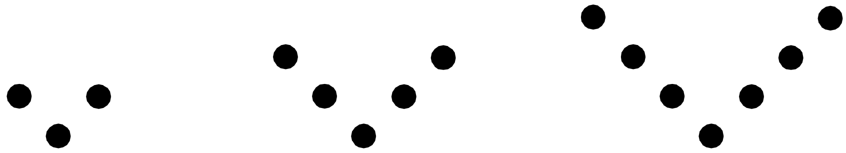
Opgavenserie V-patronen

Soms zie je vogels vliegen in een V-patroon:



figuur 7: Vogels in V-formatie

1. Zo'n patroon kun je gemakkelijker met stippen weergeven. Hier zijn de drie kleinste V-patronen:



figuur 8: Stippen in V-patroon

a. Teken het vierde V-patroon ernaast.
b. Kan een V-patroon 84 stippen hebben? Waarom of waarom niet?
c. Hoeveel stippen zitten er in V-patroon nummer 6? En hoeveel in nummer 10?

2 Teken een V-patroon met 19 stippen.

3 Soms is het handig om je resultaten in een tabel te laten zien. Het begin van zo'n tabel is hieronder al gemaakt:

V-nummer	aantal stippen
1	3
2	5
3	7
4	
5	
6	

a. Vul de tabel in.
b. Aan het V-nummer kun je zien hoeveel paren vogels er in ieder V-patroon zitten.
Zie je nog andere patronen in de tabel?

4 Je kunt de rij met V-patronen net zo lang maken als je zelf wilt. Hoeveel stippen zitten er in het patroon met V-nummer 100? Hoe weet je dat?

Boven het IJsselmeer vliegen twee groepen wilde ganzen, allebei in een mooie V-vorm. Voor ze naar het zuiden vertrekken komen ze bij elkaar.

5 Kan de nieuwe groep een perfecte V vormen? Waarom of waarom niet?

Eerst werd in de proefklas een serie vragen uit hetzelfde boekje behandeld over even en oneven getallen. Een leerling schreef een getal op van tien cijfers, eindigend op een 1 en zei: ‘Ik kan het getal niet uitspreken want daar is het te groot voor. Maar ik weet wel zeker dat het oneven is.’ Uiteraard moest hij vervolgens aan de klas uitleggen hoe hij dat zo zeker kon weten. De klas was onder de indruk.
Wat erg opviel was het feit dat veel kinderen elke vraag als volkomen nieuw bekeken. Dat werd later door de leerkracht bevestigd; wanneer in het rekenboek een enkele keer een serie vragen a, b, c, ... wordt gesteld die bij elkaar horen, gebeurt dat volgens hem ook. Omdat opgaven in het rekenboek meestal geen onderling verband hebben, is het voor leerlingen moeilijk om te beseffen dat een nieuwe vraag iets te maken kan hebben met een vorige.

Vraag 1b werd door de meeste leerlingen goed gemaakt. Er werden antwoorden gegeven als:

> Nee, dat kan niet omdat het een even getal is.
> Nee, als je het splitst heb je 42 aan elke kant maar er moet ook nog iemand voorop.
> Nee, want onderaan zit er nog een.
> Nee, omdat een V-patroon oneven is.

Bij vraag 4 werd soms wel het beeld van de vogels gebruikt in tegenstelling tot de meer abstracte stippenpatronen:

> 201, omdat één de leider is
> 2 × 100 en dan nog de leider erbij dus 201
> 201, het is het dubbele met eentje erbij

En een leerling die het niet helemaal begrepen had schreef:

> Aan de ene kant 51 en aan de andere kant 49.

In deze opgave wordt het patroon gegeneraliseerd, hoe kun je het patroon in het algemeen omschrijven? Een belangrijke stap in de ontwikkeling van algebraïsch denken. Er wordt nog geen formule met letters verwacht maar een informele beschrijving in woorden: ‘het dubbele met eentje erbij’,’twee keer het V-nummer plus 1’. In een klassengesprek moet natuurlijk ook aan de orde komen dat je de formule moet verifiëren, klopt het voor de V-nummers die ik al wist? En hoe weet ik dat de uitkomst altijd oneven is, zoals we bij 1b vonden?
Bij vraag 5 werd meestal niet teruggekeken naar de eigenschappen van even en oneven getallen die de kinderen eerder ontdekt hadden. Leerlingen kwamen soms vragen hoe ze deze vraag moesten oplossen want:

> Je kunt dat niet weten want je weet toch niet hoe ze gaan vliegen?
> Je weet niet hoeveel het er zijn.

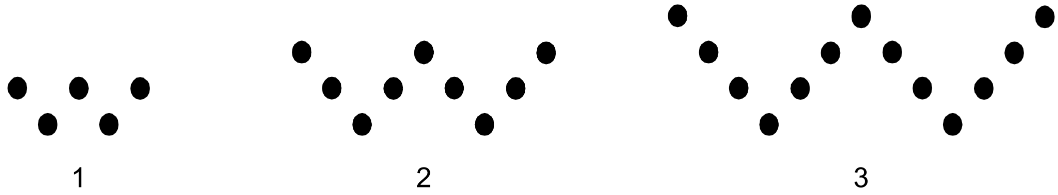
Dat doet denken aan de ondertitel van dit boek! Een groepje had het goede antwoord gevonden:

> Nee, want dan heb je geen leider meer.

En er was ook een leerling die schreef:

> Nee, omdat het samen even is.

Voor de leerlingen van deze school bleef het bij deze ene les. Maar in de MiC-methode wordt er later op de V-patronen teruggekomen en wordt er uitgebreid naar soortgelijke, maar nu meer abstracte patronen, zoals W-patronen (figuur 9). Ook die worden overigens eerst weer ingeleid via een realistische context van vliegtuigen die in formatie vliegen.

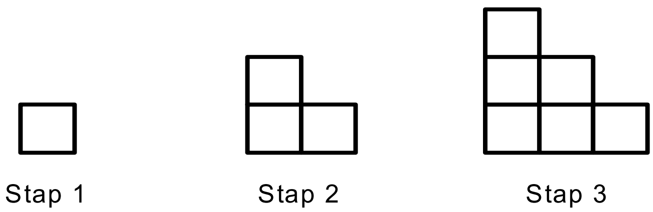


figuur 9: W-patronen

Dan worden ook de formules ingewikkelder. Sommige leerlingen schrijven die al op een verkorte manier, met letters in plaats van woorden, op een preformeel niveau dus.

Leerlingen maken op de basisschool al vroeg kennis met even en oneven getallen. Daar zou je in de hogere groepen van deze school verder mee kunnen gaan door ook daar te vragen naar het opstellen van regels voor het rekenen met even, respectievelijk oneven getallen. Hoe kun je zeker weten dat een getal even dan wel oneven is? Krijg je altijd een even getal wanneer je twee even getallen bij elkaar optelt? Hoe kun je dat zeker weten? Is alleen voorbeelden geven voldoende om iedereen te overtuigen? Hoe gaat dat met twee oneven getallen of een oneven en een even getal? Eventueel is uitbreiding mogelijk naar deelbaarheidskenmerken.
Dit voorbeeld is gekozen omdat het zo'n mooie doorgaande lijn laat zien van informele naar preformele oplossingsmethodes. Daar zou in het voortgezet onderwijs op voorgebouwd moeten worden, zodat leerlingen een goede voorbereiding krijgen op het opstellen van formules via regelmatigheden in een tabel of in een serie figuren. Dit gebeurt echter nauwelijks. Is het dan vreemd dat leerlingen in de bovenbouw van het voortgezet onderwijs vaak heel veel moeite hebben met het opstellen van formules? Hoeveel procent van de Nederlandse leerlingen van 15 jaar maakte de opgave in figuur 10 uit het PISA-onderzoek fout of sloeg hem over, denkt u?[1] Zouden leerlingen aan het eind van de basisschool een dergelijke opgave kunnen maken wanneer ze met opgaven zoals de V-patronen gewerkt hebben? En zou het zinvol zijn om hen een dergelijke vraag te stellen?

Robert maakt een trappatroon met behulp van vierkanten. Hij doet dit stapsgewijs als volgt:



Zoals je ziet gebruikt hij één vierkant voor Stap 1, drie vierkanten voor Stap 2 en zes voor Stap 3. Hoeveel vierkanten zal hij moeten gebruiken voor de vierde stap?

figuur 10: Trappatronen

De formules en vergelijkingen die volgens een methode in de onderbouw van het voortgezet onderwijs wel moeten worden opgesteld, zijn soms alleen maar hinderlijk bij het vinden van een oplossing. Neem de volgende opgave:

Drie opeenvolgende getallen zijn samen 54. Welke getallen zijn dat?

1 PISA (Programme of International Student Assessment) 2003. 25% van de Nederlandse leerlingen had 0 punten voor deze vraag. Zie [11].

Dan ligt het niet erg voor de hand om eerst de vergelijking $n + (n + 1) + (n + 2) = 54$ op te stellen, zoals in het boek wordt gevraagd. Immers, wanneer de drie getallen alledrie hetzelfde waren zou het getal 54 : 3 = 18 zijn. Dus is 18 de middelste en zijn de drie getallen 17, 18 en 19. Die enkele keer dat opstellen van expressies wordt gevraagd zijn ze dus niet eens nuttig of nodig!
In de onderbouw van het voortgezet onderwijs zou een leerlijn Patronen en regelmaat misschien meer aandacht moeten krijgen. Wat betekenen de variabelen in een formule, wat gebeurt er in de situatie waarop de gevonden formule betrekking heeft wanneer er iets gewijzigd wordt in de formule en omgekeerd? Leerlingen hebben dan wellicht in de bovenbouw een goede basis om hun kennis over het opstellen en gebruiken van formules verder uit te breiden.

2.6 Conclusie

Hebben docenten van basisschool en voortgezet onderwijs gelijk wanneer ze klagen over de slechte aansluiting van basis- en voortgezet onderwijs? We hebben laten zien dat er weliswaar een doorgaande lijn is van rekenen naar voortgezet rekenen, maar dat er wel degelijk een breuk is in wat er van leerlingen verwacht wordt. Wat er in het basisonderwijs geleerd werd moet geoefend en onderhouden worden maar er wordt ook meer inzicht gevraagd. Daar kan al op de basisschool mee begonnen worden. Docenten uit het voortgezet onderwijs benutten de rekenkennis waarmee hun leerlingen in de brugklas binnenkomen soms onvoldoende.

Verder bleek dat er van een doorgaande lijn van algebraïsch denken naar algebra nauwelijks of geen sprake is hoewel ook daar goede aanknopingspunten voor zijn. Basisschooldocenten moeten die mogelijkheden benutten maar ze moeten ook voldoende wiskundige achtergrond gekregen hebben via hun opleiding of via nascholing om dat te kunnen doen.

In dit hoofdstuk gaven we slechts een beperkt aantal voorbeelden van mogelijke activiteiten in basisonderwijs en voortgezet onderwijs ten behoeve van de ontwikkelingen van algebraïsch denken. Zo'n doorgaande leerlijn is mogelijk en ook wenselijk, de door het Freudenthal Instituut voor de Amerikaanse markt ontwikkelde methode voor leerlingen van 10-14 jaar maakt dit duidelijk.
De gegeven voorbeelden zijn onvoldoende uitgewerkt om ze zonder meer over te nemen. Dat was ook niet de bedoeling van dit hoofdstuk. We wilden laten zien dat een doorlopende leerlijn algebraïsch denken zinvol is, met name voor de leerlingen die later verdergaan naar vmbo-gl of -tl, naar havo of vwo, en dat er goede voorbeelden zijn van methoden waarin dat ook gebeurt.

Literatuur

1. Beth, H. (1924/25). Het ‘meer en meer wiskundig’ karakter der H. B. School met 5-jarigen cursus. *Euclides, 1*, 90-100.
2 Wijdenes, P. (1926/27). Over het onderwijs in rekenen in de eerste klas van de H.B.S. *Euclides, 3*, 121-142.
3 Wijdenes, P. (1952/53). Algebra op de lagere school. *Euclides, 28*, 188-195.
4 Goffree, F. & Buys, K. (Red.) (1989). *Tegengesteld*. Baarn: Bekadidact.
5 Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics as to be Useful? *Educational Studies in Mathematics, 1*, 3-8.
6 Usiskin, Z. (1997). Doing Algebra in Grades K-4. *Teaching children Mathematics, 3*, 346-356.
7 Dolk, M. & Fosnot, C. T. (2004). *Taking Inventory, Kindergarten-Grade 1: The Role of Context* (cd-rom). Portsmouth NH: Heinemann.
8 Janssen, J., Schoot, F. van der, Hemker, B. & Verhelst, N. (1999). *Balans van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 3: uitkomsten van de derde peiling in 1997*. Arnhem: Cito.
Kraemer, J.M., Janssen, J., Schoot, F. van der & Hemker, B. (2005). *Balans van het reken-wiskundeonderwijs halverwege de basisschool 4*. Arnhem: Cito.
9 Kindt, M. (2003). *Oefeningen in algebra*. Utrecht: Freudenthal Instituut.
10 Roodhardt, A., Kindt, M., Burrill, G. & Spence, M. (1997). Patterns and symbols (National Center for Research in Mathematical Sciences Education & Freudenthal Institute). *Mathematics in context.* Chicago: Encyclopaedia Britannica.
11 Programme for International Student Assessment & Organisation for Economic Co-operation and Development (2004). *Learning for tomorrow's world: First results from PISA 2003*. Paris: Organisation for Economic Co-operation and Development.

3 Algebra in het vmbo

Paul Drijvers, Truus Dekker, Monica Wijers

Algebra en het vmbo, dat is een lastige combinatie. Kan dat wel? Moet dat wel? En zo ja, op welke manier dan? In dit hoofdstuk gaan we na welke rol algebra in het vmbo speelt en op welke manier deze gestalte kan krijgen. Daarbij worden drie doelen van algebraonderwijs onderscheiden, namelijk algebra voor het dagelijks leven, algebra als ondersteuning van andere leergebieden en algebra als voorbereiding op vervolgopleidingen. De uitwerking van deze doelen voor de basis- en kaderberoepsgerichte leerweg (vmbo-bb en -kb) blijkt in een aantal opzichten te verschillen van die voor de theoretische en gemengde leerweg (vmbo-gl en -tl).
We lopen vast vooruit op de belangrijkste conclusies. In het algebraonderwijs in het vmbo, dat een oriënterend karakter heeft, is de ontwikkeling van gecijferdheid in onze ogen belangrijker dat die van algebra in meer formele zin. Om algebra in de basis- en kaderberoepsgerichte leerweg betekenis te geven, is de samenhang met de praktijkvakken van doorslaggevend belang. Dit geldt met name in de bovenbouw. Hier is formele algebra ondergeschikt aan de toepasbaarheid. Vanwege de voorbereiding op het vervolgonderwijs verdienen algebraïsche basisvaardigheden zoals het oplossen van vergelijkingen een plaats in het wiskundeonderwijs van de theoretische en gemengde leerweg. Dwarsverbanden binnen de wiskunde bieden daarvoor een ingang.

3.1 Inleiding

Een klas leerlingen uit de bovenbouw van de sector Bouw van de basisberoepsgerichte leerweg van het vmbo heeft met het pakket ‘Beton in je computer’ gewerkt [1]. Naar aanleiding daarvan begint de docent een klassengesprek. De leerlingen hebben gisteren de praktijkopdracht gedaan en weten nog precies hoe dat gaat.

Docent: Als je beton gaat maken moet je letten op …?
Leerling: ... de volgorde.

De docent verwacht een ander antwoord, iets over verhoudingen van grondstoffen. Op het verhoudingsbegrip wil hij namelijk terugkomen. Met wat sturing komt het gesprek daar toch op. Vervolgens gaan de leerlingen tabel 1 invullen. De vetgedrukte getallen zijn gegeven. De leerlingen gebruiken verschillende strategieën om de kolom die begint met 8 in te vullen: 8 keer de eerste kolom, het dubbele van de kolom die begint met 4, ... Sommigen leggen verband tussen de mengregels en de verhoudingstabel. Een van de leerlingen vult echter de cursieve getallen in. Vermoedelijk heeft hij een soort regelmaat gezien, die hij per kolom toepast. Met de beoogde verhoudingen in de betonmolen heeft het niets meer te maken.

aantal emmers cement	**1**	**2**	**4**	**8**	$\frac{1}{2}$	**...**
aantal emmers zand	**2**	*4*	*6*	...	...	...
aantal emmers grind	**3**	*6*	*8*	...	...	...

tabel 1: Verhoudingstabel voor het maken van beton

erin	**15**	**10**	**8**	**6**	**-2**	**a**
eruit						

tabel 2: Tabel bij de getallenmachine

Een andere observatie speelt zich af in een tweede klas vmbo-tl, die bezig is met een ‘getallenmachine’ [2]. Deze machine werkt zo: je stopt er een getal in, de machine trekt er 8 vanaf en gooit de uitkomst eruit. De opdracht is om tabel 2 in te vullen. Alle leerlingen vullen het begin van de ‘eruit’ rij feilloos in, maar een aantal stokt bij *a*. Het volgende gesprekje vindt plaats:

Leerling:	*Wat bij a komt, dat kun je niet weten.*
Observator:	*Hoe kom je aan die 7 onder die 15?*
Leerling:	*Gewoon 15 – 8.*
Observator:	*En aan die 0?*
Leerling:	*8 – 8.*
Observator:	*Schrijf dat er allemaal eens onder.*

De leerling schrijft eronder: 15 – 8, 10 – 8, 8 – 8, ... en rechts zelfs $a - 8$*.*

Observator:	*Dus wat komt er rechts in de rij 'eruit'?*
Leerling:	*Dat kun je niet weten.*

Wat leren deze observaties ons? In het eerste voorbeeld is de context herkenbaar en betekenisvol voor deze praktijkgerichte leerlingen: ze hebben de dag ervoor zelf beton gemengd. De leerling die de fout maakt, heeft het verband met de context uit het oog verloren. De tabel is een eigen leven gaan leiden. Kennelijk is de relatie tussen de concrete probleemsituatie en de schematisering in de tabel kwetsbaar.
In de tweede observatie vormt de getallenmachine de context. De leerling heeft de werking van het getallenmachientje begrepen: hij kan het rekenproces verwoorden. Op het moment dat de *a* op het toneel verschijnt, ontstaan echter de moeilijkheden. Als na enige aandrang de gevraagde $a - 8$ wordt opgeschreven, vindt de leerling dat niet bevredigend, omdat je 'niet kunt weten wat *a* is'. De 'algebraïsering' van de situatie heeft voor de leerling geen betekenis. Misschien was het beter gegaan als in plaats van *a* het woord *getal* zou hebben gestaan?

Deze twee voorbeelden schetsen de problematiek rond algebra in het vmbo.
- Hoe nauw moet de relatie zijn met concrete probleemsituaties?
- Hoe belangrijk zijn algebrataal en formalisering?
- Welke doelen zijn met algebra in het vmbo gediend?

Over deze vragen gaat dit hoofdstuk.

In de volgende paragraaf kiezen we eerst het bredere perspectief van het wiskundeonderwijs in het vmbo in het algemeen. Vervolgens keren we terug naar de algebra. Omdat het vmbo een heterogene leerlingpopulatie kent, wordt onderscheid gemaakt tussen de basisberoepsgerichte en de kaderberoepsgerichte leerweg enerzijds, en de gemengde en theoretische leerweg anderzijds. Het hoofdstuk besluit met een paragraaf over de toekomst van algebra in het vmbo.

3.2 Wiskunde in het vmbo: doelen, problemen en ontwikkelingen

Welke doelen dient het wiskundeonderwijs in het vmbo? Geïnspireerd door het rapport van de Taakgroep Vernieuwing Basisvorming[1] onderscheiden we een drietal doelen voor wiskundeonderwijs in het vmbo:

1. wiskunde voor het leven van alledag;
2. wiskunde als ondersteuning van andere leergebieden;
3. wiskunde als voorbereiding op vervolgopleiding.

De realisatie van deze doelstellingen is niet zonder problemen. Leerlingen van het vmbo ervaren wiskunde veelal als een vak dat geen verband heeft met concrete situaties. Wiskunde staat ver van hun belevingswereld en is betekenisloos en zinloos. Met name bij de praktijkvakken van vmbo-bb en -kb is de relatie met wiskunde niet goed zichtbaar, terwijl leerlingen uit deze richtingen vaak een voorkeur hebben voor de praktijkvakken, omdat ze daarbij actief zijn in plaats van stilzitten [1]:

> Het is nu al beter dan in de eerste en tweede klas. Nu kunnen we in de werkplaats werken. Dat is beter, dan dat je de hele tijd uit een boek zit te schrijven. Nu heb je alleen theorie, maar ik wil het ook maken. Ik wil veel meer dingen doen. Ik ben niet zo goed in leren.

Ook is de basis waarop leerlingen uit het vmbo, met name bb, kunnen terugvallen, in veel gevallen wankel: in hoofdstuk 2 is al opgemerkt dat de rekenvaardigheid soms het niveau van groep 6 van het basisonderwijs niet ontstijgt.

De laatste jaren vinden verschillende ontwikkelingen plaats om aan de gesignaleerde moeilijkheden tegemoet te komen. Schoolmethoden hebben oog voor de samenhang met andere vakken en brengen themakaternen uit. Op een aantal scholen wordt het onderwijs herontworpen, waarbij de samenhang tussen wiskunde en andere exacte vakken of praktijkvakken uitgangspunt is. Deze samenhang kan binnen de schoolorganisatie op verschillende manieren vorm krijgen. De vaklokalen wiskunde en de praktijklokalen kunnen bij elkaar in de buurt worden gepositioneerd. Collegiaal overleg kan ertoe leiden dat onderwerpen bij wiskunde aan de orde komen op het moment dat er behoefte aan is in de praktijkvakken. De wiskundedocent kan meelopen bij de praktijkvakken om wiskundige zaken die daarbij aan de orde komen toe te lichten en op die manier het werk bij het praktijkvak te ondersteunen [4]. Een verdergaande optie is om wiskunde alleen binnen de praktijkvakken te geven en het niet als zelfstandig vak te handhaven. Het risico hiervan is dat de wiskunde slechts fragmentarisch en oppervlakkig aan de orde komt zonder dat sprake is van de opbouw van leerlijnen. We pleiten er dan ook voor om ook een aparte wiskundelijn, natuurlijk in samenhang met andere vakken, in het vmbo te handhaven.

Dat wiskunde in de ogen van veel vmbo-leerlingen weinig herkenbaar is in het dagelijks leven en in de schoolpraktijk, terwijl het vak moeilijk toegankelijk is en abstract, geldt in het bijzonder voor algebra. Op welke manier kunnen de doelstellingen zoals die aan het begin van deze paragraaf zijn geformuleerd, worden uitgewerkt op een manier die voor leerlingen betekenisvol en herkenbaar is? Omdat deze doelen om een gedifferentieerde uitwerking vragen, richten we ons in de volgende paragraaf eerst op de basisberoepsgerichte en kaderberoepsgerichte leerweg.

---

1 Het rapport vermeldt over het belang van wiskunde het volgende [3]:
Leerlingen hebben op verschillende manieren wiskunde nodig: buiten school in het leven van alledag, op school ter ondersteuning van het leren in andere leergebieden en als voorbereiding op mogelijke keuzes voor bepaalde vervolgopleidingen. In de eerste jaren van het voortgezet onderwijs verwerven leerlingen inzicht en vaardigheden op het gebied van getallen, grootheden, maten, vormen, structuren en de daarbij passende relaties, bewerkingen en functies. Aansluitend op het basisonderwijs ontwikkelen ze hun vaardigheden in de ‘wiskundetaal’ en worden steeds verder ‘wiskundig geletterd en gecijferd’.

3.3 Algebra in de basis- en kaderberoepsgerichte leerweg

Algebra speelt in de basis- en kaderberoepsgerichte leerweg van het vmbo geen grote rol. Natuurlijk komen algebraïsche hulpmiddelen soms van pas bij het oplossen van problemen uit de beroepsgerichte vakken, maar het gaat dan om een breed type algebra dat grenst aan informatieverwerking en rekenen. Denk aan rekenen met verhoudingen en aan het werken met grafieken en tabellen. Algebra in de engere zin van formules en procedures komt nauwelijks voor. Woordformules en vuistregels kunnen in sommige gevallen van pas komen, maar het manipuleren met formules kan achterwege blijven [5]. Het gaat dus om informele en impliciete algebra. Voor de vmbo-leerling bb en kb, die niet zelden moeite heeft met rekenen en die eerder gebruiker van representaties is dan ontwerper, is dit voldoende. Wat betekent algebraonderwijs voor deze doelgroep? We beantwoorden deze vraag aan de hand van de drie doelstellingen uit de vorige paragraaf: het leven van alledag, de andere vakken en de vervolgopleiding.

Algebra voor het leven van alledag

Veel probleemsituaties uit het dagelijks leven, dus buiten school of beroep, kennen kwantitatieve aspecten. Denk bijvoorbeeld aan het vergelijken van verschillende tarieven voor mobiel bellen, aan het begrijpen van een diagram of grafiek, of aan het rekenen met tijd, tijdsduur en snelheid. Dergelijke situaties doen een beroep op verschillende vaardigheden en inzichten: begrijpend lezen, schattend rekenen, interpreteren van tabellen en grafieken, analyseren van verbanden, onderscheiden van afhankelijke en onafhankelijke grootheden, extrapoleren, etcetera. Deze vaardigheden en inzichten bevinden zich op het grensgebied van rekenen, informatieverwerking en algebra. ‘Number sense’ en ‘symbol sense’ komen hierbij van pas; formele notaties en algebraïsche technieken spelen geen rol van betekenis. Deze inzichten en vaardigheden maken deel uit van wat wel gecijferdheid of *wiskundige geletterdheid* (‘mathematical literacy’) wordt genoemd. Het internationale PISA-project hanteert voor wiskundige geletterdheid de volgende definitie [6]:

> Wiskundige geletterdheid is het vermogen om wiskunde te herkennen, te begrijpen en te gebruiken. Dit vermogen moet het mogelijk maken goed beargumenteerd een oordeel uit te spreken over de rol die wiskunde speelt, en dan wel die wiskunde die nodig is in iemands huidige of toekomstige leven, werkzame leven, sociale leven met kennissen en familieleden, en zijn/haar leven als een constructieve, betrokken en reflectieve burger.

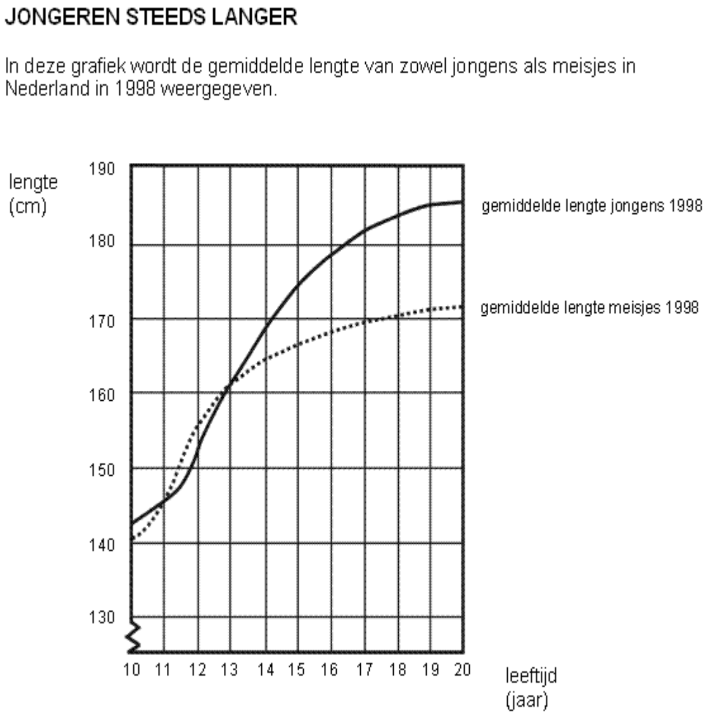
Figuur 1 toont een deel van een opgave uit de PISA-toets van 2003. De context is herkenbaar voor leerlingen van vmbo-bb en -kb en de gegevens zijn echt. De tweede vraag van deze opgave luidt: ‘Leg uit hoe je aan de grafiek kunt zien dat het gemiddelde groeitempo van meisjes langzamer wordt na hun twaalfde jaar’. Dit vraagt een redenering over de afnemende steilheid van de grafiek en de betekenis daarvan als lager wordend groeitempo in de context. Dat valt zeker onder wiskundige geletterdheid en past nog net binnen de afbakening van de algebra uit hoofdstuk 1.

Figuur 2 toont de resultaten bij deze vraag. Leerlingen van vmbo-bb en -kb scoren duidelijk lager dan de anderen. Een bijkomend probleem voor deze leerlingen is de formulering van het antwoord, zelfs als de essentie wordt begrepen. Een leerling van bb-kb klas 3 antwoordde bijvoorbeeld:

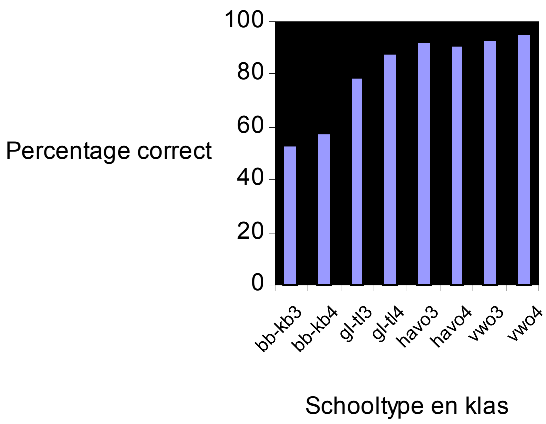
> Je ziet dat ze niet meer omhoog gaan maar een beetje dezelfde lengte.

Een andere leerling kwam tot een betere uitleg:

> De lijn gaat horizontaler lopen.



figuur 1: Een van de vrijgegeven items van PISA-2003 [7]



figuur 2: Resultaten bij deze opgave in Nederland [9]

Wiskundige geletterdheid is van belang voor de redzaamheid van de vmbo-bb of -kb leerling in de maatschappij. Volgens Hoogland ([8]) dient het wiskundeonderwijs zich hiertoe aan drie vuistregels te houden: maak de probleemsituaties zo realistisch mogelijk, besteed aandacht aan de dialoog met en tussen leerlingen over aanpak, interpretatie en betekenis, en maak leerlingen bewust van de kwantitatieve aspecten van de wereld om hen heen. Voor wat betreft de dialoog en het bewustmakingsproces ligt hier een belangrijke rol voor de docent. Door bijvoorbeeld een context uit het dagelijks leven (een tabel, een reclame) onderwerp van een klassengesprek te maken, waarin de kwantitatieve aspecten aan de orde komen, kan de docent gecijferdheidsonderwijs in de praktijk realiseren.

Natuurlijk omvat algebra meer dan wiskundige geletterdheid; andersom kent wiskundige geletterdheid bijvoorbeeld ook meetkundige elementen. Toch pleiten we er in het kader van de ‘algebra voor alledag' voor om het algebraonderwijs voor vmbo-bb en -kb vooral ten dienste te stellen van de wiskundige geletterdheid. Dat betekent dat de algebra zich hier richt op voortgezet rekenen en op grafieken en tabellen. Formules komen aan de orde als vuistregels zonder dat formele manipulatie plaatsvindt. Omdat niet alle vmbo-leerlingen in de bovenbouw wiskunde hebben, is 'algebra voor alledag' met name in de onderbouw een belangrijk doel.

Algebra als ondersteuning van praktijkvakken

In de basisberoepsgerichte en kaderberoepsgerichte leerweg bestaat er een kloof tussen algemeen vormende (avo) vakken en praktijkvakken. Het volgende citaat uit een artikel van Wijers en Kemme illustreert dit [4].

> Wie wel eens een dag heeft meegelopen met een klas 3 of 4 in de beroepsgerichte leerwegen van het vmbo, zal zich ongetwijfeld hebben afgevraagd wat er met deze leerlingen gebeurt als ze zich van een avo-les naar een praktijkles begeven. Ze lijken wel een complete metamorfose te ondergaan. In de avo-les is het kenmerk goedwillende ongeïnteresseerdheid. Leerlingen doen braaf wat hen is opgedragen, maar het lijkt wel of alles in deze lessen langs hen afglijdt. In de praktijklessen, zeker als die plaatsvinden op goed georganiseerde werkplekken, zijn de leerlingen actief aan het werk. Ze voelen zich verantwoordelijk voor hun eigen handelen en werken geconcentreerd aan de opgedragen taken.
> Wijers & Kemme, p. 33

Leerlingen van bb en kb zijn bij beroepsgerichte vakken gemotiveerder en actiever dan bij avo-vakken. Ze voelen zich verantwoordelijk voor de taak, zijn er als het ware 'eigenaar' van. De praktijkvakken zijn betekenisvol en herkenbaar. We pleiten er dan ook voor om algebra zo veel mogelijk aan te laten sluiten bij probleemsituaties uit de praktijkvakken. De volgende drie voorbeelden schetsen op welke manier deze aansluiting vorm kan krijgen.

10 Inez wil voor zes personen erwtensoep maken. In haar kookboek vindt ze in een recept de benodigdheden voor vier personen.
Hoeveel gram spliterwten, schouderkarbonades, knolselderij, prei en winterpeen heeft zij nodig?

Erwtensoep
voor 4 personen
300 g spliterwten
400 g schouderkarbonades
3 kruidenbouillontabletten
200 g knolselderij + het blad
2 aardappels
2 uien
200 g prei
300 g winterpeen
2 laurierblaadjes

Erwtensoep
voor 6 personen
500 g spliterwten
4 kruidenbouillontabletten
450 g schouderkarbonade
250 g knolselderij
400 g prei
400 g winterpeen
4 laurierblaadjes
1 aardappel

figuur 3: Verhoudingen bij recepten [10]

Het linkerkader van figuur 3 bevat een voorbeeld voor de sector Verzorging over de verhoudingen van ingrediënten van erwtensoep. De concrete en voorstelbare opgave komt neer op het vermenigvuldigen van alle hoeveelheden met 1,5. In deze situatie kan de docent ook vragen stellen die iets verder gaan en waarin een algebraïsche kijk op de situatie van pas komt:

- Je moet soep maken voor 50 personen. Welke hoeveelheden heb je nodig?
- Je moet soep maken voor 50 personen. Je hebt pannen waar voor 20 personen soep in kan. Hoeveel pannen gebruik je? Hoe verdeel je de hoeveelheden over de verschillende pannen?
- Een ander kookboek bevat een recept met hoeveelheden voor 6 personen (figuur 3 rechterkader). Is dit naar verhouding hetzelfde recept? Zal deze soep anders smaken, en zo ja, hoe?
- Als je regelmatig erwtensoep maakt, maar steeds voor een ander aantal personen, is het handig om een omrekentabel te hebben. Maak zo'n tabel met het spreadsheetprogramma Excel.

Het tweede voorbeeld betreft een opgave voor de sector metaal over het instellen van een freesmachine (figuur 4).

Materiaal	Snelstaal		Hardmetaal	
	voorfr	nafr	voorfr	nafr
Fe 360	16	28	65	160
Fe 420	14	24	60	120
Fe 590	12	22	55	90
Brons	35	50	95	140
Messing	60	70	135	220
Aluminium	180	280	430	550

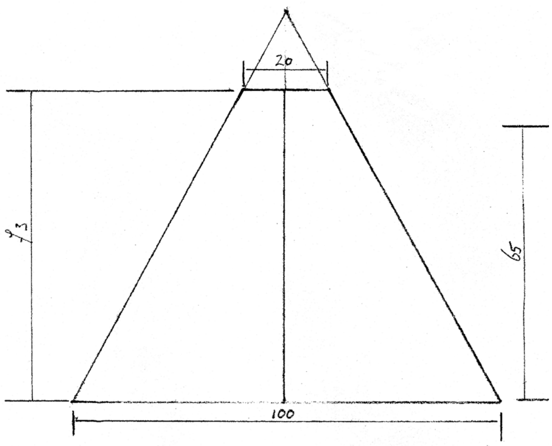
		snijsnelheid *v* in m/min				
		12,5	16	20	25	32
freesdiameter *d*	25	160	200	250	320	400
	32	125	160	200	250	320
	40	100	125	160	200	250
	50	80	100	125	160	200
	63	63	80	100	125	160

figuur 4: Snelheden van een frees[1]

Dit is een betekenisvolle context aangezien fouten bij het instellen risico's met zich meebrengen. De linkertabel geeft de snijsnelheid van de frees in meters per minuut, afhankelijk van het materiaal van de frees (snelstaal of hardmetaal) en het materiaal waarin wordt gefreesd. In de rechtertabel kan het toerental van de frees worden afgelezen bij de snijsnelheid en de diameter van het gat. Natuurlijk is de eerste opdracht om in een concreet geval beide tabellen te gebruiken. Vervolgens kunnen ook vragen worden gesteld die uitnodigen tot informeel algebraïsch denken:

- Je hebt een frees met diameter 45 mm en een snijsnelheid van 16 m/min. Deze diameter staat niet in de tabel. Welk toerental neem je dan?
- Voor een frees met een diameter van 50 mm bestaat de volgende vuistregel: de snijsnelheid keer 2 gedeeld door π is het toerental. Vergelijk de waarden volgens deze vuistregel met die van de tabel. Hoe kun je de vuistregel kort opschrijven?

Een derde voorbeeld van de inhoudelijke aansluiting tussen wiskunde en de praktijkvakken is de opdracht om een trechter na te maken [11]. In de bouw wordt de trechtervorm gebruikt bij bijvoorbeeld verloopstukken van afvoerpijpen, waarbij een overgang moet worden gemaakt van dunnere naar dikkere buizen. Om een gegeven trechter na te maken kan men met behulp van metingen een uitslag construeren, maar handiger is het om de formule voor de omtrek van een cirkel te gebruiken. En dan bevinden we ons op het terrein van formules, dus van de algebra. Figuur 5 laat een hulptekening bij dit probleem zien, gemaakt door een vmbo-leerling.



figuur 5: Leerlingenwerk bij de opgave over de trechter

1 Dit voorbeeld en andere lesideeën zijn te vinden op de website van het winst-project www.fi.uu.nl/winst.

De probleemsituaties uit de beroepsgerichte vakken die uitnodigen tot algebraïsch denken moeten natuurlijk wel echt zijn. Dat lijkt een open deur, maar lang niet alle contexten die in de huidige wiskundemethoden voorkomen zijn authentiek [12]. Dit punt verdient de aandacht van auteurs van schoolmethoden en van docenten.

Algebra als voorbereiding op vervolgopleiding

Het derde onderwijsdoel, de voorbereiding op het vervolgonderwijs, ligt voor vmbo-bb en -kb in het verlengde van de aansluiting met de praktijkvakken. Leerlingen van bb of kb die doorstromen naar het ROC zullen voor het overgrote deel in dezelfde sector blijven. Het streven naar samenhang met de beroepsgerichte vakken bereidt dus ook voor op de vervolgopleiding.

Formules komen in de vervolgopleidingen weinig voor. Als ze wel optreden, dan is het niet zelden in de vorm van vuistregels die worden gebruikt om bepaalde hoeveelheden te schatten. Denk bijvoorbeeld aan de regel 'hoeveelheid bloed in liters is het lichaamsgewicht in kilogrammen gedeeld door 13', die in de afdeling Verzorging aan de orde komt. Voor de docent kan deze regel aanleiding zijn voor een gesprek over de voordelen en de beperkingen van vuistregels. Wanneer is deze regel wel goed te gebruiken, en waar houdt het op? Binnen de sector techniek worden wel formelere formules gebruikt, zoals voor de omtrek van een cirkel en bij inhoudsberekening, bijvoorbeeld van bekistingen voor funderingen. Dan krijgt het gebruik ervan (denk aan invullen van waarden) een wat abstracter karakter. Het kan dan goed zijn om terug te vallen op woordformules en de afkorting uit te stellen.

Samengevat pleiten we in de bb- en kb-stroom van het vmbo dus voor algebra die aansluit bij herkenbare en betekenisvolle probleemsituaties zonder nodeloos formeel te zijn. In de *onderbouw bb en kb* staat het algebraonderwijs ten dienste van de ontwikkeling van wiskundige geletterdheid of gecijferdheid. Daarin spelen ook voortgezet rekenen en informatieverwerking een rol. Aansprekende contexten kunnen afkomstig zijn uit de belevingswereld van de leerlingen, bijvoorbeeld uit hobby, sport of media. De lijn van context-tabel-grafiek-formule kan hierbij aangehouden worden, waarbij de formules achterwege moeten blijven als ze niet echt functioneel zijn.

In de bovenbouw bb en kb staat de aansluiting bij beroepsgerichte vakken centraal. Een complicatie hierbij is dat de situaties uit de beroepsgerichte vakken verschillen per sector, terwijl de gangbare schoolmethoden geen sectorale inkleuring hebben. Mogelijk kunnen aanvullingen bij de methoden dit hiaat opvullen. Daarnaast kunnen algemene probleemsituaties worden gebruikt. Verder zal veel afhangen van de inventiviteit van de individuele docent, van de initiatieven van schoolteams en van de opbrengsten van ontwikkelprojecten.

3.4 Algebra in de theoretische en gemengde leerweg

Algebra speelt in de gemengde en met name de theoretische leerweg een grotere rol dan in de basisberoepsgerichte en kaderberoepsgerichte leerweg. Net als in bb en kb is het van groot belang dat algebra voor de leerlingen betekenisvol is en dat terughoudend wordt omgegaan met formaliseren en abstraheren. Met het oog op vervolgopleidingen is het wel nodig om wat meer aandacht aan formulevaardigheid te besteden. Overigens zijn in het verleden al stappen in de goede richting gezet. Met name de programmaherziening van het W12-16-project heeft geleid tot een meer betekenisvol algebraprogramma voor vmbo-tl, inclusief het loslaten van de formele verzamelingennotaties[1].
Wat zijn de kenmerken van het algebraonderwijs voor tl en gl? We volgen weer de lijn van de drie doelstellingen: het 'leven van alledag', de andere vakken en de vervolgopleiding. De nadruk ligt hierbij op de theoretische leerweg.

1 In het eindrapport van het Team W1216 [13] wordt op p. 27 een overzicht gegeven van formules die deel uit zouden kunnen maken van het repertoire waarmee leerlingen kennis maken.

Algebra voor het leven van alledag

Ten behoeve van de redzaamheid in de maatschappij is er in de vorige paragraaf voor gepleit de ontwikkeling van wiskundige geletterdheid een grote plaats te geven in het vmbo. Dat pleidooi geldt ook voor de theoretische en gemengde leerweg. Met name in de onderbouw – voor een deel van de leerlingen immers het eindonderwijs als het om wiskunde gaat – dient dit centraal te staan. Algebra is hier een hulpmiddel, dat weinig explicitering behoeft en waarvan de rol op de achtergrond kan blijven.

Algebra als ondersteuning van andere vakken

Net als in vmbo-bb en -kb is de ondersteuning van andere vakken in de theoretische en gemengde leerweg één van de doelen van het algebraonderwijs. Het verschil is echter dat de andere vakken bij tl, en in het algemeen bij gl, geen praktijkvakken maar theorievakken zijn. De overeenkomst is dat het ook bij tl en gl goed is om daarbij aansluiting te zoeken, zodat de algebra betekenis krijgt. De exacte vakken bieden de meest geschikte contexten waarin algebra op een natuurlijke wijze functioneert.

Als windmolens draaien, maken zij geluid. De eenheid waarmee het geluidsniveau wordt aangegeven is dB (decibel).

Het geluidsniveau gemeten aan de voet van de windmolen is 65 dB.
Hoe verder iemand zich van de windmolen bevindt, hoe lager het geluidsniveau is.
Er bestaat een verband tussen het geluidsniveau en de afstand tot de voet van de windmolen. Bij dit verband hoort de volgende formule:

$$G = 65 \times 0{,}83^{a}$$

Hierin is G het geluidsniveau in dB.
En a is de horizontale afstand tot de voet van de windmolen in hectometers.

○ 19 Johan staat 400 meter van de voet van de windmolen af.
→ Laat zien dat het geluidsniveau op die afstand afgerond 31 dB is. Schrijf je berekening op.

○ 20 → Met hoeveel procent neemt het geluidsniveau per hectometer af?

figuur 6: Examenopgave vmbo gl en tl 2004[1]

Bij wijze van voorbeeld bevat figuur 6 een opgave uit een recent examen. De context is actueel en raakt aspecten van natuurkunde, milieubeheer en ruimtelijke ordening. De algebraïsche formule is functioneel. Onderdeel 20 is pittig. De vraag is wat er met de formule gebeurt als a met 1 toeneemt. In combinatie met procentrekenen is dit niet eenvoudig voor deze leerlingen. De alge-

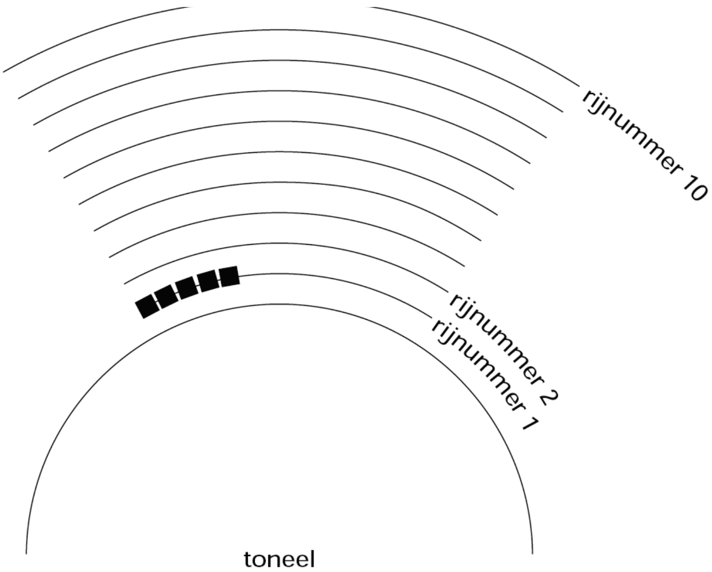
1 De examenopgave is beschikbaar via http://www.nvon.nl/examen/index.htm.

bra staat ten dienste van de oplossing van het contextprobleem en heeft daarmee een dienende rol. Overigens zou een dergelijke opgave in de klas aanleiding kunnen zijn om de grenzen van zo'n model aan de orde te stellen: hoe goed zou het kloppen, voor welke afstanden zou het model het beste toegepast kunnen worden, en hoe zou men aan het model gekomen zijn?

Algebra als voorbereiding op vervolgopleiding

De voorbereiding op de vervolgopleiding heeft implicaties voor het algebraonderwijs in vmbo-tl en -gl. Met name de leerling van vmbo-tl die doorstroomt naar het havo of het hoogste niveau van het roc (sector techniek) dient over enige algebraïsche vaardigheid te beschikken, bijvoorbeeld voor het oplossen van een lineaire vergelijking of het omschrijven van een verband.

De examenopgave in figuur 7 geeft aan over wat voor soort vaardigheden het gaat. Een voorstelbare context leidt tot een voor deze leerlingen vrij complexe formule. Onderdeel 14 betreft het invullen van een getal. Bij onderdeel 15 is de vraag om een kwadratische vergelijking op te lossen. De beoogde aanpak, zo blijkt uit het antwoordmodel, is er een van proberen. Eenvoudiger, lineaire vergelijkingen moeten wel systematisch worden opgelost.



Voor het *totaal aantal zitplaatsen* vanaf rijnummer 1 tot en met rijnummer *n* geldt in de nieuwe situatie de volgende formule:

$$\textit{totaal aantal zitplaatsen} = 1\tfrac{1}{2}n^2 + 14\tfrac{1}{2}n$$

3p ○ 14 → Bereken met deze formule het totaal aantal zitplaatsen van de eerste zeven rijen.
Schrijf je berekening op.

3p ○ 15 → Bereken hoeveel rijen er, in de nieuwe situatie, minstens nodig zijn voor in totaal 1000 zitplaats
Schrijf je berekening op.

figuur 7: Examenopgave vmbo gl en tl 2003[1]

Het vinden van betekenisvolle contexten waarin algebraïsche vaardigheden een rol spelen is op dit niveau niet eenvoudig. De probleemsituaties kunnen ook binnen de wiskunde zelf worden gezocht. Denk bijvoorbeeld aan dwarsverbanden met rekenen, meetkunde of statistiek. Voorbeelden van rekensommen die aanleiding kunnen zijn tot algebra zijn te vinden in de bundel 'Algebraoefeningen' van Kindt [14].

1 De examenopgave is beschikbaar via http://www.nvon.nl/examen/index.htm.

Dwarsverbanden met de meetkunde kunnen gelegd worden bij berekeningen met oppervlakte en omtrek. In Euclides beschrijft Zwaneveld [15] het voorbeeld van rechthoeken met een omtrek van 20 cm. De vraag is welke van deze rechthoeken de grootste oppervlakte heeft. Met een spreadsheetprogramma kan dit probleem worden aangepakt (figuur 8). De kracht van Excel is dat formules op een informele manier worden opgesteld door te verwijzen naar celinhouden. Vandaaruit moet de stap naar formules als $L + B = 10$ en $O = L \times (10 - L)$ te maken zijn voor leerlingen van de theoretische leerweg, aldus Zwaneveld.

	A	B	C	D	E
1	Omtrek	Halve omtrek	Lengte	Breedte	Oppervlakte
2	20	10	1	9	9
3			2	8	16
4			3	7	21
5			4	6	24
6			5	5	25
7			6	4	24
8			7	3	21
9			8	2	16
10			9	1	9

figuur 8: De oppervlakte van een rechthoek met vaste omtrek: uitwerking in Excel

Ook situaties uit informatieverwerking en statistiek kunnen aanleiding zijn tot algebraïsche activiteiten. Temperaturen op websites voor weersvoorspellingen in toeristische gebieden worden bijvoorbeeld vaak gegeven in zowel graden Fahrenheit als graden Celsius. Op basis daarvan kan de vraag zijn het verband tussen deze twee grootheden te achterhalen. Een eenvoudiger alternatief is om het omrekenen van graden Fahrenheit in graden Celsius te beschrijven en leerlingen te vragen de omgekeerde weg te bewandelen.

Samengevat zien we dat ook in de onderbouw van theoretische en gemengde leerweg het algebraonderwijs ten dienste staat van het meer algemene doel van de ontwikkeling van wiskundige geletterdheid. In de bovenbouw ligt de nadruk meer op de ondersteuning van andere vakken en op de voorbereiding op vervolgonderwijs. Met name voor de theoretische leerweg liggen deze laatste twee doelen niet zozeer in elkaars verlengde als dat bij bb en kb het geval is. Voor de ondersteuning van andere vakken is de wiskunde dienstbaar en informeel en blijft de formelere algebra op de achtergrond. De voorbereiding op het vervolgonderwijs, met name op het havo en de sector techniek van het ROC, vraagt echter meer aandacht voor formulevaardigheid. Didactisch gezien ligt hierbij de lijn van progressief formaliseren voor de hand: van een informele, contextgebonden benadering naar een preformele en eventueel formele aanpak.

3.5 Een toekomst voor algebra in het vmbo?

Welke toekomst heeft het algebraonderwijs in het vmbo en in welke richting kan het zich ontwikkelen? Deze vragen bespreken we weer aan de hand van de driedeling wiskundige geletterdheid, samenhang met andere vakken en voorbereiding op vervolgonderwijs.
Het ontwikkelen van *wiskundige geletterdheid* is met name van belang in de onderbouw van het vmbo. De algebra die voor dit doel nodig is, is informeel en blijft op de achtergrond. In de toekomst is het van belang dat het 'gecijferdheidsonderwijs' verder wordt ontwikkeld, zodat de vmbo-leerling, ook als hij na klas 2 geen wiskunde heeft, goed toegerust is om met kwantitatieve aspecten van de samenleving om te gaan. Richtinggevend hierbij zijn de volgende punten:

- concrete problemen uit het dagelijks leven als betekenisvol vertrekpunt;
- aandacht voor kwantitatieve en algebraïsche aspecten van bijvoorbeeld tabellen, diagrammen, grafieken en vuistregels, en voor de 'vertaling' van gewone taal in (informele) algebrataal;
- aandacht voor de interpretatie van dergelijke voorstellingen in termen van de probleemsituatie.

In de basis- en kaderberoepsgerichte leerweg liggen de ondersteuning van praktijkvakken en de voorbereiding op vervolgonderwijs in elkaars verlengde. In de toekomst is het van belang dat de samenhang tussen wiskunde en de praktijkvakken beter gestalte krijgt. We pleiten voor algebraonderwijs waarvan de betekenis voor de leerling in de toepassing in de praktijk naar voren komt. Met name in de bovenbouw liggen er mogelijkheden voor sectorspecifieke invullingen. Binnen de theoretische en gemengde leerweg kan de samenhang met andere vakken gezocht worden in de exacte vakken, inclusief de wiskunde zelf. In de toekomst kunnen deze mogelijkheden verder worden benut, zonder dat men in gekunstelde contexten vervalt. Situaties uit de belevingswereld van leerlingen verdienen aanbeveling.

De voorbereiding op het vervolgonderwijs ligt voor vmbo-tl iets ingewikkelder. In de technische sector van het middelbaar beroepsonderwijs (mbo) en het havo wordt enige formulevaardigheid vereist. Via progressief formaliseren zullen dus ook ‘traditionele’ algebraïsche basisvaardigheden ontwikkeld worden, zoals het oplossen van vergelijkingen en elementaire algebraïsche herleidingen. De uitdaging voor de toekomst in vmbo-tl ligt dus enerzijds in een verbeterde aansluiting met de vakken waarin de wiskunde kan worden gebruikt, en anderzijds in het ontwikkelen van een goed traject, dat leidt tot die algebraïsche vaardigheden die de vmbo-tl-leerling goed voorbereidt op het havo en de exacte sectoren van het mbo.

Om deze globale conclusies te concretiseren, wordt in tabel 3 aangegeven welke van de belangrijkste onderwerpen in het genoemde schooltype expliciet op de ‘algebra-agenda’ staan.
Deze tabel bedoelt niet te suggereren dat formules en vergelijkingen op informeel niveau niet in bb en kb aan de orde komen; het is echter niet nodig om formules te formaliseren of standaardprocedures voor vergelijkingen te ontwikkelen die los van de context beheerst worden.

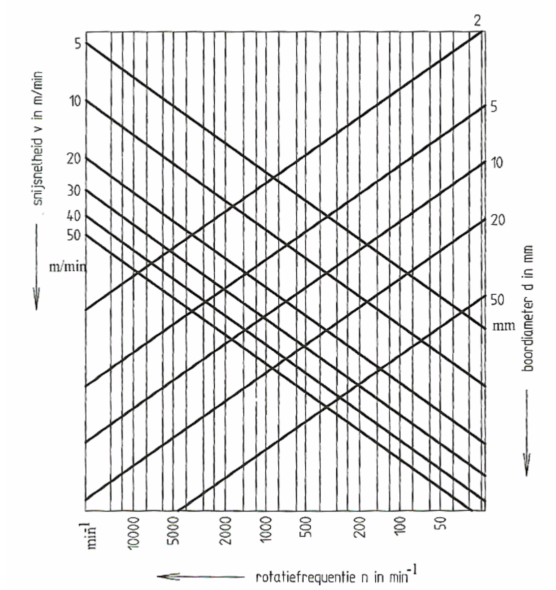
Onderwerp	**bb-kb**	**gl-tl**
Tabellen	**X**	**X**
Grafieken	**X**	**X**
Variabelen		**X**
Formules		**X**
Vergelijkingen		**X**

tabel 3: Uitsplitsing van onderwerpen

Hieronder volgt een aantal schetsmatige suggesties met betrekking tot deze onderwerpen. Ze geven de richting aan waarin algebraonderwijs in het vmbo zich zou kunnen ontwikkelen.

- *Tabellen*
  Aan tabellen kan veel aandacht worden besteed, niet alleen bij verbanden die in formulevorm gegeven zijn, maar ook in het kader van informatieverwerking en statistiek. Leerlingen kunnen tabellen lezen en onderzoeken, maar ook tabellen opstellen als middel om gegevens te ordenen. Tabellen kunnen aanleiding zijn om verbanden en patronen te onderzoeken. Zie bijvoorbeeld de freestabellen in figuur 4.

- *Grafieken*
  Ook grafieken kunnen vanuit informatieverwerking en statistiek worden benaderd. Verder pleiten we ervoor niet alleen lineaire grafieken aan de orde te laten komen, maar een grotere variëteit aan vormen. Binnen toepassingen kunnen die grafieken overigens vrij gecompliceerd zijn, zoals het nomogram in figuur 9 dat het verband weergeeft tussen snijsnelheid, rotatiefrequentie en boordiameter.



figuur 9: Nomogram voor snijsnelheid, rotatiefrequentie en boordiameter [16]

- *Variabelen*
  In veel gevallen kan worden volstaan met een informeel variabelebegrip: de (woord-)variabele is bijvoorbeeld een afkorting voor een aantal, een lengte of een bedrag. Een spreadsheetprogramma als Excel biedt mogelijkheden om met variabelen te werken, die worden voorgesteld als de inhoud van een cel (zie bijvoorbeeld figuur 8). Dynamische variabelen of variabelen die generaliseren over de getallen zullen minder vaak aan de orde zijn.

- *Formules*
  Formules zullen veelal optreden als woordformules, die bijvoorbeeld vuistregels weergeven of een rekenproces beschrijven. Ze functioneren dan als samenvatting, als condensatie van het concrete rekenwerk. Daarnaast kan een formule, met name in vmbo-tl, ook een verband beschrijven (zie bijvoorbeeld figuur 7). Daarbij bevelen we aan om leerlingen met een breed repertoire aan verbanden te confronteren [13]. Dit maakt dat de lineaire formule minder als algemeen geldig model wordt gezien. Voorzichtige aandacht voor groei en evenredigheid wordt aanbevolen. Formules kunnen ook ontstaan uit meetkundige problemen. Herleiden en omschrijven van formules vindt alleen plaats als het functioneel is.

- *Vergelijkingen*
  Vergelijkingen kunnen op verschillende manieren worden aangepakt. In eerste instantie kan de methode van 'trial-and-improve' goed werken: de leerling probeert een getal als oplossing en verbetert deze gok op basis van het resultaat. Een tweede methode is het terugrekenen, bijvoorbeeld in een pijlenketting. Met een omkeerketting of terugrekenschema is in veel gevallen een oplossing te vinden. In de meeste gevallen is dit voldoende; voor vmbo-tl is een meer systematische procedure voor het oplossen van lineaire vergelijkingen als voorbereiding op het vervolgonderwijs gewenst.

Op deze manier verwachten we dat leerlingen in het vmbo algebraonderwijs in het toekomst als betekenisvol zullen ervaren, zonder dat het een onoverkomelijk struikelblok vormt.

Literatuur

1. Abels, M., Jonker, V. & Wijers, M. (2003): WINST voor het vmbo, *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs, 23*(1), 13-18.
2. A.J. Goddijn (1982). Spijkers zoeken op laag water: Algebra in het lbo*. Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs, 1*(4), 3-6.
3. Taakgroep Vernieuwing Basisvorming (2003). *Ontwerp nieuwe kerndoelen onderbouw VO*. www.vernieuwingbasisvorming.nl.
4. Wijers, M. & Kemme, S. (2004). Pannenkoeken bakken met je wiskundedocdent. *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs, 24*(1), 33-39.
5. Zwaneveld, B. (2005). De taal van de wiskunde. *Euclides, 80*(5), 283.
6. OECD (2000). *Measuring Student Knowledge and Skills: A new Framework for Assessment*, www.pisa.oecd.org.
7. Gille, E. (Ed.)(2004). *Praktische kennis en vaardigheden van 15-jarigen*. Arnhem: Citogroep.
8. Hoogland, K. (2005). Gecijferd. *Euclides, 80*(4), 186-189. Zie ook www.gecijferdheid.nl.
9. Dekker, T. & Wijers, M. (Eds.)(in druk). *PISA-opgaven nader bekeken*. Utrecht / Arhem: Freudenthal Instituut / Citogroep.
10. Hanemaaier, P.M., Hulzebosch, W.M., van der Kaaden, M., van Male, A., Mertens, W., Vonk, W. & van der Wal, A. (2000): *Netwerk, deel 4 vmbo Kader* (eerste druk). Groningen: Wolters-Noordhoff.
11. Wijers, M., Jonker, V. & Van der Kooij, H. (2004): De trechter en de vuurkorf. *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs, 23*(4), 42-45.
12. Kemme, S., Wijers, M. & Jonker, V. (2003). *Authentieke contexten in het vmbo*. Utrecht: ICO-ISOR / Freudenthal Instituut.
    Wijers, M., Jonker, V. & Kemme, S. (2004). Authentieke contexten in het vmbo*. Euclides, 79*(7), 308-313.
13. Team W12-16 (1992). *Achtergronden van het nieuwe leerplan wiskunde 12-16, Band 1*. Utrecht: Freudenthal Instituut.
14. Kindt, M. (2003). *Oefeningen in algebra*. Utrecht: Freudenthal Instituut.
15. Zwaneveld, B. (2005a). Formules in het vmbo. *Euclides, 80*(6), 345.
    Zwaneveld, B. (2005b). *Wiskunde en informatica: innovatie en consolidatie*. Heerlen: Open Universiteit Nederland.
16. *Kaliber, metaaltechniek voor het vbo, moduul 4* (1997). Woerden: SOM.

4 Algebra in de onderbouw van havo en vwo

Paul Drijvers

Het algebraonderwijs in de onderbouw van havo en vwo richt zich momenteel sterk op de lijn van tabellen-grafieken-formules. Geeft dit niet een te beperkt beeld van algebra? Biedt het voldoende uitdaging en bereidt het adequaat voor op de tweede fase? Daar zetten we in dit hoofdstuk onze vraagtekens bij.
Om het algebraonderwijs rijker en uitdagender te maken, pleiten we voor meer aandacht voor patronen en structuren, formules en variabelen, en generaliseren en bewijzen. Daardoor kunnen leerlingen de kracht van de algebra beter ervaren. Dat kan alleen maar gerealiseerd worden als in de derde klas van havo en vwo differentiatie naar schooltype en toekomstige profielkeuze plaatsvindt.

4.1 Veranderingen in schoolmethodes

In de loop van de afgelopen decennia zijn de schoolmethoden voor wiskunde ingrijpend veranderd. Dat betreft ook de algebra in de boeken voor de onderbouw van havo en vwo (h/v) [1]. Laten we een drietal voorbeelden bekijken.

1955: Formuleren met algebra en met woorden

VERSCHILLEN.

V_1. $\mathbf{(a+b+c+d)-(p+q+r)=(a-p)+(b-q)+(c-r)+d.}$
Een verschil wordt gevonden, door aftrektal en aftrekker in delen te splitsen, elk deel van de aftrekker af te trekken van een der delen van het aftrektal en de komende verschillen en de overgebleven delen van het aftrektal samen te voegen.

figuur 1: Fragment uit Beknopte algebra I

Figuur 1 bevat een fragment uit ‘Beknopte algebra I’ van Wijdenes voor de eerste klas van de HBS [2]. Het gaat om een ‘regel voor verschillen’, die erop neerkomt dat je ook termen kunt herordenen. Dit soort regels moet er bij leerlingen worden ingestampt, zo blijkt uit het ‘voorbericht’ van de dertiende druk:

> Dan worden deze eigenschappen nog eens sterk ingestampt. Hoe, dat doet minder ter zake, mits vooral al die eigenschappen absoluut hun eigendom worden, in het bijzonder de vet gedrukte. Vooral doet men alles tot het eind van paragraaf 16 zeer zorgvuldig en zeer degelijk.

In het huidige algebraonderwijs komt deze regel niet meer voor. Vermoedelijk zijn er vandaag de dag niet veel docenten die het belangrijk vinden dat leerlingen een intuïtief niet zo moeilijk idee op deze manier kunnen formuleren en begrijpen.

Wat opvalt, is dat de regel op twee manieren wordt beschreven: algebraïsch en in de vorm van een receptmatige beschrijving in zinnen. Een dergelijke combinatie is tegenwoordig niet meer zo gebruikelijk, wat een verlies is.
Neem bijvoorbeeld de algebraregel $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ en de zin ‘Het kwadraat van de som is de som van de kwadraten plus twee maal het gemengde product’. Het vertalen van formulezinnen in taalzinnen en andersom kan bijdragen aan het inzicht in de algebraïsche structuur van zo’n regel. In hoofdstuk 1 is er dan ook voor gepleit om daarvan in het huidige onderwijs meer gebruik te maken, bijvoorbeeld door af en toe een ‘algebradictee’ te houden.

1969: Vereenvoudigen van vormen

7. $1 + \dfrac{1}{a+1}$, $\qquad -\dfrac{7-a}{1-a} - \dfrac{6}{a-1}$,

$\dfrac{a-1}{a+1} - \dfrac{2a+1}{a+1}$, $\qquad \dfrac{a}{2a+2} + \dfrac{1}{a+1}$,

$\dfrac{3a+4}{a-2} + \dfrac{2a-14}{a-2}$, $\qquad 2 - \dfrac{a}{a+4}$.

figuur 2: Oefening in het vereenvoudigen van vormen

Eind jaren zestig werd de Mammoetwet ingevoerd. De opgave in figuur 2 komt uit 'Algebra voor de brugklas van vwo en havo' van Vredenduin [3] en staat aan het einde van een hoofdstuk over rationale getallen. In dat hoofdstuk wordt de verzameling van de gehele getallen uitgebreid tot die van de rationale getallen, om ervoor te zorgen dat je bij deling binnen de verzameling blijft, dus dat die gesloten is voor deling. Deze aanpak past bij de tijdgeest van het toenmalige wiskundeonderwijs, waarin het denken in algebraïsche structuren – met op de achtergrond begrippen als groepen en ringen – een belangrijke plaats innam.

Tegenwoordig geven we zulke oefeningen niet snel meer op aan leerlingen en al helemaal niet in de eerste klas. Toch pleitte ook Vredenduin er in zijn voorwoord al voor om niet al te ver te gaan in het oefenen van algebraïsche vaardigheden:

> Mijn inziens zou het een ernstige tekortkoming van ons onderwijs betekenen, als in de brugklas geen voldoende basis werd gelegd voor het verkrijgen van de nodige routine in algebraïsch rekenen. Toch zal het niet langer mogelijk zijn deze routine aan te kweken op een zo omvangrijke wijze als tot nog toe gebruikelijk was. Ik heb dan ook getracht hier en daar het rekenwerk te beperken door aan die facetten, die later geen essentiële rol spelen, minder aandacht te besteden.

2003: Tabellen, grafieken, formules

Figuur 3 bevat een eigentijds voorbeeld uit 'Getal en ruimte' voor 1 havo/vwo [4]. De opgave is typerend voor de huidige generatie schoolmethoden voor de onderbouw in die zin, dat het gebruik van een formule wordt gekoppeld aan context, tabel en grafiek. Verderop in hetzelfde boek staan ook wel wat kalere algebraoefeningen, bijvoorbeeld 'herleid $-3q \cdot -2q - q(6p+1)$', maar in vergelijking met vroeger zijn het er minder en zijn ze minder complex. Toch vermeldt het voorwoord: 'In deze algebrahoofdstukken wordt een stevige basis gelegd voor het letterrekenen'. Getal en ruimte gaat hierin wat verder dan de andere gangbare methodes [5].

Hoe dieper je de grond in gaat, des te hoger is de temperatuur.
Bij een diepte van d km kun je de temperatuur in °C berekenen met de formule **temperatuur = 10*d* + 20**.

a Neem de tabel over en vul hem in.

d	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	6
temperatuur in °C							

b Teken de grafiek. Ga op de horizontale as tot 6.

c Mevrouw Slim wil in haar tuin een diepe put zodat ze onderin water kan koken. Meneer Slim is tot vele dingen bereid. Toch wil hij zo'n put niet voor zijn vrouw graven.
Waarom, denk je?

figuur 3: Tabellen, grafieken, formules in Getal en ruimte

Deze drie ‘snapshots’ uit schoolboeken uit verschillende perioden maken duidelijk dat in de loop der jaren een accentverschuiving heeft plaatsgevonden in het algebraonderwijs in de onderbouw van havo en vwo: algebraïsche basisvaardigheden krijgen minder aandacht en tabellen-grafieken-formules staan centraal. De vraag is of deze ontwikkeling recht doet aan de capaciteiten van de leerling en of ze tot een goede voorbereiding op het vervolgonderwijs leidt. Om deze vragen te beantwoorden, brengen we eerst de karakteristieken van het huidige algebraonderwijs in de onderbouw van havo en vwo in kaart.

4.2 De huidige situatie: karakteristieken, beperkingen en kansen

Het Nederlands algebraonderwijs in de onderbouw van havo en vwo heeft op dit moment een aantal kenmerken, waardoor het zich onderscheidt van vergelijkbaar onderwijs in veel andere landen. De volgende karakteristieken springen in het oog.

- *Contexten en vertaalactiviteiten*
  In de onderbouw wordt veelal uitgegaan van probleemsituaties of contexten. Deze situaties beogen herkenbaar en betekenisvol te zijn voor leerlingen en roepen de behoefte op aan mathematiseren met algebraïsche middelen. Er wordt vrij veel aandacht besteed aan modelleeractiviteiten, waarin een contextgebonden probleem moet worden vertaald in algebraïsche termen. Soms ook wordt het model al gegeven, zodat het vertaalwerk uit handen wordt genomen. Na de algebraïsche bewerkingen moeten de resultaten weer worden terugvertaald naar de probleemsituatie en geïnterpreteerd worden in die termen. Dat betekent dat de leerling veelvuldig moet schakelen tussen de wereld van het concrete probleem en de wereld van de algebra.
- *Algebra van verbanden en functies*
  In het algebraprogramma in de onderbouw h/v staan verbanden en functies centraal, waarin een variabele grootheid afhangt van een andere. In hoofdstuk 1 is dit de algebra van functionele verbanden genoemd. Er wordt veel aandacht besteed aan het ontwikkelen en gebruiken van representatievormen zoals tabellen, grafieken en formules. Het heen-en-weer springen tussen deze verschillende representaties is belangrijk. De probleemsituaties leiden vaak tot het oplossen van vergelijkingen.
- *Progressief formaliseren*
  Het formaliseren van procedures en algoritmen wordt in de onderbouw van havo en vwo vrij lang uitgesteld. De leerlingen krijgen tijd en ruimte voor het ontwikkelen van contextgebonden, informele en preformele methoden en strategieën. In het algemeen worden lokale oplossingsstrategieën gewaardeerd, ook als die op een ongebruikelijke manier worden geformuleerd of genoteerd. Aan ‘kale’ sommen die gericht zijn op het opbouwen van een repertoire van formeel genoteerde en geautomatiseerde procedures in een abstracte en zelfstandige ‘algebrawereld’ wordt pas in een laat stadium aandacht besteed.
- *Weinig nadruk op basisvaardigheden*
  In het verlengde van het vorige punt wordt vrij weinig aandacht besteed aan het inoefenen van algebraïsche basisvaardigheden of het ontwikkelen van procedurele routine. Wegwerken van haakjes en oplossen van vergelijkingen komen wel aan de orde, maar bijvoorbeeld ontbinden in factoren en rekenen met letterbreuken nauwelijks.
- *Didactiek van zelfstandig werken*
  In het Nederlandse wiskundeonderwijs wordt vrij veel tijd besteed aan zelfstandig en docentonafhankelijk werken, thuis en in de klas. Schoolboeken hebben zich daaraan aangepast door in toenemende mate conceptuele moeilijkheden en cognitieve conflicten te vermijden. Aan de hand van series van opgaven wordt de leerling met kleine tussenstapjes naar de beoogde procedures en inzichten geleid. Het gevaar van deze aanpak is dat de grote lijn en de centrale probleemstelling voor leerlingen wordt versluierd. Ook kan hierdoor het werken aan wiskunde, zeker voor de betere leerling, neerkomen op het maken van weinig uitdagende series opgaven. Voor de docent biedt deze opbouw weinig aanknopingspunten voor een klassengesprek of voor differentiatie.

De meeste van deze kenmerken zijn te beschouwen als *verworvenheden*. Ze zijn tot stand gekomen vanuit het besef dat te vroeg formaliseren, te veel nadruk op procedurele vaardigheden en te weinig ruimte voor conceptvorming en eigen productie niet tot bevredigende resultaten leiden. Als reactie daarop is in projecten zoals W12-16 een nieuwe benadering van de wiskunde in de onderbouw ontwikkeld[1]. Zeker voor de gemiddelde leerling van de toenmalige mavo, nu vmbo-tl, is deze 'wiskunde met een menselijk gezicht' een verademing in vergelijking met de abstracte formalisering van de verzamelingenleer van daarvoor. Vanuit het veld is op deze ontwikkelingen vrij positief gereageerd en de resultaten van internationale vergelijkende studies zijn goed te noemen[2]. Er lijkt dus reden voor tevredenheid.

Het huidige algebraonderwijs in de onderbouw kent echter ook *beperkingen* voor leerlingen van havo en vwo. Op de eerste plaats krijgen deze leerlingen *een smalle kijk op algebra* als die voor hen overwegend bestaat uit de 'drie-eenheid' tabellen-grafieken-formules. Om aan deze beperking tegemoet te komen zou meer aandacht aan patronen en structuren besteed kunnen worden. Dat biedt tevens openingen naar algebraïsch modelleren en generaliseren.

Op de tweede plaats is de aansluiting met de tweede fase een punt van zorg. Docenten in de tweede fase h/v zijn ontevreden over de beheersing van algebraïsche basisvaardigheden van hun instroom en ervaren dit als een belemmerende factor. Omdat algebra in de bovenbouw eerder een hulpmiddel is bij de analyse – en in mindere mate bij kansrekenen en statistiek – dan een zelfstandig onderwerp, is het van belang dat essentiële algebraïsche concepten en vaardigheden in de onderbouw hun fundament krijgen. De aansluiting met de tweede fase kan worden verbeterd door in de onderbouw het formule-inzicht en het variabelebegrip uit te diepen en meer aandacht te besteden aan het ontwikkelen en oefenen van vaardigheden.

Ten derde gaat er voor de leerlingen van havo en vwo van het huidige algebraonderwijs *geringe uitdaging* uit. Het curriculum is zodanig toegesneden op de gemiddelde leerling, dat de capaciteiten van de havo/vwo-leerling onvoldoende worden aangesproken. Een manier om hieraan tegemoet te komen, is om sterker te differentiëren. Voor leerlingen van dit niveau liggen er bijvoorbeeld mogelijkheden om meer aandacht te besteden aan generaliseren en bewijzen dan op andere schooltypen het geval is.
Met name het gebrek aan algebraïsche basisvaardigheden en uitdaging staat in de belangstelling. Scholen en uitgevers ontwerpen bijvoorbeeld aanvullend materiaal, dat mogelijkheden biedt voor oefening en differentiatie[3]. De kwestie van het oefenen van vaardigheden komt verder aan de orde in hoofdstuk 7.
Het algebraonderwijs in de onderbouw van havo en vwo kent dus beperkingen, maar er zijn ook *kansen*. In de volgende paragrafen schetsen we mogelijke invalshoeken bij drie onderwerpen: patronen en structuren, formules en variabelen en generaliseren en bewijzen.

4.3 Patronen en structuren

In de onderbouw van havo en vwo wordt veel aandacht besteed aan de algebra van functionele verbanden. Dat kan ook anders. In hoofdstuk 2 is al vermeldt dat het algebraprogramma in 'Mathematics in Context', een methode die het Freudenthal Instituut ontwikkelt voor de Amerikaanse markt, drie hoofdstromen kent: beperkingen en voorwaarden (vergelijkingen en ongelijkheden), en veranderingen en groei (verbanden en functies) en patronen en regelmaat [8]. Om de laatste

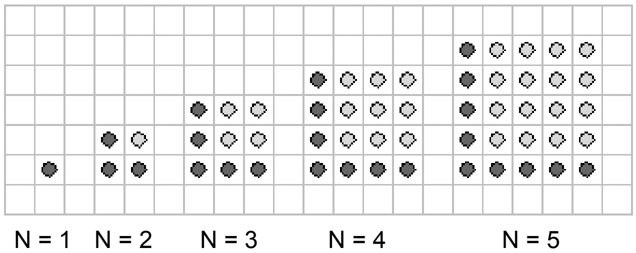
1 Het W12-16 project is uitgevoerd in de jaren 1987 - 1992 en richtte zich op de ontwikkeling van een nieuw leerplan wiskunde voor de basisvorming. Met name voor de toenmalige mavo, het huidige vmbo-tl, heeft het project geleid tot een cultuuromslag in het wiskundeonderwijs: de verzamelingenleer is verlaten en de nadruk is gelegd op wiskunde met een herkenbaar en toegankelijk gezicht [6].

2 Denk aan grote internationale studies zoals TIMSS (http://nces.ed.gov/timss/) en PISA (http://www.pisa.nl/).

3 Zie bijvoorbeeld www.noordik.nl/vakken/wiskunde/ of http://wiskunde.stmichaelcollege.nl/. Ook uitgeverijen brengen aanvullend materiaal uit [7].

gaat het hier. In de onderbouw van havo en vwo kan het ontdekken en doorzien van algebraïsche patronen en structuren een speelse, uitdagende en productieve algebraïsche activiteit zijn, die op natuurlijke wijze leidt tot het generaliseren en het opstellen van formules.

Hieronder zie je een rij figuren die gemaakt zijn met zwarte en grijze stippen.
Geef een expressie die het verband tussen het figuurnummer en het aantal



Bij de zwartestippen komen er steeds 2 bij en
bij de grijze is het nummer - 1x zichzelf

Zwart: N-1+N Grijs: N-1x zichzelf

figuur 4: Een stippenpatroon met een uitwerking

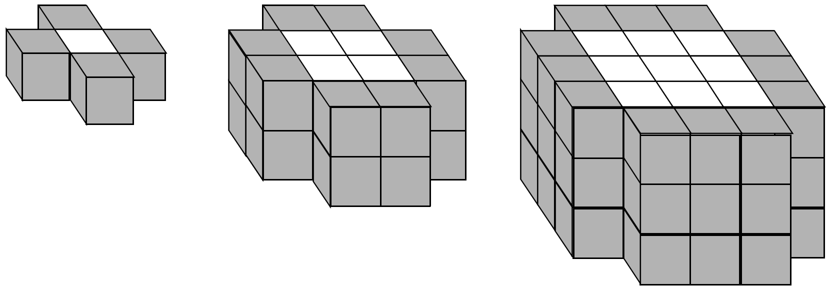
Figuur 4 bevat een opgave over het beschrijven van de regelmaat in een stippenpatroon en de uitwerking van een leerling [9]. Hoewel je dit probleem natuurlijk niet tegenkomt in het dagelijks leven, is het wel voorstelbaar en uitdagend. Hoe kun je bijvoorbeeld weten hoeveel grijze en zwarte stippen er zijn voor N = 12345?

Het leerlingenwerk onderaan in figuur 4 geeft aan hoe je zo'n opgave op verschillende manieren kunt aanpakken. De leerling geeft voor de zwarte stippen eerst een recursieve omschrijving in woorden en voor de grijze een directe omschrijving in een mengvorm van natuurlijke taal en formuletaal. Vervolgens geeft ze twee directe formules in een preformele notatie.
Als docent kun je de verschillende oplossingen van leerlingen aangrijpen om strategieën naast elkaar te zetten en de voor- en nadelen tot onderwerp van gesprek te maken. Vragen als 'bij het hoeveelste figuur zijn er meer dan 1 miljoen grijze stippen?' leiden tot vergelijkingen, die eveneens op verschillende niveaus van formalisering kunnen worden opgelost. Ook kan een uitdrukking gevraagd worden voor het totale aantal stippen. Dat is gelijk aan het aantal grijze en het aantal zwarte samen:

$$N^2 = (2N - 1) + (N - 1)^2$$

Een mooie algebraïsche identiteit!

Een vergelijkbare maar iets complexere opgave vinden we in het eerste artikel van de algebragroep van het W12-16-project [10]. De opgave betreft allereerst het vinden van algebraïsche uitdrukkingen voor de aantallen grijze en witte blokjes als functie van het rangnummer van de bouwsels in figuur 5.
Het opstellen van zo'n uitdrukking is een algebraïsche modelleeractiviteit. De vraag of het aantal witte blokjes het aantal grijze ooit zal inhalen – en zo ja, wanneer – leidt tot een meer dynamische kijk op de situatie: het idee van de 'winnende' formule. Het rangnummer krijgt het karakter van een veranderlijke die de natuurlijke getallen doorloopt. Deze situatie kan ook leiden tot denken over evenredigheid en orde van grootte van groei.



figuur 5: Blokkenbouwsels

In hoofdstuk 1 zijn patronen en structuren als een aspect van algebra beschreven aan de hand van een vergelijkbaar probleem over de constructie van spanten uit losse buizen. Vanwege de mogelijkheden die dergelijke problemen bieden om zelf representaties te ontwikkelen en regelmaat te beschrijven op verschillende manieren en niveaus van formalisering, is het belangrijk dat regelmaat, patroon en structuur in het algebraonderwijs een grotere plaats krijgen. Door een algemene formule te vinden ervaren leerlingen de kracht van de algebra. Uitnodigingen voor generalisatie liggen voor de hand. Bij het maken van tabellen, zowel recursief als direct gedefinieerd, kan desgewenst een spreadsheetprogramma van pas komen. Het zelf ontwerpen van patronen met bijbehorende formules kan een productieve en uitdagende slotactiviteit vormen van onderwijs rond patronen en structuren. Dergelijk onderwijs draagt bij aan het ontwikkelen van een rijker beeld van algebra.

4.4 Formules en variabelen

Formules zijn het hart van de schoolalgebra. In de tweede fase van havo en vwo komen formules veelvuldig voor. Het is dan ook belangrijk om in de onderbouw van havo en vwo een goed fundament voor het formulebegrip te leggen. Daarbij spelen variabelen natuurlijk een rol.

Bij het formulebegrip in de onderbouw van havo en vwo verdient een drietal aspecten nadere aandacht: het opstellen van een formule, het objectkarakter van een formule en de structuur van een formule. Het opstellen van een formule bij een situatie komt in feite neer op het maken van een algebraïsch model bij die context. Dit modelleerproces is niet eenvoudig: er worden variabelen gekozen, aannames gedaan en soms vereenvoudigingen gemaakt. We pleiten ervoor het modelleren een grotere plaats te geven door het model minder vaak kant-en-klaar te presenteren. Dit vraagt ook om klassikale aandacht: de docent kan bijvoorbeeld de beperkingen van het model aan de orde stellen en (impliciete) aannames bespreken die bij het modelleren zijn gemaakt. Situaties van patroonherkenning, zoals ze in de vorige paragraaf aan de orde kwamen, zijn geschikte uitgangspunten voor het opstellen van formules.

Het tweede aandachtspunt is het objectkarakter van een formule. Tijdens het modelleren gebruiken leerlingen vaak in eerste instantie actietaal. In het voorbeeld van figuur 5 zou een formulering bijvoorbeeld kunnen luiden: ‘Het aantal witte blokjes bepaal je zo: je pakt het rangnummer en doet dat tot de derde macht’. Als deze acties in de vorm van een formule worden gegoten, heeft deze formule voor de leerling vaak het karakter van een ‘recept’, een stappenplan om het rekenproces te beschrijven. De formule is dan een compacte vorm van de actietaal. In dat stadium zijn woordformules bruikbaar, met variabelenamen die verwijzen naar de context:

AantalWitte = Rangnummer-tot-de-derde

Als een formule eenmaal tot stand is gekomen, moet er vaak iets mee gedaan worden. De formule moet bijvoorbeeld worden herschreven om vergelijken met een andere formule beter mogelijk te maken. Er moet een vergelijking mee worden opgelost, of de inverse formule moet worden bepaald om terug te kunnen rekenen [10]. In zo’n situatie zijn woordformules overigens niet handig meer; het hanteren van enkelvoudige symbolen blijkt dan eenvoudiger en efficiënter te zijn. Verder is het van belang dat de formule als een object wordt beschouwd: de formule is niet meer een gecomprimeerd rekenproces, maar een ‘ding’ waarop je bewerkingen kunt uitvoeren. Denk bijvoorbeeld aan het uitwerken van haakjes om de formule op een andere manier te schrijven. Het schakelen tussen het proces- en het object-perspectief is in hoofdstuk 1 als één van de moeilijkheden van algebra geïdentificeerd; het *objectkarakter* van formules verdient bij het formulebegrip aandacht, bijvoorbeeld door situaties te gebruiken waarin formules in andere formules worden gesubstitueerd. Hoofdstuk 7 bevat hiervan enkele voorbeelden.

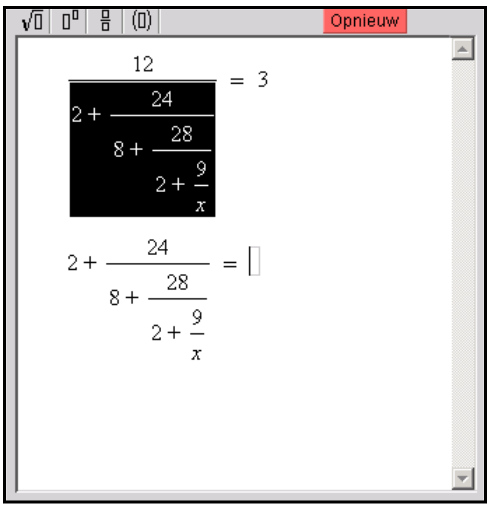
Behalve dat leerlingen een formule als algebraïsch object gaan beschouwen, is het van belang dat ze in staat zijn de structuur ervan te doorzien. Een hulpmiddel daarbij is het afdekken van een deel van de formule, met je vinger, met een ‘bordje’, of door er een kring omheen te zetten. Een bekend voorbeeld van een vergelijking die daarmee eenvoudiger wordt, is bedacht door Wenger [11]:

$$v \cdot \sqrt{u} = 1 + 2v \cdot \sqrt{1+u}$$

Leerlingen en ook studenten blijken vaak niet in staat te zijn deze vergelijking naar *v* op te lossen. Als je echter de structuur van de vergelijking doorziet en je realiseert dat de twee wortels niets met *v* te maken hebben, kun je die met een gerust hart afdekken:

$$v \cdot \square = 1+2v \cdot \bigcirc$$

Zo wordt zichtbaar dat om een gewone lineaire vergelijking in *v* gaat, waarbij het er tijdens het oplossen naar *v* niet toe doet wat er binnen de rechthoek en de ellips staat. Deze stap brengt de oplossing een stuk dichterbij, maar vraagt wel om inzicht in de structuur van de uitdrukkingen aan de beide kanten van het = teken. Het gaat dus om de vaardigheid om binnen de uitdrukking als totaalobject relevante deelobjecten te kunnen identificeren [12]. Dit vermogen om globaal te kijken naar formules en expressies en daarin structuur te zien maakt deel uit van wat in hoofdstuk 1 met symbol sense is aangeduid. Symbol sense omvat het vermogen om formules te ‘lezen’. Leerlingen kunnen dit ontwikkelen door geconfronteerd te worden met een variëteit aan formulestructuren waarin deelexpressies een eigen betekenis en naam hebben. Het identificeren van deelexpressies vormt de achtergrond van de zogeheten bordjesmethode voor het oplossen van vergelijkingen, die ook in de schoolboeken gangbaar is. Voor het gebruik van deze aanpak is een applet beschikbaar (zie figuur 6 en www.wisweb.nl).

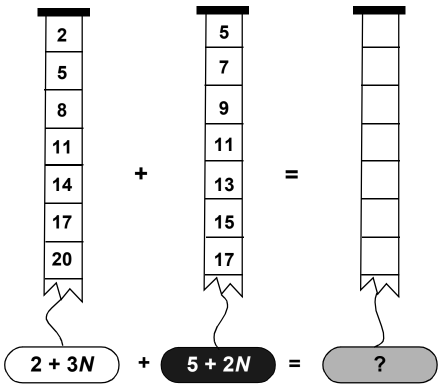


figuur 6: Het applet ‘Vergelijkingen oplossen met bordjes’

Aandacht voor het formulebegrip brengt ook een uitdieping van het *variabelebegrip* met zich mee. Waar variabelen voor leerlingen vaak functioneren als plaatshouder waar een getalswaarde kan worden ingevuld, of als onbekende waarvan de waarde door het oplossen van een vergelijking kan worden gevonden, komen in formules ook andere aspecten van het variabelebegrip naar voren. Bij het voorbeeld van de winnende formules is het dynamische aspect van de variabele genoemd: de variabele heeft daar het karakter van een *veranderlijke*, waarbij je je niet één – al dan niet bekende – waarde uit het domein voorstelt, maar eerder een grootheid die de hele domeinverzameling doorloopt. Ook de variabele als *generalisator* komt bij het werken met formules naar voren: de variabele representeert de hele verzameling van getallen. In figuur 7 wordt dit gevisualiseerd met stroken getallen. Het werken met dergelijke getallenstroken maakt zichtbaar dat het gaat om relaties die gelden voor *alle* getallen. Door de stroken van labels te voorzien wordt de stap naar de symbolische algebra op een natuurlijke manier gezet.
Figuur 7 maakt duidelijk dat de formule

$$(2 + 3N) + (5 + 2N) = 7 + 5N$$

niet geldt voor één specifieke waarde van N, maar voor alle N uit het domein van de natuurlijke getallen. N staat dus niet voor één van die getallen, maar voor de hele verzameling $\{0, 1, 2, \ldots\}$.



figuur 7: Stroken als aanleiding voor een andere kijk op variabelen [13]

Om in de onderbouw van havo en vwo tot een beter gefundeerd formulebegrip te komen, pleiten we dus voor aandacht voor het opstellen van formules, voor het gebruiken van formules als objecten en voor het herkennen van structuur van formules. In samenhang daarmee zal het variabelebegrip worden verbreed met de variabele als veranderlijke en als generalisator.

4.5 Generaliseren en bewijzen

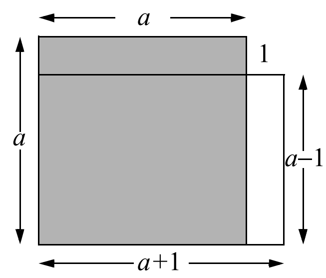
In de twee vorige paragrafen is aangegeven hoe patronen en structuren aanleiding kunnen geven tot generalisatie door het opstellen van een formule. Generaliseren is een belangrijk aspect van algebra, waarin vanuit individuele gevallen de sprong wordt gemaakt naar het algemene geval, of liever naar de klasse van alle gevallen. Het generaliseren vraagt om aandacht voor het verschil tussen ‘er is een waarde van x zodat...’ en ‘voor alle waarden van x geldt dat ...’, een onderscheid dat in wiskundige redeneringen belangrijk is. Voorbeelden waarin het domein bestaat uit natuurlijke getallen zijn wellicht toegankelijker voor generalisatie dan voorbeelden met een reëel domein.

Bij het algebraïsch modelleren en generaliseren zijn herkenbare contexten, betekenisvolle problemen en ruimte voor het ontwikkelen van eigen strategieën, denkmodellen en notaties belangrijk; in eerste instantie belangrijker dan algemene, formele bewijsvoering. Toch pleiten we ervoor om in de onderbouw van havo en vwo ook aandacht te besteden aan bewijzen. De kracht van de algebra bestaat er immers onder meer uit dat compact genoteerde sluitende redeneringen kunnen

worden geformuleerd, die zekerheid geven over een bepaald verschijnsel. Hoewel dit een hoog onderwijsdoel is, is het streven om leerlingen hiervan iets te laten ervaren. We geven twee voorbeelden: merkwaardige producten en de abc-formule.
De wereld van de getallen biedt op een natuurlijke manier toegang tot de wereld van de algebra. Merkwaardige rekenpatronen kunnen aanleiding zijn tot algebraïsche bewijzen. In het rijtje hieronder bijvoorbeeld is het verschil van twee producten steeds gelijk aan 1:

$$9 \times 9 - 10 \times 8 = 1$$
$$10 \times 10 - 11 \times 9 = 1$$
$$11 \times 11 - 12 \times 10 = 1$$

Verbazing over dit verschijnsel kan worden uitgebuit. Kan dit rijtje worden voortgezet? Hoe groot is 999×1001 ongeveer? Blijft er steeds 1 uit het verschil komen? Hoe kun je dat zeker weten? Hoe gaat een regel die begint met $9\frac{1}{2}$ in plaats van 9 verder? Hoe kun je een algemene regel formuleren en aantonen? Door dergelijke vragen in de klas aan de orde te stellen, kan de docent uitnodigen tot bewijsvoering. Daarbij komt veel kijken: een stuk formalisering om de redenering te noteren, generalisatie over alle (gehele, rationale?) getallen en abstractie van de rekencontext. In dit geval wordt zekerheid verkregen door de expressie $a^2 - (a+1) \cdot (a-1)$ te onderzoeken. Met een vermenigvuldigtabel kan $(a+1) \cdot (a-1)$ worden uitgewerkt.
Een meetkundig bewijs (figuur 8) is hierop een mooie aanvulling.



figuur 8: Een plaatje bij $a^2 - (a+1) \cdot (a-1) = 1$

Voor wie nog verder wil en kan, ligt de volgende uitbreiding naar andere gevallen voor de hand:

$$9 \times 9 - 11 \times 7 = 4$$
$$10 \times 10 - 12 \times 8 = 4$$
$$11 \times 11 - 13 \times 9 = 4$$

Dan kan de uiteindelijke 'generalisatie der generalisaties' leiden tot:

$$a^2 - (a+b) \cdot (a-b) = b^2$$

en daarmee tot het bekende merkwaardige product $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$. Dit resultaat moet natuurlijk ook bewezen worden, en dat kan zowel algebraïsch als meetkundig [14]. Dit merkwaardige product is handig om uit het hoofd te kennen, omdat je er dan wellicht eerder aan denkt het te gebruiken als het van pas komt. Parate kennis kan een oriëntatiebasis vormen bij het probleemoplossen.

Een tweede voorbeeld in dit pleidooi voor algebraïsche bewijzen betreft de abc-formule voor het oplossen van kwadratische vergelijkingen. In het huidige onderwijs komt deze meestal in klas 3 aan de orde door de formule te poneren en eventueel te controleren voor enkele concrete gevallen. Dat is een onbevredigende situatie, zeker als een doelstelling van het wiskundeonderwijs is dat leerlingen leren op eigen denkkracht te vertrouwen in plaats van op het gezag van anderen of van het boek. Daar komt bij dat deze aanpak leidt tot de vorming van een oplossingsmethode die weinig flexibel is en niet altijd efficiënt. Van 't Riet spreekt in dit verband van een 'set', het vastzit-

ten in een bepaalde oplossingsmethode die leidt tot rigide oplossingsgedrag [15].
Er zijn verschillende manieren om de abc-formule op een andere manier voor het voetlicht te brengen. Om te beginnen is het onderzoeken van randgevallen de moeite waard. Wat geeft de abc-formule als $c = 0$? Kun je zien dat dat correct is? En als $b = 0$? Ook kan door terugrekenen worden nagegaan dat de formule inderdaad oplossingen geeft van de vergelijking.

De traditionele afleiding van de abc-formule bestaat uit kwadraatafsplitsing in de gegeneraliseerde kwadratische vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$. Er is echter een alternatief [16].
Laten we a gelijk aan 1 nemen: $x^2 + bx + c = 0$. Als we het linkerlid kunnen ontbinden, zijn we klaar. Gezocht zijn dus p en q zodat

$$(x+p)\cdot(x+q) = x^2 + bx + c$$

Uitwerken van haakjes geeft:

$$x^2 + (p+q)\cdot x + pq = x^2 + bx + c$$

Omdat deze gelijkheid voor alle x moet kloppen, weten we:

$$p + q = b$$

en

$$p \cdot q = c$$

Zo krijgen we het zogeheten som-product probleem: hoe vind je p en q als de som b en het product c gegeven zijn? Dit historische probleem, dat het beste al eerder behandeld kan zijn, kan door leerlingen op verschillende manieren en verschillende niveau's van formalisering worden aangepakt en vormt dus het fundament voor zekerheid over de abc-formule. Het geval dat $a \neq 1$ is vervolgens niet moeilijk meer.
Overigens kan men zich afvragen of de abc-formule al in klas 3 aan de orde moet komen. In plaats daarvan kunnen leerlingen kwadratische vergelijkingen oplossen door kwadraatafsplitsing of ontbinding in factoren. De abc-formule kan dan in klas 4 aan de orde komen, en met name in de N-stroom op bovenstaande manier worden onderbouwd. Voor de M-stroom is het voldoende kwadratische vergelijkingen met de grafische rekenmachine op te lossen.

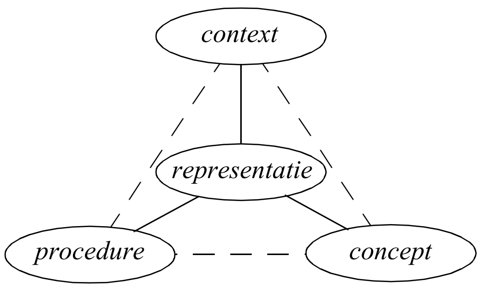
Hoe moeilijk bewijzen ook is, deze twee voorbeelden geven aan dat er in de stof van de onderbouw van havo en vwo wel kansen liggen om algebraïsche bewijzen een plaats te geven. De kracht van algebra als uitdrukkingsmiddel voor compacte en sluitende redeneringen mag voor deze doelgroep niet onderbelicht blijven.

4.6 Een gedifferentieerde toekomst

Hoe zou de toekomst van het algebraonderwijs in de onderbouw van havo en vwo eruit kunnen zien? Op verschillende plaatsen in dit hoofdstuk is betoogd dat de leerlingen een te arm beeld van algebra krijgen, meer uitdaging nodig hebben en beter voorbereid moeten worden op de tweede fase. Er is aangegeven op welke manier hierin verandering kan worden gebracht. Hierbij moeten we echter niet uit het oog verliezen dat de leerlingenpopulatie van de onderbouw h/v vrij heterogeen is. Bovendien zijn er grote verschillen tussen de voorkennis die leerlingen nodig hebben voor de tweede fase van havo CM en die van vwo NT. Daarom pleiten we voor meer differentiatie. Omdat dit in een vroeg stadium niet wenselijk en niet goed mogelijk is, pleiten we ervoor de huidige aanpak in klas 1 en 2 in grote lijnen te handhaven: via contexten-tabellen-grafieken-formules worden informele strategieën geleidelijk geformaliseerd en wordt het algebraïsch begrippenapparaat ontwikkeld. Enige aandacht voor patronen en structuren en voor bewijzen is daarbij wel gewenst.
In de derde klas liggen er meer mogelijkheden voor differentiatie. In deze slotparagraaf werken we deze mogelijkheden nader uit, niet vanuit inhoudelijke lijnen zoals patroonherkenning of formules, maar vanuit een meer theoretisch model voor de algebraïsche activiteit van de leerling,

aan de hand waarvan de differentiatiemogelijkheden in de derde klas van havo en vwo worden geconcretiseerd.

Volgens het model, geschematiseerd in figuur 9, begint algebraïsche activiteit met een probleemsituatie of context. Vervolgens wordt daarbij een geschikte representatie ontworpen, zoals bijvoorbeeld een formule of een tabel. Met die representatie worden algebraïsche procedures uitgevoerd, bijvoorbeeld het oplossen van een vergelijking. Bij het uitvoeren van die procedure spelen ook conceptuele elementen een rol. Een goed formulebegrip helpt bijvoorbeeld bij het kiezen van de oplossingsstrategie. Anderzijds kan het ontwikkelen van een procedure ook bijdragen aan de begripsontwikkeling. We zien dus een samenspel tussen context, representatie, procedure en concept. Het idee is nu dat de voorgestelde differentiatie in klas 3 voor elk van deze vier elementen een accentverschuiving inhoudt, die van de toekomstige leerling met een havo-M profiel via vwo-M en havo-N naar vwo-N loopt. Deze accentverschuivingen zouden, nu de kerndoelen onderbouw veel ruimte aan scholen geven, op middellange termijn – zeg de komende vijf jaar – gestalte kunnen krijgen.



figuur 9: Model voor algebraïsche activiteit

- *Context*
  De context is de probleemsituatie die aanleiding vormt tot de algebra. Deze kan afkomstig zijn uit het dagelijks leven, uit andere vakken, uit andere deelgebieden van de wiskunde zoals de wereld van getallen of de meetkunde, of uit de algebra zelf. Belangrijk is dat de context door de leerlingen als uitdagend, 'echt' en betekenisvol wordt ervaren.
  In de toekomst kan differentiatie naar context in klas 3 plaatsvinden door het type probleemsituatie dat wordt gebruikt. Voor de toekomstige havo-M leerling zijn contexten uit het dagelijks leven geschikt. Voor vwo-M zijn contexten uit de levenswetenschappen passend. Voor de toekomstige havo-N leerling is de techniek een rijke bron van probleemsituaties, terwijl voor vwo-N de exacte vakken en de wiskunde zelf aanleiding zijn om algebra te ontwikkelen. Denk bijvoorbeeld aan een meetkundig probleem, zoals het snijden van een cirkel met een lijn, dat aanleiding is tot algebra. Op het havo staat bruikbaarheid voorop, terwijl op het vwo meer aandacht besteed kan worden aan generaliseren, abstraheren en bewijzen.

- *Representatie*
  De probleemsituatie moet op een of andere manier worden gerepresenteerd. Bekende representatievormen zijn tabellen, grafieken en formules, maar ook schema's, schetsen en vergelijkingen zijn representaties. Binnen de algebra zijn expressies en formules belangrijke representatievormen. De leerling komt van een context tot een representatie door modelleren, mathematiseren. In het samenspel tussen context, concept en procedure zijn de representaties als het ware de voertuigen, die algebraïsche activiteit mogelijk maken. Daarom nemen ze in figuur 9 een centrale positie in.
  In de toekomst kan differentiatie naar representatie in klas 3 plaatsvinden door op verschillende manieren met expressies en formules om te gaan. Voor de toekomstige havo-M leerling ligt de nadruk op het gebruiken van deze representaties, en zijn formules eerder recepten voor rekenprocedures dan zelfstandige objecten. Grafische representaties zijn minstens zo belangrijk. Toekomstige havo-N en vwo-M leerlingen zijn niet alleen gebruiker maar ook ontwerper van representaties. Grafieken

en formules staan naast elkaar. Voor het vwo-N profiel krijgen formules als objecten van studie meer nadruk en ligt het accent op inzicht in de structuur van algebraïsche expressies en op symbol sense. Grafische voorstellingen krijgen een ondersteunende rol.

- *Procedure*
  Met de algebraïsche representatie wordt een procedure uitgevoerd, die hopelijk in de richting van een oplossing voert. Denk aan het herschrijven van een expressie, het oplossen van een vergelijking, of het uitwerken van haakjes. Kenmerk van zo'n procedure is dat die de context ontstijgt en zich afspeelt in de wereld van de algebra. Een tweede kenmerk is dat zo'n procedure tot op zekere hoogte op de automatische piloot wordt uitgevoerd, dus zonder stil te staan bij de algebraïsche ondergrond van de te zetten stappen. Wel is het belangrijk dat leerlingen, wanneer die automatische piloot hapert, kunnen teruggevallen op een denkmodel dat steun geeft bij het (re-)construeren van de procedure. In sommige gevallen kan de procedure worden uitgevoerd met ICT-gereedschap.
  Ook ten aanzien van het uitvoeren van procedures zijn er verschillen in behoeften en mogelijkheden, en kan differentiatie in klas 3 plaatsvinden. Voor toekomstige leerlingen van havo-M is de behoefte aan procedurele vaardigheden met de hand beperkt. Oefening kan zich richten op eenvoudige gevallen. Voor vwo-M komt daar bij dat een aantal algebraïsche procedures, zoals het oplossen van ingewikkelde vergelijkingen en het bepalen van snijpunten en nulpunten, kan worden overgelaten aan de grafische rekenmachine. Voor toekomstige havo-N leerlingen, en vooral voor vwo-N, is de behoefte aan algebraïsche vaardigheid met de hand groter. Dat vraagt dus om meer aandacht en oefening, al brengen automatismen en routines het gevaar met zich mee van betekenisloze symbolische manipulaties die stuklopen bij de minste variatie. In hoofdstuk 7 wordt nader op inzicht en oefening ingegaan.

- *Concept*
  Bij het uitvoeren van procedures spelen ondanks de ontwikkelde routine ook conceptuele aspecten een rol. Vaak moet je je realiseren welke kant je op wilt. Dan gaat het dus om strategische aspecten. Daarnaast liggen onder de procedures vaak conceptuele inzichten, die moeten worden aangesproken of die hinderen als ze ontbreken. Bij het uitwerken van haakjes is bijvoorbeeld het rechthoeksmodel handig om op terug te vallen als je in de war raakt of als de situatie afwijkt van het gangbare. Bij het oplossen van vergelijkingen moet je een idee van equivalentie hebben om de stappen correct uit te kunnen voeren. Ook speelt hier parate kennis een rol, evenals meta-inzichten, zoals gevoel voor abstractie en generalisatie, inzicht in structuur van formules en expressies, noties van wat een functie voorstelt.
  Ook waar het gaat om conceptueel inzicht kan in de toekomst differentiatie in klas 3 plaatsvinden. Voor de toekomstige havo-M leerling kan de conceptuele diepgang beperkt blijven. De variabele kan hier bijvoorbeeld een onbekende of een plaatshouder zijn en een formule kan gezien worden als een beschrijving van een rekenproces. De algebra zal in het algemeen sterk gekoppeld zijn aan voorstelbare concrete situaties. Voor het vwo-M profiel kan men wat verder gaan en bijvoorbeeld meer aandacht besteden aan de variabele als generalisator of veranderlijke. Bij havo-N en vwo-N moet dat zeker gebeuren en er is ook ruimte voor inzicht in de structuur van formules en voor generalisatie en abstractie. Denk ook aan het expliciteren van het begrip equivalentie bij het oplossen van vergelijkingen. Voor vwo-N is aandacht voor algebraïsche bewijzen gewenst, om op die manier de kracht van de algebra zichtbaar te maken.

Terugkijkend op dit hoofdstuk als geheel is een eerste constatering dat er de afgelopen decennia in de onderbouw van havo en vwo veel is veranderd. Onder invloed van projecten zoals W12-16 ligt de nadruk tegenwoordig sterk op het gebruik van betekenisvolle contexten, op algebra van verbanden en functies, en op tabellen, grafieken en formules als representaties. Generaliseren, abstraheren en het ontwikkelen van routineuze procedurele vaardigheden staan minder centraal. Hoewel dit in principe positieve ontwikkelingen zijn, wordt de havo-vwo leerling hiermee niet altijd recht gedaan. De onderbouw kan een rijker en uitdagender beeld van algebra geven en kan beter anticiperen op de algebraïsche inzichten en vaardigheden zoals die in de bovenbouw van met name de N-profielen worden gevraagd. Zo is het met name voor deze doelgroep gewenst om aandacht te besteden aan het herkennen en formuleren van patronen en structuren, aan het formulebegrip en het variabelebegrip, en aan generaliseren en bewijzen. Daarbij vormen discrete algebra en algebra vanuit meetkundige context geschikte invalshoeken. Ook is meer aandacht voor het oefenen van algebraïsche vaardigheden noodzakelijk.

Dit wil niet zeggen dat de contextrijke en betekenisvolle benadering van algebra moet worden verlaten. Met name in klas 1 en 2 is die geschikt. Differentiatie naar schooltype en toekomstig profiel kan in klas 3 plaatsvinden. Dat vraagt om schoolorganisatorische maatregelen in klas 3, bijvoorbeeld in de vorm van 'voorsorteren' op schooltype en op M- en N-stroom. Hoewel aan te vroege differentiatie bezwaren kleven, is dit wel een manier om een betere aansluiting met de tweede fase te realiseren en om de wiskundeles rijker en uitdagender te maken voor de meer getalenteerde leerlingen.

Literatuur

1. Kindt, M. (2000): 5 maal 20 jaar algebra. *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands Wiskunde-onderwijs, 20*(2), 16-18.
2. Wijdenes, P. (1955). *Beknopte algebra I*, dertiende druk. Groningen/Djakarta: P.Noordhoff N.V.
3. Vredenduin, P.J.G. (1969). *Algebra voor de brugklas vwo-havo*. Groningen: Wolters-Noordhoff.
4. Reichard, L.A. en anderen (2003). *Getal en ruimte 1 havo/vwo*. Houten: EPN.
5. Goddijn, A. & Kindt, M. (2001). Knelpunten en toekomstmogelijkheden voor de wiskunde in het VO. *Tijdschrift voor didactiek der bèta-wetenschappen, 18*, 59-94.
6. Team W12-16 (1992). *Achtergronden van het nieuwe leerplan wiskunde 12-16, Band 1*. Utrecht: Freudenthal Instituut.
7. Van der Eijk, E., Kok, D. & Schaberg, G. (2004). Werkboek Algebra Plus voor klas 1. Groningen: Wolters-Noordhoff.
8 Wijers, M., Roodhardt, A.,Reeuwijk, M. van, Dekker, T., Burrill, G., Cole, B.R. & Pligge, M.A. (2006). Building formulas. In Wisconsin Centre for Education Research & Freudenthal Institute (Eds.), *Mathematics in Context*. Chicago, USA: Encyclopedia Britannica Inc.
   Reeuwijk, M. van & Wijers, M. (1994). Formules en variabelen in context. *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs, 13*(3), 4-7.
9. Palha, S. & Van Reeuwijk, M. (2002). Zie je het verband? *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs, 22*(1), 12-15. Voor het werken met stippenpatronen is ook het applet Stippelalgebra ontwikkeld, beschikbaar op www.wisweb.nl.
10. Algebragroep W12-16 (1991). En de variabelen, hoe staat het daarmee? *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs, 10*(2), 12-19.
    Algebragroep W12-16 (1991). Formules maken en gebruiken. *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs, 11*(1), 57-63.
11. Wenger, R.H. (1987). Cognitive science and algebra learning. In A. Schoenfeld (Ed.) *Cognitive science and mathematical education*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
12. Gravemeijer, K. (1990). Globaal kijken, een kenmerk van algebraïsche deskundigheid. *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs, 10*(2), 29-33.
13. Kindt, M. (2000). Discrete algebra. *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands Wiskunde-onderwijs, 19*(4), 2000, 31-36. Er is ook een applet voor het werken met stroken beschikbaar via www.wisweb.nl.
14. Kindt, M. (1999). Legpuzzel-algebra. *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands Wiskunde-onderwijs, 19*(2), 17-22.
    Kindt, M. (2003). *Oefeningen in algebra*. Utrecht: Freudenthal Instituut.
15. Van 't Riet, S.P.(1979). Setvorming en wiskundeonderwijs I. *Euclides 55*(2), 41-49.
16. Kindt, M., Kooij, H. van der & Roodhardt, A. (1991). *Brugboek Differentiëren*. Utrecht: Freudenthal Instituut.
    Kindt, M. (1991). Stoffige Algebra? *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands Wiskunde-onderwijs, 10*(4), 4-8.

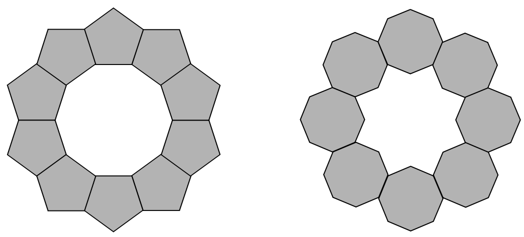
5 Algebra in de tweede fase van havo en vwo

Paul Drijvers

Algebra en de tweede fase, dat is een wat tweeslachtige verhouding. Enerzijds maken leerlingen gebruik van hulpmiddelen zoals formulekaart en grafische rekenmachine, anderzijds worden ze geacht in staat te zijn algebraïsche bewerkingen met de hand uit te voeren. Algebra staat niet op het ‘hoofdmenu’ van wiskunde in de tweede fase – dat immers bestaat uit analyse, meetkunde en kansrekenen/statistiek – terwijl algebraïsche vaardigheden toch op allerlei momenten onmisbaar zijn. Ook verschillen de vaardigheden, die leerlingen in de toekomst nodig hebben, sterk per profiel. Dit alles leidt tot een hybride en onbevredigende onderwijspraktijk.

5.1 Algebra in een ander verband

In het artikel ‘Discrete algebra’ beschrijft Martin Kindt een observatie in een vwo-4 klas [1]. De leerlingen maakten met het meetkundeprogramma Cabri kransen van regelmatige veelhoeken (figuur 1).



krans van 10 vijfhoeken krans van 8 achthoeken

figuur 1: Kransen van veelhoeken

Na wat experimenteren leek het erop of het steeds mogelijk is een krans te maken, voor sommige veelhoeken lukte het zelfs op meer manieren. Eén van de inleidende vragen was om uit te zoeken hoe de hoek van een regelmatige veelhoek afhangt van het aantal hoekpunten. Een leerling liet de observator zijn formule zien:

$$\frac{(\text{aantal hoeken} - 2) \times 180}{\text{aantal hoeken}}$$

Op de vraag of hij de formule korter kon opschrijven – de observator wilde één letter voor ‘aantal hoeken’ – antwoordde hij gretig: ‘je kan dit (= aantal hoeken) tegen dit wegstrepen.’ ‘Oh, ja, wat hou je dan over?’ Het voorstel werd snel ingetrokken. Vervolgens stuurde de observator aan op de rondwandelstrategie: als je één compleet rondje om de N -hoek loopt, maak je N keer dezelfde draai. Het aantal graden van een buitenhoek is $360/N$ en van een binnenhoek dus $180 - 360/N$. De leerling vond dit een inzichtelijke formule, maar wilde weten of die overeenkomt met de eerdere, dus of $\frac{(N-2) \times 180}{N}$ op hetzelfde neerkomt als $180 - \frac{360}{N}$. Dat bleek bijna onoverkomelijk moeilijk, terwijl dit zeker niet de minste leerling was. Na een tip van de observator om N uit de noemer te laten verdwijnen vermenigvuldigde de leerling links en rechts met N, ging daarbij nog een keer in de fout en kwam uit op een eenvoudige identiteit, die na zeer diep nadenken tenslotte werd doorzien.

Tot zover de observatie van Martin Kindt, die aangeeft waar de problemen liggen met algebra in de tweede fase van havo en vwo: leerlingen missen de algebraïsche vaardigheid waaraan in een ander verband – een nieuwe, geïntegreerde context – behoefte is. Hierdoor vormt algebra een obstakel dat de voortgang bij de probleemaanpak kan belemmeren. Over deze kwestie gaat dit hoofdstuk. In de volgende paragraaf brengen we eerst de problematiek in kaart.

5.2 Aarzelingen bij algebraïsche vaardigheden

Op verschillende manieren komen de aarzelingen over het algebraonderwijs in de tweede fase hv aan het licht. Om te beginnen zijn *wiskundedocenten* vaak niet tevreden. De onvrede richt zich voornamelijk op de gebrekkige beheersing van algebraïsche basisvaardigheden van leerlingen, zoals die uit de observatie in de vorige paragraaf naar voren komt. Een tweede illustratie van dit verschijnsel (zie [2]) betreft het herleiden van

$$\frac{y^2 + 7y + 6}{y^2 + 8y + 12}$$

Een leerling pakt dat als volgt aan. De eerste stap is teller en noemer delen door y^2 :

$$\frac{7y + 6}{8y + 12}$$

Vervolgens haal je 7y van 8y af, want 8y is groter dan 7y:

$$\frac{6}{y + 12}$$

Dan trek je die 6 in de teller af van 12 in de noemer. In de teller blijft niets over, dus die verdwijnt. Het antwoord is dus $y + 6$.

In hoofdstuk 1 is al op de hardnekkigheid van dergelijke fouten gewezen. In dit voorbeeld zou het overigens kunnen helpen als leerlingen de formule eerst ergens voor gebruiken. Als ze alleen al de getallen 0, 1, 2, 3 en 4 zouden substitueren en zouden ontdekken dat de waarden dan gelijk zijn aan $1/2$, $2/3$, $3/4$, $4/5$ en $5/6$, dan zou dat de kans op dergelijke fouten al verkleinen.

In een kleine peiling onder docenten in 2000 kwam naar voren dat met name het herleiden van formules en het substitueren van een formule voor een variabele vaardigheden zijn die men van belang vindt voor vwo-4 en die leerlingen onvoldoende beheersen [3]. Tegenwoordig pleiten veel docenten voor meer oefening:

> Ik dring er ook sterk op aan dat we weer de basistechnieken (rekenkunde!, algebra, analyse) van jongs af aan brengen. De toonladders en de drieklanken van de aanstaande pianist. Daar moet je jong mee beginnen.
> (H. Pfalzgraff, 2004, *WiskundE-brief, 311*, www.digischool.nl/wi/WiskundE-brief/)

Ook de *examenresultaten* geven stof tot nadenken. Items waarin algebraïsche vaardigheden voorkomen, scoren vaak slechter dan andere onderdelen. In een opgave van het centraal examen havoA12 (eerste tijdvak 2003) zijn bijvoorbeeld een kostenfunctie *TK* en een opbrengstfunctie *TO* gegeven. De winstfunctie *W* is het verschil van die twee:

$$TK = 0{,}1q^3 - q^2 + 6q + 6$$
$$TO = 6q$$
$$W = TK - TO$$

De vraag is nu om de afgeleide van *W* te bepalen en daarmee de productie te berekenen waarbij de winst maximaal is. Het antwoord moet een geheel aantal zijn. De oplossing komt neer op de volgende stappen: de formule van *W* opstellen, deze derdegraadsfunctie differentiëren, en de waarden van q vinden waarvoor de afgeleide gelijk is aan 0. De te differentiëren functie is een gewone veeltermfunctie en de vergelijking kan worden opgelost met de grafische rekenmachine. Toch is de gemiddelde score van dit onderdeel slechts 18% van het maximum. Hoe komt dat? Waarschijnlijk kunnen veel leerlingen de deelstappen, het differentiëren en het oplossen van de vergelijking met de GR, afzonderlijk wel correct uitvoeren. De slechte score zou veroorzaakt kunnen worden door gebrek aan overzicht op het oplossingstraject als geheel [4].

Ook in de examens wiskunde B voor het havo scoren algebraonderdelen vaak niet goed. Toch is vanuit docenten de wens geuit om meer van dergelijke vragen op te nemen. Boertien [5] wijt de matige resultaten aan de stapeling van het aantal algebraïsche stappen, en noemt de invoering van het studiehuis met een teruglopend aantal contacturen als een van de mogelijke oorzaken. Hij stelt dat meer algebra op het CE van havo-B tot slechtere resultaten zou leiden.

Het centraal examen vwo B1 van 2002 (eerste tijdvak) bevat een opgave over het zwaartepunt van een kubus die wordt gevuld met water. Voor deze hoogte wordt de volgende formule opgesteld:

$$d_T = \frac{h^2 + 100}{2h + 20}$$

Vervolgens is de vraag om exact te berekenen voor welke waarde van h de waarde van d_T minimaal is. Op dit item is gemiddeld 61% van het maximale aantal punten gescoord, wat hoger is dan de score bij het vorige voorbeeld, maar beduidend lager dan die van de andere deelvragen van deze opgave [6]. Toch gaat de vraag niet 'buiten het boekje': het gaat om het toepassen van de quotiëntregel en het oplossen van een kwadratische vergelijking. Net als in de vorige examenopgave lijkt het alsof de stapeling van verschillende algebraïsche technieken tot onoverkomelijke problemen leidt.

In het *vervolgonderwijs* is men niet tevreden over de algebraïsche vaardigheden van de instromende studenten. Met name de technische universiteiten roeren zich op dit punt, onder andere door ingangstoetsen in te voeren om deficiënties van studenten op te sporen. Een voorbeeld uit een dergelijke toets is de vraag of de volgende bewering juist is:

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{y}{x}$$

Van 59 eerstejaarsstudenten werktuigbouwkunde van de Universiteit Twente, die in het najaar van 2003 deze opgave beantwoordden, zagen er slechts 19 dat deze vereenvoudiging niet correct is. In een wat ingewikkelder opgave wordt gevraagd om de volgende uitdrukking als één breuk te schrijven:

$$\frac{3a}{3a-2} - \frac{a+2}{a}$$

Ook hier is de score niet bemoedigend: 27 van de 86 eerstejaarsstudenten werktuigbouwkunde van de Technische Universiteit Eindhoven zijn in staat deze bewerking correct uit te voeren[1]. Dergelijke ervaringen leidden tot noodkreten uit het vervolgonderwijs:

> Maar dat neemt niet weg dat we telkens weer aanlopen tegen domweg gebrek aan vaardigheden in het letterrekenen, het manipuleren met formules, algebra dus. Geen ingewikkelde exercities, maar gewoon de basisvaardigheden.
> (L. van Asselt-Tax, 2004, *WiskundE-brief, 312*, www.digischool.nl/wi/WiskundE-brief/)

Al met al vormen de signalen van wiskundedocenten, van examenresultaten en uit het vervolgonderwijs reden tot zorg over de kwaliteit van het algebraonderwijs in de tweede fase. Door welke factoren wordt deze kwaliteit dan bedreigd? Behalve het feit dat school en huiswerk in het leven van leerlingen terrein verloren hebben ten opzichte van buitenschoolse activiteiten en bijbaantjes – dat is een maatschappelijk verschijnsel dat buiten het bestek van dit hoofdstuk valt – wordt in discussies vaak naar de volgende *oorzaken* verwezen:

- Het idee van het studiehuis, met veel tijd voor zelfstandig werken, heeft geleid tot wiskundelessen die steeds meer bestaan uit het maken van opgaven uit boeken die conceptuele moeilijkheden 'gladstrijken'. Er is nauwelijks plaats voor reflectie of verdieping. Welliswaar kopte de Volkskrant op 16 november 2005 'Minister zet mes in het studiehuis' en is in het artikel sprake van het 'herstellen van schadelijke effecten', maar tegelijkertijd zien we een reductie van de studielast voor met name wiskunde B in de nieuw programma's voor havo en vwo. Het valt dus te betwijfelen of de contacttijd in de toekomst zal toenemen, al biedt wiskunde D natuurlijk wel

1 Deze gegevens zijn door F. Martens gepresenteerd op het symposium 'Leerlijn algebra en ICT, van onderbouw VO tot universiteit', 25 juni 2004, Amersfoort. Het gaat hier om een ingangstoets die in oktober 2003 is afgenomen. Zie www.slo.nl.

mogelijkheden voor uitbreiding en verdieping.
- Algebraïsche vaardigheden die in de onderbouw worden geleerd, worden in de tweede fase onvoldoende onderhouden. Uitbreidingen van het algebraïsch repertoire worden weinig expliciet behandeld en geoefend. Daarbij speelt mee dat het accent in de tweede fase ligt op analyse en, in mindere mate, op meetkunde en kansrekenen/statistiek, zodat algebraïsche vaardigheid vaak eerder als een lastige bijzaak dan als hoofdonderwerp wordt beschouwd.
- Leerlingen maken gebruik van grafische rekenmachine en formulekaart. Deze hulpmiddelen verkleinen de rol van zowel de algebraïsche vaardigheden met pen en papier bij het oplossen van problemen, als die van de parate kennis die soms een rol speelt bij het herkennen van mogelijke oplossingsrichtingen.

Algebraïsche vaardigheid

basisvaardigheid	*symbol sense*
• algebraïsch rekenen	• algebraïsch redeneren
• procedurele routine	• strategische vaardigheid

figuur 2: Tweedeling binnen algebraïsche vaardigheid

Bij het analyseren van de problemen rond algebraïsche vaardigheid in de tweede fase komt het onderscheid tussen algebraïsche basisvaardigheid en symbol sense van pas, dat in hoofdstuk 1 is gemaakt. Figuur 2 geeft deze tweedeling nog een keer weer. Natuurlijk is het verschil tussen de twee kolommen niet zo zwart-wit als het schema suggereert: bij algebraïsch redeneren zal op de achtergrond ook rekenvaardigheid een rol spelen, omdat redeneren pas goed mogelijk is als je de bewerkingen enigszins ‘in de vingers hebt’. Andersom zal bij het algebraïsch rekenen ook enig redeneren nodig zijn, zeker op het moment dat de ‘automatische piloot’ hapert of als de situatie afwijkt van de gebruikelijke.
Toch kan deze tweedeling helpen de moeilijkheden met algebra in de tweede fase te lokaliseren. De klachten uit het veld en uit het vervolgonderwijs lijken zich toe te spitsen op de linkerkolom, die van de routines. In hoofdstuk 1 is echter de vraag opgeworpen of het probleem niet minstens voor een deel in het ontbreken van symbol sense ligt. En draagt het oefenen van procedurele basisvaardigheden wel zo sterk bij aan de ontwikkeling daarvan als vaak impliciet wordt aangenomen? Ook stelt de toegenomen beschikbaarheid van technologische hulpmiddelen de verhouding tussen basisvaardigheden en symbol sense verder ter discussie: het procedurele werk kan relatief eenvoudig worden uitbesteed aan een apparaat, terwijl modelvorming, strategiekeuze en interpretatie van resultaten tot de taken van de leerling blijven behoren (zie hoofdstuk 8).
In de volgende paragraaf komt eerst de ontwikkeling van algebraïsche basisvaardigheid in de tweede fase aan de orde; daarna gaan we nader in op de ontwikkeling van symbol sense.

5.3 De ontwikkeling van algebraïsche basisvaardigheid

De ontwikkeling van algebraïsche basisvaardigheid betreft de linkerkolom van figuur 2. Het doel is om een aantal basisroutines efficiënt en zonder veel fouten te kunnen uitvoeren. Over welke basisroutines gaat het? De twee belangrijkste zijn het herschrijven van algebraïsche uitdrukkingen en het oplossen van vergelijkingen. In de onderbouw hebben de leerlingen daarmee kennis gemaakt. In de tweede fase verandert er echter het een en ander. Vaak moeten tijdens het oplossingsproces meerdere stappen na elkaar worden gezet, zodat er sprake is van stapeling. Verder doet de algebra zich in een andere context voor, zoals analyse, meetkunde, kansrekenen/statistiek, natuurkunde of economie. Ook wordt het repertoire aan functies uitgebreid met bijvoorbeeld goniometrische, exponentiële en logaritmische functies, net zoals het arsenaal aan algebraïsche technieken wordt uitgebreid, onder andere met het toepassen van regels voor differentiëren.

Het herschrijven van algebraïsche uitdrukkingen (expressies, vormen) is het lastigst. Dit omvat technieken als ontbinden in factoren, haakjes uitwerken, werken met machten en wortels, breuken onder één noemer brengen, breuksplitsen en substitueren. Het oplossen van vergelijkingen is wat overzichtelijker, al blijven goniometrische vergelijkingen lastig en moet een vergelijking vaak eerst worden herschreven voor één van de standaardalgoritmen kan worden toegepast.
Het uitbouwen en onderhouden van deze basisroutines vraagt expliciete aandacht. We pleiten er dan ook voor ook in de tweede fase tijd in te ruimen voor algebraoefeningen. Dergelijke oefeningen kunnen uit een context afkomstig zijn, of een puur algebraïsch karakter hebben.
De oefeningen kunnen betrekking hebben op oude technieken die de leerlingen al geacht worden te beheersen. Van belang is wel dat het inspirerende en uitdagende opgaven zijn.

Ga van elk van de volgende uitspraken na of ze altijd waar zijn, nooit waar zijn, of soms waar zijn. Geef in het laatste geval een waarde van *a* waarvoor de bewering wel waar is, en één waarvoor de bewering niet waar is. Geef steeds een (schijn)argument om anderen ervan te overtuigen dat de bewering altijd waar is.

$$\frac{a+1}{a+2} = \frac{1}{2} \qquad \frac{2a+4}{2} = a+4$$

$$\frac{a+2}{a+2} = 1 \qquad \frac{a-2}{2-a} = -1$$

figuur 3: Waar of niet?

Een eerste invalshoek voor de ontwikkeling van algebraïsche routine is het uitbuiten van veel voorkomende fouten of misverstanden. In figuur 3 staat een voorbeeldopgave die focust op het rekenen met letterbreuken, een lastig onderwerp. De bedoeling is om leerlingen attent te maken op fouten bij het 'wegstrepen' in teller en noemer. Daarbij spelen op de achtergrond kwantoren een rol: een uitspraak kan voor alle waarden van *a* waar zijn, voor geen enkele *a* of voor sommige waarden. Een uitdagend vervolg zou kunnen zijn om leerlingen zelf een dergelijke uitspraak te laten bedenken met een foutieve redenering die op het eerste gezicht overtuigt. Mogelijk worden dan voorbeelden als $(x^2+1)/x = x+1$ of $\sqrt{x^2-9} = x-3$ naar voren gebracht. In dezelfde sfeer is het herkennen en verklaren van equivalenties een goede oefening.
Denk bijvoorbeeld aan $(1-x)^2 = (x-1)^2$, aan $\frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ of aan $\frac{m+1}{m+2} = 1 - \frac{1}{m+2}$.

Gegeven de functies *A* en *B* met $A(x) = x-1$ en $B(x) = x^3+x^2+x+1$.

a Bereken de afgeleide van de productfunctie $A \cdot B$ met behulp van de productregel.
b Je kunt de afgeleide van $A \cdot B$ ook op een handiger manier berekenen. Hoe?
c Ga na of de antwoorden bij de onderdelen a en b op hetzelfde neerkomen.

figuur 4: Twee manieren van differentiëren

Ook nieuwe onderwerpen kunnen aanleiding zijn tot het oefenen van algebraïsche routines. Figuur 4 toont een oefening in het differentiëren, afkomstig uit Kindt e.a. [7]. Onderdeel a is een toepassing van de productregel, waarbij het antwoord nog verder moet worden vereenvoudigd: $(x^3+x^2+x+1)+(x-1)\cdot(3x^2+2x+1)$ is een nogal onoverzichtelijk resultaat. Bij onderdeel b is de suggestie om eerst het product uit te werken. Dat geeft een eenvoudig te differentiëren functie. Bij onderdeel c komt de algebra expliciet aan de orde, omdat gevraagd wordt de equivalentie van de twee antwoorden na te gaan. In deze opgave is sprake van een stapeling van routines, namelijk uitwerken en algebraïsch differentiëren. Het kiezen van een handige volgorde van aanpak in dergelijke situaties vraagt om een algebraïsche expertise die we eerder als onderdeel van symbol sense beschouwen.
Ook het afleiden van de productregel voor differentiëren uit de kettingregel is een algebraïsch kunststukje, dat behalve oefening ook inzicht in de samenhang tussen de regels voor differentië-

ren biedt. We korten $f(x)$ en $g(x)$ af tot *f* en *g*.

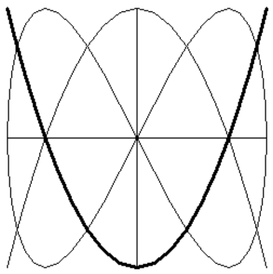
$$(f+g)^2 = f^2 + 2f \cdot g + g^2$$

Links en rechts differentiëren met de kettingregel geeft:

$$2(f+g) \cdot (f'+g') = 2f \cdot f' + 2(f \cdot g)' + 2g \cdot g'$$

Na deling door 2 en haakjes uitwerken valt er een en ander weg. Wat overblijft is

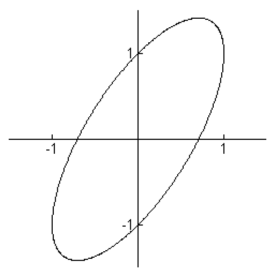
$$g \cdot f' + f \cdot g' = (f \cdot g)'$$



Hiernaast staan drie krommen met parametervoorstelling:

$x(t) = \cos(t)$
$y(t) = \cos(2t+a)$

met $t \geq 0$ en $a = 0, \pi/2, \pi$.
De vet getekende grafiek lijkt de vorm van een parabool te hebben.
Is het ook echt een parabool?



Hiernaast staat de kromme met parametervoorstelling

$x(t) = \cos(t)$
$y(t) = \cos(t) + \sin(t)$

waarbij $0 \leq t < 2\pi$.
Het lijkt wel een ellips.
Toon aan dat de vergelijking van de kromme $2x^2 - 2xy + y^2 = 1$ is.

figuur 5: De parabool en de ellips als figuren van Lissajous

Ook analytische meetkunde kan aanleiding zijn tot het werken aan algebraïsche routine. Figuur 5 bevat eerst de vraag om na te gaan of de Lissajouskromme voor $t = 0$ een parabool is. Dat gaat als volgt:

$$y = \cos(2t) = 2 \cdot (\cos t)^2 - 1 = 2x^2 - 1$$

Een wat interessantere vervolgvraag is om andere waarde(n) voor *a* te vinden waarvoor de kromme eveneens een parabool is. Onder in figuur 5 staat de vraag na te gaan of de parametervoorstelling aan een gegeven vergelijking voldoet. Krommen zoals figuren van Lissajous, die leerlingen met de grafische rekenmachine kunnen tekenen, vormen een rijke bron voor het ontwikkelen en oefenen van algebraroutine. Het Profi-pakket Trillingen bevat hiervan meer voorbeelden [8].

Samengevat kan het ontwikkelen en onderhouden van algebraïsche basisvaardigheden op verschillende manieren ter hand genomen worden. In de voorbeelden van het differentiëren en van de Lissajous-figuren komt de aanpak neer op het uitbuiten van mogelijkheden die analyse of andere onderwerpen bieden. Het voordeel van deze aanpak is dat de algebra past in het onderwijs, het nadeel is dat al te veel aandacht voor de algebra de leerlijn wat kan onderbreken. Toch is het goed om de aanknopingspunten die in het programma veelvuldig aanwezig zijn, op die manier te gebruiken voor algebraïsche 'zijsprongetjes'.
Daarnaast is het goed om ook los van het onderwerp dat aan de orde is op gezette tijden aandacht te besteden aan algebraïsche basisvaardigheden in de stijl van het voorbeeld in figuur 3. In de klas kan dat gebeuren door bijvoorbeeld regelmatig de les te beginnen met een korte 'algebraïsche warming-up'. Een verstrekkender aanpak is om elke week een groter deel van de les hieraan

te besteden. Gelet op de geringe contacttijd en op het gevaar van het al te zeer isoleren van algebra, is dat alleen aan te raden bij grote hiaten in algebraïsche basisvaardigheid.

Als in de tweede fase meer aandacht wordt besteed aan de ontwikkeling van algebraïsche basisvaardigheden, dan valt te overwegen die ook in het centraal examen aan de orde te laten komen. Een geschikte manier daarvoor zijn enkelvoudige korte-antwoordvragen, waarin dergelijke basisroutines in een 'kale' vorm worden afgevraagd. Zonder nu meteen de karakteristieken van de ingangstoetsen van de technische universiteiten te willen overnemen, kan dit een effectieve manier zijn om het belang van basisroutine onder de aandacht te brengen.
Op het oefenen van algebraïsche vaardigheden en de rol die ICT daarbij kan spelen wordt in de hoofdstukken 7 en 8 verder ingegaan. In de volgende paragraaf richten we ons op de ontwikkeling van symbol sense.

5.4 De ontwikkeling van symbol sense

Behalve basisvaardigheid verdient ook de ontwikkeling van symbol sense, aangeduid in de rechterkolom in figuur 2, meer aandacht in de tweede fase. Wat onder symbol sense wordt verstaan, is in hoofdstuk 1 in globale zin uit de doeken gedaan: het gaat om kennis van onderliggende concepten en strategische vaardigheden die de uitvoering van de basisroutines overstijgt. Symbol sense speelt vaak op de achtergrond een rol bij het plannen, coördineren en interpreteren van basisbewerkingen. Meer specifiek denken we bij symbol sense aan:

- *Heuristieken* om tot een probleemaanpak of strategie te komen, het vermogen om daarop overzicht te houden, om daarbinnen handige keuzes te maken en om, als een strategie vastloopt, een andere invalshoek te zoeken.
- Het vermogen om *globaal naar expressies en formules te kijken*, om de structuur van expressies en subexpressies te herkennen, om de betekenis van symbolen in de context te zien en om expressies op een andere manier weer te geven.
- Het vermogen tot *algebraïsch redeneren*. Denk hierbij aan kwalitatieve beschouwingen over termen en factoren in expressies, aan symmetrieoverwegingen of redeneringen met randgevallen.

Voor elk van deze drie punten schetsen we hieronder met voorbeelden op welke manier er in de klas aandacht aan kan worden besteed.

Heuristieken

Het is van belang dat leerlingen een repertoire aan heuristieken ontwikkelen voor het oplossen van algebraïsche problemen. De beschikbare literatuur biedt hiervoor veel handreikingen [9]. Een docent kan hieraan aandacht te besteden door zowel bij het begeleiden van leerlingen die zelf aan het werk zijn, als bij het uitwerken en nabespreken van opgaven een aantal overstijgende vragen aan de orde te stellen. Denk bijvoorbeeld aan:

- Waar wil je op uitkomen, waar moeten we heen?
- Wat kan een verstandige eerste stap zijn?
- Hoe kun je de complexiteit terugbrengen?
- Kun je het probleem in verband brengen met iets waar we wel raad mee weten?
- Zijn er randgevallen die je kunt controleren?
- Hoe kwam het dat je dit niet zelf zag?
- Welk idee maakte dat je hiermee verder kon?

Door op deze manier op de algebraïsche werkwijze te reflecteren, wordt het repertoire aan heuristieken voor strategieën en probleemaanpak uitgebreid. Laten we enkele voorbeelden geven.

In de abc-formule $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ is het illustratief om na te gaan wat er gebeurt als $b = 0$: wil in dat geval de wortel berekend kunnen worden, dan moeten *a* en *c* een tegengesteld teken heb-

ben. Dat is ook wel logisch, want als a en c hetzelfde teken hebben, snijdt de parabool de x-as niet dus zijn er geen nulpunten. Dat geeft vertrouwen in de formule.
Een vergelijkbare situatie zien we bij de productregel voor differentiëren. Een eenvoudig geval, namelijk dat één van de twee functies constant is, levert een controlemogelijkheid op. In stenonotatie: $(3 \cdot f)' = 3' \cdot f + 3 \cdot f' = 3 \cdot f'$.

Bij het oplossen van vergelijkingen is een goede oefening om in vrij ingewikkelde situaties te bedenken wat een verstandige eerste stap is. Uitwerken van de haakjes in $(x-1)\cdot(x^2+1) = 0$ geen efficiënte weg naar de oplossing. Bij het oplossen van $\cos(2x) + 2\cdot\sin(x) = 0$ kan $\cos(2x)$ beter worden vervangen door $1 - 2\cdot(\sin x)^2$ dan door $2\cdot(\cos x)^2 - 1$. In het verlengde hiervan kan het geen kwaad enkele standaardtypen van vergelijkingen te herhalen zoals:

$$A \cdot B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ of } B = 0$$

$$\frac{A}{B} = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ en } B \neq 0$$

Hierin staan A en B voor algebraïsche expressies, wat voor leerlingen mogelijk even wennen is. Let ook op het gebruik van *en* en *of*.
Het kiezen van een handige manier van herschrijven speelt niet alleen bij vergelijkingen. Ook bij functies is het van belang een geschikte vorm te vinden. Zo zijn bijvoorbeeld $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $f(x) = (x-1)\cdot(x-3)$, $f(x) = (x-2)^2 - 1$ en $f(x) = x\cdot(x-4)+3$ equivalente gedaanten, die echter verschillende aspecten benadrukken. De eerste vorm is handig bij differentiëren, de tweede laat de nulpunten zien, in de derde is de top af te lezen en de vierde is de zogeheten Horner-vorm. Flexibel omgaan met dergelijke vormen maakt deel uit van symbol sense en verdient aandacht.

Globaal kijken naar expressies en formules

Het vermogen om formules en expressies te 'lezen' is een belangrijke algebraïsche deskundigheid. Denk aan het doorzien van de structuur en het herkennen van deelexpressies. In de in hoofdstuk 4 al genoemde vergelijking van Wenger is de clou dat leerlingen $v \cdot \sqrt{u} = 1 + 2v \cdot \sqrt{1+u}$ kunnen zien als $v\cdot\Box = 1+2\cdot v\cdot\bigcirc$, waarbij de inhoud van $\Box$ en $\bigcirc$ er nu even niet toe doet. Dit vraagt om een 'totaalblik' op expressies en formules [10].
Leerlingen kunnen zo'n globale kijk op formules ontwikkelen door met contexten te werken waarin deelexpressies een eigen betekenis en naam hebben.

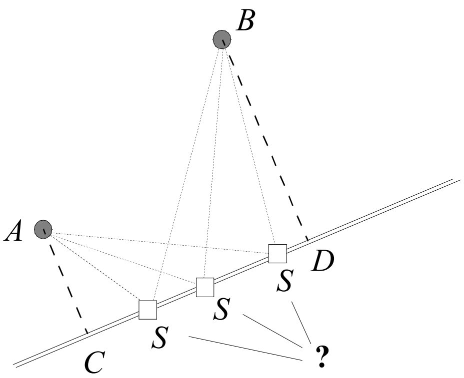
Een voorbeeld daarvan is de opgave van de plaats van het station in figuur 6 [11]. Om dit probleem met algebra aan te pakken moet eerst een variabele worden gekozen. Daar zijn verschillende mogelijkheden voor. Stel dat we de afstand CS kiezen en die x noemen. Dan geldt voor de totale afstand $AS + BS$:

$$AS + BS = \sqrt{5^2 + x^2} + \sqrt{10^2 + (12-x)^2}$$

Nu komt de algebraïsche routine van pas: de afstandsfunctie met de kettingregel differentiëren, de afgeleide gelijk aan 0 stellen en de vergelijking oplossen. Vanwege de wortels en de breuken is dit niet eenvoudig, maar globaal kijken levert in elk geval op dat de kwadraten in 5^2 en 10^2 alleen maar afleiders zijn. Ook kan steun gezocht worden in de koppeling van de formules en het plaatje. De vergelijking van de afgeleide is:

$$\frac{x}{\sqrt{5^2 + x^2}} - \frac{12 - x}{\sqrt{10^2 + (12-x)^2}} = 0$$

Terugkijkend in de figuur betekent dit dat $\frac{CS}{AS} - \frac{DS}{BS} = 0$, dus $\frac{CS}{AS} = \frac{DS}{BS}$. De hoeken die AS en BS met de spoorlijn maken, hebben dus dezelfde cosinus, en zijn, aangezien ze beide tussen 0 en $\pi/2$ radialen zijn, aan elkaar gelijk. Door in de klas de aandacht op deze samenhang te vestigen, kan een docent bij de leerlingen het idee van het globaal kijken naar formules aan de orde stellen.



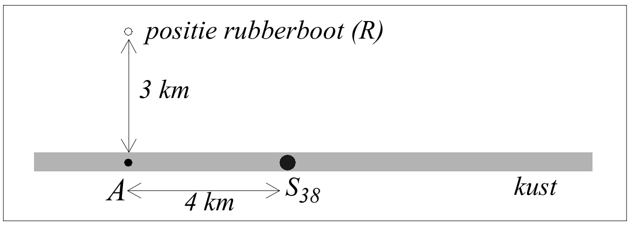
De gemeenten A en B liggen aan dezelfde kant van een spoorlijn respectievelijk op 5 en 10 km afstand van die lijn. De afstand van A tot B is (hemelsbreed) 13 km. De spoorwegmaatschappij wil een station aan genoemde spoorlijn bouwen en overlegt met diverse instanties wat de beste plaats is voor het station S. De provinciale busmaatschappij wil dat de totale afstand AS + SB zo klein mogelijk is. Wat is de beste positie voor het station?

figuur 6: De plaats van het station

Het probleem van de plaats van het station kan op verschillende manieren een vervolg krijgen. Ten eerste kan men zich afvragen waar het station moet komen als bijvoorbeeld stad *A* twee keer zoveel inwoners heeft als stad *B*. Dat leidt tot een aanpassing van een van de formules, gevolgd door een vergelijkbare rekenprocedure. Het nagaan op welke plaatsen in de berekening er iets verandert draagt bij aan het doorzien van de structuur van de formules.

Als vervolg op de opgave over het station kan het probleem van de snelste route aan de orde komen. Kindt voert daarvoor James Bond op [11]. Deze bevindt zich (zie figuur 7) in een bootje drie kilometer van de kust. Zo snel mogelijk wil hij strandpaal *S*38 bereiken. De roeisnelheid is 6 km/u en op het strand rent hij met een snelheid van 12 km/u. De vraag is op welk punt op het strand hij moet afkoersen om zo snel mogelijk het doel te bereiken. Als we de afstand van *A* tot de landingsplaats *x* noemen, is de totale tijd *T* gelijk aan:

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 3^2}}{6} + \frac{4 - x}{12}$$

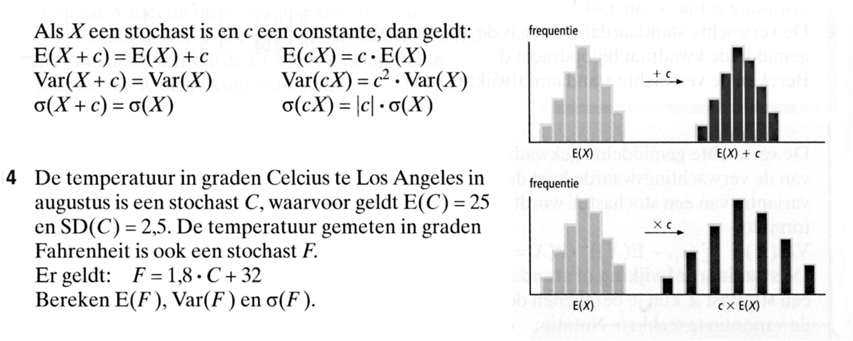


figuur 7: De missie van James Bond

Ook in dit geval hebben de deelexpressies een betekenis in de situatie. Als deze functie wordt gedifferentieerd, blijkt dat de afstand *AS*, in het voorbeeld gelijk aan 4, in de afgeleide niet voorkomt:

$$T'(x) = \frac{x}{6\sqrt{x^2 + 3^2}} - \frac{1}{12}$$

Dat betekent dus dat de koers van het bootje niet afhangt van de plaats van de strandpaal, zo lang die maar ver genoeg weg staat. Verrassend resultaat! Door de strandpaal nu landinwaarts te verplaatsen, kan deze situatie worden uitgebouwd naar die van de breking van licht bij de overgang van twee media met verschillende voortplantingssnelheden.



Als X een stochast is en c een constante, dan geldt:

$E(X + c) = E(X) + c$ $\quad$ $E(cX) = c \cdot E(X)$

$Var(X + c) = Var(X)$ $\quad$ $Var(cX) = c^2 \cdot Var(X)$

$\sigma(X + c) = \sigma(X)$ $\quad$ $\sigma(cX) = |c| \cdot \sigma(X)$

4 De temperatuur in graden Celcius te Los Angeles in augustus is een stochast C, waarvoor geldt $E(C) = 25$ en $SD(C) = 2{,}5$. De temperatuur gemeten in graden Fahrenheit is ook een stochast F.
Er geldt: $F = 1{,}8 \cdot C + 32$
Bereken $E(F)$, $Var(F)$ en $\sigma(F)$.

figuur 8: Moderne wiskunde, 7e editie, vwo B1 deel 5 p. 170

Bij het leren herkennen van de structuur in een algebraïsch verband is het goed om boven de situatie uit te stijgen. In figuur 8 staat bijvoorbeeld een pagina uit Moderne wiskunde over de regels voor verwachting en variantie. De eerste twee formules gaan over de lineariteit van de verwachting:

$$E(a \cdot X + b) = a \cdot E(X) + b$$

In woorden: de verwachting van de lineaire combinatie is de lineaire combinatie van de verwachting. Dat lijkt vanzelfsprekend, maar voor variantie en standaardafwijking gaat het niet op:

$$Var(a \cdot X + b) = a^2 \cdot Var(X)$$
$$\sigma(a \cdot X + b) = |a| \cdot \sigma(X)$$

Deze situatie zou dan ook niet alleen aanleiding moeten zijn tot het aannemelijk maken of bewijzen van deze regels, maar zou ook kunnen leiden tot opdrachten als:

- Geef voorbeelden van lineaire en niet-lineaire verbanden.
- Vermenigvuldigen van een som komt op hetzelfde neer als optellen van twee vermenigvuldigingen. Schrijf dit op in formuletaal.
- ‘De .... van de ____ is gelijk aan de ____ van de ....’ Vul zelf iets in voor .... en ___ zodat de bewering waar wordt, maar ook iets dat de bewering onjuist maakt. Denk bijvoorbeeld aan machten, wortels en goniometrische functies.

Op deze manier krijgen leerlingen ook gevoel voor lineariteit als algemeen structureel algebraïsch idee, dat uitstijgt boven specifieke situaties.
Als leerlingen leren globaal te kijken naar expressies en formules, helpt hen dat irrelevante informatie te negeren en zich te concentreren op essentiële kenmerken. Daardoor zijn ze beter bestand tegen complexere algebraïsche situaties.

Algebraïsch redeneren

Bij algebraïsch redeneren gaat het er om afstand te nemen van de uitvoering van de basisroutines. In plaats van het uitvoeren van algebraïsche procedures, of door daarop na afloop terug te blikken, kunnen de resultaten door middel van een meer kwalitatieve algebraïsche argumentatie worden begrepen. In die verklaringen spelen bijvoorbeeld symmetrieoverwegingen een rol, het globaal kijken naar expressies, of het identificeren van ‘winnende factoren’ in een algebraïsch krachtenspel. De volgende twee opgaven beogen algebraïsch redeneren uit te lokken.

Bekijk de volgende functies:

$$f(x) = x^4 - x^2 + 2$$
$$g(x) = \sqrt{1 + x^2}$$
$$h(x) = 3 \cdot \cos x$$

a. Wat valt je op in de grafieken van *f*, *g* en *h*?
b. Een functie *E* heet even als voor alle *x* geldt: $E(x) = E(-x)$.
Toon aan dat *f*, *g* en *h* aan deze eigenschap voldoen.
c. Differentieer *f*, *g* en *h*. Wat valt je op in de grafieken van deze afgeleide functies?
d. Een functie *O* heet oneven als voor alle *x* geldt: $O(x) = -O(-x)$.
Ga na dat de drie afgeleide functies oneven zijn.
e. De afgeleide van een even differentieerbare functie is altijd oneven. Toon dat aan met een redenering en met gebruik van de regels voor differentiëren.

figuur 9: Redeneren met even en oneven functies

In de opgave in figuur 9 wordt een algebraïsche eigenschap van een functie (even of oneven zijn) in verband gebracht met grafische kenmerken (spiegelsymmetrie in de lijn $x = 0$ respectievelijk puntsymmetrie in de oorsprong). De redenering die bij het laatste onderdeel gevraagd wordt is van het type ‘Als de functiewaarde in *x* en $-x$ gelijk zijn, dan zijn de hellingen daar tegengesteld’. Algebraïsch volgt uit $E(x) = E(-x)$ met de kettingregel dat $E'(x) = -E'(-x)$, zodat E' oneven is.

In dezelfde sfeer, maar iets ingewikkelder, is de opgave in figuur 10 [12]. Nu wordt verband gelegd tussen een algebraïsche eigenschap van een functie en een analytische. De grafieken die met een grafische rekenmachine kunnen worden getekend (figuur 11), suggereren dat elk van de functies voor $x = 1$ een extreme waarde bereikt. Dat moet algebraïsch worden geverifieerd, wat neerkomt op het differentiëren van de vier functies en het substitueren van de *x*-waarde.
Bij onderdeel c volgt dan de generalisatie: is het zo dat elke differentieerbare functie met deze algebraïsche eigenschap ook een extreme waarde heeft voor $x = 1$? Dat blijkt zo te zijn. De leerlingen kunnen dat aantonen door $f(1/x)$ in het algemeen met de kettingregel te differentiëren en dan de gegeven eigenschap te gebruiken.
Maar ook hier is een redenering verhelderend. Als je *x* door 1/*x* vervangt, blijft $x = 1$ op zijn plaats. Alle getallen groter dan 1 verschuiven naar het gebied tussen 0 en 1, en andersom. Als de grafiek rechts van 1 stijgt, dan zal die links van 1 dus dalen. Dat betekent dat er bij $x = 1$ een minimum optreedt. Op dezelfde manier: als de grafiek rechts van 1 daalt, dan zal die links van 1 stijgen en is er een maximum bij $x = 1$.

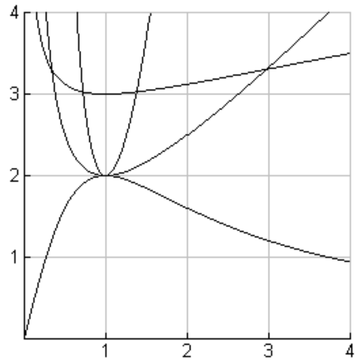
Voor alle $x > 0$ zijn de volgende functies gedefinieerd:

$$f_1(x) = x + \frac{1}{x} \qquad f_2(x) = x^3 + \frac{1}{x^3}$$
$$f_3(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 2 \qquad f_4(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$$

Deze vier functies hebben een eigenschap gemeen, namelijk dat voor elke *x* uit het domein geldt: $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$.

a. Toon aan dat f_1, f_2, f_3 en f_4 aan deze eigenschap voldoen.
b. Bekijk de grafieken van deze vier functies. Welke overeenkomsten vertonen ze in de punten met *x*-coördinaat 1? Verifieer deze overeenkomst algebraïsch.
c. Toon aan dat de bij b gevonden eigenschap geldt voor elke differentieerbare functie waarvoor geldt dat $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ voor alle *x* uit het domein.

figuur 10: Functies met eenzelfde eigenschap



figuur 11: De grafieken van de vier functies

Een ander onderwerp waarin algebraïsch redeneren een grote rol speelt, is dat van de evenredigheden. In het volgende hoofdstuk wordt hierop nader ingegaan.

5.5 Gedifferentieerde conclusies

Dit hoofdstuk is een pleidooi voor een grotere plaats voor algebra in de tweede fase, waarbij aandacht wordt besteed aan de ontwikkeling van zowel routine om basisbewerkingen te kunnen uitvoeren, als symbol sense om deze basisbewerkingen handig te kiezen, te evalueren en te beredeneren. Hoewel basisvaardigheden en symbol sense in het voorafgaande uit elkaar zijn getrokken, gaat het in feite om samenhangende vaardigheden en is eerder sprake van een continu glijdende schaal dan van een tweedeling. Het zijn twee belangrijke kanten van algebraïsche vaardigheid, die elkaar beïnvloeden. Basisvaardigheden staan letterlijk aan de basis van symbol sense en symbol sense is van belang bij het plannen en doorzien van basisvaardigheden.

Meer aandacht voor algebraïsche basisvaardigheden en voor symbol sense in de tweede fase dus, maar voor alle leerlingen op dezelfde manier? Op welke manier eigenlijk? En welke rol speelt de grafische rekenmachine daarbij? Deze vragen komen als afsluiting van dit hoofdstuk hieronder aan de orde.

Welke basisvaardigheden en op welke manier?

De voorbeelden in dit hoofdstuk zijn niet voor alle leerlingen van de tweede fase even relevant. Het niveau en het type basisroutines verschilt per schooltype en profiel. Tabel 1 geeft een overzicht van deze differentiatie.

Voorbeeld	havo M	havo N	vwo M	vwo N
Kosten en opbrengst (paragraaf 5.2)	+/–	+	+	+
Waar of niet? (figuur 3)	+/–	+	+	+
Productregel (figuur 4)	–	+	+	+
Lissajous (figuur 5)	–	–	–	+

tabel 1: Differentiatie in algebraïsche basisvaardigheid

Voor *havo M*, en met name voor het CM-profiel, is de benodigde basisroutine beperkt. Voor zover de basisvaardigheden een rol spelen, kunnen ze voor een aanzienlijk deel worden uitgevoerd met de grafische rekenmachine. De nadruk ligt eerder op algemene symbol sense vaardigheden zoals het kiezen van een oplossingsstrategie en het interpreteren van resultaten.

Voor *havo N en vwo M* wordt meer gevraagd op het gebied van algebraïsche basisroutines. Met name de havo-leerling die een technische vervolgopleiding kiest, heeft een behoorlijke formulevaardigheid nodig. Het voorbeeld van de productregel geeft aan waar de grens ligt. Situaties die meer algebraïsche basisroutine vereisen kunnen beter met de grafische rekenmachine of ander ICT-gereedschap worden aangepakt.

Voor *vwo N* vraagt het vervolgonderwijs de meeste handmatige vaardigheden. Voor deze groep leerlingen zal ICT-gebruik dus eerder het werk met pen en papier aanvullen dan vervangen. Het vergelijken van de traditionele aanpak met de ICT-methode kan hierbij waardevol zijn. Als meer tijd wordt besteed aan ontwikkeling, onderhoud en oefening van algebraïsche vaardigheden, zou een opgave als het tweede voorbeeld van de figuren van Lissajous voor dit type leerling geen probleem mogen zijn.

Een precieze afbakening van het repertoire aan algebraïsche basisvaardigheden dat een leerling moet ontwikkelen valt buiten het bestek van dit hoofdstuk. Dat neemt niet weg dat het goed zou zijn om daarover richtlijnen uit te werken, zodat docenten, uitgevers en examenmakers weten waar het algebraonderwijs op aanstuurt.

Op welke manier kan in de klas aan het ontwikkelen en het onderhouden van algebraïsche vaardigheden worden gewerkt? Het ontwikkelen van *nieuwe vaardigheden*, zoals het toepassen van regels voor differentiëren of het oplossen van exponentiële vergelijkingen, komt in het programma vanzelf aan de orde. Het is dan zaak om voldoende tijd uit te trekken voor het opbouwen van een stabiele techniek.

Bij het *onderhouden* van algebraïsche basisvaardigheden kunnen ten eerste de kansen die zich in het programma voordoen worden benut. Dat betekent dat het gebruik van een procedure in de context van een analytisch, meetkundig of statistisch probleem wordt uitgebuit om deze weer op te frissen en te oefenen. Daarnaast is het mogelijk om apart, aan het begin van elke les, of elke week een half lesuur, aandacht aan algebraïsche vaardigheden te besteden. Het voordeel van deze laatste aanpak is dat deze vaardigheden centraal staan; het nadeel kan zijn dat algebra los staat van de toepassingen, waardoor de transfer in gevaar kan komen. In hoofdstuk 7, getiteld 'Oefening baart kunst', wordt hierop nader ingegaan.

Welke symbol sense en op welke manier?

De voorbeelden die in dit hoofdstuk het belang van symbol sense illustreren zijn evenmin voor alle leerlingen van de tweede fase belangrijk. Tabel 2 geeft een overzicht van de differentiatie die ook hier nodig is.

Voorbeeld	havo M	havo N	vwo M	vwo N
Typen vergelijkingen (paragraaf 5.4)	+	+	+	+
Het station (figuur 6)	–	–	–	+
Verwachting (figuur 8)	–	+	+	+
Even en oneven (figuur 9)	-	+	+	+
$f(1/x)$ (figuur 10)	–	–	–	+

tabel 2: Differentiatie in symbol sense

Voor *havo M* ligt de nadruk op algemene symbol-sensevaardigheden zoals het doorzien van een eenvoudig algebraïsch model, het kiezen van een oplossingsstrategie en het interpreteren van resultaten. Het voorbeeld van het herkennen van typen vergelijkingen geeft aan dat het bij het kiezen van strategieën om vrij elementaire gevallen gaat.

Voor *havo N en vwo M* gaat de benodigde symbol sense wat verder. Denk aan vertaal- en modelleervaardigheden, aan inzicht in structuur en betekenis van formules en expressies, en aan kwalitatieve redeneringen met formules. Het voorbeeld van de plaats van het station geeft aan waar hier de grens ligt.

Voor *vwo N* zijn modelleren, interpreteren en redeneren natuurlijk eveneens van belang, maar is het ook goed om van hoger standpunt tegen algebra aan te kijken. Het gaat dan om een kijk op overstijgende ideeën zoals lineariteit, equivalentie en structuur van formules en expressies. Denk aan het voorbeeld over de functies met de eigenschap dat $f(x) = f(1/x)$. De algebra zal vaak ingebed zijn in een breder kader, bijvoorbeeld van analytische of meetkundige aard. Ook verdient de transfer naar andere exacte vakken aandacht. Hoe functioneren bijvoorbeeld formules in de natuurwetenschappen en hoe verhoudt zich dat tot de benadering bij wiskunde? Deze vragen komen in hoofdstuk 6 aan de orde.

Op welke manier kan in de klas aan de ontwikkeling van symbol sense worden gewerkt? Dat is geen eenvoudige vraag. De eerste ‘leergang symbol sense’ moet nog geschreven worden. Een belangrijke ingang is het reflecteren op de gevolgde methode, het stilstaan bij de gevolgde of de te volgen aanpak, waarbij afstand wordt genomen van de uitvoering zelf. Waarom een procedure werkt, hoe je dat van te voren al kunt zien, waar een goed idee vandaan komt, en welke verbanden met andere problemen en methoden zich voordoen, dergelijke vragen zouden regelmatig onderwerp van een klassengesprek moeten zijn. Het is voor de docent een kwestie van het herkennen en benutten van aanknopingspunten, die zich (helaas?) niet altijd van tevoren laten plannen.

Welke rol voor de grafische rekenmachine?

Tot besluit nog de discussie over de rol van de grafische rekenmachine. Niet zelden wordt de invoering van de GR als één van de oorzaken genoemd van de afnemende algebraïsche vaardigheden. Hoewel sommige docenten enthousiast zijn over de machine, zijn ook kritische geluiden hoorbaar:

> Ik ben van mening dat de grafische rekenmachine een geweldig hulpmiddel is gebleken voor vele van de wat minder getalenteerde leerlingen. Zij vinden hiermee veel meer oplossingen en bedenken gemakkelijker oplosstrategieën dan voorheen.
> (Remijn, 2005, *WiskundE-brief, 361*. www.digischool.nl/wi/WiskundE-brief/)
> De GRM is een hulpmiddel, het echte rekenwerk moet de leerling bij mij gewoon zelf doen. Als ik de reactie van dhr Remijn lees dan kunnen we net zo goed overstappen op de symbolische rekenmachine (een TI 89 of zo) en alles aan de machine overlaten (misschien is een laptop dan nog wel beter).
> (Booltink, 2005, *WiskundE-brief, 362*. www.digischool.nl/wi/WiskundE-brief/)

Zoals in hoofdstuk 8 uitgebreider wordt betoogd, is technologie iets van deze tijd en zou het onderwijs zich wereldvreemd opstellen als het dat probeert te ontkennen. Dat neemt natuurlijk niet weg dat de inpassing van een apparaat als de grafische rekenmachine op een overwogen en zinvolle manier moet plaatsvinden. Voor de N-profielen van havo en vwo betekent dat bijvoorbeeld dat procedures die door de GR kunnen worden uitgevoerd niet automatisch uit het repertoire van pen-en-papiervaardigheden worden verwijderd. Het is wenselijk dat leerlingen een aantal situaties op verschillende manieren kunnen aanpakken en de resultaten met elkaar in overeenstemming kunnen brengen. Denk bijvoorbeeld aan het grafisch controleren van een algebraïsch gevonden antwoord. Daarnaast kan het werken met de GR aanleiding zijn tot het verkennen van situaties en het ontdekken van verbanden, die vervolgens vragen om een algebraïsche verificatie of redenering. Als de GR op deze manier weloverwogen wordt ingezet, is dit een aanvulling op en een aanwinst voor het algebraonderwijs in de tweede fase, zowel in de M- als in de N-profielen.

Literatuur

1. Kindt, M. (2000). Discrete algebra. *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs, 19*(4), 31-36.
2. Dekker, T. (2001). Even krijten. *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs, 20*(4), 34.
3. Wijers, M. & Kemme, S. (2000). Welke algebra heb je nodig in klas 4 vwo? *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs, 20*(1), 22-25.
4. Zwaneveld, B. (2004). Algebra, verloren zaak of uitdaging? *Euclides, 80*(2), 42-47.
5. Boertien, H. (2005). Over algebra en modelleren in de havo-b-examens. *Euclides, 81*(1), 18-21.
6. Citogroep (2002). Wiskunde-examens 2002 eerste tijdvak. *Euclides, 78*(1), 1-18.
7. Kindt, M., Drijvers, P. & Doorman, L. (1997). *De techniek van het differentiëren*. Utrecht: Freudenthal Instituut.
8. Drijvers, P. & Kindt, M. (1998). *Differentiaal- en Integraalrekening deel 6: Trillingspatronen*. Utrecht: Freudenthal Instituut.
9. Freudenthal, H. (1983). Heuristiek en heuristieken. *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs, 2*(4), 63-66.
   Polya, G. (1945). *How to solve it?* New Jersey: Princeton University Press.
   Sawyer, W.W. (1969). *Aanschouwelijke algebra.*Utrecht: Spectrum.
   Streun, A. van (1989). *Heuristisch Wiskundeonderwijs. Verslag van een onderwijsexperiment.* Dissertatie. Groningen: Rijksuniversiteit Groningen.
10. Gravemeijer, K. (1990). Globaal kijken, een kenmerk van algebraïsche deskundigheid. *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs, 10*(2), 29-33.
11. Drijvers, P. & Kindt, M. (1992). *Optimaliseren met een grafische rekenmachine.* Utrecht: Freudenthal Instituut.
    Kindt, M. (1993). James Bond, de wet van Snellius en wiskunde B. *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs, 13*(1), 45-50.
12. Doorman, L.M., Drijvers, P. & Kindt, M. (1994). *De grafische rekenmachine in het wiskundeonderwijs.* Utrecht: Freudenthal Instituut.

6 Algebra in natuur en techniek

Henk van der Kooij, Aad Goddijn

We zijn er in de wiskundeles intussen wel aan gewend dat de wiskunde ook in contexten voorkomt, maar contexten worden meestal gebruikt als ondersteuning voor het wiskundig leerproces of als toepassingsgebied van het geleerde. Daartoe zetten we de context vaak wat naar eigen – wiskundige – hand en zorgen we tevens dat de notaties voor de leerling prettig herkenbaar blijven. Prettig zolang hij de drempel van het wiskundelokaal maar niet overgaat. In de natuurkundeles moet de leerling bijvoorbeeld ineens met een variabele *s* werken, terwijl 'afstand' in de woordformule bij wiskunde werd afgekort als *a*.

Dit is nog maar een van de kleinere problemen. Als we wat nauwkeuriger kijken hoe algebra gebruikt wordt in vakken als natuurkunde en techniek, dan blijken er meer en veel diepgaander verschillen te zijn in benadering van een belangrijk begrip als variabele, in de aard van de gebruikte formules en zelfs in de omgang met 'gewone' getallen.

Algebra is dominant aanwezig in de techniekvakken op mbo en hbo en in alle science-vakken in het gehele VO, in het bijzonder in de natuurkunde. Dit hoofdstuk is een pleidooi om in het algebraonderwijs te anticiperen op de manier waarop algebra daar functioneert. Op die manier kan de kloof tussen wiskunde en de technisch/exacte vakken mogelijk worden verkleind, en komt de toepasbaarheid en bruikbaarheid van algebra beter over het voetlicht, terwijl ook niet uitgesloten is dat we van de niet-wiskundige benadering iets leren dat ook van nut is in het wiskundelokaal zelf.

6.1 Algebra in natuur en techniek; oriëntatie en begripsbepalingen

Op welke manier wordt algebra bij natuurkunde en techniek gebruikt? Om deze vraag te beantwoorden, is in het kader van het TWIN-project[1] aan de hand van techniekboeken en gesprekken met techniekdocenten geïnventariseerd welke algebraïsch/wiskundige begrippen en vaardigheden van belang zijn in de techniekvakken. Binnen het SONaTe-project[2] is iets dergelijks gedaan voor de vier bètavakken in de Tweede Fase van het vwo. Bij beide inventarisaties is geconstateerd dat er bij wiskunde aan een aantal voor natuurwetenschappen belangrijke algebraïsche begrippen nauwelijks of geen aandacht wordt besteed.

We noemen er een aantal, steeds met een korte toelichting. Verderop gaan we hierop dieper in aan de hand van voorbeelden, waarin de genoemde thema's samen voorkomen.

Variabelen

Variabelen hebben in de natuurkunde en techniek steevast een rol met een naam die hen bindt aan de betekenis in een situatie: druk, temperatuur, snijsnelheid, dichtheid. Variabelen in de wiskunde hebben ook wel verschillende rollen, maar daar gaat het om andere onderscheidingen als onbekende, parameter, richtingscoëfficiënt. Standaardisering van namen komt ook bij de schoolwiskunde voor: *x, y* en *z* voor onbekenden, *a*, *b* en *c* voor coëfficiënten, *k*, *l* en *m* voor natuurlijke getallen.

Grootheden

Lengte, oppervlakte en inhoud zijn meetkundige grootheden. De (school)wiskunde heeft ook nog de grootheid 'hoek', maar dan is het verhaal toch wel zo'n beetje uit en zijn er alleen de zuivere

1 In het TWIN project (Techniek, Wiskunde, ICT en Natuurkunde), dat in de periode 1996 - 2000 is uitgevoerd, is het wiskundeprogramma voor het middelbaar technisch onderwijs zodanig gewijzigd dat het de beroepsvakken in de sector techniek werkelijk ondersteunt (zie [1]).

2 Het SONaTe (Samenhangend Onderwijs in Natuur en Techniek) project had tot doel te inventariseren op welke manier de vier bèta-vakken binnen het vwo-profiel N&T beter op elkaar kunnen worden afgestemd.

getallen. De toepassingsvakken kennen tijd, massa, lengte, temperatuur en nog andere grootheden, en kunnen daarmee ook nieuwe, samengestelde grootheden bouwen: snelheid, dichtheid, soortelijke warmte. De aard van de grootheid heet daarbij de dimensie, ook al een woord dat een ruimere betekenis heeft dan 'het aantal onafhankelijke ruimtelijke richtingen'.

Evenredigheid als sleutelbegrip

In het wiskundeonderwijs in de onderbouw neemt de lineaire functie, $f(x) = ax + b$, een prominente plaats in. In de science-vakken en de techniek is een vergelijkbaar centraal thema de vraag naar *evenredigheid* van twee grootheden, zoals gewicht en volume, spanning en weerstand. Daarbij moeten we niet denken aan een lineaire functie met $b = 0$, maar aan de samenhang tussen de variabelen, aan een verband dus. Het begrip evenredigheid wordt ook gebruikt in situaties waarin een variabel evenredig is met het kwadraat of de inverse van een andere. Deze veelzijdige omgang met evenredigheid is belangrijk en wordt vanuit de algebra nog onvoldoende belicht.

De aard van de gebruikte formules

Formules in natuurwetenschappelijke toepassingen gaan dikwijls over situaties waarin de samenhang van meer dan twee variabelen beschreven wordt. Veelal worden meerdere evenredigheden gecombineerd; de variabelen zijn niet neutraal want ze stellen grootheden van een bepaalde aard voor. Dergelijke formules vragen daarom om een ander type algebraïsch onderzoek dan een zuiver wiskundig.

Getallen, eenheden en onnauwkeurigheden

In de natuurwetenschappelijke toepassingen kan een getal een aantal zijn, of een 'puur' getal zoals π. Meestal staat een getal echter voor een specifieke waarde van een variabele. Daarbij wordt een eenheidssituatie verondersteld, bijvoorbeeld de eenheid 'meter'; het getal geeft in feite de verhouding met die eenheid aan. Verschillende grootheden, verschillende eenheden.
Getallen komen in de toepassingen vaak voort uit metingen. Dat betekent onvermijdelijk onnauwkeurigheden in plaats van exactheid. Maar ook met onnauwkeurigheid kan exact worden omgegaan. Weer een stukje algebra dat in de wereld van de toepassingen leeft, maar onderbelicht blijft in de wiskundeles.

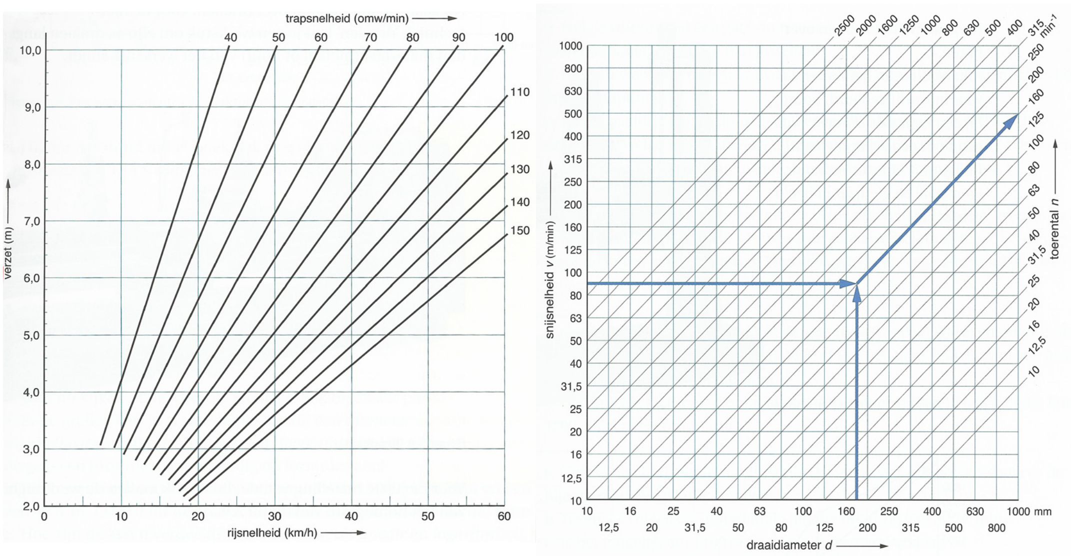
Grafieken met veel variatie

De manier waarop verbanden tussen natuurkundige of technische variabelen grafisch worden weergegeven, kent meer variatie dan het gebruik van wiskundige coördinaatsystemen doet vermoeden. De aard van de toepassingen leidt tot vele varianten, typen van schaalindeling en soms complexe voorstellingen die vooral gelezen moeten worden. Grafieken zijn in de techniek compacte en overzichtelijk samenhangende dataverzamelingen, met heel specifieke gebruiksvormen, die het hanteren van de klassieke wiskundige grafiek ver te boven gaan.

In het vervolg van dit hoofdstuk wordt op deze aspecten wat dieper in gegaan, waar bij de onderlinge samenhang benadrukt wordt.

6.2 Bijzondere grafieken bij fiets en draaibank

Figuur 1 bevat twee bundels grafieken, in de techniek meestal nomogrammen genoemd. De linker bundel gaat over een fiets een stelt het verband voor tussen de variabelen *trapsnelheid* (in omwentelingen ofwel pedaalslagen per minuut), *verzet* (aantal meter per omwenteling) en *rijsnelheid* (in km per uur). Rechts is het verband weergegeven tussen *toerental* (in omwentelingen per minuut), *draaidiameter* (in mm) en *snijsnelheid* (in m per minuut) van de beitel van een draaibank.
Op een aantal punten komen de grafieken met elkaar overeen. In beide gevallen zijn er drie variabelen, waarvan de ene (trapsnelheid, toerental) de rol van parameter speelt in de bundel lijnen. De andere twee variabelen hebben gelijkwaardige rollen; er is dus geen sprake van grafieken met



figuur 1: Twee nomogrammen die evenredigheid weergeven (TWIN Wiskunde deel 1)

een invoervariabele op de horizontale as en een uitvoervariabele op de vertikale.
Beide grafieken hebben asindelingen die doelmatig gekozen zijn voor de *aard* van de toepassingssituatie. De gekozen eenheden staan er steeds bij; bij de fiets is de snelheid uitgedrukt in kilometers per uur[1]en het verzet in meters. Bij de fiets zijn de bruikbare snelheden van 5 tot 60 km/h en de bruikbare verzetsrange is 2-10 meter. Dat is niet zo wijd; we kunnen nu zowel aan de lage als de hoge kant nog relatief nauwkeurig aflezen op de lineair afgebeelde schaal.
Bij de draaibank is dat anders. De verhoudingen tussen de uitersten op de beide schalen zijn 1 op 100. Toch kunnen we op de schaal van de snijsnelheid gemakkelijk het verschil zien tussen 10 en 12.5 m/min ook tussen 800 en 1000 aan de hoge kant. Hiervoor is gezorgd door de gelijke verhoudingen 10 tot 12.5 en 800 tot 1000 met gelijke lengteverschillen op de schaal weer te geven, en de absolute groottes daarbij te negeren. Beide schalen op het snijsnelheidnomogram zijn logaritmisch.

In beide situaties is er sprake van evenredigheden.
Voor de fietser: *rijsnelheid* (in km/h) = $c_1 \times$ *trapsnelheid* (in omw/min) $\times$ *verzet* (in m).
Voor de draaibank: *snijsnelheid* (in m/min) = $c_2 \times$ *toerental* (in omw/min) $\times$ *diameter* (in m).

Bij de fiets zien we daarom rechte lijnen met verschillende helling die door het punt (0, 0) van de grafiek gaan (als is dat niet te zien). Bij de draaibank zijn alle lijnen parallel; dat komt hier doordat bij elke toerental een vaste verhouding op draaidiameterschaal een vaste verhouding op de snijsnelheidschaal levert.

Leerlingen van het technisch onderwijs moeten in staat zijn om dergelijke grafieken te lezen en te interpreteren; als het algebraonderwijs hen daarbij kan ondersteunen, is dat winst. Dat daar gezien de beschrijving van de grafieken hierboven heel andere zaken bij komen kijken dan het beschrijven van de logaritme als de inverse van machtsverheffen is evident.

6.3 Evenredigheden en formules

Een mooi en zuiver wiskundig gebruik van het begrip *verhouding* vinden we in de volgende wat archaïsch geformuleerde bewering:

De oppervlakten van twee cirkels verhouden zich als de kwadraten van hun stralen.

1 km/h. met *h* voor *hour*.

De verhouding van de oppervlakten is er een van gelijksoortige grootheden, die van de stralen ook. Zonder dat π erin voorkomt, is dit een betekenisvolle bewering. Het verband laat zich ook in deze stijl formuleren:

De oppervlakte van een cirkel is evenredig met het kwadraat van de straal.

Daar zit meer dynamiek in, de suggestie dat de oppervlakte 4 keer zo groot *wordt,* als de straal verdubbeld *wordt* is heel sterk. De bijhorende formule

$$A = \pi r^2$$

maakt de evenredigheidsconstante zichtbaar en is geschikt voor numeriek-algebraïsch gebruik. In de toepassingen van nu komt deze tweede, modernere stijl dan ook veel voor; het verband wordt als een *evenredigheid* geformuleerd.

Uit het huidige examenprogramma natuurkunde voor vwo[1] destilleren we volgende bloemlezing van formules:

$$p = \frac{F}{A} \qquad F_z = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \qquad F_{mpz} = \frac{mv^2}{r} \qquad B = \mu_0 \frac{NI}{l} \qquad R = \rho \frac{l}{A} \qquad \eta = \frac{P_{nuttig}}{P_{in}} \cdot 100\ \%$$

Onmiddellijk valt op dat evenredigheden hier de dienst uitmaken. Neem de formule voor de zwaartekrachtsaantrekking tussen twee massa's, die voor F_z. Denken we aan een planeet om de zon, dan zien we:

F_z is omgekeerd evenredig met r^2, het kwadraat van de onderlinge afstand.

Denken we aan gewichten die vallen op aarde, dan is r nagenoeg constant en vertelt de formule:

F_z is evenredig met de massa van het vallende gewicht.

G is in de formule de gravitatieconstante, niet te verwarren met de zwaartekrachtveldsterkte $g \approx 9,81$ m/s^2.

Bij natuurkunde en de techniekvakken is het van belang dat een leerling in staat is om dergelijke evenredigheden te verwoorden, om verwoordingen om te zetten in formules, en om het gedrag van bijbehorende grafieken te beschrijven en te herkennen.
Dat in het wiskundeonderwijs weinig expliciete aandacht aan evenredigheden wordt besteed, is een gemiste kans. Evenredigheid is een van de meestvoorkomende algebraïsche fenomenen bij natuurkunde en techniek, en het is niet moeilijk daar aardige wiskunde aan te verbinden. Op basis van lesmateriaal dat in het Profi-project voor vwo-4 is ontwikkeld, is binnen het SONaTe-project het boekje *Evenredigheden en machten* samengesteld [2]. Diverse ideeën uit dit hoofdstuk zijn daaruit afkomstig.

De aard van de evenredigheidsformules

Toegepaste formules gaan meestal over situaties waarin de samenhang van meer dan twee variabelen van belang is. Als die variabelen onderling steeds evenredig zijn, dan komen in de formule steevast producten of quotiënten voor, en zelden sommen of verschillen.
Zo treedt bij een circuit waarin een stroom ter grootte I door een weerstand R loopt, een spanningsverschil V over de weerstand op. Bij constante I zijn V en R dan evenredig, bij constante R zijn V en I evenredig. De consequentie is dat het verband zowel van de vorm $V = c_1 \times R$ als van de vorm $V = c_2 \times I$ moet zijn. De spanning moet daarom een constante keer het product van R en I zijn; de constante wordt in dat geval gekozen als de neutrale '1', waarmee aard en eenheid van weerstand worden vastgelegd (waarover later meer). De wet van Ohm drukt dat uit: $V = I \times R$.
De formules die evenredigheden tussen variabelen weergeven, hebben om deze reden de bijzonder eigenschap dat ze uit bijna alleen uit producten en quotiënten van machten bestaan.
Optellen van verschillende formules of variabelen kent sterke restricties: het kan alleen als het om

1 Examenprogramma natuurkunde vwo, CEVO, 2005; ook te vinden op http://www.tweedefase-loket.nl/doc/examenprogramma/examenprogramma%20natuurkunde.pdf

gelijksoortige grootheden gaat. Optellen en aftrekken zijn dan in toepassingsformules vaak te interpreteren als verschuivingen in ruimte of tijd zoals bij de harmonische beweging

$U = U_{max} \times \sin(\omega t)$

die een tijdsinterval t_0 voorloopt op de beweging

$V = U_{max} \times \sin(\omega(t - t_0))$.

Of het gaat er om dat de formule het verschil van twee niveau's betreft, zoals de formule van Balmer die de golflengte geeft van een foton dat uitgezonden wordt als een elektron rond een waterstofatoom van quantumniveau 2 naar niveau n springt; de formule beschrijft het energieverschil:

$$\frac{1}{\lambda} = R_\infty \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2}\right)$$

Goniometrische functies en exponentiële functies treffen we ook veel in de toepassinswereld. Bedenk dat de goniometrische hun achtergrond in de verhoudingen van lengtes hebben. Hun functiewaarde is daarom geen in de natuur zichtbare grootheid maar een zuiver getal. Dat de functie *sinus* de rol van neutraal getal heeft behouden, is te zien aan de formule $U = U_{max} \times \sin(\omega t)$. De uitwijking wordt gegeven in verhouding tot de maximale uitwijking U_{max}, een lengtemaat. Ook voor exponentiële functies gelden zulke overwegingen; ze geven eveneens neutrale factoren aan. Meer over grootheden en hun dimensies in een volgende paragraaf.

Globaal redeneren met evenredigheden

Dat in formules uit de natuurwetenschappen dikwijls meer variabelen voorkomen, zien we ook bij de doorbuiging van een rechthoekige staaf. Deze hangt bij een belastend gewicht af van de drie afmeting van de staaf, het belastend gewicht, de kwaliteit van het materiaal, en ook nog van de zwaartekracht, die bijvoorbeeld op de maan anders is. Sommige van deze variabelen, zoals de karakteristieken van het materiaal en de zwaartekracht, zijn te beschouwen als parameters, maar dan hebben we er toch nog vijf over: doorbuiging, gewicht en drie maten. Stel dat de balk aan de uiteinden is ingeklemd (zoals een boekenplank) en wordt belast met een totale belasting van Q (kg). De speciale algebraïsche mogelijkheden van evenredigheidsformules laten zich goed demonstreren aan de formule voor de doorbuiging f (in mm):

$$f = \frac{5 \cdot Q \cdot l^3}{32 \cdot E \cdot b \cdot d^3} \cdot 9,81$$

E is de elasticiteitsmodulus, een kwaliteitskenmerk van het gebruikte materiaal (N/mm^2), b, l en d zijn breedte, lengte en dikte van de balk (in mm). Welk effect heeft een verandering van elk van de grootheden op de doorbuiging? Duidelijk is dat verdubbeling van d een gunstiger invloed heeft dan verdubbeling van b: de doorbuiging wordt dan acht maal zo klein. Vloer- en plafondbalken hebben een rechthoekige doorsnede. We zetten de balk dan ook altijd op de smalle kant, om zoveel mogelijk van de derde macht van d te profiteren! Verder heeft een toename van E een positief effect op de doorbuiging: hoe groter E, hoe groter de starheid van de balk en dus hoe minder doorbuiging.

Dergelijke globale redeneringen met evenredigheden zijn in toepassingen zeer functioneel, en verdienen dan ook een plaats in het algebraonderwijs. De algebraïsche redeneringen worden hier ook ondersteund door de praktijkervaring. Dat blijkt een belangrijk gegeven in het beroepsonderwijs. Zolang het manipuleren van en het redeneren over algebraïsche vormen direct is gekoppeld aan voorstelbare zaken uit de praktijk, kunnen leerlingen heel goed uit de voeten. De koppeling is zeker in het vmbo een voorwaarde voor betekenisvol algebraonderwijs.

Leerlingen worden in de techniek veel met dergelijke formules geconfronteerd: complex ogende verbanden waarin vooral evenredigheden voorkomen. Een doel van het algebraonderwijs kan zijn om te leren door zulke complexiteit heen te kijken.

Evenredigheid in woord, formule, tabel en grafiek

Zoals dikwijls bij algebra het geval is, is het ook bij evenredigheid van belang dat leerlingen vertaalslagen kunnen maken tussen de een omschrijving in woorden en een formule, tabel of grafiek, In woorden wordt evenredigheid in Van Dale zo omschreven:

> Twee grootheden zijn evenredig (of evenredig afhankelijk) als het enige malen groter worden van de ene grootheid ten gevolge heeft dat de andere evenveel malen groter wordt.

Omdat het er in de praktijk meestal om gaat om bij gegeven waarde van de ene variabele, zeg P, de bijhorende waarde van de andere variabele, zeg Q, te vinden, gebruiken we het kenmerk:

– P en Q zijn evenredig als hun quotiënt constant is, dus als $P/Q = c;$

of het daarmee gelijkwaardige:

– P en Q zijn evenredig als geldt: $P = c \times Q$

Van Dale zou 'omgekeerd evenredig´ zo kunnen formuleren:

> Twee grootheden zijn omgekeerd evenredig als het enige malen groter worden van de ene grootheid ten gevolge heeft dat de andere evenveel malen kleiner wordt.

Daar horen dan deze kenmerken bij:

– P en Q zijn omgekeerd evenredig als hun product constant is, dus $P \times Q = c.$

– P en Q zijn omgekeerd evenredig als geldt: $P = c \times (1/Q).$

Met deze vormen kan de evenredigheid – dan wel omgekeerd evenredigheid – van de grootheden P en Q onderzocht worden aan de hand van een dubbele tabel met getalswaarden zoals meetgegevens: als product dan wel quotiënt van P en Q (min of meer) constant is, wijst dat op (omgekeerd) evenredigheid. Een alternatief is om na te gaan of een vermenigvuldigingsfactor in de ene kolom samengaat met dezelfde factor in de andere kolom: als P van 2 naar 6 springt, springt Q dan van 15 naar 45 (bij evenredigheid) of naar 5 (bij omgekeerde evenredigheid)? Daarmee wordt de beschrijving van Van Dale dan gevolgd.

Een voorbeeld. Tabel 1 geeft zowel een recht als een omgekeerd evenredig verband weer. Boven de kolommen staat het aantal tandjes van het voorblad van een fiets met versnellingen. Naast de rijen staat het aantal tandjes op het achterblad. In de cellen staat het verzet, uitgedrukt in aantal m per pedaalslag. Ook hier geldt weer dat de praktijk het algebraïsch redeneren ondersteunt: een tandwiel achter met de helft van het aantal tandjes verdubbelt het verzet, terwijl halvering van het aantal tandjes voor ook het verzet halveert.

	Aantal tandjes van het voorblad (t_v)															
	26	*28*	*30*	*32*	*34*	*36*	*38*	*40*	*42*	*44*	*46*	*48*	*50*	*52*	*54*	*56*
t_a																
12	467	502	538	574	610	646	682	718	754	790	826	861	897	933	969	1005
14	400	431	461	492	523	554	585	615	646	677	699	739	769	800	830	861
16	350	376	403	431	458	484	511	538	565	593	619	646	673	700	727	754
18	311	335	359	383	407	431	455	479	502	526	550	574	598	622	646	670
20	280	301	323	345	366	388	409	431	452	474	495	517	538	560	581	603
22	254	274	294	313	333	353	372	392	411	431	451	470	490	509	528	548
24	233	251	269	287	305	323	333	359	377	395	413	431	449	467	484	502
26	215	231	249	265	282	298	315	331	348	365	381	398	414	431	447	463
28	199	215	230	246	262	277	292	308	323	338	354	369	384	400	415	431

tabel 2.1 Verzet, afgerond op hele centimeters

tabel 1: Recht en omgekeerd evenredig (TWIN Wiskunde deel 1)

De evenredigheidsconstante c van het verband heeft in veel toepassingen het karakter van een 'kwaliteitskenmerk'. Zo geeft tabel 2 voor verschillende 'zwevers' de zogeheten *finesse F*. Deze finesse representeert de horizontale afstand die kan worden afgelegd per meter daling (motoren uit, vleugels stil). Bij alle zwevers hoort de formule $g = F \times d$ met h de horizontale glijafstand en d de verticale daling, beide in *m*. F is dus te beschouwen als een indicator van het zweefvermogen van de zwever: hoe groter *F*, hoe verder de zwever kan komen.

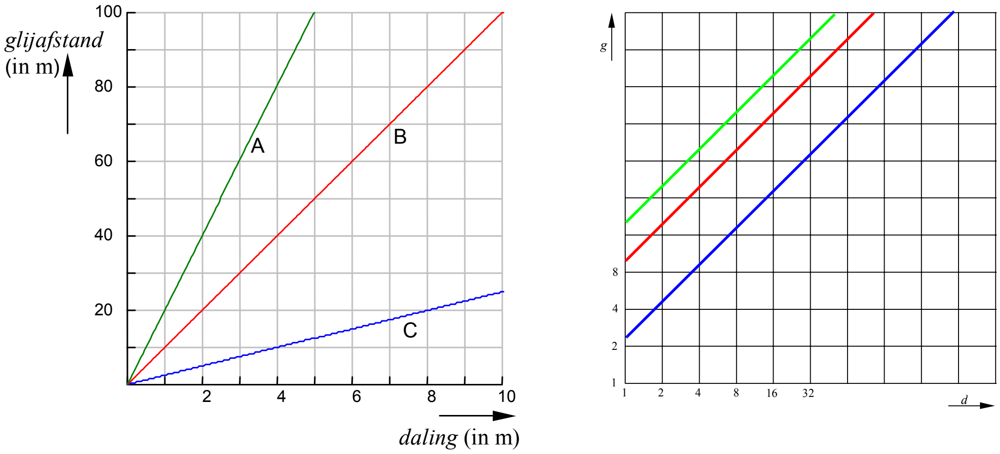
zwever	***F***
zweefvliegtuig *	40
albatros *	20
Boeing 747 *	14
gierzwaluw *	10
gier	11
koolwitje	4
vliegende eekhoorn	2,5
sprinkhaan	1,5

tabel 2: De finesse van verschillende zwevers (Bron (*) zie [3])

Tabel 2 geeft de grafieken van albatros (A), gier (B) en vliegende eekhoorn (C) in een assenstelsel met de gebruikelijke assenindeling. Voor deze drie zwevers, en ook voor alle andere, geldt volgens het model: bij een dubbele dalingsafstand verdubbelt ook de horizontale glijafstand

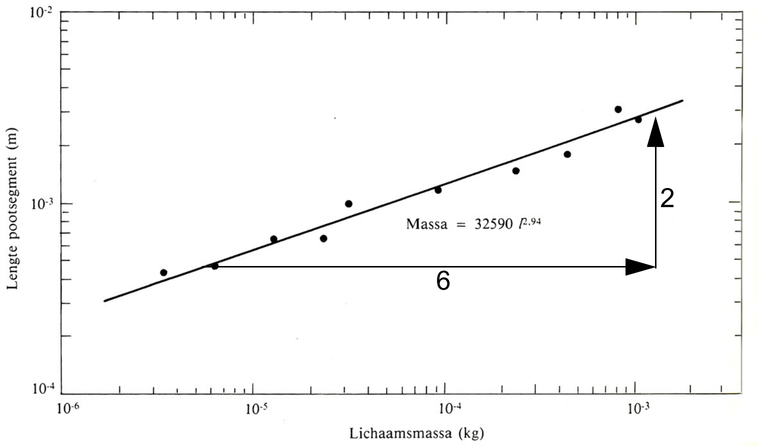
verdubbelt d, dan verdubbelt g ook

Dat komt in het plaatje goed naar voren: de grafieken zijn alle drie rechte lijnen door de oorsprong, maar met verschillende hellingen.



figuur 2: Glijafstand als functie van de daling voor verschillende zwevers

Bij de linker grafiek ligt de levensgrote verwarring van de lijn met de dalende dieren voor de hand. Zulke verwarringen zijn een bekend fenomeen, vooral in de brugklas. Het is goed er enige robuustheid tegen op te bouwen, door te eisen dat naar de werkelijke betekenis van de grafische voorstelling moet worden verwezen. Steil stelt hier dus niet neerstorten voor, steil is hier juist kwaliteit: de gier glijdt dalend veel verder dan de eekhoorn bij hetzelfde hoogteverlies.
Bij rechtevenredigheid (zoals bij de zwevers) resulteert de weergave in de rechter grafiek altijd in een rechte lijn die een hoek van 45 graden maakt met de horizontale as: de vertikale stap is altijd gelijk aan de horizontale stap. Bij evenredigheden van machten, zoals hierna wordt bezien, ligt dat anders. Evenredig met een kwadraat wordt in een dergelijke presentatie zichtbaar als: een stap horizontaal resulteert in een vertikale stap die twee keer zo groot is. Een mooi voorbeeld waarbij dit principe kan worden gebruikt is het (gemeten) verband tussen pootlengte *l* en lichaamsmassa *m* van een aantal kakkerlakken, waarvan de grafiek in figuur 3 is afgebeeld.



figuur 3: Pootlengte als functie van massa [4]

De gegeven formule $massa = 32590 \cdot l^{2,94}$ is resultaat van regressie. De pijlen in de grafiek geven aan dat een formule met exponent 3 ook redelijk past. Die zouden we op grond van theoretische overwegingen wellicht kunnen verwachten: pootlengte is een lengte en massa is evenredig met volume, dus met lengtemaat tot de macht 3.
Laten we evenredigheid met een macht wat meer in detail bekijken.

Evenredigheid van machten

Speciale aandacht verdient evenredigheid tussen machten van grootheden. Dit komt in natuurwetenschappen en techniek veel voor. De bekende ‘derde wet’ van Kepler in de klassieke vorm

> de kwadraten van de omlooptijden van planeten verhouden zich als de derde machten van de baanstralen [1]

is om te zetten naar

$$T^2 = c \cdot R^3$$

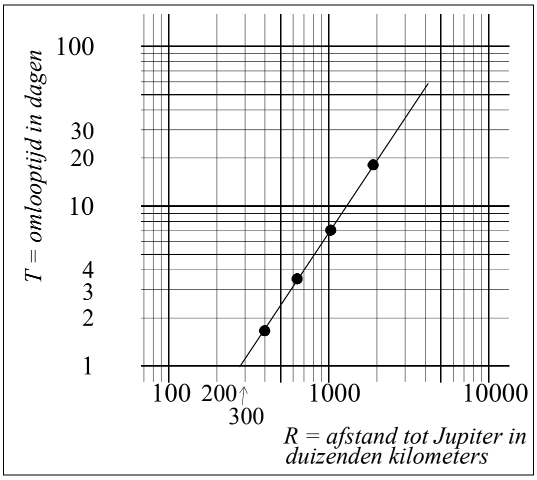
Vergroten we in de formule T met een factor 1000, dan hoort daar een vergroting met een factor 100 voor R bij. Drie factoren 10 voor T, twee factoren 10 voor R. Voor andere factoren dan 10 gaat het net zo. T met 8 vermenigvuldigen correspondeert met R met factor 4 vergroten. Dit is in principe de algebraïsche kern van het globaal redeneren over evenredigheden met machten.
In het al eerder gebruikte grafiekenpapier waarop zo mooi constante verhoudingen op de schalen zijn te zien moet dat een bijzonder resultaat opleveren. We kunnen dit zien aan de hand van de vier met een gewone verrekijker al zichtbare manen van Jupiter. Door regelmatige waarneming zou je de omlooptijden zelf nauwkeurig kunnen bepalen. Zo heeft Galileï dat in 1610 al gedaan; de resultaten staan in tabel 3.

maan	***omlooptijd T in dagen***	***afstand R tot Jupiter (in 10^3 km)***
Io	1,76	422
Europa	3,55	671
Ganymedes	7.15	1070
Callipso	19.69	1882

tabel 3: Omlooptijden en afstanden van vier manen van Jupiter

1 Als we uitgaan van cirkelvormige banen. Bij ellipsen is de evenredigheid met de derde macht van de *lange as* van de ellips.

Figuur 4 toont de grafiek op logaritmische schaal. Op het papier moeten de 10 stappen horizontaal en vertikaal wel even groot zijn, maar we kunnen het stuk schaal dat nodig is aan de gegevens aanpassen. De helling van de lijn is 3 op 2, zoals te verwachten was. De grafiek laat zich tegenwoordig uitbreiden tot 28 manen.[1]



figuur 4: Grafiek op logaritmische schaal

In het algemeen is van evenredigheid van machten sprake als het verband de algebraïsche vorm heeft:

$$y^a = c \cdot x^b$$

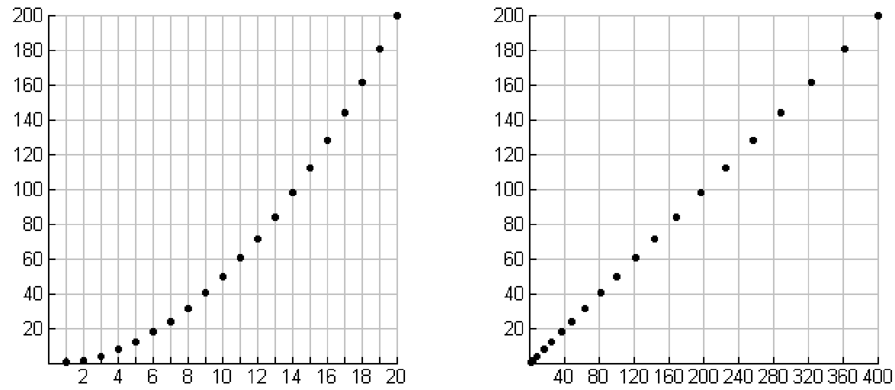
Hierin is *c* de evenredigheidsconstante, en is de exponent *b* een reëel getal, dat dus bijvoorbeeld ook gebroken of negatief kan zijn. Evenredigheidsverbanden tussen machten van variabelen laten zich op bovenstaande manier goed onderzoeken. De helling van de lijn geeft de verhouding van de machten aan; veranderingen in de constante *c* komen overeen met verschuiven de lijn. Via een omkeerschema kan zo'n evenredigheid ook worden omgeschreven, waardoor de andere grootheid wordt geïsoleerd:

$$x \xrightarrow{\wedge b} x^b \xrightarrow{\times c} c \cdot x^b\,(= y) \qquad \text{en} \qquad y \xrightarrow{\times (1/c)} \tfrac{1}{c} \cdot y \xrightarrow{\wedge 1/b} \left(\tfrac{1}{c} \cdot y\right)^{\frac{1}{b}}\,(= x)$$

Dergelijke algebraïsche vaardigheden komen dus van pas bij natuurkunde en techniek.

Er is nog een manier om evenredigheid met machten grafisch weer te geven. In het voorbeeld van F_{mpz} die evenredig is met v^2 kunnen we in een grafiek langs de horizontale as v^2 uit te zetten in plaats van *v*. De grafiek wordt dan een rechte lijn. De natuurkundeboeken van het vwo noemen dat *coördinatentransformatie*. Misschien is het begrijpelijker om het de substitutiemethode te noemen: vervang v^2 door de variabele *u*. Dan krijg je in plaats van $F_{mpz} = c \times v^2$ de vorm $F_{mpz} = c \times u$. De grafiek wordt dan een rechte lijn.

1 Zie http://solarviews.com/eng/jupiter.htm#moons



figuur 5: Andere schaling op de horizontale as brengt evenredigheid in beeld

Wanneer een algebraïsch model op theoretisch gronden beschikbaar is, blijkt evenredigheid uit de formule en kan zo'n grafiek als hierboven gemaakt worden. Als zo'n model er niet is, maar de meetgegevens wel, dan kunnen we deze methode niet toepassen om dat de coördinatentransformatie van het model afhangt. De schaalindeling die gebaseerd is op het principe dat gelijke lengteverschillen bij gelijke verhoudingen horen helpt dan wel. Als er een machtsverband is, verschijnt er een rechte lijn en de verhouding van de exponenten kan uit de helling worden afgelezen.

Evenredigheid en dichtheid

Twee verbanden uit de bloemlezing van de natuurkundeformules verdienen nog aparte aandacht:

$$p = \frac{F}{A} \quad \text{en} \quad \eta = \frac{P_{nuttig}}{P_{in}} \cdot 100\ \%$$

Hoewel heel verschillend, hebben ze een gemeenschappelijk trekje: het zijn als het ware schalingen ten opzichte van een totaal. De druk is de kracht *per* oppervlakte-eenheid en het rendement is het best bereikbare effect *ten opzichte van* het maximale effect. Zulke relatieve maten komen veel voor; denk aan massadichtheid, bevolkingsdichtheid, relatieve vochtigheid, ...
In feite is bij een dichtheid dus sprake van evenredigheid, waarbij de evenredigheidsconstante het omgekeerde van het totaal is. Daardoor ontstaat een relatieve maat waarmee twee of meer verschillende situaties onderling vergelijkbaar worden. Bij dichtheden heb je op een heel natuurlijke manier recht- en omgekeerd evenredig in één formule verpakt: vergroting van de bevolking leidt tot een grotere dichtheid; annexatie van grondgebied leidt tot een lagere dichtheid.

Samengevat blijkt dat veel algebraïsche verbanden die voorkomen in natuurkunde en techniek in wezen evenredigheden zijn. Aan evenredigheid zou dan ook bij algebra meer aandacht moeten worden besteed.

6.4 Grootheden, dimensies en eenheden

De traditionele meetkunde en de algebra die er nauw mee samenhangt kende slechts enkele grootheden: die van ruimte – lengte, oppervlakte en volume – en hoek. Verschillende oppervlaktes of hoeken werden aanvankelijk slechts met elkaar vergeleken door ze als het ware op elkaar leggen, eventueel voorafgegaan door verknippen en verschuiven van onderdelen. Zowel qua aantal verschillendsoortige grootheden als qua manieren om ermee om te gaan zijn we dank zij de natuurwetenschappen wel wat verder gekomen. Genoeg reden om eerst iets dieper in te gaan op het begrip grootheid en wat daarmee samenhangt.

Grootheden meten

Een grootheid is een natuurkundig begrip dat meetbaar is; denk daarbij aan zaken als afstand, tijd, temperatuur en massa, snelheid, stroom, kracht, hardheid, kleur.

Dit kleine lijstje laat al zien hoe complex de wereld van de grootheden is, want de genoemde begrippen worden op heel verschillende manieren gemeten; sommige van deze grootheden (snelheid bijvoorbeeld) lijken een samenspan te zijn van twee andere (tijd en afstand in dit geval), en bovendien is duidelijk dat er vragen liggen over conventies over maten en niet te vergeten nauwkeurigheid.

Meten van grootheden kan op heel verschillende manieren. Een tandarts meet voor het aanbrengen van een kroon eerst precies de kleur van tanden of kiezen in de buurt. Hij gebruikt daarvoor een staalkaart van allerlei subtiele tinten gebroken wit. Meten is hier wat het in wezen is: vergelijken. De te meten waarden liggen hier niet in een enkele als het ware op een lijn af te beelden volgorde. Bij meten van windsnelheid met behulp van de schaal van Beaufort, een wat verouderde methode, is dat anders. Je vergelijkt de wind met een wind van sterkte 3, dat is de wind die juist een vlag licht in beweging brengt. Of met een van sterkte 9; storm, die mogelijk schoorstenen en dakpannen afrukt, en lichte schade in de bossen brengt. Er was een standaardschaal van 0, windstilte, tot 13, orkaan. Ons begrip temperatuur is vastgelegd door twee van zulke ijkpunten: het absolute nulpunt 0, waaronder geen temperaturen bestaan en het tripelpunt water. Dat is de temperatuur waarbij zowel damp, vloeistof als ijs kunnen blijven bestaan. Die temperatuur is vastgelegd als 273,16 graden Kelvin.[1]

Daarmee vergeleken lijken meetschalen als die van lengte en tijd simpel: je kunt stukken lengte en tijd meten door ze te vergelijken met een afgesproken eenheidslengte of eenheidstijd, door herhalen en eventueel door indelen van die eenheid. Schalen die zo ontstaan hebben duidelijk sterke banden met de getallenwereld: Je kunt zulke maten (indien van dezelfde soort) samennemen; de getalwaarde die bij de samenstelling hoort is de som van de getallen bij de delen. Zulke maten zijn geschikt voor gebruik in evenredigheden en om mee te rekenen, al zijn er ook wel wat addertjes onder het gras.

Bij snelheid lijkt het erop of we meten met twee maten, die van afgelegd weg en verlopen tijd, en die op elkaar delen. Dat is de gebruikelijke voorstelling; voor we op zulke samengestelde maten dieper ingaan, geven we wat informatie over ‘afgesproken eenheden’.

Eenheden

In 1960 is het SI (*Système International*) als standaardsysteem voor eenheden in natuurwetenschappen internationaal ingevoerd. Het geeft een overzicht van in wetenschap en techniek te gebruiken eenheden. Het SI definieert zeven basiseenheden, die voor lengte, massa, tijd, elektrische stroom, temperatuur, stofhoeveelheid en lichtsterkte. Neem bijvoorbeeld lengte en massa.

- De huidige lengteenheid is de meter; deze is in 1983 opnieuw vastgelegd als de lengte die het licht in vacuüm aflegt in een tijdsinterval van exact 1/299 792 458 seconde. De seconde is vastgelegd als een in principe telbaar natuurfenomeen en is dus ook exact: de duur van precies 9 192 631 770 cycli van de straling die overeenkomt met de overgang tussen twee energieniveau’s van de grondtoestand van Cesium-133 met als temperatuur het absolute nulpunt.
- De eenheid van massa moet het nog steeds op de ouderwetse manier doen: in Sèvres, Parijs, ligt een cilinder van platina-iridium die het afgesproken gewicht heeft van een kilogram. (De *kilogram* is dus de basiseenheid, niet de *gram*!)

Naast de basiseenheden zijn er afgeleide eenheden, zoals voor lengte de centimeter en het lichtjaar, en eenheiden voor samenstellingen zoals snelheid, met als uitgangspunt de meter per seconde, maar uiteraard ook met allerlei afleidingen.

1 Het is duidelijk dat zo’n definitie complex is een heel wat meer achtergrond heeft dan hier aangegeven. Een startpunt voor meer informatie is de Wikipedia encyclopedie. In dit geval: ***http://nl.wikipedia.org/wiki/Tripelpunt***

Het SI voorziet ook in het vastleggen van de reeks voorvoegsels waarvan *kilo* en *deci* mogelijk de bekendste zijn, een reeks die loopt van *yocto* voor 10^{-24} tot *yotta* voor 10^{24}.
Daaruit zien we ook al dat het metriek stelsel duidelijk een voorloper van het SI is. Het metriek stelsel beoogde in de jaren na de Franse revolutie (1795) oorspronkelijk de volledige decimalisering van alle maten, inclusief een ander indeling van de kalender in van de hoek[1]. Napoleon schijnt er overigens een tegenstander van te zijn geweest; onze Koning Willem I voerde het in het Verenigd Koninkrijk in 1816 in. De USA loopt nog steeds uit de pas met inches en miles.

Samenstellen van en rekenen met grootheden

Voor de veiligheid van uzelf en van uw fiets wordt deze stallig 24 uur bewaakt met videocamera's.

Er wringt iets op dat bordje in de geautomatiseerde fietsenstalling op het station. We gaan er maar van uit dat er 24 uur per dag wordt bedoeld. En ook dat is een beetje vreemd: is dat hetzelfde als 60 seconden per minuut? Je zou zeggen van wel, maar die 24 uur per dag klinkt toch wel veel veiliger. Dagelijkse taal en technisch-wetenschappelijke taal hebben duidelijk hun eigen normen.
Snelheid kennen we in kilometers *per* uur in de auto, maar we zeggen daar vaak kort: ik rijd nu 80.
Omreken naar de SI-eenheid gaat zo:
80 kilometer per uur is 80000 meter per 3600 seconden. Dat is 80000/36000 meter per 1 seconde. dat is dus 22,22 meter per seconde, ofwel 5 seconden tussen de hectometerpaaltjes. De rekenoperaties van samenstellen en omrekenen zijn delen en vermenigvuldigen, dat is duidelijk.
Drukken we een grootheid in een eenheid uit, dan gebruiken we een getal om die verhouding aan te geven, het maatgetal. Het verband tussen maatgetal, grootheid en eenheid kunnen we zo aangeven:

grootheid = maatgetal · eenheid

Daarmee geven we aan dat we ons bewust zijn van de onderliggende verhoudingsstructuur van het maatsysteem lengte, maar toch graag algebraïsch met getallen en met vermenigvuldigen werken. De relatie is bruikbaar, doordat hij zo consistent is. Neem het begrip oppervlakte van een rechthoek als voorbeeld.

oppervlaktegrootheid = oppervlaktemaatgetal · oppervlakte-eenheid

We bepalen de oppervlakte echter ook met de formule *lengte · breedte*.
Die formule levert ons op:

(lengtemaatgetal · lengte-eenheid) · (breedtemaatgetal · breedte-eenheid)

en daarvan maken we natuurlijk graag:

(lengtemaatgetal · breedtemaatgetal) · (lengte-eenheid · breedte-eenheid)

Met de component *(lengtemaatgetal · breedtemaatgetal)* zijn we erg vertrouwdheid, die hoort tot de wereld van de getallen en we hebben

oppervlaktemaatgetal = lengtemaatgetal · breedtemaatgetal

In de tweede component moeten we dan wel hebben:

oppervlakte-eenheid = lengte-eenheid · breedte-eenheid

Gaan we voor de twee lengte-eenheden uit van de meter *m*, dan is de oppervlakte-eenheid als consequentie van de vermenigvuldigingsstructuur dus m^2.
Aan deze wat abstracte analyse kunnen we nog het omreken van eenheden van dezelfde soort toevoegen, zoals in de regels *inch = 25,4 · mm* of *foot = 12 · inch*, dat is weinig problematisch.
Deze analyse als geheel geeft wel aan dat het goed mogelijk is een degelijke *wiskundige* onderbouwing of beschrijving te geven van het *natuurkundige* fenomeen *grootheid* [2]. En dat de vaak gewraakte zegswijze "lengte door tijd delen" wel degelijk te legitimeren is.

1 De rechte hoek kreeg 100 graden; het systeem wordt in de landmeting nog gebruikt.
2 In hoofdstuk 9 wordt opgemerkt dat de wiskundige Viète al in de 16e eeuw stappen in deze richting zet. In *Euclides* doet Van Dormolen het nog grondiger [5].

Dimensie

Snelheid meten we in lengte per of gedeeld door tijd; de natuurwetenschapper zegt het nog anders: *de dimensie van snelheid is* LT^{-1}, of ook wel L/T. De L staat voor lengte, T voor tijd en de algebraïsche structuur van de formule geeft de relatie goed weer: Lengte gedeeld door, of *per* tijd.
Elke grootheid in de natuurwetenschappen heeft zo'n dimensie. Neem bijvoorbeeld de grootheden afstand, breedte, hoogte, afgelegde weg, remweg, snaarlengte. Dit zijn allemaal vertegenwoordigers van de dimensie lengte. het doet er niet toe of we meten in de eenheid kilometer of millimeter, de dimensie van remweg is lengte.
Een dimensies van een grootheid wordt in het algemeen met vierkante haken om die grootheid genoteerd. Als we lengte met L en tijd met T afkorten, kun je bijvoorbeeld schrijven:

[*afgelegde weg*] = [*afstand*] = [*breedte*] = [*hoogte*] = L.
[*oppervlakte*] = L^2 en [*snelheid*] = LT^{-1}.

Alle oppervlaktegrootheden hebben dimensie L^2, dat hoeft geen betoog meer na het voorgaande.
Frequentie van een periodiek verschijnsel meten we in Herz, aantal keren per seconde. De dimensie van frequentie is T^{-1} of $1/T$.
De maatgetallen die we zoëven noemden hebben geen dimensie, maar zijn *dimensieloos*.

Dimensieanalyse

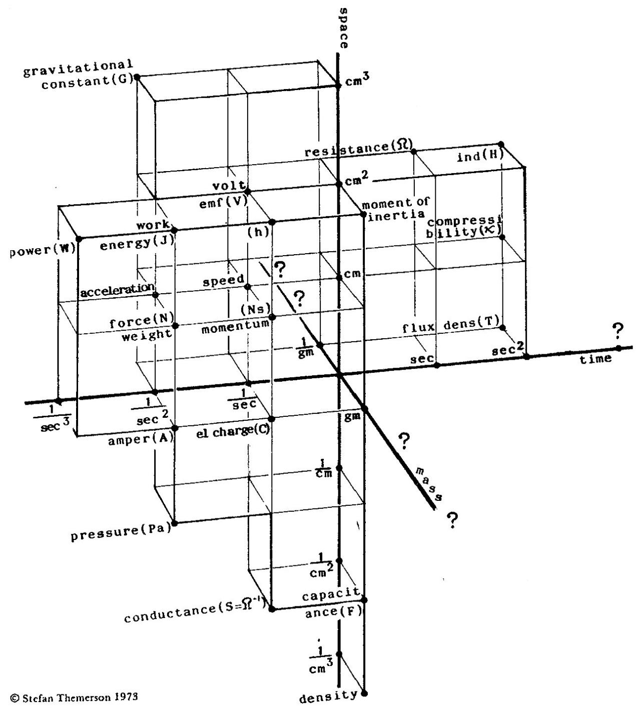
Een kracht is versnelling keer massa en heeft daarom de dimensie $L \cdot T^{-2} \cdot M$. Arbeid is kracht keer weg, vermogen is arbeid per tijdseenheid. Voor vermogen vinden we dus de dimensie $L^2 \cdot T^{-3} \cdot M$.
Daarmee zijn we verzeild geraakt in de dimensieanalyse, die als het ware de boekhouding van soorten en aard van de eenheden bijhoudt.
Bij een formule die een verband tussen grootheden beschrijft, moeten de dimensies uiteraard kloppen. Dit is iets waar een natuurwetenschapper bijna van nature op let.
Neem bijvoorbeeld de formule van de slinger:

$$T_s = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

De variabelen hier zijn grootheden met een specifieke betekenis: slingertijd T met eenheid s, lengte van de slinger l met eenheid m en gravitatieversnelling g met eenheid m/s^2. De dimensieanalyse is hier een interessant stukje tamelijk elementaire algebra.
Omdat geldt $[T] = T$, $[l] = L$ en $[g] = L/T^2$ en omdat 2π een dimensieloos getal is, kloppen de dimensies in de formule inderdaad:

$$[l/g] = L/(L/T^2) = T^2 \text{ en dus } \left[\sqrt{\frac{l}{g}}\right] = T = [T_s]$$

Een aardige weergave van de dimensies van samengestelde grootheden uitgedrukt in lengte, tijd en massa staat in figuur 6. Hier zijn de dimensies $L^x T^y M^z$ elk als een punt (x, y, z) in een ruimte aangegeven. Het plaatje komt voor in een lichtvoetig natuurkundig/filosofisch essay 'On thinking in terms of Co-ordinates' van Stefan Themerson. Themerson geeft overigens de grootheid Ampère nog de dimensie die de grootheid in het m-s-kg had; dat is in het SI-stelsel niet meer correct, daar is de Ampère hergedefinieerd als aparte basiseenheid. Over Stefan Themerson en zijn 'diep en grappig' oeuvre: http://www.moorsmagazine.com/boekenhoek/themerson.html.

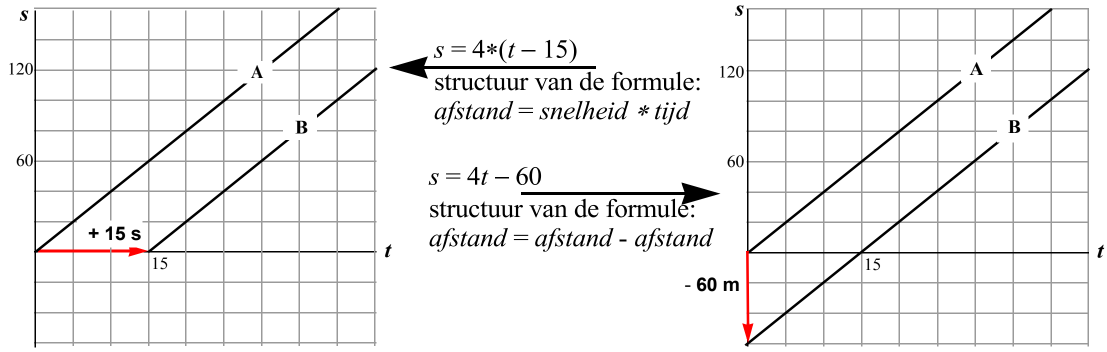


figuur 6: Dimensies van samengestelde grootheden [6]

Formules en dimensies

In het volgende voorbeeld komen twee verschillende maar wel gelijkwaardige formules voor; een dimensieanalyse laat zien dat hier met 'gewone' algebra toch wel wat zaken buiten beschouwing blijven (zie ook [7]). Het gaat om het probleem van twee fietsers die eenzelfde route rijden met gelijke snelheid maar met een tijdverschil van 15 seconden. Als de fietssnelheid 4 m/s is en de eerste fietser (persoon A) op tijdstip $t = 0$ vertrekt, dan zijn de twee formules van de afgelegde weg s voor de twee fietsers respectievelijk $s = 4t$ (voor A) en $s = 4 \times (t - 15)$ voor B.

De dimensieanalyse klopt: $[s] = L$ en $[4t]$ heeft dimensie $(L/T) \times T = L$. Een dergelijke analyse van de tweede formule levert hetzelfde op, omdat $t - 15$ dimensie T heeft.
Maar er is toch iets bijzonders aan de hand!
Zuiver algebraïsch is $s = 4*(t - 15)$ hetzelfde als $s = 4t - 60$, maar de dimensietest levert nu een inzicht op dat de dimensieloze algebra verbergt. Bij het omwerken van $4*(t - 15)$ naar $4t - 60$ blijkt nu dat het getal dat het oorspronkelijke getal 15 (met dimensie L/T) is omgevormd tot het getal 60 ook de dimensie L en eenheid m moet hebben. Bij de vermenigvuldigen van 4*15 is dat niet zichtbaar, getallen leveren getallen. De tweede formule beschrijft nu dus eigenlijk een ander fenomeen: niet een tweede fietser die 15 seconden later vanaf dezelfde beginpositie vertrekt, maar een fietser B die op hetzelfde moment als A start, maar met een achterstand van 60 m. Deze extra dimensieanalyse is echt een verrijking van de 'gewone' algebra van het probleem.
Grafisch is er dus (bij een startmoment $t = 0$) sprake van twee verschillende grafieken, behorend bij twee verschillende probleemsituaties die echter algebraïsch gelijkwaardig zijn als je afziet van de dimensies van de getallen en variabelen (figuur 7).
Ook bij exponentiële groei (of -verval), dat veelvuldig voorkomt in de Tweede Fase van havo en vwo, kan het verhelderend werken om een dimensiebeschouwing te gebruiken om beter greep te krijgen op de variabelen en parameters die een rol spelen.



figuur 7: Twee manieren om tegen equivalente formules aan te kijken

Variabelen met rollen en dimensies

We hebben gezien dat variabelen in algebraïsche formules en functies bij natuurkunde een ander karakter hebben dan vaak bij wiskunde het geval is doordat ze een grootheid met een dimensie en een eenheid voorstellen. Er is nog een tweede verschil dat we hier willen benadrukken.
Een variabele in een natuurkundige of technische formule heeft een specifieke rol in de toepassingssituatie. Sterker dan bij zuiver wiskundige problemen komt die rol tot uitdrukking in een vaak traditionele afgekorte variabelenaam, zoals *s* voor afgelegde weg, *V* voor spanning, *t* voor tijd, ω voor hoeksnelheid, *F* voor kracht, enzovoorts. Niet alleen de band met de toepassing wordt daardoor duidelijk, ook het overzicht op de dimensie- en eenhedenstructuur in de formule blijft zichtbaar. Neem bijvoorbeeld de volgende twee formules, die van een rationale functie en de slingertijdformule:

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+3} \qquad\qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

In de slingertijdformule hebben de variabelen functionele namen, dimensies en eenheden: slingertijd *T* met eenheid s, lengte van de slinger *l* met eenheid m en gravitatieversnelling *g* met eenheid m/s^2. Eigenlijk staat er een verband tussen *T* en *l*: als we *l* weten is ook *T* bepaald en andersom. In de formule is de constante (maar niet dimensieloze!) grootheid *g* te verkiezen boven het getal 9,81. Dat de dimensieanalyse klopt, is nu namelijk veel duidelijker zichtbaar.
In de rationale formule zijn de variabelen niet gebonden aan een specifieke betekenis, en kunnen we de *x* best door een *u* vervangen. Dat maakt voor de functie als algebraïsch object helemaal niet uit. De *x* in de formule is geen variabele die naar iets buiten de definitie verwijst, maar slechts een symbool om de structuur van een algebraïsch verband kort te kunnen noteren. De *x* is kortom een dummy-variabele, net als de *k* in de volgende sommatieformule en de *t* in de integraal daarnaast. Zowel de som als de integraal zijn constanten!

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \qquad\qquad \int_1^{\infty}\frac{dt}{1+t^2}$$

Dat variabelen in formules uit natuurkunde en techniek grootheden voorstellen met dimensies en eenheden, is een belangrijk verschil met de manier waarop variabelen veelal binnen algebra functioneren. Van dit verschil moet men zich terdege bewust zijn.

6.5 Werken met onnauwkeurige getallen

Waarden waarmee in de natuurkunde en techniek wordt gewerkt zijn meestal gemeten grootheden en hebben daarmee een intrinsieke (on)nauwkeurigheid. Het correct omgaan met deze kwestie is een specialisme op zich: dat van de foutenanalyse.

Bij invullen van waarden in een formule als $V_0 \sin(\omega t)$ treden dan nog ander zaken op: de tijd t zal niet helemaal exact bekend zin, ω is mogelijk uitgedrukt in radialen per seconde en zal berusten op een gebruikt aantal decimalen van π, de sinus van de rekenmachine is een benadering, het vermenigvuldigen met de waarde van V_0 zal ook onnauwkeurig zijn: een beperkt aantal decimalen is gegeven. Het resultaat is een benadering.
Bij productieprocessen treden altijd onnauwkeurigheden op, die in sommige gevallen desastreus kunnen zijn. Denk bijvoorbeeld aan een te produceren cilindervormige staaf van 10 mm doorsnede die moet passen in een gat van 10 mm doorsnede: een riskante zaak. Eisen we van de productie dat de cilinderdoorsnede een negatieve *tolerantie* heeft van 0.01 mm en het gat eenzelfde positieve tolerantie, dan gaat het wel goed. Een tweezijdige tolerantie kan problemen geven.
Correcte indicaties van fouten en garantie van toleranties zijn belangrijk. Het is duidelijk dat bij het gebruik van getallen in natuur en techniek alleen al om de genoemde redenen wat meer komt kijken dan de rekenkundige aanpak in eerste instantie doet vermoeden.

Foutenanalyse

In het wiskundeonderwijs zou het werken met onnauwkeurige getallen meer aandacht verdienen. Een begrip als tolerantie (toegestane afwijking naar onder en boven van een gegeven maat in absolute getallen of als percentages) is in veel situaties wezenlijk. Met algebra is het doorwerken van fouten (afwijkingen in getalswaarden) goed te beschrijven.

Leg bijvoorbeeld twee planken met lengte 2 m, elk met een tolerantie van 0,5 cm, achter elkaar. Dat geeft een totale lengte van 4 m met een maximale afwijking van 1 cm. Ook als je het verschil van twee lengtematen vergelijkt, moet je rekening houden met de som van de afwijkingen. Immers de uitersten bij $a \pm \Delta a$ en $b \pm \Delta b$ worden bij de som van a en b gegeven door $\pm(\Delta a + \Delta b)$ en bij het verschil door $\Delta a - (-\Delta b)$ en $-\Delta a - (\Delta b)$. De simpele regel bij som en verschil is dus:

Bij som en verschil is de absolute fout gelijk aan de som van de absolute fouten.

Lastiger wordt het bij het product en quotiënt van twee grootheden a en b

$$(a + \Delta a)(b + \Delta b) = ab + a\Delta b + b\Delta a + \Delta a \cdot \Delta b$$

dus $\Delta(ab) = (a + \Delta a)(b + \Delta b) - ab = a\Delta b + b\Delta a + \Delta a \cdot \Delta b$

Bij relatief kleine afwijkingen mag de hogere-orde-term worden verwaarloosd:

$$\Delta(ab) = (a + \Delta a)(b + \Delta b) - ab = a\Delta b + b\Delta a$$

Bij een quotiënt wordt het nog erger. De grootste afwijking krijg je door de grootst mogelijke teller te delen door de kleinst mogelijke noemer:

$$\Delta\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a + \Delta a}{b - \Delta b} - \frac{a}{b} = \frac{b\Delta a + a\Delta b}{b(b - \Delta b)} \approx \frac{b\Delta a + a\Delta b}{b^2}$$

Deze expressies leiden tot ingewikkelde formuleringen voor de afwijking in product of quotiënt. Kijk je echter niet naar de absolute fout, maar naar de relatieve dan worden de regels toch simpel:

$$\frac{\Delta(ab)}{ab} = \frac{a\Delta b + b\Delta a}{ab} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$$

en $$\frac{\Delta\left(\frac{a}{b}\right)}{\frac{a}{b}} = \Delta\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \frac{b}{a} = \frac{b\Delta a + a\Delta b}{b^2} \cdot \frac{b}{a} = \frac{b\Delta a + a\Delta b}{ab} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$$

Het verrassende resultaat van het toepassen van algebra is de eenvoudige regel voor product en quotiënt:

Bij product en quotiënt is de relatieve fout gelijk aan de som van de relatieve fouten.

Een waarschuwing is hier wellicht op zijn plaats: de relatieve fout van $a - b$ gedraagt zich niet zo netjes en kan onverwacht groot worden!

In de natuurkunde is de lineaire uitzettingscoëfficiënt α een karaktereigenschap van materialen, die aangeeft met welke factor het materiaal in lengte toeneemt (ten opzichte van de beginlengte) per graad temperatuursverhoging:.

$$\alpha = \frac{\Delta l}{l}$$

De oppervlakte-uitzetting en de kubieke uitzetting hebben als uitzettingscoëfficiënt 2α respectievelijk 3α. Dat zijn directe toepassingen van bovenstaande regel voor het product.

Algebraïsch betekent dit dat in de uitwerkingen van de expressies $(l+\Delta l)^2 - l^2$ en $(l+\Delta l)^3 - l^3$ hogere machten van de relatieve fout worden weggelaten.
Uitgewerkt voor de volumecoëfficiënt γ:

$$\gamma = \frac{(l+\Delta l)^3 - l^3}{l^3} = \frac{3l^2\Delta l + 3l(\Delta l)^2 + (\Delta l)^3}{l^3} = 3\left(\frac{\Delta l}{l}\right) + 3\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l}{l}\right)^3$$

Dit voorbeeld maakt duidelijk dat foutenleer, uiterst relevant in natuurkunde en techniek, aanleiding kan zijn tot interessante, zij het niet eenvoudige, algebra.

6.6 Algebra afstemmen op natuurkunde en techniek

Een van de vroege constateringen bij het SONaTe-project was dat bètavakken regelmatig wat samen doen (al was het maar het gebruik van hetzelfde practicumlokaal), maar dat wiskunde volledig afzijdig van de andere vakken opereert. De behoefte aan meer samenhang tussen de profielvakken heeft er toe geleid dat er is gezocht naar raakvlakken tussen wiskunde en natuurkunde.
Met het ontwikkelen van twee pakketten (*Evenredigheden & machten* voor wiskunde en *Verbanden onderzoeken* voor natuurkunde) is de afstand tussen beide vakken wat verkleind. Daarbij bleken beide disciplines elkaar te kunnen versterken door het gebruiken van gezamenlijke notaties en begrippen. In de lespraktijk van de deelnemende scholen bleek dat aandacht bij wiskunde voor evenredigheden het begrip bij de natuurkundelessen ten aanzien van het experimenteel onderzoeken van evenredigheden te versterken. Maar ook bleek dat de leerlingen de behandeling van hetzelfde fenomeen te beschouwen als specifiek bij het vak behorend. Dat is vergelijkbaar met de observatie dat leerlingen binnen de wiskundelessen moeite hebben om een meetkundig probleem met algebraïsche technieken te lijf te gaan of omgekeerd. Referenties zoals ‘maar dat heb je bij natuurkunde ook gedaan’ lijken in zo’n geval onmisbaar om die herkenning te stimuleren. Wellicht helpt het om sommige lessen in teamverband te geven: de natuurkunde- en wiskundedocent als koppel verzorgen lessen op het randgebied van de twee vakken. Daarbij kan ook expliciet duidelijk worden op welke verschillende manieren bij de twee vakken met verbanden wordt omgegaan.
Binnen het TWIN-project moest wiskunde wel worden omgebouwd tot een daadwerkelijk ondersteunend vak omdat het in het hto anders gewoon zou worden afgeschaft. Of samenhang met en afstemming op andere vakken nu vrijwillig wordt nagestreefd of gedwongen wordt opgelegd, het blijft een loflijk streven om dit gestalte te geven.
In dit hoofdstuk is een aantal onderwerpen geïdentificeerd waarbij deze ondersteunende rol van wiskunde meer tot zijn recht kunnen kan komen. Daarbij is vooral benadrukt wat er in dat opzicht ontbreekt in de huidige wiskundeprogramma’s: aandacht voor evenredigheden, het negeren van dimensies en eenheden en voor het werken met niet-exacte getallen.

Grootheden spelen in alle toepassingsgebieden van de wiskunde een belangrijke rol. Alleen daarom al zouden ze binnen het wiskundeonderwijs (dat voor een deel ook ondersteunend is) niet moeten worden genegeerd. Dat de algebra formeel gezien geen boodschap heeft aan situatiegebonden betekenissen van variabelen is onvoldoende argument. Sommige algebraïsch correcte methoden verliezen hun waarde bij het toepassen ervan buiten de wiskunde. Maar het meenemen van betekenissen geeft algebraïsch handelen ook handen en voeten voor grote groepen leerlingen. Binnen het TWIN-project is gebleken dat leerlingen die in de onderbouw van het mbo algebra beoefenden aan de hand van grootheden en daar behoorlijk mee uit de voeten konden, in de bovenbouw een aantal van deze vaardigheden kwijtraakten omdat daar een meer formeel systeem van algebra bedrijven werd aangeboden vanwege de doorstroom naar het hto. Het beschouwen van dimensies en eenheden levert, naast een kritische kijk op formules en de betekenis van parameters en getallen, ook nog enige elementair algebraïsche activiteit bij de dimensieanalyse.

Aandacht voor het werken met onnauwkeurige getallen lijkt zinvol vanwege de vakken techniek en natuurkunde. Maar ook binnen het wiskundeonderwijs zelf is er alle aanleiding voor deze aandacht. Grafische rekenmachines (maar ook computerschermen) geven punten van een grafiek weer als pixels met kleinere of grotere afmetingen. Daarom geeft de Trace-optie van een grafische rekenmachine zulke vreemde waarden voor x: het gekozen x-bereik wordt simpelweg gedeeld door 95 (het aantal pixels in horizontale richting) en dat definieert de stapgrootte van Trace. Op vergelijkbare manier worden differentiaalvergelijkingen in simulatiesoftware doorgerekend met de discrete stappen van de methode van Euler of meer geavanceerde varianten daarvan. Het blijven echter numerieke methoden die slechts benaderingen geven van de echte (theoretische) continue modellen. Daarmee introduceer je automatisch onnauwkeurigheden ten opzichte van het theoretische model dat is gebaseerd op een continue schaal. Enige aandacht binnen het wiskundeonderwijs voor numerieke methoden lijkt daarom, ook vanwege de steeds grotere beschikbaarheid van computersoftware, niet meer dan logisch.

Literatuur

1. Kooij, H. van der (Red.), Goris, T. & Temme, C. (2003). *TWIN, beroepsgerichte wiskunde*. Utrecht/Zutphen: ThiemeMeulenhoff.
2. Goddijn, A., Reuter, W. & Kindt, M. (1998). *Evenredigheden en Machten*. Utrecht: Freudenthal Instituut. Kooij, H. van der (2004). *Evenredigheden & Machten*. Utrecht: Freudenthal Instituut.
3. Tennekes, H. (1992). *De wetten van de vliegkunst*. Haarlem: Aramith.
4. McMohan, T.A. & Tyler Bonner, J. (1987). *De maat van het leven. Hoe de natuur haar eigen wetten gehoorzaamt*. Maastricht/Brussel: Natuur & Techniek.
5. Dormolen, J. (1970/1971). Grootheden. *Euclides, 46*, 363-368. Griesel, H. (1969). Algebra und Analysis der Grössensysteme. *Mathematisch-Physicalische Semesterberichte, Band XVI*.
6. Themerson, S. (1974). *Logic, labels and Flesh.* London: Gaberbocchus Press.
7. Kooij, H. van der (2000). Dimensievolle algebra. *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs, 20*(2), 33-38.

7 Oefening baart kunst

Martin Kindt[1]

Scholen slaan het automatiseren over, het je eigen maken van formules. Daardoor begrijpen leerlingen die formules niet. Ze spreken die prachtige universele taal van de wiskunde niet meer.
(Lia van Asselt, in NRC Handelsblad, oktober 2005)

Advocates of insightful learning are often accused of being soft on training. Rather than against training, my objection to drill is that it endangers retention of insight. There is, however a way of training - including memorisation - where every little step adds something to the treasure of insight: training integrated with insightful learning.
(H. Freudenthal, Revisiting Mathematics Education, [1])

7.1 Vaardigheden exit

Op de voorpagina van het NRCHandelsblad van 25 oktober 2005 stond onder de kop *'Maar wat is een staartdeling?'* (het begin van) een artikel over de tekortkomingen van eerstejaarsstudenten aan de TU Twente. Bij de aanvang van hun studie krijgen deze studenten een zogenaamde 'instaptoets' voorgelegd, met de bedoeling om basale algebraïsche vaardigheden te toetsen. Het resultaat van 2005 was erger dan bedroevend: slechts 4% van de eerstejaars haalde een voldoende. Een dergelijk resultaat zou natuurlijk een direct gevolg kunnen zijn van onwetendheid van de toetsopstellers over wat zich afspeelt in het voortgezet onderwijs. Echter bij het construeren van de toets was een belangrijke rol weggelegd voor een wiskundedocent van het voortgezet onderwijs. Bestudering van de opgaven van de toets, leert dat het soort opgaven voor een deel zeker niet naadloos aansluit op de inhoud van de huidige wiskundemethoden, maar dat men desalniettemin van geslaagde vwo-B'ers een veel beter, zo niet tegengesteld, resultaat zou moeten kunnen verwachten.
Een van de conclusies met betrekking tot het bijspijkerprogramma dat de 'gezakten' moeten volgen, luidt: 'veel aandacht besteden aan het samenvoegen en vereenvoudigen van breuken'.
Als dit geen blamage is voor het voortgezet onderwijs .....

Nu moeten we beseffen dat klachten over de beheersing van algebraïsche vaardigheden bij scholieren en studenten van alle tijden zijn. Helaas zijn de ernst en het aantal ervan de afgelopen jaren sterk toegenomen. Niet alleen van buiten het voortgezet onderwijs, maar ook van binnenuit. Sommigen schrijven het manco aan 'formulevaardigheid' toe aan de geest van de tijd: accuratesse en concentratie hebben – eufemistisch gezegd – niet meer het hoge aanzien dat zij vroeger bezaten. Anderen schuiven de schuld naar het huidige wiskundeprogramma waarin slechts beperkte aandacht wordt geschonken aan symbolische manipulatie en aan de permanente beschikbaarheid van geavanceerde rekenapparaten, zoals de grafische rekenmachine. Maar aan de andere kant staan mensen die beweren juist dat diezelfde apparaten reken- en algebravaardigheden met bijbehorende parate kennis min of meer overbodig maken.

Hoe het ook zij, de constatering van het gebrek aan basisvaardigheid en zelfvertrouwen op het gebied van algebra is een feit waar we niet omheen kunnen. De vraag is natuurlijk of, en zo ja wat, daaraan moet worden gedaan. Duidelijk is in ieder geval dat oefenen daarbij een rol speelt. Maar *wat* en *hoe* moet er worden geoefend? Waar sommigen heil zien in het herinvoeren van 'drill and practice', zonder veel didactische poespas, zijn anderen hiervoor juist huiverig omdat dit het inzichtelijk handelen naar de achtergrond dringt en omdat het leidt tot wat Van Dormolen [2] ooit betitelde als 'trucmatige routine'. Daartegenover stelde deze didacticus 'routine die met inzicht gepaard gaat, waardoor problemen niet alleen adequaat en intentioneel aangepakt worden, maar

1 Met dank aan Ed de Moor en Chris Zaal.

binnen een redelijke tijd tot een goed einde gebracht kunnen worden'. In feite was dit zijn definitie van 'vaardigheid' en deze omschrijving past goed bij onze ideeën over waar een wenselijke oefenpraktijk in algebra op gericht zou moeten zijn.

7.2 Waarom vaardigheden toch belangrijk zijn

Een instaptoets zoals die werd afgenomen op de TU Twente is specifiek bedoeld om 'procedurele vaardigheden' te testen. Vrijwel alle vragen kunnen letterlijk machinaal, dat wil zeggen met een symbolische rekenmachine, goed worden beantwoord. Zo'n apparaat is echter alleen toereikend als de gebruiker in staat is de opgaven te lezen en om te zetten in een voor de calculator begrijpelijke taal. Dat vereist een zekere mate van kennis van de grammatica van de algebrataal en die kan slechts worden verkregen via oefening in het gebruik.

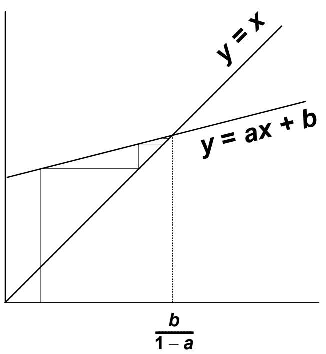
De beheersing van procedurele vaardigheden als gemeten in de test is zeker geen op zich zelf staand doel. Eindeloos sommen maken zonder dat de daarmee geoefende technieken in dienst staan van andere doelen of in verband worden gebracht met andere onderwerpen, leveren hoogstens succes op de korte termijn. Maar als de 'kunstjes' daarna worden vergeten en/of niet in de daarvoor geëigende situaties kunnen worden toegepast, kan men spreken van tijdverspilling. Het is om die reden dat in de afgelopen decennia, zeg van af 1960, tal van algebratechnieken en regels uit het leerplan zijn verdwenen.

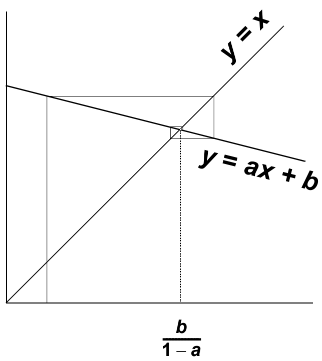
Zo zijn bijvoorbeeld de staartdeling van polynomen, het manipuleren met wortelvormen, het rationaal maken van de noemer, de formule voor som en product van de wortels van een vierkantsvergelijking, en nog veel meer, overboord gegooid als nutteloze ballast. Wat men zich misschien onvoldoende gerealiseerd heeft, is dat een aantal van die onderwerpen een kans boden om eerder verworven vaardigheden die nog wel nuttig werden geacht, te onderhouden c.q. te verdiepen. Want het is buiten discussie dat zonder regelmatige terugkerende oefening geen sprake kan zijn van werkelijke formulevaardigheid.

Wij willen nu aan de hand van enige voorbeelden laten zien, waarom wij waarde blijven hechten aan de beheersing van elementaire algebraïsche vaardigheden door in ieder geval de leerlingen van havo of vwo.
Eerst een recente ervaring met een groep geselecteerde B-leerlingen van het vwo.[1]
Bij de behandeling van iteratieve processen kwam de recurrente betrekking

$$x_{n+1} = ax_n + b$$

ter sprake. Een noodzakelijke en voldoende voorwaarde voor het bestaan van een stabiel evenwichtspunt bij het door zo'n vergelijking gerepresenteerde proces is $-1 < a < 1$.
Dit kan op intuïtief niveau met behulp van grafieken worden begrepen.





1 Leerlingen van het Junior College van de Universiteit Utrecht.

Een natuurlijke vraag is om de evenwichtswaarde uit te drukken in a en b hetgeen neerkomt op het oplossen (naar x) van de vergelijking:

$$x = ax + b$$

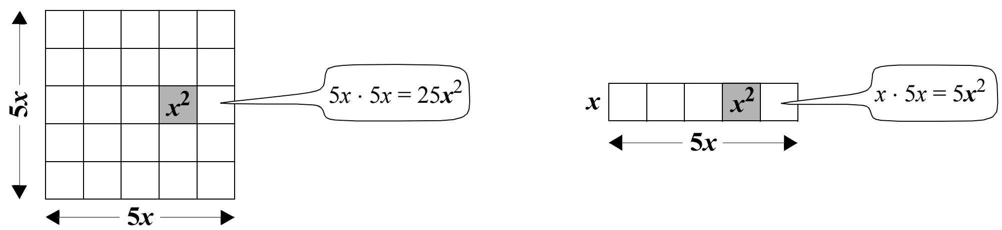
Dit nu bleek te veel gevraagd van deze leerlingen. De leraar zag kans via een socratisch leergesprekje de uitkomst $\frac{b}{1-a}$ boven tafel te krijgen. Daar liet hij het niet bij, maar legde zijn leerlingen opnieuw op de pijnbank: controleer deze oplossing door substitutie ofwel toon aan dat: $a \cdot \frac{b}{1-a} + b$ gelijk is aan $\frac{b}{1-a}$.

Ook dit verliep uiterst moeizaam en hier wreekte zich het feit dat in de onderbouw niet of nauwelijks met letterbreuken is geopereerd.
Nu moet een bekwame leraar in staat worden geacht dit soort gebreken ad hoc te repareren, maar het zal duidelijk zijn dat dergelijke interrupties niet voortdurend kunnen optreden, zonder dat zij het onderwijsleerproces ernstig stagneren. Bij de introductie van nieuwe begrippen en technieken en bij het toepassen van wiskunde wordt immers steeds gebruik gemaakt van verondersteld kennis en kunde. Bij het gebrek daaraan wordt de mogelijkheid tot het bereiken van een hoger niveau sterk afgeremd, zo niet geblokkeerd. Kortom, pas wanneer de leerling het voorgaande inzichtelijk en technisch voldoende beheerst, kan alle aandacht worden gericht op een nieuw begrip en de daarbij behorende nieuwe vaardigheden, ofwel:

Beheersing van vaardigheden is een noodzakelijke voorwaarde tot niveauverhoging.

Het gevaar dat steevast om de hoek loert bij het inoefenen van technieken is dat er receptmatig wordt gehandeld waardoor eerder verworven inzicht verloren gaat. Dijksterhuis signaleerde dit in 1934 [3] en betoogde dat *de leerling op ieder ogenblik in staat moet zijn zichzelf en anderen rekenschap te geven van de betekenis van de termen die hij gebruikt en de methoden die hij toepast*. In een rapport van zestig jaar later [4], staan woorden van gelijke strekking.
Ons inziens blijft Dijksterhuis' uitspraak een ideaal dat, hoe utopisch ook, waard is om na te streven binnen het wiskundeonderwijs.

Ter illustratie een simpel voorbeeld: *waarom is* $(5x)^2$ *gelijk aan* $25x^2$?
Wel, omdat $(5x)^2$ betekent $5x$ maal $5x$ en dat is hetzelfde als 5 maal 5 maal x maal x ofwel 25 maal x^2. Dat laatste berust op de associativiteit en commutativiteit van het vermenigvuldigen, maar door de ervaringen van de leerling met het rekenen zijn dat eigenschappen die vanzelfsprekend zijn en onbewust kunnen worden toegepast.
Natuurlijk kan hier ook een meer aanschouwelijke verklaring worden gegeven:



Het plaatje benadrukt ook nog eens het verschil tussen $(5\boldsymbol{x})^2$ en $5\boldsymbol{x}^2$, waarbij opgemerkt moet worden dat de interpretatie van de laatste vorm louter en alleen op een voorrangsregel berust.
Dit soort eenvoudige verklaringen zouden leerlingen steeds moeten kunnen geven als er om gevraagd wordt of als ze even twijfelen... hoe was het ook alweer? Leraren en auteurs van schoolboeken zouden daartoe regelmatig de waarom-vraag moeten stellen. Het komt er op neer dat, bij het oefenen van vaardigheden, het inzicht niet ondergedompeld mag raken, maar integendeel met de regelmaat van een klok aan de oppervlakte moet worden gehaald.

Dit is op fraaie wijze verwoord door Hans Freudenthal [5]:

> Het is meestal noodzakelijk, maar zeker niet voldoende, dat algoritmen en automatismen inzichtelijk worden verworven. Het leerproces dient op een wijze te worden gestuurd dat de bronnen van inzichtelijkheid in het proces van algoritmisering en automatisering niet verstopt raken, en dit kan, naar ik me voorstel, bereikt worden door telkens weer, in het proces van algoritmisering en automatisering, maar ook na de voltooiing daarvan, waar het te pas komt, bij deze bronnen terug te keren, in de zin van een steeds intensere bewustmaking van hetgeen in de eerste aanleg nauwelijks bewust werd, en steeds krachtiger verbalisering van hetgeen in eerste aanleg vermoedelijk in 't geheel niet werd geverbaliseerd.

We kunnen het voorgaande samenvatten in een niet mis te verstane stelling:

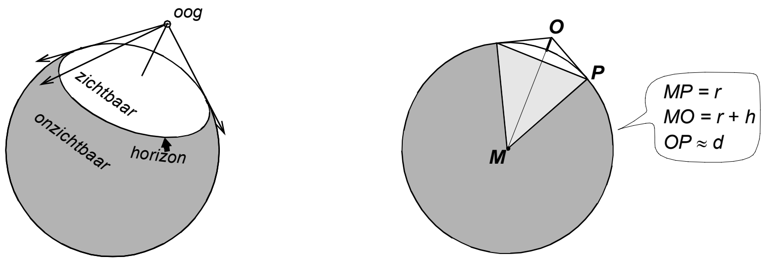
Zonder inzicht geen vaardigheid en zonder vaardigheid geen inzicht

De toepassingswaarde van de elementaire algebra en daarbij denken we aan andere vakken of aan het dagelijks leven, is vooral gelegen in het opstellen, begrijpen en gebruiken van eenvoudige algebraïsche modellen.
Neem bijvoorbeeld de uitkijktoren en het vergezicht. Iedereen weet uit ervaring: hoe hoger de toren, hoe verder je (bij onbelemmerd zicht) kan zien. Bij een toren van 20 meter hoog, is de kijkafstand zo'n 16 km. Een naïeve gedachte (illusie van lineariteit) is dat vanaf 40 meter hoogte de horizon wel zo'n 32 km ver zou zijn. Dat blijkt niet zo te zijn, de kijkafstand wordt slechts met zo'n 40% vermeerderd. Toch is er wel een soort evenredigheid in het spel.
Een manier om dit probleem in een klas te behandelen zou als volgt kunnen verlopen.

> Stel je een torenflat voor aan de kust met 25 verdiepingen.
> Hoe ver je op zee kunt kijken hangt af van het nummer van de verdieping.
> Iemand heeft een formule gebruikt om bij de kijkhoogte per verdieping (in m) de kijkafstand (in km) te berekenen:

verdieping	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	....
kijkhoogte (m)	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	....
kijkafstand (km)	6,2	8,7	10,7	12,4	13,8	15,1	16,4	17,5	18,6	19,6	20,5	21,4	....

De vraag is dan om uit de tabel een verband te vinden tussen kijkhoogte h en kijkafstand d.
Een hint hierbij kan zijn om te letten op interne verhoudingen binnen de h- en d-rijen.
Zo blijkt in de tabel dat '4 keer zo hoog' correspondeert met '2 keer zo ver', en '9 keer zo hoog' overeenkomt met '3 keer zo ver' en dat kan dan tot het vermoeden leiden dat d^2 evenredig is met h ofwel dat d is evenredig is met $\sqrt{h}$. Vervolgens kan uit de tabel de evenredigheidsconstante worden geschat en kan het vermoeden gecontroleerd worden voor diverse getalwaarden in de tabel. Dit type denken in evenredigheden is met name van praktisch belang in de natuurwetenschappen en economie.
Het aardige van de hier gekozen situatie is dat het verband tussen d en h echt kan worden begrepen, namelijk via de meetkunde. Een mogelijke inleidende vraag hierbij kan zijn: hoe zal het verband zijn tussen hoogte en kijkafstand op de maan? Dat brengt de leerling misschien dichter bij het idee om het probleem te relateren aan kijklijnen rakend aan een bol.
De benaderingsformule die de kijkafstand d uitdrukt in de hoogte h van de kijkpositie en de straal r van de bol is: $d \approx \sqrt{2rh}$. Het begrijpen van die formule vereist niet alleen meetkundig, maar ook algebraïsch-analytisch inzicht.



De hoogte van een toren is relatief klein ten opzichte van de straal van de aarde of maan en op grond daarvan zal de zichtafstand *d* weinig verschillen van de lengte van het raaklijnstuk *OP*. Toepassing van de stelling van Pythagoras in driehoek *OMP* levert op:

$$d^2 \approx OP^2 = OM^2 - MP^2 = (r+h)^2 - r^2 = 2rh + h^2$$

Nu blijkt:

$$\frac{d^2}{h} \approx \frac{2rh + h^2}{h} = 2r + h$$

Omdat de waarde van *h* verwaarloosbaar klein is ten opzichte van 2*r* leidt dit uiteindelijk tot de gestelde formule. Meten we de kijkhoogte in meters en de kijkafstand in kilometers, dan is de evenredigheidsconstante op aarde ongeveer gelijk aan 3,6; vandaar de vuistregel $d \approx 3{,}6\sqrt{h}$.
Die regel kan dan worden gebruikt bij een opdracht als:

> Stel je voor dat men in Frankrijk een toren wil bouwen die zo hoog is dat men vanaf de top de kust van Engeland kan zien liggen. Hoe hoog zou die toren minstens moeten zijn?

We merken nog op dat het voorbeeld van de relatie hoogte-kijkafstand zo rijk is, omdat naast het stukje (kijk-)meetkunde en de algebraïsche herleiding van $(r+h)^2 - r^2$ tot $2rh + h^2$ of $h(2r+h)$, ook een redenering met benaderingen nodig is.
Verder signaleren we dat het oefenen in het opereren met ’samengestelde evenredigheden’, waarbij de ene grootheid evenredig is met een macht (met rationale exponent) van de andere, van groot belang is in verband met toepassingen van de algebra. Dat daarbij reken- en algebravaardigheden een rol spelen is vanzelfsprekend:

Goede vaardigheid in rekenen en elementaire algebra heeft praktisch nut.

In het standaardwerk Guidelines for Teaching Mathematics [6] wordt als een van de doelen van het beschikken over ’computational skills genoemd’:

> to promote productive thinking in problem solving, research, and other creative activities

Wij zouden er nog aan toe willen voegen *to promote self confidence*.
De leerling die een zeker arsenaal van praktische rekenfeiten en handige rekenmanieren, van algebraregels en algebravaardigheden tot zijn beschikking heeft, zal minder gauw terugschrikken voor standaardsituaties en zal beter kunnen inschatten of en hoe een rekenmachine ingezet kan worden. Het eigenlijke denkwerk bestaat dan nog vooral uit het doorzien van de situatie en het kiezen van een geschikte strategie. Wie een dergelijke attitude heeft bereikt, hoeft niet meer op te zien tegen de technische afwikkeling van een probleem.
Zo’n leerling, die een zekere mate van wiskundig zelfvertrouwen heeft verworven kan zich volledig richten op zaken als:

- Hoe kan het probleem worden aangepakt?
- Welke hulpmiddelen staan ter beschikking?
- Is het gevonden resultaat in overeenstemming met eerder gedane schatting of berekening?
- Wat zijn de effecten in een gevonden formule voor speciale gevallen?
- Kan er verder worden gegeneraliseerd?
- Is het gevonden resultaat in verband te brengen met analoge problemen?
- ....

Kortom, zo wordt de leerling de mogelijkheid geboden om zelfstandig wiskunde te bedrijven en problemen aan te pakken. Alle energie kan nu worden aangewend tot productief denken.

Goede vaardigheid in rekenen en algebra schept ruimte om productief wiskunde te bedrijven.

7.3 Hoe vroeger, wat nu?

In vroegere algebraboeken waren de collecties oefeningen zeer uitgebreid, maar de bedoeling daarvan was ook om de leraar een ruime keuze in oefenmateriaal te verstrekken. Lees de voorwoorden, voorberichten, ten geleides, enz. er maar op na. Niet iedere leerling hoefde alle sommen te maken en de leraar kon het laten afhangen van de vorderingen van de klas, of hij bepaalde paragrafen met ingewikkelde herleidingen in zijn geheel kon overslaan of niet. Kenmerkend voor die boeken was een duidelijke scheiding tussen theorie (met voorbeelden) en (de paragrafen met) opgaven. In de hedendaagse schoolboeken wordt die scheiding niet of nauwelijks gemaakt en dienen veel opgaven juist om een stukje nieuwe leerstof te verkennen of te ontwikkelen. Wat sterk opvalt bij het doorbladeren van oude methodes, is de eenvormigheid van de oefenopgaven. Lange rijtjes met vergelijkingen, ontbindingen, gebroken vormen, enz. ontworpen vanuit het idee van *progressieve complicering*. Befaamd om hun grote hoeveelheid oefensommen waren de boeken van Alders (rond 1950), bestsellers gezien het grote aantal drukken dat zij beleefden. Het was wat je noemt een 'no-nonsense' methode: de theorieparagrafen waren uiterst summier in vergelijking met de paragrafen met vraagstukken. Zo er al sprake was van didactiek, dan zat die verstopt in de sequentie van voorbeelden en opgaven. Ter illustratie een paragraaf over het optellen en aftrekken van breuken:

Eigenschap IV. **De som van enkele gelijknamige breuken is gelijk aan de som van de tellers gedeeld door de gemeenschappelijke noemer.**

$$\frac{a}{p} + \frac{b}{p} + \frac{c}{p} = \frac{a + b + c}{p}$$

Als men namelijk de beide leden met p vermenigvuldigt, dan komt er $a + b + c$. Een overeenkomstige eigenschap geldt natuurlijk voor het verschil van twee gelijknamige breuken.

Zo is: $\frac{a}{x} - \frac{a-b}{x} + \frac{b}{x} = \frac{a-(a-b)+b}{x} = \frac{2b}{x}$

Moet men ongelijknamige breuken optellen of aftrekken dan maakt men ze eerst gelijknamig. Dit gebeurt het eenvoudigst, door ze te herleiden tot breuken, waarvan de noemer gelijk is aan het K.G.V. van de noemers der breuken, die opgeteld of afgetrokken moeten worden. Bijvoorbeeld:

1. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{b}{ab} + \frac{a}{ab} = \frac{b+a}{ab}$

2. $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{a^2}{ab} - \frac{b^2}{ab} = \frac{a^2-b^2}{ab}$

3. $2a - \frac{2a^2}{a+b} = \frac{2a(a+b)-2a^2}{a+b} = \frac{2a^2+2ab-2a^2}{a+b} = \frac{2ab}{a+b}$

4. $\frac{x}{x+1} - \frac{x}{x+2} = \frac{x(x+2)-x(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{x}{(x+1)(x+2)}$

5. $\frac{x}{x-1} - \frac{1}{1-x} = \frac{x}{x-1} + \frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x-1}$

6. $\frac{a}{b^2-ab} - \frac{b}{a^2-ab} = \frac{a}{b(b-a)} - \frac{b}{a(a-b)} = \frac{a^2}{ab(b-a)} + \frac{b^2}{ab(b-a)} = \frac{a^2+b^2}{ab(b-a)}$

7. $\frac{1}{x^2+xy} + \frac{1}{y^2+xy} = \frac{1}{x(x+y)} + \frac{1}{y(x+y)} = \frac{y+x}{xy(x+y)} = \frac{1}{xy}$

Uit: C.J. Alders, Algebra voor m.o. en v.h.o. deel I, 18 – 20e druk, P. Noordhoff N.V. 1953

De hier getoonde paragraaf met theorie stond halverwege het eerste deeltje bestemd voor het de onderbouw van HBS en Gymnasium. De leraar werd geacht de uitleg te geven, en wij kunnen ons voorstellen dat er in dit geval nog wel wat didactisch werk aan de winkel geweest moet zijn. Vervolgens kwam een paragraaf met twintig opgaven, waarvan sommige redelijk leken op de voorbeelden vooraf. Het niveau van de opgaven overstijgt op veel plaatsen het niveau van de opgaven uit de eerder vermelde instaptoets van de TU Twente. In de gemengde opgaven, achterin het hoofdstuk treft men nog weer een zwaarder kaliber aan. Zo ging dat dus.

Bij elke leerplanwijziging na 1950 (dat wil zeggen in 1958, 1968 en 1993), werd al of niet onder protest van een aantal leraren, de schoolalgebra aanzienlijk vereenvoudigd. Het meest rigoureus gebeurde dat in '92. Progressieve complicering werd progressieve formalisering, een didactisch principe waar wij volledig achter staan. Echter kan men stellen dat in sommige boeken het anticiperen op formele manipulaties wel erg werd uitgesmeerd en dat de algebrahoofdstukken wel heel weinig uitdaging, voor met name de vwo'ers, bevatten. In de laatste edities van de schoolboeken kan men wel wat verandering bespeuren, maar vergeleken met vroeger is en blijft het algebra op een heel laag pitje.

Uit een enquête onder ervaren wiskundedocenten bleek dat er bij een aantal van hen behoefte bestaat aan extra oefenmateriaal voor algebra.

A. Wattel *gebruikt aanvullend materiaal in de hoop dat het de leerlingen helpt bij het maken van sommen uit het boek. Het oefenen gebeurt alleen in de les, steeds 10 minuten als onderbreking van een blokuur. In 1 en 4 vwo wordt* Basisboek Wiskunde *gebruikt.* (*auteurs* J.v.d. Craats *en* R. Bosch)

Substitueer $a = 3$ en $b = 2$ in:

a. $2a^2b$

b. $2a^2b^2 - 2ab$

c. $-3a^2b^3 + 2ab^2$

d. $2a^3b - 3ab^3$

e. $-5ab^2 - 2a^2 + 3b^3$

Volgens H. Sitters *wordt wiskunde een stuk leuker indien leerlingen zich niet voortdurend onzeker voelen door hun onhandigheid op het gebied van technische algebravaardigheden.*
Hij oefent met zijn leerlingen uit 4 en 5vwo, profiel N & T en ontwikkelt daartoe vaardigheidstesten.

Ontbind in factoren (denk ook aan merkwaardige producten):

$1 + 2b^2 + b^4$

$x^2 + 4 - 4x$

$-x^2 + 64$

$x - y + z + xy - y^2 + yz$

S. Garst *meent dat reken- en algebravaardigheden in het huidige programma onvoldoende aandacht krijgen en daardoor te oppervlakkig worden geleerd. In zijn oefenpraktijk gebruikt hij eigen materiaal ter vervanging van materiaal uit het boek. (zie* http://www.rgomiddelharnis.nl*).*

Bereken en vereenvoudig :

a. $\frac{2}{3} \times \frac{1}{5}$

b. $\frac{2}{3} \times \frac{4}{9}$

c. $\frac{2}{3} \times \frac{3}{7}$

d. $\frac{3}{8} \times \frac{2}{3}$

e. $\frac{5}{9} \times \frac{9}{25}$

A. de Boer *merkte een keer dat een leerling* 6×0 *gedachteloos met zijn rekenmachine berekende. Voor hem was dat aanleiding om een herhaalprogramma rond rekenen en algebra te starten, in de vorm van een soort rekendictee, de zogenaamde Rambam rekencompetitie. Uit dat boeket hieronder een paar bloempjes.*

Bereken:

$2a \times 3b =$ ....

$2a + 3b =$ ....

$(a - c)(b - c)(c - c) =$ ....

...... $\times$ 10a = 5

$abc : bc$

Uit de toelichting van de ondervraagde docenten blijkt dat er meestal een concrete aanleiding is tot het opzetten van aparte oefensessies. Veel wordt er geklaagd over onhandige of trage formulevaardigheid. Naast zo'n concrete aanleiding leeft bij die docenten in het algemeen de overtuiging dat algebraïsche vaardigheden nodig en nuttig zijn. *Swier Garst* stelt: 'het biedt duidelijkheid, structuur en zekerheid en leert echt iets; ouders leveren support en hebben begrip voor de waarde ervan'. Hoewel *Philip van Egmond* het belangrijk vindt dat leerlingen simpele algebraïsche vaardigheden beheersen, besteedt hij niet veel extra tijd aan algebra-oefeningen. Wel kunnen kinderen in de klas 1 een algebradiploma verdienen en organiseert hij in klas 2 een wedstrijd tussen groepen leerlingen. De aanleiding voor *Harry Smits* om meer dan gewone aandacht aan het oefenen van algebravaardigheden te besteden, is het idee dat teveel leerlingen alleen maniertjes aanleerden en geen idee meer hadden wat er achter zat. 'Het vertalen van een probleem naar wiskunde is natuurlijk belangrijk, maar dat is alleen nuttig als je daarna met je wiskundige kennis verder kunt.' *Job van de Groep* vindt dat reken- en algebravaardigheden aan de kern van het wiskundeonderwijs raken: inzicht in structuur, analytisch handelen, enz. Hij postuleert de volgende stelling: 'als het gaat om het bijhouden van algebraïsche vaardigheden is de GRM in sommige opzichten een onding'.
Uit het onderzoekje komen weinig argumenten naar voren die zouden kunnen leiden tot intrinsieke motivatie voor het inoefenen van algebra of het zou moeten zijn dat de leraar zijn eigen intrinsieke motivatie voor wiskunde op zijn leerlingen kan overbrengen, zoals een van de docenten beweert. Als docenten kiezen voor het inzetten van extra materiaal, gaat het bijna altijd om 'ouderwetse' rechttoe-rechtaansommen. Ook in de moderne boeken is dit verschijnsel van louter *reproductief oefenen* waarneembaar. Op de gevaren daarvan is al eerder gewezen en men zou kunnen stellen dat deze stijl van oefenen vaak contraproductief werkt.
Hans Sterk en Jacob Perrenet schrijven in Euclides onder andere:

> Het vertrouwd maken van leerlingen met rekentechnieken moet gepaard gaan met het laten ervaren van de zinvolheid van de techniek en de zinvolheid van het paraat hebben van een zeker arsenaal aan manipulatiemogelijkheden. Serieuzere problemen vragen namelijk om doelgerichte manipulaties die van de traditionele rekenoefeningen (zoals het wegwerken van haakjes of het vereenvoudigen van uitdrukkingen) nogal eens afwijken [7].

In het vervolg van dit hoofdstuk pleiten wij dan ook voor een andere methodiek bij algebra-oefeningen, een aanpak die wel *productief oefenen* wordt genoemd.

7.4 Kunst baart oefening

> (...) En toen op het bord geschreven de getallen van een tot honderd. En toen hebben we met vereende krachten de getallen uitgezocht die géén tafelgetallen waren, zoals zeven en elf en dertien enzovoort. Ik heb ze flink geholpen... Al die getallen hebben we uitgeveegd en toen met veel opluchting geconstateerd dat er nu niet zo héél erg veel meer overbleven. Maar die er overbleven, die hebben we strijdlustig bekeken. Met ons vieren dan: wat de een niet wist, wist de ander wel:'Twintig:' - 'twee keer tien,' grijnsde Fok en Leentje Roos riep geestdriftig: 'Of tien keer twee.' Waarop ik dadelijk zei:' En vier keer vijf'. En dan kwam Leentje weer: 'Of vijf keer vier'. En dan probeerde ik: 'En drie keer zeven.' Maar dat bracht Kootje Kuiper tot protest:'Nietes'. En daarna gingen we samenvatten wat we nu in 't vervolg van twintig te onthouden hadden...

Dit is een fragment uit 'Schoolland' van Theo Thijssen (1925). De onderwijzer Staal merkt aan het begin van de cursus dat drie van zijn leerlingen de tafels van vermenigvuldiging niet beheersen en besluit om na vieren een uurtje te oefenen met die drie. Hij heeft daarbij de inval om de zaak eens van de andere kant te bekijken: begin met de uitkomst en vraag in welke tafels die voorkomt. Dat blijkt aan te slaan. Behalve de drie bijlesklantjes moet er nog een vierde leerling nablijven om strafwerk te maken. Tijdens het overschrijven hoort zij alles aan en de volgende morgen overhandigt zij de meester een papier met daarop:

$4 = 2 \times 2$, $6 = 2 \times 3$ of 3×2, $8 = 2 \times 4$ of 4×2 ... tot $100 = 10 \times 10$

met de trotse verzekering: 'Ik kan zulke sommetjes ook'.

En de volgende dagen blijkt dat ook de andere leerlingen de smaak van de omgekeerde tafels te pakken hebben, want in het aanloopkwartiertje vóór schooltijd zitten ze die allemaal op de lei te maken. Meester Staal schrijft in zijn dagboek:

> Dat lijkt wel ’n besmettelijke ziekte. Ze schijnen niet te kunnen velen dat ik deze geleerdheid reserveer voor m’n aparte uurtjes met de drie achterblijvers.

Dit stukje uit Schoolland, dat samen met ’De Gelukkige Klas’ verplichte leesstof voor elke aanstaande leraar zou moeten zijn, toont een voorbeeld van wat o.a. door Treffers uitdrukkelijk gepropageerd wordt onder de naam ***eigen producties***. Dit toch eigenlijk eenvoudig idee van het uitdagen tot het zelf construeren van ’sommetjes’ zou een belangrijk aspect kunnen, ja moeten, zijn van ’moderne’ algebradidactiek.

’Eigen producties’ is niet het enige didactische thema dat in Thijssens bijles naar voren komt. Zijn primaire idee – ’keer de zaak eens om’ – is een erkend waardevol principe bij het oefenen. Strikt genomen vraagt Thijssen naar ontbindingen van getallen, maar hij doet dat ver voordat hij aan een systematische behandeling van factorontbinding toe zal komen. Dat is nu juist de kern van dit principe. Waar later het omkeren van een operatie tot algoritme wordt verheven, krijgt de leerling de kans daar spontaan op vooruit te lopen. Dergelijke anticiperende ***omkeervragen*** kunnen, vooral vanwege het puzzelkarakter, prikkelend zijn voor leerlingen en een zekere mate van flexibiliteit bevorderen.

Een derde principe, waarvan de ontwerper van oefeningen zich voortdurend bewust moet zijn en dat eigenlijk ook geïllustreerd wordt in het stukje Schoolland is het creëren van ***variatie in oefenvormen***. Thijssen schrijft eerst alle natuurlijke getallen tot en met 100 op het bord, wellicht maakte hij tien rijtjes van tien getallen. Tegenwoordig noemen we zoiets een honderdveld en een leraar van nu zou zo’n veld waarschijnlijk even hebben gekopieerd en uitgedeeld. In de rekendidactiek is zo’n honderdveld een van de vele vormen die gehanteerd worden bij oefeningen. Ook de algebradidactiek biedt vele mogelijkheden tot variatie: stroken, tableaus, operatiebomen, pijlenkettingen, rechthoeksmodellen, enz. maken het mogelijk om het stramien van saaie ’rijtjes’ te doorbreken.

Sinds de invoering van het leerplan 12-16 in de jaren ’90 is in veel leerboeken een oude didactische vondst opgedoken onder de naam ***bordjesmethode***; dit komt neer op het bedekken van een fragment in een algebraïsche vergelijking, waardoor de structuur duidelijker wordt. Deze methode, die trouwens een grotere reikwijdte heeft dan het oplossen van vergelijkingen, is de moeite waard om wat meer systematisch geoefend te worden.

In het voorgaande is een paar keer het woord ’rijtje’ gevallen. Deze term wordt vaak enigszins smalend gebruikt in de context van series oefenopgaven waarvan er dertien in een dozijn gaan. Maar we kunnen aan de rijtjesvorm ook een positieve draai geven door af te stappen van ogenschijnlijk willekeurige rijtjes van sommen. We denken hierbij aan rijtjes die zo geconstrueerd zijn dat de tweede opgave in het rijtje afgeleid is uit de eerste, de derde uit de tweede, enz. zodat de leerling verbanden kan leggen en redeneren. Zulke rijtjes worden hier ***slierten*** genoemd.
Een andere mogelijkheid is om rijtjes voor te leggen die een vast ***patroon*** vertonen; behalve het maken van de individuele sommetjes en het ontdekken van regelmaat kan dan van de leerling een generalisatie worden gevraagd.

Er is hier nu vooral een aantal aspecten genoemd die betrekking hebben op de stijl van het oefenen’. In de volgende paragrafen wordt, mede aan de hand van voorbeelden, nader ingegaan op elk van die vormaspecten. Vorm en inhoud horen bij elkaar als lichaam en geest. Vandaar dat we nu ook enkele onderwerpen bespreken, die ons inziens te weinig aandacht krijgen in het vigerende algebraonderwijs.

Een specifieke (en jarenlange) klacht uit het wo en het hbo heeft betrekking op het gebrek aan vaardigheid in het opereren met ***breuken*** (en/of gebroken vormen). Waar in vroeger tijden (te) overdadig geoefend werd met het 'letterbreuken', ontbreekt dit nu vrijwel geheel in de eerste jaren van het vo. In de wiskundeE-brief schrijft Geertje Hek over de instaptoets voor wis- en natuurkundestudenten aan de UvA: *bijna niemand kon* 1/(1/2 + 1/3) *uitrekenen*. Van een mogelijke inhaalslag bij het analyse-onderwijs in de bovenbouw komt blijkbaar in het huidige programma weinig terecht. Gezien de ervaringen van de laatste jaren verdient het sterke aanbeveling om zeker in de eerste jaren van het vwo/havo voortdurend aandacht te besteden aan operaties met en interpretaties van breuken en gebroken vormen.
Als tweede aandachtspunt met betrekking tot de inhoud van de algebra noemen we hier de zogenaamde ***formele substitutie***, waarbij het gaat om het vervangen van enkelvoudige variabelen door expressies en omgekeerd. Het gebruik van de bordjesmethode valt hier in feite ook onder, maar op een gegeven moment zal men toch willen dat een meer volwassen algebra-taal wordt gehanteerd. Formele substitutie helpt bij het reduceren van complexe expressies of vergelijkingen tot beter herkenbare of meer vertrouwde vormen.

Het idee om via formele substitutie vergelijkingen op te lossen voert terug tot de Babylonische wiskundigen die iedere vierkantsvergelijking de baas konden. In de schoolboeken van nu komt de behandeling van dit klassieke onderwerp helaas vaak neer op het aanleren (zonder bewijs) van het recept dat de naam *abc*-formule draagt. Daarbij wordt voorbij gegaan aan de typisch algebraesche techniek die ***kwadraatafsplitsing*** genoemd wordt en die niet alleen een groter toepassingsbereik heeft dan de *abc*-formule, maar die ook prima geschikt is om algebraïsch manipuleren te oefenen.

De meeste formules in de natuurwetenschappen en economie bevatten meer dan één variabele. Oefeningen in algebra moeten daarom, meer dan nu gangbaar is in de boeken, ook gericht zijn op het opereren met expressies met meer variabelen. Van belang is daarbij ook het distilleren van nieuwe formules (vergelijkingen) uit ***combinaties*** van formules. Daarbij komt het vaak aan op het ***elimineren*** van een of meer variabelen (of parameters) waarbij dan weer formeel gesubstitueerd wordt. Deze activiteit om formules uit formules te brouwen, vereist een zekere bagage aan procedurele vaardigheden en zou tenminste vanaf het derde jaar vwo/havo aandacht moeten krijgen.

Het ontwikkelen van 'formulevaardigheid' was vroeger een continu proces (2 of 3 uur algebra in de week). Door de verbreding van het wiskundeprogramma en de reductie van het aantal wekelijkse lesuren, is er tegenwoordig sprake van een sprongsgewijs proces met alle nadelen van dien. De enige remedie hiertegen is dat er ook tijdens de behandeling van niet-algebra hoofdstukken aan onderhoud en gebruik van algebra gedaan wordt. Het mooiste is dat natuurlijk als dat min of meer geïntegreerd in het betreffende onderwerp plaatsvindt, maar voor sommige hoofdstukken lijkt dat niet zo eenvoudig. Toch menen we dat hier veel meer kansen liggen dan er nu benut worden, met name in de hoofdstukken over ***meetkunde***.
Zo bieden de stelling van Pythagoras en oppervlakte- en inhoudsbepalingen genoeg aanknopingspunten om aan zinvolle oefening in algebra te doen.
De in het voorgaande vetgedrukte woorden geven de thema's aan waarop in de volgende paragrafen verder zal worden ingegaan.

7.5 Omkeervragen

Het principe van het stellen van gepaste omkeervragen kan op elk niveau – van basisschool tot universiteit – worden toegepast. We geven hier een achttal voorbeelden:

1. Bedenk twee breuken met ongelijke noemers, waarvan de som gelijk is aan $\frac{14}{15}$

2. Bedenk twee breuken met ongelijke noemers, waarvan het product gelijk is aan $\frac{14}{15}$

3. Vul passende veelvouden van x of y in:

$$(\ldots\ldots + \ldots\ldots) + (\ldots\ldots + \ldots\ldots) = 12x + 5y$$

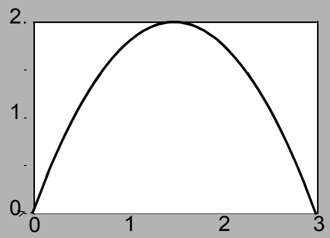
4. Vul passende getallen in:

$$(x+8)(x+\ldots) = x^2 + 19x + \ldots$$

5. Bedenk een vergelijking waarvan 9 en -10 de enige oplossingen zijn.

6. Op het scherm van een computer verschijnt deze parabool

Zoek het functievoorschrift bij de grafiek.



7. Bedenk een functie waarvan $x \to x^3 + 2x$ de afgeleide is.

8. Zoek een functie y van x zodat $y' = 2y$.

Omkeervragen laten niet zelden meer dan één antwoord toe. Dat geeft bij een klassegesprek aan leerlingen die niet meteen gereageerd hebben een tweede kans, hetgeen uit pedagogisch gezichtspunt natuurlijk een voordeel is. Maar polyvalentie biedt meteen ook een aanknopingspunt voor reflectie en verdieping: hebben we alle mogelijkheden gehad en hoe weten we dat zeker? Een paar opmerkingen bij de gekozen voorbeelden.

Bij voorbeeld 1 is een systematisch onderzoek naar alle mogelijkheden gemakkelijk uitvoerbaar. Er blijkt dan slechts één oplossing te zijn waarin de noemers *beide* van 15 verschillen.
De vraag in voorbeeld 4 zou in een beginfase bij het oefenen in het vermenigvuldigen van eenvoudige tweetermen kunnen worden gesteld. Dergelijke vragen kunnen de leerling bewust maken van de 'som-product-wet' bij tweedegraads veeltermen, een wet die later zo functioneel is bij het ontbinden in factoren.

Bij voorbeeld 6 hoort uiteraard één mogelijke oplossing, maar de gezochte functie kan wel op verschillende manieren worden vormgegeven. De twee formules die meteen een licht werpen op de gekozen aanpak zijn: $y = -\frac{8}{9}x(x-3)$ en $y = -\frac{8}{9}(x-1\frac{1}{2})^2 + 2$.

Vraag 7 zou bijvoorbeeld in klas 4 havo kunnen worden gesteld kort nadat geleerd is hoe veeltermfuncties worden gedifferentieerd, ook al behoort integreren niet tot de leerstof van het havo. Het is dan een puzzelachtige vraag, waarbij de rol van een constante (als factor en als term) bij het differentiëren naar voren komt. Net zo kan vraag 8 gesteld worden op het moment dat de leerlingen hebben geleerd hoe exponentiële functies gedifferentieerd kunnen worden, ook als differentiaalvergelijkingen later niet aan bod komen. Dergelijke opgaven dwingen tot denken in plaats van imiteren en zij bieden de leerlingen een kans om zelf ontdekkingen te doen.

7.6 Bordjesmethode

Een in het primair onderwijs bekend en veel toegepast voorbeeld van het omkeerprincipe wordt gevonden in de zogenaamde ’stipsommen’, in de algebraïsche context ’vergelijkingen’ genoemd. Zoals eerder gezegd is sinds het project W 12-16 in de jaren ’90 de term ’bordjesmethode’ opgedoken.
Voorbeeld: welke waarde van *x* maakt 3*x* + 7 gelijk aan 19?
Oplossing met de bordjesmethode:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 7 = 19 \\ \boxed{12} + 7 = 19 \end{array}\right\rangle\ 3x = 12 \ \longrightarrow\ x = 4$$

Je zou dit een samengestelde stipsom kunnen noemen (... + 7 = 19 en 3 × ... = 12)
De bordjesmethode is in feite een simpele zoekstrategie, niet gebaseerd op een kunstmatig oplossingsprocédé, en daarom zeer geschikt om in een beginfase van het oplossen van vergelijkingen te gebruiken en te oefenen. Daarbij kan, ook met jonge leerlingen, gerust worden doorgestoten naar meer complexe vergelijkingen, die aanleiding geven tot twee-, drie- of meertrapsoplossingen, zoals:

$$\left.\begin{array}{l} 12 - \dfrac{300}{x} = 7 \\ 12 - \boxed{5} = 7 \end{array}\right\rangle \left.\begin{array}{l} \dfrac{300}{x} = 5 \\ \dfrac{300}{\boxed{60}} = 5 \end{array}\right\rangle \longrightarrow\ x = 60$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{300}{2+3x} = 6 \\ \dfrac{300}{\boxed{50}} = 6 \end{array}\right\rangle \left.\begin{array}{l} 2 + 3x = 50 \\ 2 + \boxed{48} = 50 \end{array}\right\rangle\ 3x = 48 \ \longrightarrow\ x = 16$$

Als deze wijze van oplossen een poos wordt volgehouden (en niet wordt beperkt tot één lesje!) en als er voldoende variatie aangebracht wordt in moeilijkheidsgraad en complexiteit, zal dit leiden tot én beter begrip van wat een vergelijking eigenlijk is, én durf bij de leerlingen om eerst maar eens met gezond verstand naar een oplossing te zoeken, alvorens een aangeleerd oplossingsalgoritme toe te passen. Zonder moeite kunnen hier legio oefeningen worden ontworpen die de vaardigheid om ’door een formule heen te kijken’ bevorderen.
Als voorbeeld hier nog een rijtje met vierkantswortels:

Gebruik de bordjesmethode om x op te lossen uit:

$\sqrt{\boldsymbol{x}} = 5$	$4\sqrt{10 - \boldsymbol{x}} = 12$
$\sqrt{4 + 3\boldsymbol{x}} = 5$	$\sqrt{10 + \sqrt{\boldsymbol{x}}} = 4$
$2 + \sqrt{3\boldsymbol{x}} = 5$	$\sqrt{30 + \sqrt{30 + \boldsymbol{x}}} = 6$
$\sqrt{10 + \boldsymbol{x}} = 3$	$\sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \boldsymbol{x}}}} = 5$

We merken nog op dat op Wisweb een applet[1] is te vinden waarmee de bordjesmethode interactief kan worden geoefend.

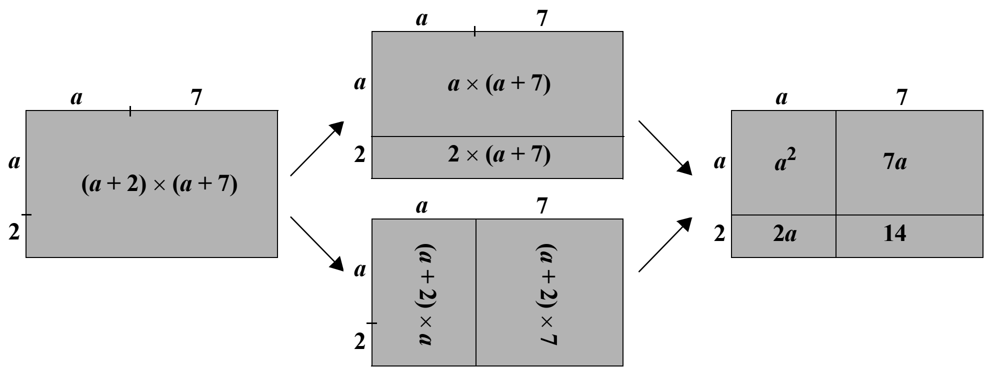
1 Vergelijkingen oplossen met bordjes.

7.7 Variatie in oefenvormen

Als argument voor rijtjes oefeningen wordt vaak gebruikt: leerlingen vinden het leuk om iets te kunnen, zonder al te veel hersengekraak en het draagt bij aan het zelfvertrouwen. Daar is weinig tegenin te brengen, behalve dat dit per individu heel erg verschilt. Na de eerste fase van het Hewet-project waarin twee scholen participeerden, organiseerden we in 1984 een forumbijeenkomst voor leraren. Leden van het forum waren twee wiskundeleraren en acht van hun leerlingen, eerlijk verdeeld over de beide scholen. Uit het auditorium kwam de vraag wat nu het verschil was tussen wiskunde A en de 'oude wiskunde'. Die vraag werd speciaal gesteld aan een meisje dat na het behalen van haar havodiploma was ingestroomd in vwo met wiskunde A. Haar antwoord was opmerkelijk: *'vroeger kreeg je allemaal sommetjes, zo van a , b, tot en met h en dan keek je of je h kon maken en als dat lukte, hoefde je die andere niet meer te maken. Maar bij wiskunde A kan dat niet, dan kun je helemaal niets overslaan'.*

Exercities waarvan ze de zin niet inzag ('meer van hetzelfde'), waren blijkbaar aan haar niet besteed. Waren de opgaven gevarieerder geweest, dan zou zij er meer gemaakt hebben en dat zou hoogstwaarschijnlijk ten goede gekomen zijn aan haar vaardigheid en attitude.

Als voorbeeld hoe gevarieerd algebraoefeningen eruit kunnen zien, nemen we het vermenigvuldigen van (inhomogene) tweetermen, zoals $a + 2$ en $a + 7$, een aan te leren vaardigheid die alle reducties van algebraleerplannen in de afgelopen vijftig jaar heeft doorstaan. Ik ga er van uit dat die vermenigvuldiging op inzichtelijke wijze is aangebracht. Een beproefde methode hierbij is het gebruik van het rechthoeksmodel, een even klassieke als vruchtbare benadering.[1]



De tussenstap (naar keuze het onderste of het bovenste plaatje) wordt meestal weggelaten, maar die laat wel mooi het principe van de 'dubbele distributie' zien. Op een gegeven moment zal er ook los van de meetkundige voorstelling worden geoefend en daarbij zijn er meer kansen voor variatie dan thans in de schoolboeken worden benut.

Zo treffen we bijna nergens het 'onder elkaar vermenigvuldigen' aan.

Deze methode die analoog aan het onder elkaar vermenigvuldigen van concrete getallen, is zeer instructief en heeft als voordeel boven de lineaire schrijfwijze dat zij gemakkelijker uitvoerbaar is bij producten van polynomen met meer dan twee termen en producten met meer dan twee factoren.

$$\begin{array}{rl} a + 7 & \\ a + 2 & \\ \hline 2a + 14 & \times \\ a^2 + 7a & \\ \hline a^2 + 9a + 14 & + \end{array}$$

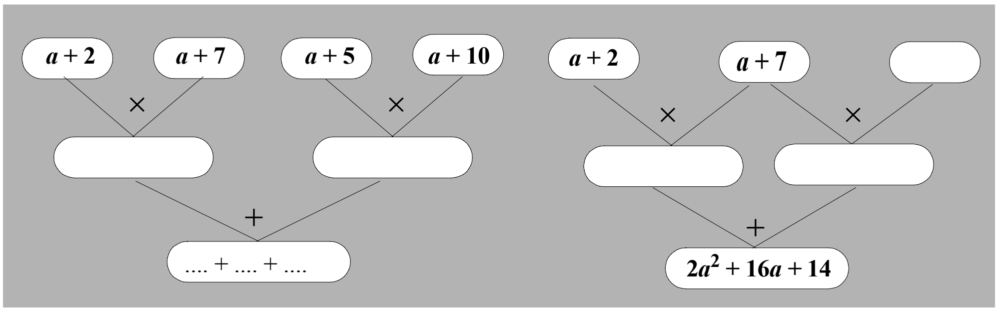
Bij het op één regel vermenigvuldigen gaat de conventie omtrent volgorde van bewerkingen een rol spelen en is er een schrijfwijze nodig om die volgorde te sturen. Het gangbare middel hierbij is het plaatsen van haakjes. Over het algemeen wordt slechts het passief gebruik hiervan geoefend, maar het lijkt ons belangrijk dat leerlingen ook worden uitgedaagd zelf haakjes (of eventueel alternatieve 'aggregatietekens' zoals kringen of horizontale strepen) te plaatsen.

1 Daarbij kan nu heel goed gebruik worden gemaakt van de applet 'Geometrische Algebra 2D', zie www.wisweb.nl

Plaats haakjes in elk van de vier regels links van het gelijkteken, zodanig dat er een gelijkheid ontstaat:

$$\mathbf{a + 2 \cdot a + 7 = 3a + 7}$$
$$\mathbf{a + 2 \cdot a + 7 = 3a + 14}$$
$$\mathbf{a + 2 \cdot a + 7 = a^2 + 2a + 7}$$
$$\mathbf{a + 2 \cdot a + 7 = a^2 + 9a + 14}$$

Bij het werken met operatiebomen (waarvan allerlei uiterlijke varianten bestaan) is een voordeel dat heel gemakkelijk meer samengestelde berekeningen en omkeervragen worden gevisualiseerd.



Er zijn talloze variaties met grotere bomen denkbaar, waarbij de leerling eerst moet nadenken over waar hij begint met invullen. Zo kunnen de oefeningen ook een zeker puzzelkarakter krijgen en de praktijk is dat dit soort opgaven als meer uitdagend wordt ervaren dan de eentonige rijtjes die vooral imitatiegedrag oproepen.

Een andere vorm die hier past is de vermenigvuldigtabel, die als opvolger van het rechthoeksmodel thans in veel boeken wordt gebruikt om bijvoorbeeld twee tweetermen te vermenigvuldigen. Zo kan uit de tabel hiernaast worden afgeleid dat het product van *a* + 2 en *a* + 7 gelijk is aan $a^2 + 9a + 14$. Het is eenvoudig een kwestie van optellen van de ingevulde termen. Deze eigenschap van de vermenigvuldigtabel, te weten '*de som van de producten in de tabel is gelijk aan het product van de sommen van de randgetallen'* kan worden gebruikt bij een opdracht als in het volgende voorbeeld:

×	a	7
a	a^2	$7a$
2	$2a$	14

I

+	5	8
5		
12		

II

×	5	8
5		
12		

III

×	$a + 5$	$a + 8$
$a + 5$		
$a + 12$		

a. Vul de opteltabel I en de vermenigvuldigingstabel II in.
b. Gebruik die tabellen om de vermenigvuldigingstabel III in te vullen.
c. Tel de ingevulde vormen uit de tabel III bij elkaar op.
d. De zo verkregen eindvorm is het product van twee vormen. Welke vormen zijn dat?

Terwijl de eerste drie vragen recht-toe-recht-aan-oefeningen zijn, is de vierde vraag van een ander kaliber. Hier moet nagedacht worden en de leraar zal er in een klassengesprek op terug moeten komen. Zijn de gevraagde tweetermen $2a + 13$ en $2a + 17$ eenmaal gevonden, dan is de 'proef op het product' natuurlijk weer een gewone oefening.
En passant merken we op dat het gebruik van woorden als 'som', 'product', 'term', 'tweeterm', 'factor', die tot het jargon van de algebra behoren, voor leerlingen drempels kunnen opwerpen. De algebra kan echter niet zonder dergelijke taalelementen en ook daarmee zou wat meer geoefend moeten worden dan in de huidige lespraktijk gebeurt. Dat kan via verbaal gestelde opgaven als: 'werk het product van $a + 2$ en $a + 7$ uit' of 'bereken het kwadraat van de som van a en 5'. Ook kan aan leerlingen worden gevraagd om algebraïsche vormen in woorden te omschrijven.

Vermenigvuldig- en opteltabellen zijn niet alleen geschikt om variatie in oefenvormen aan te brengen, maar brengen ook hun eigen structuur mee, waarop aardige opgaven kunnen worden gebaseerd. In het volgende voorbeeld is er sprake van een (geheime) opteltabel, waarvan de randgetallen zijn weggelaten. Dat verklaart waarom de uitkomst, onafhankelijk van de keuze die de leerling maakt, steeds hetzelfde is. Ook hier is dan sprake van een in eerste instantie directe oefening die een verrassend denkvervolg kan krijgen.[1]

Kies een vakje in onderstaande tabel en noteer wat daarin staat.
Streep nu de rij en de kolom waartoe dit vakje behoort door.
Kies een nog niet doorgestreept vakje, noteer wat daarin staat en streep weer de rij en de kolom van dit vakje door.
Doe dit nog tweemaal en tel de dan vier genoteerde vormen bij elkaar op.
Vergelijk jouw antwoord met dat van je klasgenoten. Wat valt je op?

$2a$	$3a$	$a + 4$	$2a + 3$
$6a$	$7a$	$5a + 4$	$6a + 3$
$2a + 2$	$3a + 2$	$a + 6$	$2a + 5$
$2a - 3$	$3a - 3$	$a + 1$	$2a$

7.8 Rijtjes, slierten en patronen

Een rijtje oefeningen kan ook zo worden geconstrueerd, dat de leerling zelf verbanden kan leggen en daarmee tot slimmere oplossingen komt. Aan de in de voetnoot genoemde Rekenkalender (1979) ontlenen wij het begin van wat daar een 'sliert' is genoemd.

$10 \times 72 = 720$ → $20 \times 36 =$ → $20 \times 72 =$ → $71 \times 20 =$ → $7{,}1 \times 20 =$
↓
$21 \times 7{,}1 =$ → $2{,}1 \times 7{,}1 =$ → $0{,}7 \times 7{,}1 =$ → $7 \times 7{,}1 =$ → $7 \times 7{,}5 =$
↓
$7 \times 75 =$ → $14 \times 75 =$ → $16 \times 75 =$ → ....

Reken je ze allemaal apart uit of leg je verbanden?

1 Het idee is ontleend aan de Rekenkalender [8].

Het is duidelijk dat hier uit het hoofd gerekend moet worden. Zulke slierten of 'verbandrijtjes' kunnen natuurlijk ook voor algebra worden ontworpen ....

Los x op uit:	*Schrijf zo eenvoudig mogelijk:*	$y^2 = 9$ ⟨ $y = 3$, $y = -3$
$\frac{30}{x} + 12 = 18$	$a \times a^2 = a^3$	$(y+1)^2 = 9$
$\frac{30}{x} + 10 = 16$	$(a+a) \times a^2 = \ldots\ldots$	$(y-2)^2 = 9$
$\frac{15}{x} + 10 = 16$	$2a \times a^2 = \ldots\ldots$	$(y-2)^2 = 16$
$\frac{x}{15} + 10 = 16$	$2a \times (a^2 + a^2 + a^2) = \ldots\ldots$	$2y^2 = 32$
$\frac{x}{15} + 16 = 17$	$2a \times 3a^2 = \ldots\ldots$	$\frac{1}{2}y^2 = 8$
$\frac{x+4}{15} + 16 = 17$	$\frac{6a^3}{2a} = \ldots\ldots$	$(\frac{1}{2}y)^2 = 16$
$\frac{15}{x+4} + 20 = 21$	$\frac{6a^3}{3a^2} = \ldots\ldots$	$\left(\frac{2}{y}\right)^2 = \frac{1}{16}$
$\frac{15}{x-4} + 20 = 21$	$\frac{3a^2}{6a^3} = \ldots\ldots$	

Een ander type rijtje vertoont een zeker patroon, waarbij de leerling uitgedaagd wordt dit te ontdekken en om het rijtje voort te zetten. Vervolgens kan dan een generaliserende formule worden opgesteld en met behulp van algebraregels kan dan naar een afdoende verklaring worden gezocht.

Bereken achtereenvolgens:

$15^2 - 10 \times 20$
$25^2 - 20 \times 30$
$35^2 - 30 \times 40$

Wat valt je op? Hoe zou je het rijtje voortzetten?
Hoe kun je het patroon met behulp van algebra verklaren?

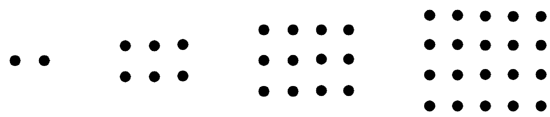
De leerling zal ontdekken dat er steeds 25 uitkomt en het rijtje kunnen voortzetten met nog een paar voorbeelden. De volgende uitdaging kan dan zijn om te beredeneren of te *bewijzen* dat de ontdekte regel algemeen geldig is. Dat kan op verschillende wijzen gebeuren, aanschouwelijk met vierkant en rechthoek, of via berekening van $(a + 5)^2 - a(a + 10)$.
Het volgende voorbeeld doet een beroep op inzicht in ons positiestelsel: $n + 9 + n \times 9 = 10n + 9$.

Controleer de uitkomsten in het rijtje hiernaast en bedenk de volgende drie regels. Hoe kun je het patroon met algebra verklaren?

$1 + 9 + 1 \times 9 = 19$
$2 + 9 + 2 \times 9 = 29$
$3 + 9 + 3 \times 9 = 39$
...

Een ander, meer concreet type van regelmaat treffen we aan bij de voorstelling van getallen door figuraties van stippen. Bekende vormen, die al door Pythagoras en zijn volgelingen werden bestudeerd, zijn vierkantsgetallen, rechthoeksgetallen en driehoeksgetallen.
Zo wordt de rij 2 (= 1×2), 6 (= 2×3), 12 (= 3×4), 20 (= 4×5), enz. voorgesteld door:

rechthoeksgetallen



Het n-de rechthoeksgetal kan worden beschreven als $n\,(n + 1)$ of als $n^2 + n$. Dergelijke rijtjes stippenpatronen geven aanleiding tot het opstellen van formules en via de applets van Wisweb uit de serie 'Stippelalgebra' kan hiermee interactief worden geoefend. [1]
Nog een ander soort patroon vonden we in de eerste jaargang van het tijdschrift Pythagoras.

> In de som 3 + 7 + 10 + 17 + 27 + 44 = 108 zijn de eerste twee getallen (3 en 7) willekeurig gekozen en de andere daaruit afgeleid volgens een regel, die je gemakkelijk kunt vinden.
> Vorm op deze wijze andere sommen van telkens zes getallen, waarbij je de eerste twee willekeurig kiest. Het zal blijken dat het getal achter het gelijkteken elke keer op dezelfde manier samenhangt met een der zes getallen voor het gelijkteken. Hoe? Verklaar het.

Bij inventarisatie van een aantal door de leerling geproduceerde 'Fibonacci-rijtjes' zal blijken dat de som steeds gelijk is aan 4 keer het vijfde getal. De verklaring kan in principe door een brugklasser worden gevonden. Noem de startgetallen a en b. De daaropvolgende getallen zijn dan $a + b$, $a + 2b$, $2a + 3b$ en $3a + 4b$ en de som van de zes getallen wordt dan voorgesteld door $8a + 12b$ en dat is gelijk aan 4 keer $2a + 3b$.
Dit kan leuker worden ingekleed, zoals Job van de Groep schrijft in een artikel in Euclides [9]. Hij gaat daarbij nog wat verder door met Fibonacci-rijtjes van tien getallen te werken. De som (= $55a + 88b$) blijkt dan 11 keer het zevende getal (= $5a + 8b$) te zijn.
Natuurlijk is de Pythagorasopgave meer een 'denkertje' dan een eenvoudige oefening en in het tijdschrift werd de opgave ook als zodanig aangeduid. Maar oefenen en denken kunnen hand in hand gaan, ja in onze visie zou dat dit eigenlijk voortdurend het geval moet zijn.

7.9 Breuken

> En als er breuken zijn,..... lastig is 't, nu ja, maar ik zoek de algemene noemer.
> (uit Multatuli's Woutertje Pieterse)

Een bekende klacht van leraren in het voortgezet onderwijs, van nu en van vroeger(!), is dat de leerlingen niet met (letter)breuken overweg kunnen. Van Hiele [10] signaleert in zijn boek *Begrip en Inzicht* dat het verbijsterend is hoe snel de kunstjes weer vergeten worden:

> In het voortgezet onderwijs komen breuken met letters voor. Daar leren we dat $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$
> Ook daar zijn de breuken voor de leerlingen een voortdurende bron van ellende.

En even verder:

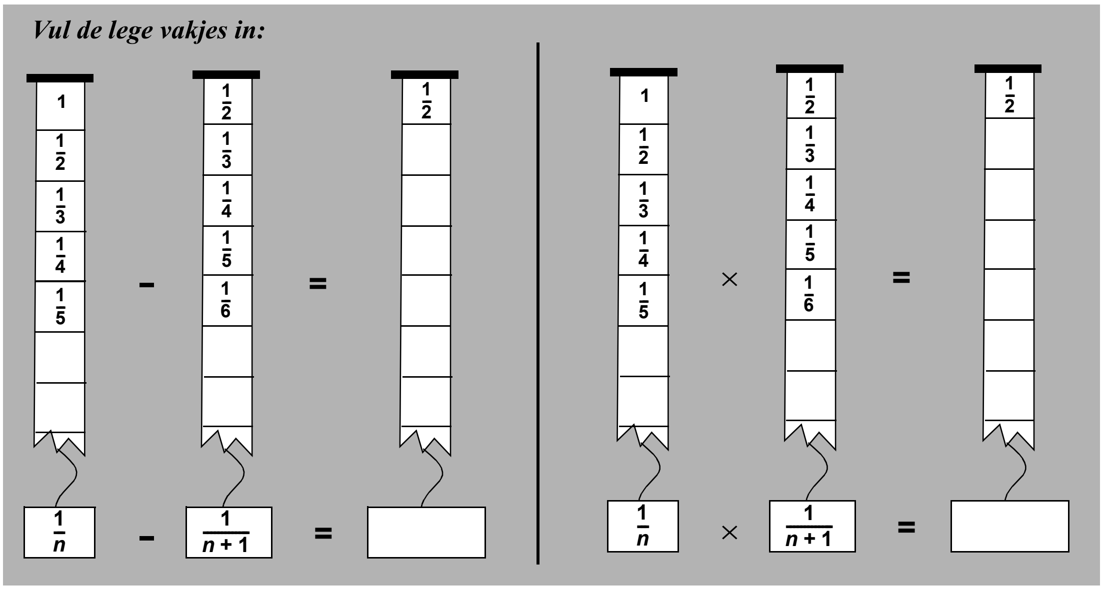
> Men treft in de wiskunde heel veel identiteiten aan. De bovenstaande was er een voorbeeld van. We hebben altijd gemeend dat deze identiteit belangrijk was, maar nu begint de twijfel boven te komen.
> Maakt de vorm $\frac{ad + bc}{bd}$ het verder rekenen gemakkelijk? Het is de moeite waard na te gaan wat men in de algebra met de breuken doet; ik heb het vermoeden dat de herleiding van $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ in minstens even veel gevallen ons tijd doet verliezen, dan tijd doet winnen.

Van Hiele pleit dan in het vervolg voor het gebruik van de notatie $a \cdot b^{-1}$ in plaats van $\frac{a}{b}$, zelfs in

1 Zie ook het boekje 'Algebra Off Course' met bijbehorende poster [16].

de gevallen waar bij teller en noemer natuurlijke getallen zijn. Zijn wens zal voorlopig, zo niet altijd, de vader van de gedachte blijven, want de breukvorm zit vast verankerd in de wiskunde en het dagelijks leven. Toegegeven, de aanduiding $3{\cdot}4^{-1}$ liter op een fles wijn zal de smaak niet negatief beïnvloeden, maar het zal toch wennen zijn. Zeer waarschijnlijk zullen we het nog heel lang met tellers en noemers blijven doen en zal bijvoorbeeld de bekend lenzenformule $\frac{1}{f}=\frac{1}{b}+\frac{1}{v}$ niet zo een, twee, drie van gezicht veranderen. Wél kunnen we het met Van Hiele eens zijn dat de herleiding van het rechterlid tot $\frac{v+b}{bv}$ de formule niet mooier of hanteerbaarder maakt.

In het huidige voortgezet onderwijs wordt wel aandacht besteed aan het rekenen met concrete breuken, maar durft men het nauwelijks aan de leerlingen in de onderbouw lastig te vallen met 'letterbreuken'. Dat breekt dan eerst op bij andere vakken zoals natuurkunde en economie waarin verhoudingen tussen grootheden een rol spelen en later in de analyse van vwo of havo, en dan vooral in wiskunde B, wanneer daar gebroken functies optreden. Het verdient daarom zeker aanbeveling in de lagere klassen met gebroken vormen te werken, al hoeven die niet zo complex te zijn als in de schoolboeken van zo'n vijftig jaar geleden (eerder in dit hoofdstuk zijn al voorbeelden getoond van gebroken vormen, waarmee in het eerste jaar van het havo/vwo geoefend zou kunnen worden). Ook hier lijkt het ons didactisch uitermate gewenst of beter gezegd noodzakelijk, om algebra te koppelen aan het rekenen met getallen. Dat kan bijvoorbeeld plaatsvinden via zogenaamde getallenstroken.



De breuken in de strips van dit voorbeeld hebben alle de teller 1 en worden wel *stambreuken* genoemd. De oude Egyptenaren kenden behalve de breuk $\frac{2}{3}$ geen andere breuken met teller ongelijk aan 1. Het schrijven van onze gewone breuken (< 1) als som van stambreuken met verschillende noemers, is een geschikte activiteit om het werken met concrete breuken wat op te halen en te oefenen. Het is aardig om te weten dat de Egyptenaren over tabellen van zulke splitsingen beschikten [11], bijvoorbeeld voor breuken met teller 2 en uiteraard een oneven noemer.
Een paar voorbeelden uit die lijst:

$$\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15} \quad , \quad \frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28} \quad , \quad \frac{2}{13}=\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}$$

Het derde voorbeeld laat zien dat het geen simpel karwei is om zo'n splitsing te vinden.
Er bestaan wel systematische methoden voor om dit aan te pakken, maar een behandeling daar-

van voert, zeker voor jonge leerlingen, te ver. Uit het oogpunt van algebra is het interessant om te kijken naar de breuken met teller 2, waarvan de noemer een oneven drievoud is.
Er geldt:

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \quad , \quad \frac{2}{9} = \frac{1}{6} + \frac{1}{18} \quad , \quad \frac{2}{15} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30} \quad \text{, enz.}$$

De noemer van de tweede breuk in de splitsing is steeds het drievoud van de noemer van de eerste breuk en het dubbele van de oorspronkelijke noemer. Deze ontdekking wordt vastgelegd in de identiteit:

$$\frac{2}{3n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n}$$

die via splitsing aldus te verklaren is:

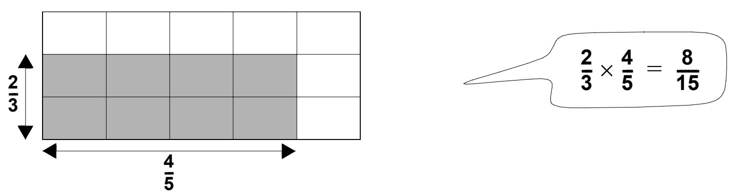
$$\frac{2}{3n} = \frac{4}{6n} = \frac{3+1}{6n} = \frac{3}{6n} + \frac{1}{6n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n}$$

Natuurlijk kan voor het bewijs van bovenstaande identiteit even goed van het rechterlid worden uitgegaan. De geschiedenis van de Egyptische wiskunde geeft dus een aanknopingspunt voor (het ophalen van) het opereren met breuken. Het idee om breuken dan weer te splitsen, dan weer samen te voegen, maakt dat het omgaan er mee een flexibel karakter krijgt.
Het komt er op neer dat de *distributieregel*

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

in twee richtingen dient te worden gekend en toegepast, net als trouwens de distributieregel voor het vermenigvuldigen.

Het vermenigvuldigen van breuken is algebraïsch eenvoudiger, maar conceptueel lastiger dan het optellen. Veel leerlingen in het eerste jaar van het voortgezet onderwijs blijken de regel voor het vermenigvuldigen te zijn vergeten en beschikken blijkbaar niet over een concreet oriëntatiekader om dit te heruitvinden. Hier bevelen we opnieuw het rechthoeksmodel aan, niet slechts om de regel ’vermenigvuldig de tellers en de noemers’ even op te halen maar ook om te oefenen, zodat dit model het geestelijk bezit van de leerling wordt:

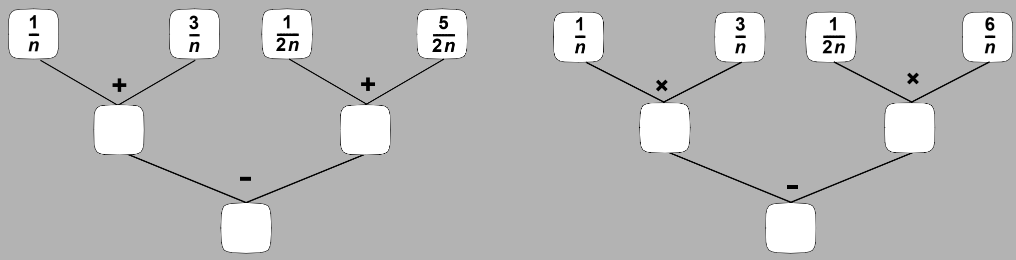


Dat betekent: vermenigvuldigingen maken bij plaatjes en plaatjes maken bij vermenigvuldigingen. Op zeker moment kan dan een regel worden geformuleerd. Bij het inoefenen van zulke formele regels is het dan weer belangrijk om bewerkingen te combineren, zoals:

$$\frac{2}{a} \times \frac{5}{b} + \frac{3}{b} \times \frac{4}{a} = \frac{10}{ab} + \frac{12}{ab} = \frac{22}{ab}$$

Ook hier kunnen weer allerlei variaties in presentatie worden bedacht, zoals bomen, tabellen, strips, patronen.

Vul passende breukvormen in:



Via een duidelijke koppeling met het rekenen met concrete breuken, moet het mogelijk zijn om jonge leerlingen met gebroken vormen te laten werken en oefenen. Het principe 'jong geleerd is oud gedaan' is toch verre te prefereren boven 'oud niet gedaan, want jong niet geleerd'.

Vul drie uitkomsten in.
Zet het rijtje voort met nog twee vermenigvuldigingen.

$$(1-\tfrac{1}{3})\times(1+\tfrac{1}{2}) = 1$$
$$(1-\tfrac{1}{4})\times(1+\tfrac{1}{3}) = \ldots$$
$$(1-\tfrac{1}{5})\times(1+\tfrac{1}{4}) = \ldots$$
$$(1-\tfrac{1}{6})\times(1+\tfrac{1}{5}) = \ldots$$

Hier volgt een ingewikkelde formule:

$$1-\frac{1}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

Verklaar die formule. Wat heeft die formule met het bovenstaande rijtje te maken?

Belangrijk is ook dat de leerlingen de diverse verschijningsvormen leren herkennen en met elkaar in verband kunnen brengen. Dat $\frac{1}{2}\pi$ en $\frac{\pi}{2}$ twee voorstellingen zijn van hetzelfde getal mag toch geen verbazing wekken, en volgens getuigenissen doet het dat vaak wel bij leerlingen in het studiehuis! Ook hiermee kan goed in de onderbouw worden geoefend:

Vul passende vormen in:

$+$	$\frac{1}{5}x$	x	$\frac{2x}{-5}$
$\frac{x}{2}$			
$\frac{2}{5}x$			
$\frac{4x}{5}$			

7.10 Kwadraatafsplitsing

Het vervangen van een deelvorm door een hulpvariabele, is zeker zo belangrijk. Dit laatste is een middel om complexe expressies te reduceren tot meer elementaire of herkenbare vormen. Het wordt van oudsher toegepast bij het oplossen van vergelijkingen[1]. Het 'van oudsher' is hier zeker niet overdreven, als men bedenkt dat de Babyloniërs dit principe veelvuldig gebruikten, zo omstreeks 1500 voor Chr. Zij kenden een algoritme om een vergelijking van het type $x^2 + px = q$ op

1 In het aanvankelijk algebraonderwijs wordt dit vaak de bordjesmethode genoemd.

te lossen. Dat kwam neer op het halveren van p, het kwadraat daarvan optellen bij q, de vierkantswortel uit dit resultaat te bepalen en daarvan weer de helft van p af te trekken. Wij kunnen dit veel korter formuleren:

$$\boldsymbol{x} = \sqrt{\tfrac{1}{4}\boldsymbol{p}^2 + \boldsymbol{q}} - \tfrac{1}{2}\boldsymbol{p}$$

Dit is (de helft van) de oude *p,q*-formule zoals die vroeger op de Mulo werd onderwezen; op HBS en Gymnasium leerde je de *abc*-formule die zoals uit het vervolg zal blijken, eigenlijk een kanon van te zwaar kaliber is. Op een van de vele Babylonische kleitabletten met uitgewerkte wiskundeopgaven, komt het volgende vraagstuk voor: *Ik heb 7 keer de zijde van mijn vierkant bij 11 keer zijn oppervlakte geteld en het is* $6\frac{1}{4}$. *Gevraagd de zijde van mijn vierkant*.

Kortom: $\boldsymbol{x}$ op te lossen uit $11\boldsymbol{x}^2 + 7\boldsymbol{x} = 6\frac{1}{4}$

De oplossing, vertaald in onze algebrataal, gaat als volgt.
Vermenigvuldig eerst beide leden met 11 en er komt:

$$(\boldsymbol{11x})^2 + 7 \cdot (\boldsymbol{11x}) = 68\tfrac{3}{4}$$

Stel nu **11*x* = *y*.** Dan is het probleem teruggebracht tot de standaardvergelijking:

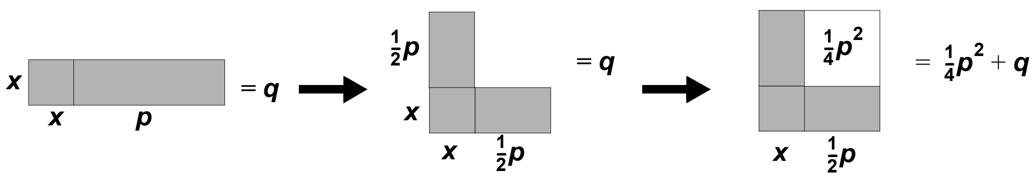
$$\boldsymbol{y}^2 + 7 \cdot \boldsymbol{y} = 68\tfrac{3}{4}$$

met als oplossing:

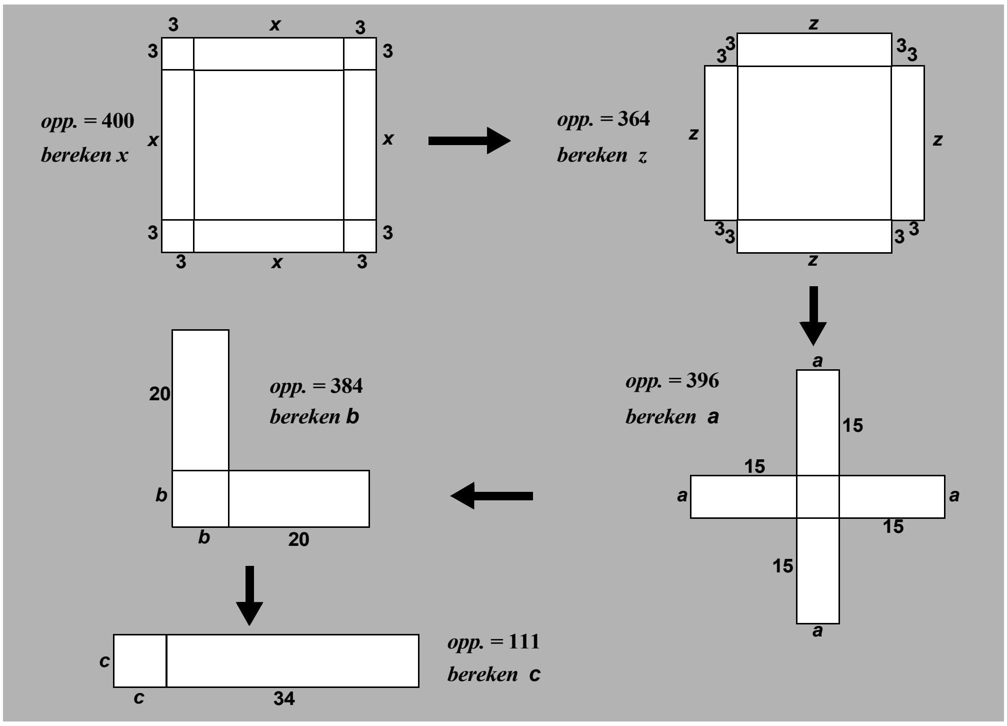
$$\boldsymbol{y} = \sqrt{(3\tfrac{1}{2})^2 + 68\tfrac{3}{4}} - 3\tfrac{1}{2} = 9 - 3\tfrac{1}{2} = 5\tfrac{1}{2}$$

Uit $11x = 5\frac{1}{2}$ volgt dan $\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}$.

Hoe de Babyloniërs hun algoritme voor het oplossen van de vergelijking $\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{px} = \boldsymbol{q}$ hebben afgeleid is niet met zekerheid te zeggen. Een aantrekkelijke gedachte is dat zij via een meetkundige figuur het kwadraatafsplitsen hebben begrepen, maar er zijn ook andere opties.



De hier geschetste aanschouwelijke methode wordt door leerlingen sterk geapprecieerd, en oefeningen waarbij ze zelf schetsjes moeten maken zijn heel nuttig. Op een gegeven moment zal de stap naar de abstracte vertaling worden gemaakt om de weg te openen naar het meer algemene geval (p en/of q kunnen negatief zijn) en bij het worteltrekken moet ook het negatieve broertje worden meegenomen. In een havogroep die in het derde leerjaar eerst uitgebreid had geoefend met het oplossen via plaatjes, bleek dat er tot op het eindexamen leerlingen waren die bij een vierkantsvergelijking in de kantlijn een bijpassend schetsje maakten om het algoritme kwadraatafsplitsen op te roepen. Via een uitgekiende serie oefeningen met 'plaatjesvergelijkingen' kunnen leerlingen trouwens zelf het kwadraatafsplitsen ontdekken.



Wij pleiten er nadrukkelijk voor om het kwadraatafsplitsen en het ontbinden in factoren, in eerste instantie als dé aangewezen oplossingstechnieken bij vierkantsvergelijkingen te hanteren. Beide algoritmen kunnen steunen op begrip en geven de leerling de gelegenheid tot inzichtelijk oefenen. Het gevaar van het in een vroeg stadium presenteren van de *abc*-formule (in sommige leerboeken gebeurt dat zelfs op gezag, zonder enig bewijs!) is dat het oplossen van tweedegraadsvergelijkingen gedegradeerd wordt tot een simpele substitutieoefening bij een black box.
Het is overigens niet uitgesloten dat de leerling, die de kwadraatafsplitsing heeft leren begrijpen en beheersen tenslotte zelf een algemene formule voor de oplossing van een vierkantsvergelijking kan vinden, bijvoorbeeld om een programmaatje voor de rekenmachine te ontwerpen. Pas in een ruimer theoretisch kader, waarbij de discriminant belangrijk wordt, kan de *abc*-formule met recht haar rol opeisen, al is zij nooit echt onmisbaar.
Hier is een voorbeeld van een oefening die wat verder gaat dan het louter inslijpen van de oplossingstechniek.

a. ***Los op door kwadraatafsplitsing:***

$\boxed{x^2 + \frac{2}{3}x = \frac{1}{3}}$ **en** $\boxed{x^2 + \frac{1}{3}x = \frac{2}{3}}$

Doe hetzelfde met de paren :

$\boxed{x^2 + \frac{2}{5}x = \frac{3}{5}}$ **en** $\boxed{x^2 + \frac{3}{5}x = \frac{2}{5}}$

$\boxed{x^2 + \frac{2}{5}x = \frac{7}{5}}$ **en** $\boxed{x^2 + \frac{3}{5}x = \frac{8}{5}}$

$\boxed{x^2 + 0,1x = 0,9}$ **en** $\boxed{x^2 + 0,9x = 0,1}$

b. ***Welke van de vier paren past niet in dit rijtje? Waarom vind je dat?***

c. ***Bedenk zelf een paar nieuwe vergelijkingen dat wél in het rijtje past. Los die twee vergelijkingen ook op.***

De eerste vraag is bedoeld om het kwadraatafsplitsen te oefenen.
De vragen **b.** en **c.** lenen zich voor een klassegesprek achteraf.
Oppervlakkig gezien past de vierde niet in het rijtje, want daar staan decimale breuken.
Aan de andere kant springt juist het derde paar er uit, want daar zijn niet de getallen verwisseld.
Bovendien hebben de vergelijkingen van de andere drie paren steeds –1 als een van beide oplossingen, en dat is bij dit paar niet geval.
Bij vraag **c**. is het wenselijk dat de zelf bedachte vergelijkingen (eigen producties!) klassikaal worden geïnventariseerd. Als er geen vergelijkingen met gehele coëfficiënten naar voren worden gebracht, zou de leraar kunnen vragen of bijvoorbeeld het stel $x^2 + 8x = -7$ en $x^2 - 7x = 8$ in het rijtje zou passen.
Als vervolg hierop zou naar de generalisatie kunnen worden gekeken. Stel dat de vierkantsvergelijkingen $x^2 + px = q$ en $x^2 + qx = p$ (met $p \neq q$) een gemeenschappelijke oplossing bezitten.
Die gemeenschappelijke oplossing is dan noodzakelijkerwijs gelijk aan –1.
De redenering hierbij is: *als er een getal is dat aan beide vergelijkingen voldoet, dan voldoet het ook aan de 'verschilvergelijking'*: $px - qx = q - p$, dus $x = \frac{q-p}{p-q} = -1$.
Substitutie van –1 in een van beide oorspronkelijke vergelijkingen leert dat $p + q = 1$.
Dit vraagt heel wat van de leerling, omdat het een combinatie is van redeneren en algebraïsch opereren, maar als we willen dat algebra kan worden toegepast in allerlei situaties, dan zijn dit soort 'hogere' oefeningen eigenlijk onvermijdelijk.

7.11 Formele substitutie

Zoals in een eerdere paragraaf gezegd, verstaan we onder formele substitutie het vervangen van enkelvoudige variabelen door expressies en vice versa. Het toepassen hiervan (hetzij expliciet met hulpvariabelen, hetzij met bordjes of gewoon uit het hoofd) waarbij het doel is om 'vormen naar je hand te zetten', is waard om geregeld te worden geoefend op alle niveaus en in alle jaren van het havo/vwo-onderwijs. Het verhoogt niet alleen de vaardigheid in het algebraïsch manipuleren, maar traint de leerling in het doorzien en het 'uitpellen' van min of meer ingewikkelde algebraïsche expressies met als doel deze tot een bekende standaardvorm te reduceren. Een voorbeeld van een opgave in formele substitutie bij vierkantsvergelijkingen:

> **a.** ***Los*** $\boxed{25x^2 + 20x = 5}$ ***op via de substitutie*** $\boxed{u = 5x}$
>
> **b.** ***Los*** $\boxed{5 + \frac{4}{x} = \frac{1}{x^2}}$ ***op via de substitutie*** $\boxed{v = \frac{1}{x}}$
>
> ***Als je de opdrachten a. en b. goed hebt uitgevoerd, zie je dat de twee vergelijkingen precies dezelfde oplossingen hebben.***
>
> **c.** ***Je had dit al kunnen voorspellen zonder die vergelijkingen op te lossen. Verklaar dit.***

Het uiteindelijke doel is natuurlijk dat leerlingen zelf in staat zijn om via formele substitutie een probleem op te lossen. Bekende oefeningen daartoe waren in een niet al te ver verleden om vergelijkingen zoals $x^4 = 10x^2 - 9$, $2\sin^2 x$ - $\cos x = 1$ of $2^{2x} + 2^{x+3} = 48$ op te lossen.
Misschien dat we toch meer van dit soort opgaven van stal moeten halen, omdat ze ongetwijfeld de formulevaardigheid verder helpen ontwikkelen. In het analyseonderwijs kan formele substitutie een duidelijke rol spelen bij de kettingregel en zeker bij het toepassen daarvan in de integraalrekening. Het traditionele functieonderzoek dat leidde tot het tekenen van een grafiek is met de komst van de grafische rekenmachine (terecht) nu ver naar de achtergrond gedrongen. Dat neemt niet weg dat naar aanleiding van een grafiek redeneringen zouden kunnen worden gevraagd, bijvoorbeeld met betrekking tot asymptoten die de computer niet cadeau geeft.

Neem bijvoorbeeld de kromme $y = \frac{x^2 - x + 3}{x + 2}$

Substitutie van $u = x + 2$, dus $x^2 = u^2 - 4u + 4$, helpt om de scheve asymptoot te vinden:

$$y = \frac{u^2 - 4u + 4 - u + 2 + 3}{u} = \frac{u^2 - 5u + 9}{u} = u - 5 + \frac{9}{u} = x - 3 + \frac{9}{x + 2}$$

Naast de verticale asymptoot $x = -2$ heeft de kromme dus de scheve asymptoot $y = x - 3$.
Deze methode is uit het oogpunt van het ontwikkelen van algebraïsche vaardigheden te verkiezen boven de staartdeling met rest die door veel leerlingen niet echt begrepen werd.
In oude algebraboekjes voor het eerste jaar van het vo troffen wij vormen ter ontbinding in factoren aan als: $x^2y^2 - 18xy + 65$, $(x + y)^2 - z^2$, en zelfs $x^2 + 2xy + y^2 + 4x + 4y + 3$.
Dat waren dan eigenlijk krenten in de algebrapap, die het saaie automatische werk doorbraken omdat ze 'te denken' gaven. Hoe men er ook over denkt, de bollebozen werden er in elk geval door uitgedaagd en de minder getalenteerden waren na een heldere uitleg (bijvoorbeeld met bordjes!) in staat de berekening te volgen. Wij denken dat het zeker de moeite waard is om op elk niveau vragen te bedenken, waarbij een formele substitutie (Freudenthal [5] sprak van een 'powerful device') de sleutel is tot het antwoord.

7.12 Combineren en elimineren

Een vaardigheid die vooral van pas komt bij andere vakken is het combineren van formules zodat een nieuwe formule ontstaat. Dat gebeurt dan veelal via *eliminatie* van een van de in de formules voorkomende variabelen, waarbij dan een formele substitutie wordt uitgevoerd.
De Babyloniërs hanteerden een formule die de oppervlakte van een cirkel uitdrukt in zijn omtrek, namelijk: *de oppervlakte van een cirkel is het kwadraat van de omtrek gedeeld door 12.*
Wij zijn gewend zowel de oppervlakte als de omtrek van een cirkel uit te drukken in de straal:

$$O = \pi r^2 \text{ en } P = 2\pi r$$

Omdat de omtrek van een cirkelvormig voorwerp gemakkelijker te meten is dan de straal, is het niet zo'n gek idee om de oppervlakte te willen uitdrukken in de omtrek.
Via $r = \frac{P}{2\pi}$ leidt dit tot: $O = \pi \cdot \left(\frac{P}{2\pi}\right)^2$ ofwel: $O = \frac{P^2}{4\pi}$

Vergelijking met de Babylonische rekenregel leert dat zij π benaderden door 3, een benadering die ook in het Oude Testament te vinden is.[1]

Zouden onze leerlingen zo'n eliminatie kunnen uitvoeren? Wij vrezen dat dit voor velen wat te veel gevraagd zou zijn, terwijl dit soort afleidingen in vakken als natuurkunde en economie toch schering en inslag is. In Euclides vonden we in het artikel '*Combi-uren wiskunde-natuurkunde'* [12] een voorbeeld van een proefwerkopgave.

Wat opvalt is dat in **a** de (meetkundige) context nog wel is vermeld, maar dat de bijbehorende context bij de vragen **b** en **c** geheel ontbreekt. Dat doet wat vreemd aan als men bedenkt dat het om een combinatie van de vakken wis- en natuurkunde ging. Maar in elk geval is in het betreffende project het nut van dergelijke oefeningen gesignaleerd.

1 Misschien hebben de Babyloniërs ingezien dat de oppervlakte van de cirkel gelijk zou moeten zijn aan het halve product van straal en omtrek. Dit gecombineerd met omtrek is ongeveer zes keer de straal geeft onmiddellijk de formule.

a. ***De inhoud van een bol met straal r kan berekend worden met de formule*** $\boxed{I_{bol} = \frac{4}{3}\pi r^2}$
Druk de inhoud van de bol nu uit in de diameter d van de bol.

b. ***Gegeven zijn de formules:***

$$\boxed{F_c = \frac{mv^2}{r}} \quad en \quad \boxed{v = \frac{2\pi r}{T}}$$

Voeg beide formules samen zodat F_c ***wordt uitgedrukt in m, r en T.***

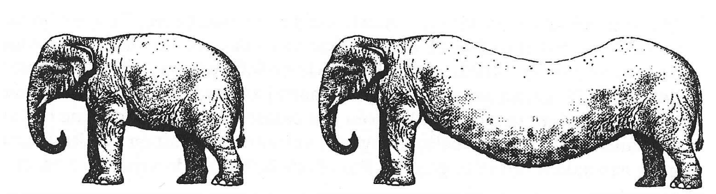
c. ***Gegeven zijn de formules:***

$$\boxed{R = \frac{\rho \cdot l}{A}} \quad en \quad \boxed{A = \pi r^2}$$

Voeg beide formules samen zodat r wordt uitgedrukt in ρ***, l en R.***

In het Hawex-katern 'Werken met standaardfuncties' is een speciale paragraaf opgenomen over dit type herleidingen. Het instapvoorbeeld daarbij is het verband tussen valsnelheid en valweg bij vrije val. Uit de formules $v = gt$ en $s = \frac{1}{2}gt^2$ volgt via eliminatie van t het verband $v = \sqrt{2gs}$. Wij merken op dat een redenering vooraf via een schakeling van evenredigheden (v is evenredig met t en t is op zijn beurt evenredig met de wortel uit s, dus enz.) het inzicht in dit verband kan versterken. Het bepalen van de formule is dan nog slechts nodig om de constante factor te vinden. De volgende opgave is ontleend aan het genoemde Hawex-pakketje:

Bij een bepaalde 'dikte' en 'lichaamsgewicht' van een viervoeter zijn er beperkingen voor de 'lengte' vanwege het doorzakeffect. Enig idee hiervan krijgt men door het dier te beschouwen als een staaf die aan de uiteinden ondersteund wordt.



Iemand heeft het volgende systeem van formules opgesteld voor het grensgeval, waarbij G (= lichaamsgewicht in gram), L (= lengte in cm) en D (= dikte in cm) een rol spelen.

(1) $\frac{GL^2}{D^4} = 680$	(3) $L = a \cdot G^{1/4}$	(5) $\frac{L}{D} = c \cdot G^{-1/8}$
(2) $LD^2 = G$	(4) $L = b \cdot G^{3/8}$	(6) $D = d \cdot L^{3/2}$

a. ***Als het gewicht van een dier bekend is, kan uit de formules (1) en (2) de maximaal mogelijke lengte worden berekend. Neem een Indische olifant van 5000 kg. Wat zijn de maximaal mogelijke lengte en dikte van zo'n olifant?***

b. ***De formules (3) tot en met (6) zijn af te leiden uit (1) en (2). Controleer dat en bereken a, b, c en d.***

Het combineren van formules kan waarschijnlijk nog het best worden geoefend binnen meetkundige contexten, met name bij inhouds-, oppervlakte- en omtrekformules. Neem bijvoorbeeld een cilindervormige conservenblik. Als r de straal van de bodem is en h de hoogte (beide in cm) dan wordt de totale oppervlakte van het blik in cm^2 gegeven door: $O = 2\pi rh + 2\pi r^2$.

De inhoud (in l) wordt gegeven door: $I = \pi r^2 h$. Voor literblikken kan de oppervlakte eenvoudig worden uitgedrukt in *r*. Uit $\pi r^2 h = 1$ volgt immers $O = \frac{2}{r} + 2\pi r^2$

Desgewenst kan *O* ook worden uitgedrukt in de diameter (*d*) of in de omtrek (*p*) van het blik, en dat leidt dan tot $O = \frac{4}{d} + \frac{1}{2}\pi d^2$ respectievelijk $O = \frac{4\pi}{p} + \frac{p^2}{2\pi}$

Via een van deze formules kan worden berekend wat de optimale afmetingen van een literblik zijn, dat wil zeggen de afmetingen waarbij de oppervlakte minimaal is. Een exacte oplossing wordt gevonden via differentiaalrekening, maar voor de praktijk is hier een numerieke oplossing met de grafische rekenmachine bevredigend genoeg. Dit betekent ook dat het probleem bijvoorbeeld al in een vwo 3-klas kan worden aangekaart.

7.13 Eigen producties

Terug naar het fragment van Theo Thijssen. Dit laat niet allen zien dat oefenen uitdagend kan zijn, maar ook dat leerlingen soms bereid zijn zelf rijtjes voorbeelden te produceren.
Deze activiteit, die tegenwoordig als *eigen producties* wordt betiteld, is dus duidelijk geen nieuwerwetse didactische vondst. En wat met rekenen kan, kan ook met algebra. Ik ontleen een voorbeeld aan de methode ’Getal en Ruimte’: *Bij een toets moet een klas tien herleidingen maken. Elke herleiding heeft als uitkomst 12ab. Bedenk tien opgaven die als uitkomst 12ab hebben. Laat een andere leerling de opgaven controleren.*
Een mooie opgave die helaas een witte raaf in het betreffende boek is, maar het is niet moeilijk te zien hoe er in deze stijl andere opgaven kunnen worden ontworpen.
Bij het oefenen van algebraïsche technieken ligt het eigenlijk voor de hand, om leerlingen zelf opgaven te laten construeren. Dat kan op elk niveau plaatsvinden.
Een eigen-productieopdracht voor wat meer gevorderden geeft het volgende voorbeeld:

De gebroken vormen $\boxed{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}$ ***en*** $\boxed{\frac{x^2+x}{x^2+2x+1}}$ ***zijn beide te herleiden tot*** $\boxed{\frac{x}{x+1}}$

a. ***Laat zien dat dit inderdaad zo is.***
b. ***Bedenk zelf nog een aantal breukvormen die te herleiden zijn tot*** $\boxed{\frac{x}{x+1}}$
Hoe verschillender, hoe beter!

Minstens net zo belangrijk als het stellen van een dergelijke opgave is de nabespreking ervan.
Er zijn hier veel goede varianten denkbaar, zoals:

$$\frac{ax}{ax+a},\ 1-\frac{1}{x+1},\ \frac{x^2-x}{x^2-1},\ \frac{x^2+2x}{x^2+3x+2},\ \text{enzovoort.}$$

die boven tafel kunnen komen. Daarnaast zullen er ongetwijfeld talrijke foutieve suggesties worden gedaan. Dit alles maakt dat het inventariseren en analyseren van de vondsten van de leerlingen een spannende en vooral ook leerzame activiteit zal zijn.

Bekijk nu het volgende:

a. ***Controleer onderstaande ketting:***

$$\boxed{x+6} \xrightarrow{\textit{kwadraat}} \boxed{x^2+12x+36} \xrightarrow{\textit{min 1}} \boxed{x^2+12x+35} \xrightarrow{\textit{ontbind}} \boxed{(x+5)(x+7)}$$

b. ***Voer net zo'n berekening uit met achtereenvolgens: $x + 4$, $y + 10$, $z + 11$, $p + 1$***
c. ***Bedenk zelf nog een paar andere voorbeelden.***
d. ***Kun je een algemene regel geven?***

Allereerst worden er twee typen herleidingen gerepeteerd: het kwadrateren van een tweeterm en het ontbinden van een drieterm. De charme van de oefening zit hem vervolgens in de mogelijkheid tot spontaan ontdekken van een patroon. De eigen producties (vraag ***c***) bevestigen dit patroon en voor de goede leerlingen is er nog een mogelijkheid tot een echt bewijs via het merkwaardig product:

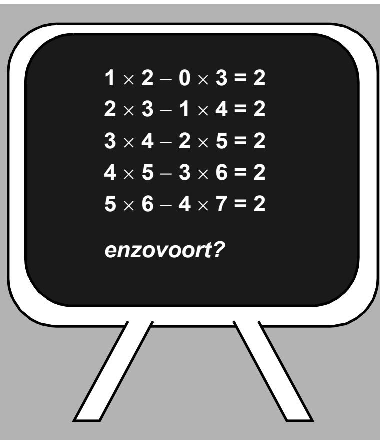
$$(x+A)^2 - 1 = (x+A+1)(x+A-1)$$

al kan het natuurlijk ook via uitwerking en splitsing van de middelste term:

$$(x+A)^2 - 1 = x^2 + \underset{A+1 \quad A-1}{2Ax} + A^2 - 1$$

Geïnspireerd door het werk van Sawyer [13] is dit voorbeeld:

27. a. ***Controleer de sommetjes op het bord.***
en zet het rijtje nog een beetje voort. Sterk toch?
b. ***Bedenk ook nog een paar sommen die bij voortzetting veel verder in de rij zouden voorkomen.***
c. ***Kun je er op rekenen dat de uitkomst steeds 2 is?***
Zo ja, verklaar dit met algebra.
d. ***Bedenk nu zelf ook zo'n regelmatig rijtje met steeds dezelfde uitkomst.***



De verklaring wordt bijvoorbeeld gevonden via:

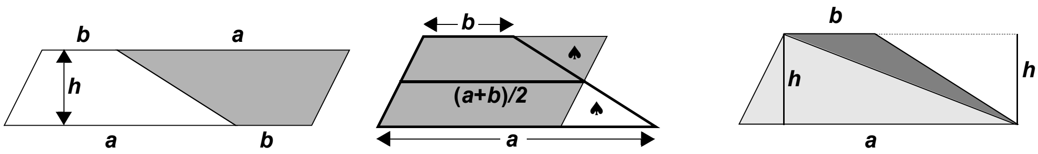
$$(n + 1) \times (n + 2) - n \times (n + 3) = 2$$

maar kan ook worden gegeven via het rechthoeksmodel.
De eigen productie komt dan in vraag **d.** aan bod.
Het idee om leerlingen na een techniek of methode geoefend te hebben, zelf opgaven (bijvoorbeeld voor medeleerlingen of voor een parallelklas) te laten ontwerpen, kan eigenlijk niet vaak genoeg worden toegepast. Het bevordert de (noodzakelijke!) reflectie bij de leerlingen op wat zij geleerd hebben, en zal tot verdieping van inzicht leiden. Bovendien wordt er een beroep gedaan op creativiteit en dat geeft bij het volbrengen van de opdracht veel voldoening. En is dat niet de basis voor alle leren?!

7.14 Algebra in de meetkunde

In paragraaf 7.4 beweerden we dat sommige meetkundehoofdstukken een uitstekend oefenterrein voor algebravaardigheden bieden. Neem om te beginnen de behandeling van oppervlakteformules voor driehoeken en vierhoeken. De formule voor het trapezium bijvoorbeeld kan worden geschreven als $\frac{1}{2}h(a+b)$ of als $h \cdot \frac{a+b}{2}$ of als $\frac{1}{2}ha + \frac{1}{2}hb$

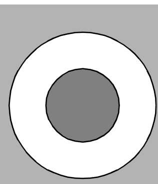
Het grappige is dat bij elk van die expressies een passende meetkundige afleiding hoort:



In het derde geval is de oppervlakteformule voor de driehoek gebruikt, die achteraf weer een bijzonder geval is van de trapeziumformule (neem $b = 0$). Voor $b = a$ komt de parallellogramformule weer terug. Hier is het goed pendelen tussen algebra en meetkunde.

Een ander mooi voorbeeld van een dwarsverband van algebra met meetkunde geeft de oppervlakteformule van een ring, begrensd door concentrische cirkels:

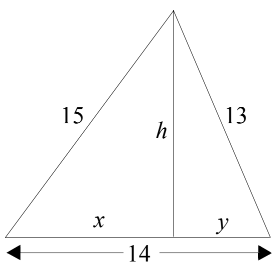
Twee cirkels met hetzelfde middelpunt sluiten een ring in.
Een manier om de oppervlakte van zo'n ring te berekenen is:
bereken het gemiddelde van de omtrekken van de twee cirkels
en vermenigvuldig dat met de breedte van de ring.



a. ***Weet jij een andere manier om de oppervlakte van zo'n ring te berekenen?***
b. ***Geeft dat in alle gevallen hetzelfde resultaat als de rekenregel hierboven?***

Merk op dat bij de beantwoording van vraag b. de regel $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ handig kan worden gebruikt.

Een andere rijke bron voor algebra is de stelling van Pythagoras. In het boek *Honderd jaar wiskundeonderwijs* [14] staat onderstaand voorbeeld, waarbij het gaat om de hoogte en vervolgens de oppervlakte van een driehoek met zijden 13, 14 en 15 te berekenen:



$$\begin{array}{l} x^2 + h^2 = 15^2 \\ y^2 + h^2 = 13^2 \\ \hline x^2 - y^2 = 15^2 - 13^2 \end{array} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} (x+y)(x-y) = 56 \\ \text{echter: } \; x + y = 14 \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{c} x - y = 56/14 = 4 \\ x + y = 14 \\ \hline 2x = 18 \\ x = 9 \\ \downarrow \\ h = 12 \end{array}$$

Alweer een voorbeeld hoe functioneel het, ten onrechte vaak niet meer gekende, merkwaardige product $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ kan zijn. In vroeger jaren was deze aanpak een opstap naar de afleiding van de '*s*-formule' die de oppervlakte van een driehoek uitdrukt in de zijden *a*, *b* en *c* en de halve omtrek *s.*

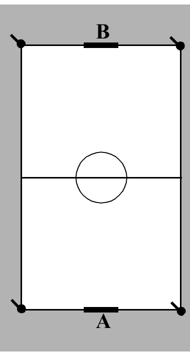
$$O = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Deze formule uit de Griekse wiskunde is geheel in de vergetelheid geraakt. Aan de ene kant is dat heel begrijpelijk, want erg veel praktische waarde heeft zij niet. Voor een stukje algebraonderwijs is zij wel heel aantrekkelijk. Controle van de dimensie (als de zijden van de driehoek elk met λ wordt vermenigvuldigd, wordt de oppervlakte met λ^2 vermenigvuldigd), het bekijken van randgevallen (hoe zit het bijvoorbeeld bij $s = a$?), en van speciale gevallen (hoe bij $a = b = c$ bijvoorbeeld?), het leidt allemaal tot zinvolle oefeningen. Tenslotte nog een voorbeeld van het gebruik van de stelling van Pythagoras en het opstellen van een vergelijking:

Op een voetbalveld van* 60 *bij* 100 *meter ligt de bal toevallig op een punt dat even ver van doel* A *ligt als van de twee cornervlaggen aan de overzijde.

a. ***Aan welke kant van de middellijn ten opzichte van dat doel* (A) *ligt de bal?***

b. ***Bereken de afstand van de bal tot doel* A.**



De vergelijking waar het hier om draait is:

$$30^2 + (100 - x)^2 = x^2$$

die na uitwerking van de eerste graad blijkt te zijn en zich gemakkelijk laat oplossen.

Zo bevat de meetkunde van de onderbouw genoeg mogelijkheden tot eenvoudige algebraïsche modellen. Wij noemen hier nog een paar onderwerpen die nu helaas niet in de schoolboeken voorkomen: verschillende meetkundige representaties van rekenkundig, meetkundig en harmonisch gemiddelde en, in het kader van gelijkvormigheidsmeetkunde, de gulden snede.

7.15 Productief oefenen

Oefenen is noodzakelijk om door inzicht verworven vaardigheden te verankeren. Het effect van oefeningen zal voor de meeste leerlingen groter zijn naarmate de opdrachten meer van het denkvermogen vragen, meer eigen inbreng van de leerling uitlokken en meer mogelijkheden tot reflectie bieden. Kortom naarmate zij een meer *productief* karakter hebben. In het voorafgaande zijn een aantal voorbeelden van productieve oefeningen de revue gepasseerd. Wij doen hier een tiental aanbevelingen die daarbij expliciet of impliciet aan de orde zijn gekomen.

1. Stel omkeervragen ter bevordering van de geestelijke wendbaarheid.
2. Varieer zo veel mogelijk in oefenvormen en activiteiten.
3. Daag leerlingen uit tot redeneren (bijvoorbeeld via ’slierten’).
4. Daag leerlingen uit tot generalizeren (bijvoorbeeld via getalpatronen).
5. Oefen het substitueren van ’formules in formules’.
6. Oefen het elimineren van variabelen in stelsels van formules of vergelijkingen.
7. Besteed aandacht aan het verbaal lezen en schrijven van algebraregels of formules.
8. Daag uit tot eigen producties.
9. Oefen algebra ook bij meetkunde.

en meer algemeen:

10. Onderhoud en versterk, waar mogelijk, eerder verworven reken- en algebravaardigheden.

De vraag is natuurlijk hoe je als leraar of auteur deze zaken in praktijk kunt brengen of kunt organiseren. Het programma in de eerste drie jaren van het voortgezet onderwijs is breed en het aantal beschikbare lesuren is op zijn zachtst gezegd niet al te groot met als gevolg veelal een versnippering van de pure algebralessen. Anderzijds is er een tendens in het voortgezet onderwijs om eerder naar niveau te differentiëren en dat maakt dat er voor havo/vwo-leerlingen toch meer ruimte kan ontstaan voor algebra. Eigenlijk zou er vanaf klas 1 havo/vwo geen lesweek zonder algebra moeten zijn! Mocht een niet-algebrahoofdstuk geen aanleiding tot algebraonderhoud bieden, dan zou er toch op zijn minst wekelijks een korte algebrataak gegeven kunnen worden. Er zou dan aanvullend materiaal, op papier of digitaal, bij de diverse methoden ontwikkeld moeten worden, liefst in de geest zoals in dit hoofdstuk is geschetst.

Het Freudenthal Instituut heeft op dit moment zeker al wat te bieden, maar dat zou in de nabije toekomst kunnen worden uitgebreid. Wij noemen allereerst de algebra-applets van Wisweb.[1] Verder is er in het kader van het Welpproject aanvullend materiaal voor klas 2 en 3 ontwikkeld, waarmee op enige scholen ervaring is opgedaan. Verder vermelden we hier nog en een bundel met productieve oefeningen [15].

In het begin van dit hoofdstuk is er gerefereerd aan vroeger tijden, zeg de eerste helft van de vorige eeuw. De bedoeling daarvan was zeker niet om dat verleden te idealiseren, integendeel, de algebra werd toen veelal op een in onze ogen te mechanistische wijze beoefend. Met de mammoetwet veranderde er veel. Waar het traditioneel deductieve element uit de meetkunde verdween, dook het op in de algebra. Structuureigenschappen (associativiteit, commutativiteit, distributiviteit) kregen een meer prominente plaats en het idee was dat een goed begrip daarvan belangrijker was dan het maken van veel oefensommen. Met de invoering van het huidige programma is het toen beoogde deductieve element nagenoeg uit de algebra verdwenen. Op zich was dit een begrijpelijke koersverandering. Maar de wijzer is als het ware te veel doorgeslagen naar de andere kant. Het 'hoe moet het?' lijkt nu vaak belangrijker dan het 'waarom is dat zo?'. Dat weerspiegelen althans de teksten in leerboeken en het blijkt ook uit het gedrag van leerlingen. De kern van wiskunde en wiskundeonderwijs is dat je wiskunde echt kunt begrijpen en dat je afgezien van conventies eigenlijk niets op gezag hoeft aan te nemen. Die visie zou ook steeds moeten doorklinken bij het inoefenen en beoefenen van algebra.

1 Zie ook het volgende hoofdstuk 'Algebra en ICT'.

Stellingen over algebraonderwijs

1. Er dient in de eerste twee jaar havo/vwo veel aandacht te zijn voor de *aritmetische kant van de algebra*, d.w.z. algebra in samenhang met (hoofd)rekenen, getalpatronen, getaltheorie en combinatorische telproblemen.
2. De *vermenging* van algebra met negatieve getallen kan, enerzijds vanwege het abstracte karakter, anderzijds vanwege de complicaties die dat geeft, in eerste instantie even worden uitgesteld ('negatieve getallen even in de ijskast') .
3. Er moet veel aandacht zijn voor rekenen met (gewone) *breuken* en *machten*, eerst op 'getal-niveau', later met variabelen.
4. Het verdient aanbeveling om gebruik te maken van *historische contexten*.
Babylonische, Egyptische, Griekse en Arabische wiskunde hebben veel te bieden op het gebied van concrete algebra.
5. Het is goed om zekere algebraregels en in het bijzonder de *merkwaardige producten* uit het hoofd te kennen. Die regels moeten voortdurend worden toegepast.
6. Het is verleidelijk om algebraïsche regels *optisch* te *presenteren*: papegaaienbek, wegstrepen, kruislings vermenigvuldigen, haakjes wegwerken, ... Het gevaar hiervan is dat dit imitatiegedrag oproept en dat er klakkeloos transfer plaatsvindt naar situaties waarbij dit niet kan. Het zijn in feite niet meer dan ezelsbruggetjes en die mogen in de ontwikkeling van een vaardigheid eigenlijk geen rol spelen.
7. Als leerlingen eenmaal een aantal technieken redelijk beheersen kan (en moet) algebra worden gebruikt om *bewijzen* te *leveren*, bijvoorbeeld van bijzondere eigenschappen van natuurlijke getallen.
8. Het concept 'functioneel verband' tussen twee grootheden of variabelen is abstracter dan menigeen denkt. In de geschiedenis van de wiskunde duikt dit idee betrekkelijk laat op en dat geeft al te denken. Het onderwerp (soms 'tabellen - grafieken - formules' genoemd) is zeker heel belangrijk, maar wordt nu *te vroeg en te veel* benadrukt. Het is zeer de vraag of het functiebegrip helpt bij het verwerven van de noodzakelijke algebraïsche vaardigheden en inzichten. Een nadeel van een vroege behandeling van functies is ook dat het leidt tot een notatiecultuur waar de leerling (nog) niet aan toe is.
9. *Evenredigheidstabellen* (didactisch een rijk concept!) zijn in vele opzichten waardevol.
In feite kunnen ze ook worden gezien als een natuurlijke aanzet tot het functiebegrip.
Het is zaak dat ze later worden uitgebreid (evenredig met het kwadraat/derde-macht/ omgekeerde van ...) en dan ook grafisch worden gerepresenteerd.

Literatuur

1. Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.
2. Dormolen, J. van (1975). *Vaardigheden, 1001 redenen waarom leerlingen geen (goede) routine hebben*. Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
3. Dijksterhuis, E.J. (1933/1934). Epistemisch Wiskundeonderwijs. *Euclides*, *10*, 165-213.
4. Lange, J. de e.a. (1994). *Wiskunde B vwo, Rapport Studiecommissie*. Utrecht: Studiecommissie Wiskunde B vwo.
5. Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomology of Mathemetical Structures*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.
6. Johnson, D.A. & Rising, G.R. (1967). *Guidelines for Teaching Mathematics*. Belmont CA: Wadsworth Company.
7. Sterk, H. & Perrenet, J. (2005). Kunnen (wij op) onze kinderen rekenen? *Euclides, 81*(2), 63-65.
8. Moor, E., de & Schoemaker, G. (1979). *Rekenkalender, 77 problemen voor rekenachtige dagen.* Utrecht: Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs.
9. Groep, J. van de (2005). De wiskundedocent als goochelaar: snel optellen in een Fibonacci-ri. *Euclides, 81*(3), 113.
10. Hiele, P.M. van (1973). *Begrip en inzicht, werkboek van de wiskundedidactiek*. Purmerend: Muusses.
11. Waerden, B.L. van der (1950). *Ontwakende Wetenschap*. Groningen: P. Noordhoff.
12. Loon, P. van (2005). Combi-uren Wiskunde-Natuurkunde. *Euclides, 80*(8), 406-410.
13. Sawyer, A.A. (1969). *Aanschouwelijke Algebra*. Utrecht: Spectrum.
14. Kindt, M. (2000). De erfenis van al-Khwarizmi. In Goffree, F., Hoorn, M. van & Zwaneveld, B. (Red.) *Honderd jaar wiskundeonderwijs*. Leusden: Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren
15. Kindt, M. (2001). *Oefeningen in Algebra, een bundel ideeën*. Utrecht: Freudenthal Instituut.
16. Kindt, M. (2003). *Algebra Off Course*, Utrecht: Freudenthal Instituut.

8 Algebra en ICT

Paul Drijvers, Martin van Reeuwijk

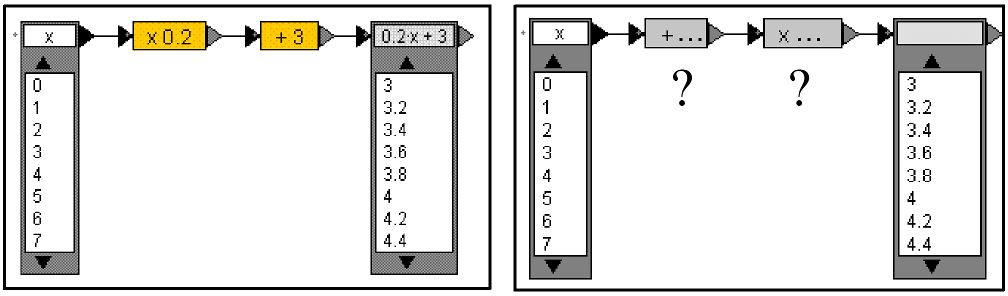
> ‘Weet je wat ze moeten doen? Direct die grafische rekenmachine afschaffen, daar heb je niks aan op de universiteit, en je leert er geen goede wiskunde mee.’

Uitspraken zoals dit anonieme citaat uit de wiskundE-brief van 20 november 2005 worden de laatste jaren regelmatig gehoord. Het onderliggende idee lijkt vaak te zijn dat algebraïsche technieken eerst met de hand moeten worden beheerst voor ze aan technologische hulpmiddelen kunnen worden uitbesteed. Los van het feit dat onderwijs niet getypeerd wordt door het al dan niet gebruiken van ICT, maar door *de manier waarop* dat gebeurt, gaat een dergelijke opinie ook voorbij aan de mogelijkheden die ICT biedt voor het ontwikkelen van wiskundig inzicht en het oefenen van vaardigheden.
In dit hoofdstuk worden de mogelijkheden van ICT voor begripsontwikkeling en oefening bij algebra nader onderzocht. We gaan na op welke manier ICT een rol kan spelen bij diverse belangrijke begrippen uit de schoolalgebra. Daaruit zal naar voren komen dat werken met papier-en-pen inderdaad niet uit het oog verloren moet worden. Ook is er geen sprake van dat de docent minder belangrijk wordt, integendeel. Wel vraagt de inzet van ICT om een uitgebalanceerde heroverweging van het belang van het uitvoeren van algebraïsche technieken met de hand en zullen docenten nieuwe werkvormen en nieuwe didactische vaardigheden moeten ontwikkelen. Dat ICT een rol van betekenis heeft in onze samenleving en in ons onderwijs staat buiten kijf; de uitdaging is om de mogelijkheden van nieuwe technologieën optimaal te benutten.

8.1 Trial-and-improve

Twee leerlingen uit een tweede klas havo/vwo, Agnes en Michel, zijn aan het werk met het applet *Algebrapijlen*[1]. Met dit applet maken ze pijlenketens, die in feite functies als machientjes voorstellen. Figuur 1 toont links een schermafdruk van het werk van dit tweetal. De eerste opdracht was om een pijlenketen te maken die 3, 3.2, 3.4, ... als uitvoertabel zou opleveren en dat is dus gelukt. De vervolgvraag is nu om de bewerkingen vermenigvuldigen en optellen te verwisselen en toch dezelfde uitvoertabel te maken (zie figuur 1 rechts). Het tweetal begint nu enkele mogelijkheden uit te proberen, zoals ‘plus 3 keer 0.2’ en ‘plus 6 keer 0.2’. Hoewel de vermenigvuldiging met 0.2 goed is, veranderen ze de factor in 1.2. Dat klopt niet, zien ze. De observator komt langs.

1 Het applet is te vinden op www.wisweb.nl. Zie ook [1], [2] en www.wisweb.nl/kloo.



figuur 1: Leerlingenwerk en vervolgvraag

Observator: Waarom klopt het niet?
Michel: Omdat we niet op het goede uitkomen.
Agnes: O, de hele getallen hier zo [ze wijst op de gehelen in de uitvoerkolom op het scherm
die
begint met 3, 4.2, 5.4, ...], die gaan hier steeds één erbij, terwijl je hier [de gehelen
in de
gevraagde uitvoertabel op papier die begint met 3, 3.2, 3.4, ...] steeds 3, 3, 3, 3.

Michel lijkt vooral te kijken of eruit komt wat de bedoeling is, terwijl Agnes op de toenamen in de tabel let en ziet dat die op het scherm 1.2 zijn geworden in plaats van de gewenste 0.2. Ze veranderen de vermenigvuldigingsfactor weer in 0.2 en proberen ketens zoals 'plus 9 keer 0.2' en 'plus 18 keer 0.2'. Zo komen ze na enig proberen en verbeteren tot de juiste keten: 'plus 15 keer 0.2'. Dan ziet Michel het verband tussen de 'plus 3' in de keten van de eerste opgave en de 'plus 15' hier: 15 keer 0.2 is 3!

Deze observatie typeert het leren van algebra met ICT in verschillende opzichten. De twee leerlingen zijn handig en snel als het gaat om het bedienen van knoppen en het navigeren door menu's. Dat leidt tot gedrag dat wel 'trial-and-improve' wordt genoemd: snel veel proberen in de hoop dichter bij een oplossing te komen. Michel´s reactie 'omdat we niet op het goede uitkomen' suggereert dat dit soms (te!) veel lijkt op lukraak proberen om het juiste antwoord te vinden. In eerste instantie ziet dit tweetal niet dat 'plus 15 keer 0.2' hetzelfde is als 'keer 0.2 plus 3'. Toch leidt het werken met het applet uiteindelijk wel tot een redenering die gepaard gaat met groeiend inzicht. Als de observator is langsgekomen, denken de leerlingen na over het gevonden antwoord en vinden ze er een verklaring voor.

Er dringt zich nu een drietal vragen op rond de inzet van ICT in het algebraonderwijs:

1. Welke kansen biedt ICT voor begripsontwikkeling en oefening in het algebraonderwijs en hoe kunnen die worden benut?
2. Wat betekent de inzet van ICT voor het werken in de klas en voor de rol van de docent?
3. Hoe verhoudt ICT-gebruik bij algebra zich tot algebraïsche basisvaardigheden met pen en papier?

Deze drie vragen staan centraal in dit hoofdstuk; we komen er in 8.7 op terug. Voor definitieve antwoorden is het nog te vroeg; ook bij de integratie van ICT in het wiskundeonderwijs is er sprake van ontwikkelen, proberen en verbeteren, van 'trial-and-improve'.

8.2 ICT tussen hoop en vrees

Laten we eerst de blik op het recente verleden richten en van daaruit de huidige situatie in kaart brengen. Enkele decennia geleden werd ICT in het wiskundeonderwijs een grote toekomst voorspeld. Leerlingen zouden op korte termijn toegang hebben tot allerhande krachtige ICT-tools en zich daarmee goed kunnen redden. Betere tijden stonden op het punt aan te breken, tijden waarin de ontwikkeling van wiskundig denken niet langer in het zou worden belemmerd door de uitvoering van saaie procedures en algoritmen die bovendien tot fouten leiden en daardoor verdere voortgang in de weg staan. Doordat de basisvaardigheden met de beschikbaarheid van ICT getrivialiseerd zijn, zou het leren zich in toenemende mate kunnen richten op hogere doelen zoals modelleren en begripsvorming. Dit optimisme ging vaak impliciet uit van een vrij sterke scheiding tussen vaardigheid en inzicht.

Deze hoop is tot op de dag van vandaag slechts zeer gedeeltelijk werkelijkheid geworden. De praktijk blijkt weerbarstig en de integratie van ICT in het onderwijs verloopt langzamer dan voorspeld. Daar zijn praktische en inhoudelijke redenen voor. In *praktische* zin blijken ICT-lessen bewerkelijk te zijn en hoge eisen te stellen aan de infrastructuur op school. De computers moeten werken (denk aan banale zaken als kapotte muizen en dergelijke), de juiste software moet zijn geïnstalleerd, er moet lesmateriaal bij bestaan en het computerlokaal moet beschikbaar zijn. Dat alles vraagt de nodige praktische voorbereiding. Ook is de vraag hoe het ICT-werk is ingebed in het onderwijs als geheel en of het bijvoorbeeld een rol speelt in de toetsing.
Daarnaast zijn er ook meer *inhoudelijke* vragen. Voegt de inzet van ICT iets toe, of is het eerder een kwestie van 'oude didactiek in nieuwe zakken'? Hoe verhoudt het zich tot de lijn in het schoolboek? Komen de notaties en methoden van de ICT-omgeving overeen met de gebruikelijke pen-en-papier schrijfwijze en aanpak? In hoeverre maakt de technologie het werken met pen-en-papier overbodig? In hoeverre draagt ook het pen-en-papier werk bij aan de beoogde inzichten? Is de scheiding tussen vaardigheid en inzicht wel zo terecht?

De integratie van ICT roept dus een aantal ingewikkelde vragen op en raakt aan zowel inhoud als vorm van het onderwijs. Docenten zien zich dan ook geconfronteerd met nieuwe keuzes en werkwijzes die afwijken van wat men gewend is. Dat leidt tot een afweging van kosten van de inzet van ICT – organisatorische en inhoudelijke voorbereiding – en baten, het beoogde leereffect. Gelet op de geringe inzet van ICT in de reguliere wiskundeles pakt die afweging in de meeste gevallen kennelijk negatief uit. Dit is geen uniek Nederlands verschijnsel. In Frankrijk bijvoorbeeld kunnen leerlingen al een aantal jaren een krachtige symbolische rekenmachine bij het centraal examen gebruiken. Desondanks schaffen docenten noch leerlingen zo'n apparaat op grote schaal aan, wat een toonaangevende Franse onderzoeker onlangs deed verzuchten: 'ik geloof er niet meer in...'. De Franse examencultuur, met veel theoretische vragen die met pen en papier moeten worden beantwoord, speelt hierin een belangrijke rol. Al met al bestaat dus de vrees dat ICT de belofte van enkele jaren geleden niet zal inlossen.

Recente ontwikkelingen

Tegenwoordig heeft het aanvankelijke, mogelijk wat naïeve optimisme plaatsgemaakt voor een meer genuanceerde en realistische kijk. Tegelijkertijd vindt momenteel een aantal samenhangende ontwikkelingen plaats, die de hoop doen herleven op een daadwerkelijke, zinvolle integratie van ICT in het wiskundeonderwijs en de vrees voor een roemloos einde verdringen.

Ten eerste is er steeds *meer software* beschikbaar die beter aansluit bij inhoud en didactiek van het wiskundeonderwijs. Deze software is robuust, gebruiksvriendelijk en betaalbaar. Denk bijvoorbeeld aan de programma's van VU-Soft voor het tekenen van grafieken en voor statistiek, of aan meetkundeprogramma's zoals Doorzien en Cabri[1]. Vanwege de beschikbaarheid van specifieke software voor wiskunde wordt algemene programmatuur in de wiskundeles minder vaak gebruikt, met uitzondering wellicht van het spreadsheetprogramma Excel, dat ook wordt gebruikt bij de zogeheten compex-examens wiskunde[2].
Een tweede ontwikkeling is de *verbeterde verspreiding* van de beschikbare software. Doordat bij

1 We doelen hier met name op Vu-Grafiek en VU-Stat (www.vusoft.nl). Ook over Cabri en Doorzien is informatie op internet beschikbaar: www.cabrilog.com en http://www.fi.uu.nl/wisweb/software/softwareovz.xml

2 Zie www.citogroep.nl/vo/ce/compex/algemeen/eind_fr.htm

veel schoolmethoden een cd-rom wordt meegeleverd, hebben leerlingen zelf de beschikking over de programmatuur, die ze onafhankelijk van de docent thuis kunnen gebruiken. Daarnaast is Internet een belangrijk distributiekanaal voor software.

In het verlengde hiervan ligt de *verbeterde integratie in de schoolmethodes.* Schoolboeken refereren in toenemende mate aan de meegeleverde software (zie bijvoorbeeld figuur 2). Dit maakt het voor docenten eenvoudiger om ICT in de les te gebruiken en de aansluiting met het boek is minder een punt van zorg. Vanwege de verbeterde computerfaciliteiten thuis is het ook mogelijk om de leerlingen computerhuiswerk op te geven, wat de gang naar een computerlokaal op school minder vaak nodig maakt. Het blijft dan wel nodig op een of andere manier, bijvoorbeeld met een PC en beamer in de klas, aan dat huiswerk aandacht te besteden.

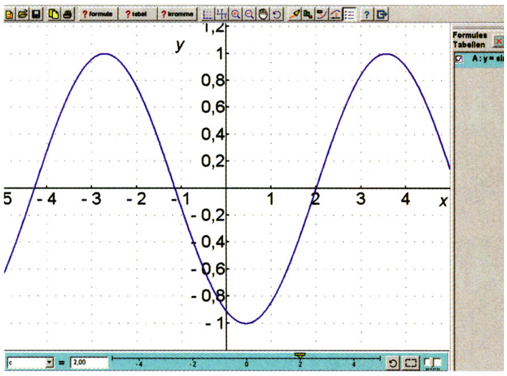
I_4a ICT Je ziet een grafiek van het type $y = \sin(x - c)$. Onderzoek welke invloed de parameter c heeft op een sinusoïde.

b Plot voor verschillende waarden van c de grafiek van $y = \sin(x - c)$. Welk verschil zie je als $c < 0$ of als $c > 0$?

c In welk punt zit het beginpunt van een golf?

d Voor welke waarden van c vallen de grafieken van $y = \sin(x - c)$ en $y = \cos x$ samen? Geef zo mogelijk een exact antwoord.

e Voor welke waarden van c vallen de grafieken van $y = \sin(x - c)$ en $y = -\sin x$ samen?



figuur 2: Pagina uit Moderne wiskunde A1(B1) deel 1, p. 127, die verwijst naar het gebruik van ICT

Een vierde factor is het *Internet*. Door betrouwbare en snelle Internetverbindingen kan software zowel thuis als op school gebruikt worden. Met name kleine, interactieve programma´s zoals applets zijn hiervoor bijzonder geschikt. Een voordeel is dat er geen software geïnstalleerd hoeft te worden, zodat het eigenlijke werk meteen kan beginnen. Educatieve websites zoals bijvoorbeeld www.rekenweb.nl en www.wisweb.nl worden veel bezocht door leerlingen. Daarnaast maakt Internet allerlei vormen van communicatie mogelijk. Denk aan leerlingen die samenwerken aan een praktische opdracht, aan het digitaal inleveren en teruggeven van werk via een digitale leeromgeving of aan registratie en feedback middels een leerlingvolgsysteem. De laatste mogelijkheden zullen in de toekomst belangrijker worden.

Een vijfde en laatste factor die de daadwerkelijke integratie van ICT in het algebraonderwijs bevordert is de opmars van *‘handheld’ technologie* zoals grafische rekenmachines. In de tweede fase van havo en vwo zijn dergelijke apparaten verplicht. Op een aantal scholen begint men al in klas 3 met de grafische rekenmachine. Daarnaast wordt overwogen of de grafische rekenmachine ook in het vmbo bruikbaar is[1]. Het voordeel van een handheld machine is dat die eigendom is van de leerlingen, waardoor ze zich de machine ook meer ‘eigen’ maken. Daarnaast worden deze apparaten steeds krachtiger – denk aan de symbolische rekenmachine met computeralgebra – en kunnen ze worden verbonden met een PC, of via een klassennetwerk aan een whiteboard worden gekoppeld.

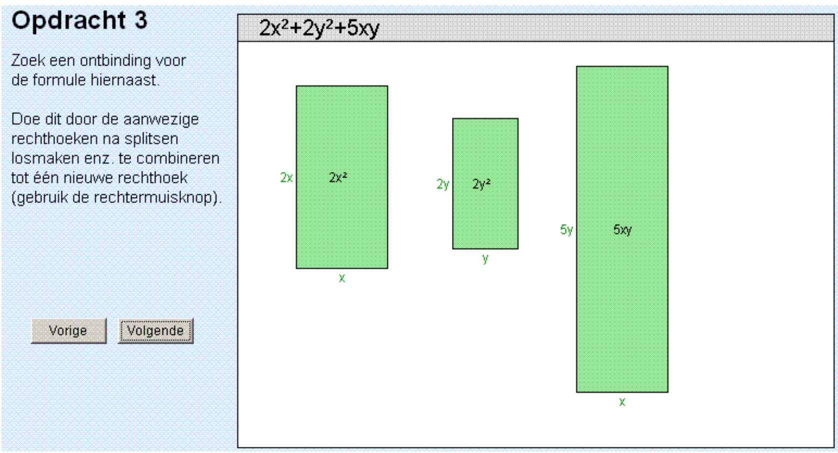
8.3 Rollen van ICT bij algebra

De eerste vraag die we ons hebben gesteld, is welke kansen ICT biedt voor begripsontwikkeling en oefening in het algebraonderwijs. Voor we hierop onderwerpspecifieke antwoorden gaan zoe-

1 Voor informatie over de experimenten met de grafische rekenmachine in het vmbo zie www.wisweb.nl/kloo.

ken, maken we eerst een globale indeling van de verschillende manieren waarop ICT bij algebra kan functioneren: bij de ontwikkeling van inzicht en vaardigheid, bij het oefenen van vaardigheden en bij het laten uitvoeren van procedures. Daarnaast kan ICT een communicatiemiddel zijn. Wat houden deze rollen in?

- *ICT als modelomgeving*
  Dit type ICT-gebruik richt zich op de ontwikkeling van begrippen en vaardigheden, van denkmodellen en methodes. De mogelijkheden van de ICT-omgeving zijn door didactische keuzes bepaald. Meestal is het aantal representaties en technieken beperkt. Het werken daarmee bevordert de modelvorming, stimuleert de ontwikkeling van een denkmodel en richt daarmee het algebraïsch denken van de leerling.
  Een voorbeeld hiervan dit is het werken met het applet Algebrapijlen (figuur 1), dat zich richt op het beeld van de functie als invoer-uitvoer machine, die een hele strook getallen in een andere overvoert volgens een bepaalde keten van bewerkingen. Een ander voorbeeld van een modelomgeving is de serie applets Geometrische Algebra (zie www.wisweb.nl). Het applet Geometrische Algebra 2D vormt een modelomgeving om het rechthoeksmodel voor het vermenigvuldigen van twee algebraïsche factoren te leren kennen en gebruiken (figuur 3). De mogelijkheden zijn beperkt tot het splitsen, verplaatsen en samenvoegen van rechthoeken, die algebraïsche uitdrukkingen voorstellen. Op deze manier krijgt het rechthoeksmodel een betekenis voor de leerling, waarop hij bij eventuele problemen ook later nog op kan terugvallen.
  De leerling kan met zo'n modelomgeving veel verschillende situaties onderzoeken. Daarbij ontstaat enige afstand tot de concrete context die de basis vormt van het probleem. Op die manier overstijgt het werken in de ICT-omgeving het contextgebonden perspectief en krijgt het redeneren met het denkmodel een ander, algemener en meer algebraïsch karakter. Dat bevordert de abstractie en de vorming van algebraïsche modellen. In het bevorderen van deze ontwikkeling ligt de kracht van ICT als modelomgeving, al blijft het tot op zekere hoogte een taak van de docent om dit proces van modelvorming expliciet te maken.

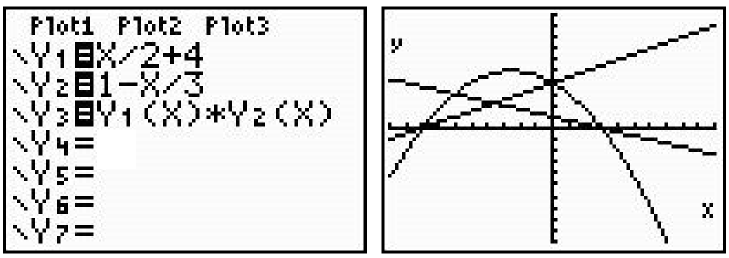


figuur 3: Het applet Geometrische Algebra 2D

- *ICT als oefenomgeving*
  Naast het ontwikkelen van inzicht en methode is er ook behoefte aan oefening van vaardigheden. Een ICT-omgeving kan door middel van gerichte feedback onmiddellijk reageren op oplossingen en strategieën van leerlingen. Tevens is een grote variëteit aan oefenopgaven mogelijk, waardoor leerlingen veel kunnen oefenen zonder direct in herhaling te vallen. Het aanbod en de opbouw van de algebra-oefeningen wordt door de ICT in het algemeen voorgestructureerd, zodat de oefenomgeving net als de modelomgeving didactische keuzes in zich draagt. De kwaliteit van de oefeningen en van de feedback zijn bepalend voor de effecti-

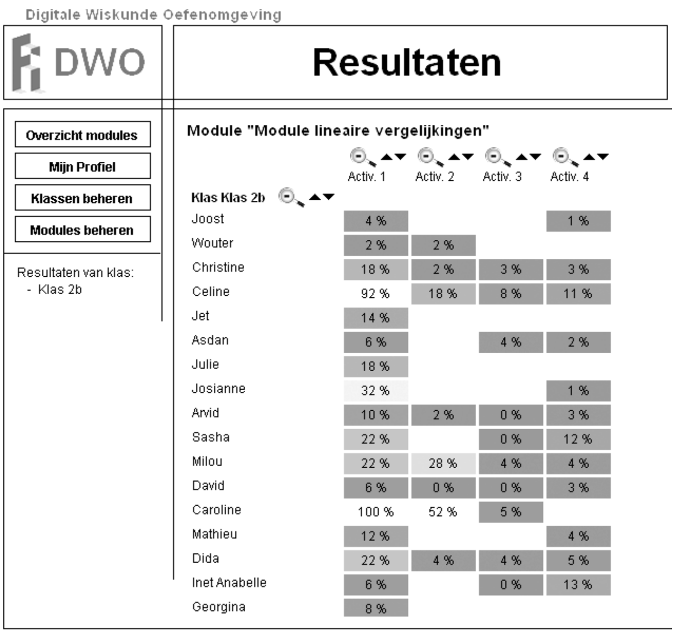
viteit van het oefenen. Voordelen van het gebruik van ICT-oefenomgevingen zijn dat de docent minder hoeft te corrigeren, dat de leerlingen in hun eigen tempo kunnen doorwerken zonder te zeer afhankelijk te zijn van de beschikbaarheid van de docent, en dat de docent zich kan richten op meer fundamentele begripsmatige problemen van leerlingen.
Een voorbeeld van dit type gebruik vormen de applets Vergelijkingen Oplossen die in paragraaf 8.6 aan de orde komen (figuur 18). Het applet functioneert daar als 'algebra-repetitor', die oefeningen aandraagt, feedback geeft en motiveert, onder andere door een spelelement. Omdat het verwerven van een denkmodel en het oefenen van vaardigheden in elkaars verlengde liggen, zijn er applets die naast een modelvariant ook een oefenvariant hebben. Voorbeelden daarvan zijn Geometrische Algebra Opdrachten en AlgebraPijlen Oefeningen, beide beschikbaar op www.wisweb.nl.

- *ICT als gereedschap*
  ICT wordt niet alleen gebruikt voor het verwerven van inzicht of het oefenen van technieken, maar ook om procedures uit te voeren, om het algebraïsch werk uit te besteden dat de leerling in principe ook met de hand zou kunnen doen, maar waaraan hij op dit moment geen aandacht wil besteden. Zoals het gewone rekenwerk met een rekenmachine kan worden gedaan, zo kan een tabel gemaakt worden met Excel en kan een grafiek met de grafische rekenmachine of VU-Grafiek worden getekend. ICT is dan gereedschap, zeg maar 'algebra-assistent', en biedt een breed scala aan toepassingen, die niet voor specifieke didactische doeleinden ontworpen zijn. Denk aan de grafische rekenmachine, spreadsheets, grafiekenprogramma's en computeralgebra pakketten. Het gebruik ervan is overwegend didactiekvrij en wordt maar in beperkte mate door de docent gestuurd. Het voordeel van ICT als gereedschap is dat het veel uitvoerend werk uit handen kan nemen, en daarmee een geschikt medium vormt om snel een aantal verschillende voorbeelden of situaties te onderzoeken, die dan aanleiding kunnen zijn voor patroonherkenning en generalisatie, twee zaken die bij algebra van groot belang zijn.
  Neem bijvoorbeeld de situatie van het 'vermenigvuldigen van lijnen'. Van twee lineaire functies en hun productfunctie worden grafieken getekend. De vraag is hoe bepaalde eigenschappen van de productgrafiek samenhangen met die van de 'bouwstenen'. Welk verband bestaat er tussen de nulpunten? Wat weet je van de top van de parabool? Aan welke voorwaarden moeten de lineaire functies voldoen, wil de parabool de *x*-as raken? Wanneer valt de top van de parabool samen met het snijpunt van de twee lijnen? De ICT-omgeving (in figuur 4 de grafische rekenmachine, maar dat kan ook een grafiekenprogramma zijn of Excel) neemt het tekenen van grafieken uit handen en maakt exploratie mogelijk. De resultaten beogen de leerling uit te dagen tot algebraïsch denken. Of dat ook werkelijk van de grond komt, hangt af van de didactische setting. Het gevaar van ICT als voorbeeldgenerator is dat leerlingen blijven steken in een oppervlakkig soort waarneming, zonder op zoek te gaan naar onderliggende inzichtelijke factoren. De docent zal door de keuze en formulering van de opgave en door het stellen van geschikte vragen de gewenste diepgang moeten bevorderen.



figuur 4: Het spelletje 'lijnen vermenigvuldigen'

- *ICT als communicatiemiddel*
  Een vierde rol van ICT is die van communicatiemiddel. Via internet is het mogelijk om informatie te verspreiden, maar ook om samen te werken, werk toegankelijk te maken voor anderen en hierop te reageren. Steeds meer scholen gebruiken Elektronische Leeromgevingen (ELO's) zoals Blackboard, Brainbox, Moodle, Netschool, Teletop, om materiaal beschikbaar te stellen en om de vorderingen van leerlingen te kunnen volgen (zie http://elearning.surf.nl/). Email-spreekuren van docenten, chats met groepen leerlingen, uitwerkingen die worden uitgewisseld, een digitale vraagbaak zoals Wisfaq (www.wisfaq.nl), dat alles behoort tot de mogelijkheden en die worden in toenemende mate benut. Naar verwachting zal de 'C' in ICT in de toekomst alleen maar belangrijker worden, en hopelijk het tekort aan contacttijd dat wiskundedocenten ervaren gedeeltelijk ondervangen.
  Het werken met ICT kan voor leerlingen een wat vluchtig karakter hebben: schermen verschijnen, schermen verdwijnen en na afloop blijft er niet veel tastbaars over. Ook voor de docent is dan moeilijk vast te stellen wat de vorderingen zijn en waar de problemen zitten. Daarom komen er meer vormen van digitale leerlingregistratie beschikbaar. Figuur 5 toont een eenvoudig voorbeeld, de Digitale Wiskunde Oefenomgeving (zie www.wisweb.nl). Leerlingen kunnen zich hiervoor individueel aanmelden en aangeven in welke klas ze zitten, waardoor de resultaten van het werken met applets voor de docent zichtbaar worden. Dat betekent dat het controleren van huiswerk bijvoorbeeld erg eenvoudig wordt, want de docent kan in een oogopslag zien hoe ver de leerlingen zijn gekomen en welke onderdelen nog niet beheerst worden.
  Tot op heden zijn de mogelijkheden van communicatie bij algebraonderwijs nog niet op grote schaal verkend. Een van de moeilijkheden daarbij is het interpreteren en weergeven van algebraïsche formules, wat voor algebra natuurlijk cruciaal is. Door de realisatie van een nieuwe internationale standaard, MathML, is dit obstakel uit de weg geruimd en is het nu mogelijk om bijvoorbeeld gebruik te maken van algebrasoftware op een server ver weg met een afwijkend besturingssysteem.



Klas Klas 2b	Activ. 1	Activ. 2	Activ. 3	Activ. 4
Joost	4 %			1 %
Wouter	2 %	2 %		
Christine	18 %	2 %	3 %	3 %
Celine	92 %	18 %	8 %	11 %
Jet	14 %			
Asdan	6 %		4 %	2 %
Julie	18 %			
Josianne	32 %			1 %
Arvid	10 %	2 %	0 %	3 %
Sasha	22 %		0 %	12 %
Milou	22 %	28 %	4 %	4 %
David	6 %	0 %	0 %	3 %
Caroline	100 %	52 %	5 %	
Mathieu	12 %			4 %
Dida	22 %	4 %	4 %	5 %
Inet Anabelle	6 %		0 %	13 %
Georgina	8 %			

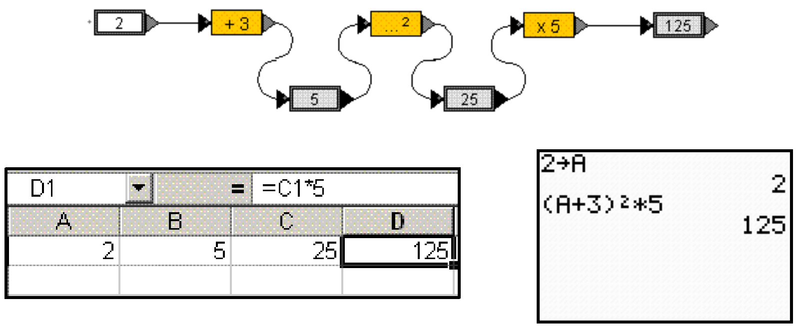
figuur 5: De resultaten van een klas in de Digitale WiskundeOmgeving op www.wisweb.nl

De rollen van modelomgeving, oefenomgeving en gereedschap sluiten elkaar niet uit. Het ontwikkelde inzicht moet natuurlijk worden toegepast in oefensituaties en oefeningen vragen ook om inzichtelijk toepassen van het geleerde. Ook kan een 'breed' type ICT-gereedschap door een specifieke manier van gebruik functioneren als modelomgeving. Zwart-wit is de indeling dus niet, maar in de rest van het hoofdstuk zal ze toch van pas komen om een ICT-toepassing globaal te typeren.

In de volgende paragrafen schetsen we de kansen die ICT-gebruik biedt voor begripsontwikkeling en oefening bij enkele centrale onderwerpen binnen de schoolalgebra, namelijk achtereenvolgens het variabelebegrip, functies en formules, en het oplossen van vergelijkingen. De technologie die daarbij wordt gebruikt bestaat uit spreadsheetprogramma’s, grafische rekenmachine, applets en computeralgebra. Het zal blijken dat de inzet van ICT invloed heeft op het beeld dat leerlingen van deze onderwerpen krijgen.

8.4 Variabelen met ICT

In paragraaf 1.3 is een aantal aspecten van algebra besproken, en zijn in samenhang daarmee verschillende manieren onderscheiden waarop variabelen bij algebra functioneren: als plaatshouder, als generalisator, als veranderlijke en als onbekende. In deze paragraaf gaan we na wat ICT-toepassingen kunnen bijdragen aan het inzicht in variabelen.



figuur 6: De variabele als plaatshouder in Algebrapijlen, Excel en TI-84

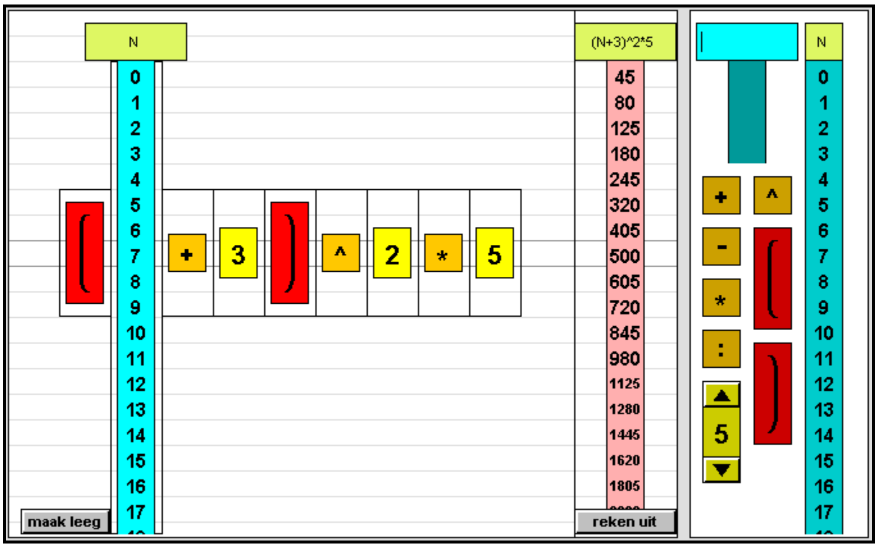
De meest basale rol van de variabele is die van de *plaatshouder*, de ‘lege plaats’ waarin een getal kan worden ingevuld. Figuur 6 geeft aan hoe de variabele als plaatshouder gestalte krijgt in het applet Algebrapijlen, het spreadsheetprogramma Excel en de grafische rekenmachine TI-84. In Algebrapijlen, op deze manier gebruikt, heeft de variabele als plaatshouder de vorm van een invoervakje, waarin de leerling een getal, in het voorbeeld 2, invult. Op dit invoergetal wordt vervolgens een serie bewerkingen uitgevoerd. Op het moment dat niet een getal, maar een variabele zoals *kosten* of *x* in het invoervakje wordt gezet, overstijgen we het plaatshouder-idee.
In Excel gebeurt iets vergelijkbaars. In een cel, in het voorbeeld cel A1, komt de startwaarde. De inhoud van de volgende cellen wordt berekend met een formule waarin naar een vorige cel wordt verwezen. Een variabele is als het ware de inhoud van een cel. Overigens heeft een cel eigenlijk verschillende inhouden: de getalswaarde, die in de cel zelf is af te lezen, en de onderliggende formule die boven in beeld zichtbaar is. Dit dubbele karakter kan verwarrend zijn voor leerlingen [3].
In het rekenscherm van de grafische rekenmachine is een variabele in feite een geheugenplaats die door een toewijzing wordt gevuld. Het pijltje doet denken aan het zogeheten ladenmodel uit de informatica: je pakt het getal 2 en ‘stopt dat in het laatje’ waar het label A op staat.
Het gaat hier om drie heel verschillende typen ICT-toepassingen. Het applet is in dit voorbeeld een modelomgeving, waarbij het model visueel sterk naar voren komt. Excel is een stuk gereedschap, maar hanteert wel impliciet een model van variabelen als celinhouden, waarmee het plaatshouder-idee domineert. Ook de GR is een stuk gereedschap dat, anders dan bijvoorbeeld een symbolische rekenmachine, uitgaat van het ladenmodel waarin geheugenplaatsen met numerieke waarden worden gevuld. De overeenkomst is echter dat de manier waarop de drie ICT-omgevingen hier gebruikt worden aansluit bij het beeld van de variabele als plaatshouder.

Het variabelebegrip behelst meer dan de plaatshouder. Hoe zit het met de variabele als *generalisator*, als een letter die voor een hele verzameling van getallen staat in plaats van voor één getal daaruit?

Het applet Stroken met etiketten, dat al in hoofdstuk 4 aan de orde is gekomen, is heel geschikt om dit beeld aan te leren (figuur 7). Het applet, typisch een modelomgeving, maakt het mogelijk om bewerkingen uit te voeren op de hele verzameling van natuurlijke getallen. Door daarop ‘etiketten te plakken’ krijgen variabelen en formules het karakter van generalisaties over getallen en numerieke relaties. De *N* boven de strook met natuurlijke getallen staat niet langer voor één getal, maar voor het geheel van alle natuurlijke getallen. Op die manier bevordert het werken met het applet een andere kijk op de variabele.

Een docent reageerde eens als volgt op zijn ervaringen met Stroken in de klas:

> Ik ervaar het Stroken applet als een zeer krachtig middel, uiteraard onder voorwaarde van goede opdrachten en goede computervoorzieningen. (Een beamer in een computerlokaar is goud waard!) Het stelt wel vrij hoge eisen aan leerling en docent, maar dat hoort ook.



figuur 7: Het applet Stroken met etiketten: de variabele als generalisator

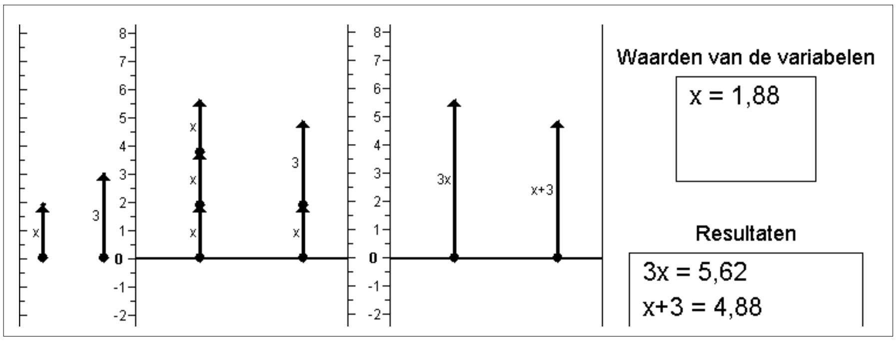
Op het moment dat met tabellen of lijsten getallen wordt gewerkt, die met een naam, label of formule worden aangeduid, krijgt de variabele het karakter van een generalisator. Zeker het verplaatsen of bewerken van hele kolommen of lijsten in tabelvorm roept dit op. Excel en grafische rekenmachine bieden hiervoor ook goede mogelijkheden. Symbolische rekenmachine en computeralgebra programma gaan nog wat verder: daar hebben variabelen uit zichzelf geen numerieke waarde, zodat ze per definitie generaliseren over de hele domeinverzameling.

Het idee van de variabele als generalisator kan ook opgeroepen worden door met ICT een aantal voorbeelden te genereren, die aanleiding zijn tot sorteren, patroonherkennen en generaliseren. Een voorbeeld hiervan staat in figuur 8. Computeralgebra fungeert daar als gereedschap om uitdrukkingen van de vorm $x^n - 1$ in factoren te ontbinden [4]. Op zichzelf is dat een kwestie van knoppendrukken. Het resultaat roept echter allerlei vragen op: Wanneer zijn er precies twee factoren en wanneer meer? Komt de factor $x + 1$ altijd voor bij even waarden van *n*? Hoe kun je daar zeker van zijn? Bij $x^6 - 1$ hadden we misschien $(x - 1) \cdot (x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ verwacht. Komt de uitvoer van het programma op hetzelfde neer? Hoe doet het programma dat eigenlijk en hoe zou je met pen en papier tot hetzelfde resultaat kunnen komen?

$\text{factor}(x^2 - 1)$	$(x - 1)\cdot(x + 1)$
$\text{factor}(x^3 - 1)$	$(x - 1)\cdot(x^2 + x + 1)$
$\text{factor}(x^4 - 1)$	$(x - 1)\cdot(x + 1)\cdot(x^2 + 1)$
$\text{factor}(x^5 - 1)$	$(x - 1)\cdot(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
$\text{factor}(x^6 - 1)$	$(x - 1)\cdot(x + 1)\cdot(x^2 + x + 1)\cdot(x^2 - x + 1)$
$\text{factor}(x^7 - 1)$	$(x - 1)\cdot(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
$\text{factor}(x^8 - 1)$	$(x - 1)\cdot(x + 1)\cdot(x^2 + 1)\cdot(x^4 + 1)$
$\text{factor}(x^9 - 1)$	$(x - 1)\cdot(x^2 + x + 1)\cdot(x^6 + x^3 + 1)$

figuur 8: Factorisaties van uitdrukkingen van de vorm $x^n - 1$

Door het stellen van dergelijke denk- en redeneervragen wordt voorkomen dat het ontdekken van het patroon een doel op zich wordt, dat los komt te staan van de algebraïsche betekenis. Dit voorbeeld maakt verder duidelijk dat er opdrachten zijn waarbij een computeralgebra programma als inspirerende omgeving kan functioneren en kan aanzetten tot exploratie en algebraïsch denken. Het gebruik van computeralgebra vraagt echter wel een investering vooraf, omdat de algebraïsche flexibiliteit die een dergelijk programma biedt vaak gepaard gaat met een zekere mate van syntactische inflexibiliteit, bijvoorbeeld bij het invoeren van formules en commando’s. Mede daarom wordt computeralgebra steeds vaker op de achtergrond gebruikt, als motor achter een educatieve toepassing, die bijvoorbeeld in werking treedt om na te gaan of een algebraïsch antwoord van een leerling op hetzelfde neerkomt als het antwoord dat de makers van de toepassing in gedachten hebben. Op die manier biedt computeralgebra mogelijkheden voor betere detectie van fouten en daarmee ook voor betere feedback [5].



figuur 9: Het applet Geometrische algebra 1D: van plaathouder naar veranderlijke

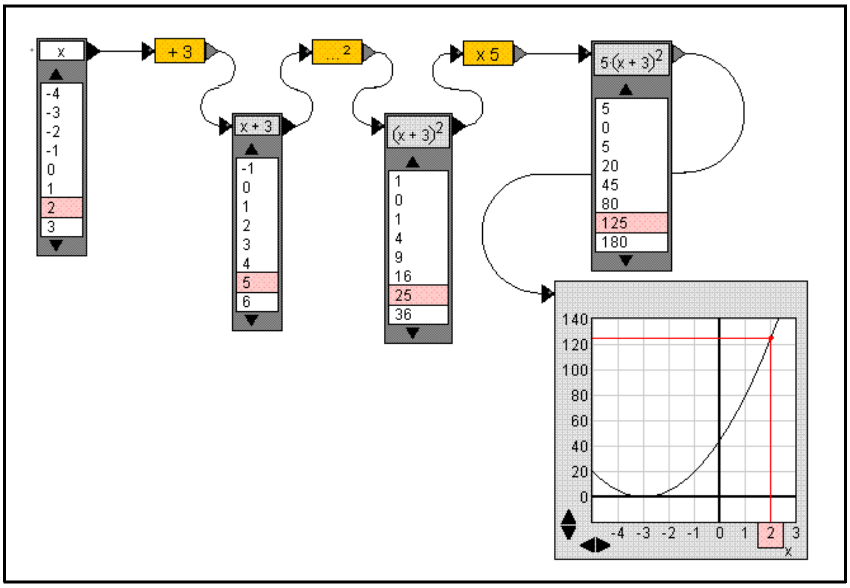
Behalve als plaatshouder en als generalisator functioneren variabelen ook als veranderlijken. Bij een *veranderlijke* stellen we ons voor hoe de variabele een getalsverzameling doorloopt. Figuur 9 laat zien hoe een modelomgeving als het applet Geometrische Algebra 1D leerlingen kan helpen bij het zetten van de stap van plaatshouder naar veranderlijke. De variabelen hebben een waarde, maar die kan door de pijlen uit te rekken op een vrijwel continue manier veranderen [6, 7]. Daarnaast speelt de veranderlijke een rol in het functiebegrip, waarop we in de volgende paragraaf nader ingaan.

Samengevat zien we dat er verschillende manieren zijn waarop ICT-gebruik het beeld van de variabele als plaatshouder, als generalisator en als dynamische veranderlijke kan bevorderen. De variabele onbekende komt naar voren bij het werken met vergelijkingen in paragraaf 8.6.

8.5 Functies en formules met ICT

Verschillende representaties

Functies nemen in de Nederlandse schoolalgebra een centrale plaats in. Op welke manier kan ICT aan het functiebegrip een bijdrage leveren?
De pijlenketting bovenin figuur 6 laat zien hoe het modelapplet Algebrapijlen het beeld van een functie als input-outputmachine weergeeft. Figuur 10 is daarop een vervolg, waarin de invoer nu variabel is, en daarmee de uitvoer ook. Het applet maakt het mogelijk een tabel van invoer- en uitvoerwaarden in beeld te brengen en een grafiek te tekenen. Uitgaande van de functie als machientje zien we dus de belangrijkste functierepresentaties in één figuur: de ketting, de tabel, de grafiek en de formule. Als je nu met de cursortoetsen door de tabel voor *x* heen loopt, veranderen de waarden in de andere tabellen en in de grafiek mee. Op die manier worden de verschillende representaties van de functie met elkaar in verband gebracht, en zien leerlingen die als verschillende ‘aanzichten’ van één en hetzelfde object. Het applet is hier dus een modelomgeving die bijdraagt aan een meer geïntegreerd functiebegrip. Daarin is het applet overigens niet uniek: steeds meer wiskundesoftware maakt het mogelijk om verschillende representaties tegelijk te bekijken, en de gevolgen van veranderingen in de ene representatie op de andere te onderzoeken. Op dit punt heeft ICT beslist veel te bieden. Laten we twee belangrijke representaties, grafieken en formules, nader bekijken.

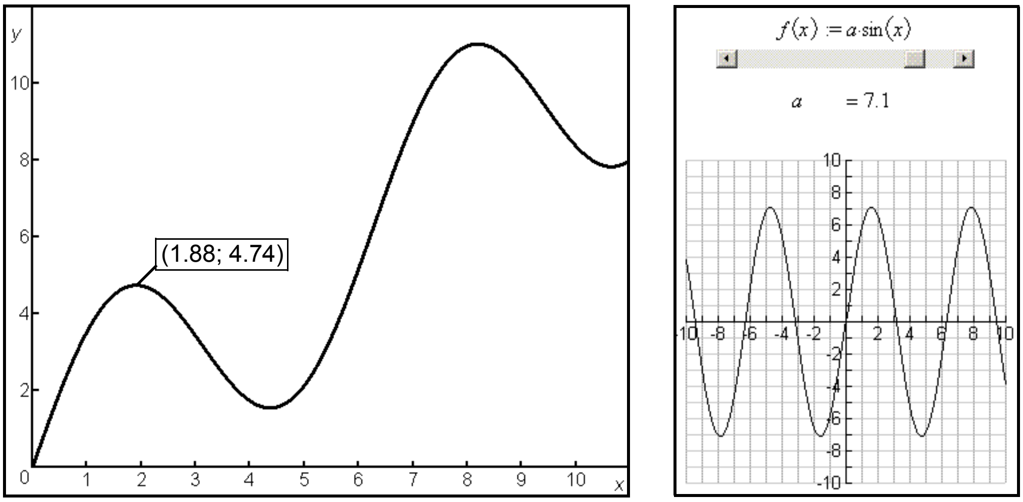


figuur 10: Functiemachientje met verschillende representaties in het applet Algebrapijlen

Grafieken

Met ICT-gereedschap zoals grafische rekenmachine, grafische software en spreadsheetprogramma’s kunnen tabellen en grafieken worden gemaakt. Door in de tabel te ‘scrollen’, of door met ‘trace’ over de grafiek te lopen, kan de leerling de dynamiek van de situatie ervaren (zie figuur 11 links). De onafhankelijke variabele is nu geen plaatshouder of generalisator meer, maar een veranderlijke die de horizontale as doorloopt, waardoor de afhankelijke variabele op de verticale as meeverandert.
Wellicht het meest krachtige beeld van de variabele als veranderlijke ontstaat met een schuifbalk, zoals die in onder andere Excel, VU-Grafiek en TI-Interactive beschikbaar is. Door de muis over zo’n balk te slepen, kan de leerling de waarde van de onafhankelijke variabele vrijwel vloeiend variëren. Het rechterscherm van figuur 11 geeft daarvan een voorbeeld, waarin op deze manier

een parameter wordt gevarieerd.
Er is dus allerlei technologisch gereedschap waarmee tabellen en grafieken kunnen worden getekend. Leerlingen kunnen het effect van veranderingen exploreren en ervaren het veranderlijke karakter van de variabelen. Dat zijn zinvolle ICT-toepassingen, die de kijk op functies beïnvloeden. Waar de grafiek in het verleden het eindresultaat was van algebraïsch functieonderzoek, is ze nu een toegankelijk vertrekpunt [8]. Als we recente eindexamens vergelijken met die van 30 jaar geleden, springt dat verschil snel in het oog. Zo leidt het gebruik van ICT tot accentverschuivingen in inhoud en didactiek van het onderwijs.
Al met al maken de grafische mogelijkheden van ICT dat de grafiek een grotere plaats krijgt in het functiebegrip en openen de technologische hulpmiddelen mogelijkheden voor grafische exploratie, zoals het voorbeeld van het product van lineaire functies in figuur 4 illustreert.

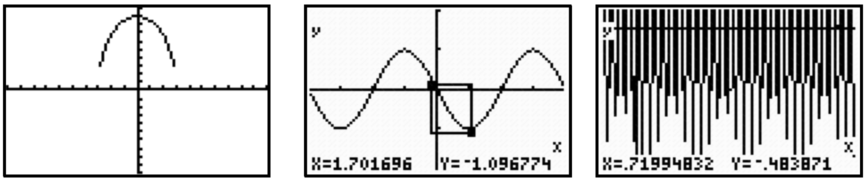


figuur 11: Een grafiek 'tracen' met VU-Grafiek en een schuifbalk in TI Interactive[1]

Hoewel ICT bij het tekenen van grafieken dus goede diensten kan bewijzen, moeten we ons realiseren dat er een verschil bestaat tussen het wiskundige object ´grafiek´ en de verzameling pixels die de leerling op het scherm ziet. Met name bij de grafische rekenmachine is dat verschil soms frappant en blijken leerlingen niet altijd in staat te zijn de kloof te overbruggen.
In figuur 12 staan bijvoorbeeld twee misleidende grafieken. De linkergrafiek is die van $x \to 3\sqrt{9-x^2}$ op het domein [-10, 10]. De halve cirkel die de grafiek eigenlijk is, raakt op het scherm van de GR de *x*-as niet. De middelste grafiek is die van $x \to \sin(95 \cdot x)$ op het domein [-2π, 2π]. Inzoomen op de rechthoek in het middelste scherm geeft echter de rechtergrafiek. Kennelijk is de middelste toch wat al te mooi!

Zulke grafische beperkingen van ICT mogen in de klas niet onbesproken blijven. Leerlingen moeten leren daarmee om te gaan. Het is aan de docent om de verschillen tussen de discrete, benaderende pixelgrafiek op het scherm en de vloeiende, exacte grafiek zoals die in theorie bestaat aan de orde te stellen en te problematiseren. Laat leerlingen zelf maar voorbeelden van misleidende grafieken maken! Door op die manier van de nood een deugd te maken kan het inzicht in grafieken onder invloed van ICT – hier in de rol van gereedschap – vergroot worden en leidt ICT-gebruik tot begripsontwikkeling.

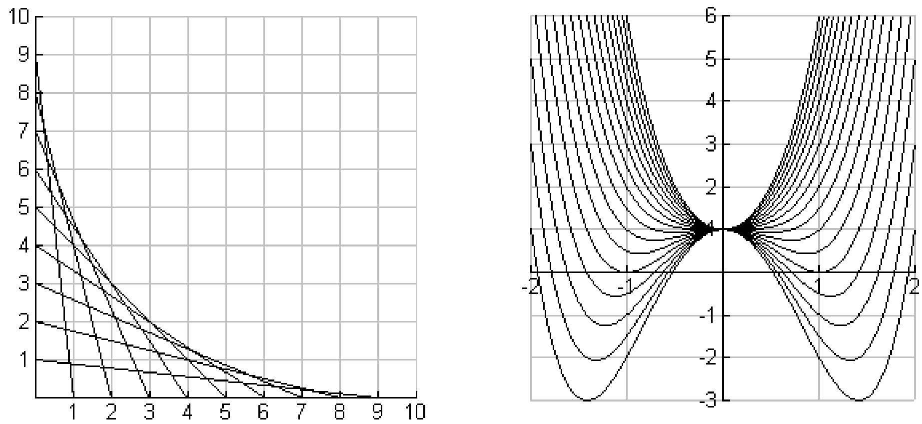
1 Voor informatie over VU-Grafiek zie www.vusoft.nl. Van TI Interactive is een gratis demonstratieversie verkrijgbaar op www.education.ti.com. Het APS heeft onder de titel 'Wiskundelessen met TI Interactive' een bundel lesmateriaal rond TI Interactive uitgegeven [9].



figuur 12: Verwarrende grafieken op het scherm van de GR

Ook het kiezen van een geschikt kijkvenster, het schalen van grafieken, is een kwestie die de aandacht vraagt bij het tekenen van grafieken met ICT-gereedschap. De vraag welke schermafmetingen tot een geschikt beeld leiden, is aanleiding om zowel de context als de gebruikte formule goed in ogenschouw te nemen.

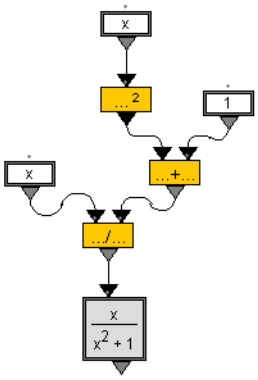
De grafische mogelijkheden van ICT kunnen ook aanleiding zijn tot het stellen van andere vragen. In figuur 13 staan bijvoorbeeld twee bundels grafieken. De vraag bij het linker plaatje kan zijn om aan te tonen dat de functie $f(x) = x + 10 - 2\sqrt{10x}$ aan elk van de lijnstukken raakt [11]. Bij het rechterplaatje kan de vraag worden gesteld op welke kromme de extremen liggen van de bundel die voorgesteld wordt door $y = x^4 + b \cdot x^2 + 1$.



figuur 13: Bundels grafieken als aanleiding voor algebraïsche vragen

Formules

Formules en expressies zijn bijzonder belangrijke objecten in de algebra . Het inzicht in de structuur en de opbouw van een formule, de vaardigheid om een expressie globaal te kunnen ‘lezen’, dat zijn essentiële onderdelen van de algebraïsche expertise die in hoofdstuk 1 symbol sense is genoemd. Verschillende modelomgevingen kunnen leerlingen helpen bij het verwerven van dergelijk inzicht. Een eerste voorbeeld is het applet Algebraexpressies waarmee leerlingen ´bomen´ van algebraïsche uitdrukkingen maken (figuur 14). Leerlingen kunnen in dezelfde stijl als bij het applet Algebrapijlen op deze manier steeds ingewikkelder expressies bouwen, waarbij de structuur van deelexpressies en de hiërarchie van bewerkingen transparant blijven. De boomvorm is een model waarop leerlingen ook met pen en papier kunnen terugvallen als ze ingewikkelde formules tegenkomen. Het applet Formulemaker (zie www.wisweb.nl) kan een vergelijkbare rol spelen. Hierin worden formules samengesteld, en worden verschillende equivalente uitdrukkingen in spelvorm vergeleken. Als derde noemen we het applet Vergelijkingen met bordjes, dat in hoofdstuk 4 aan de orde is gekomen. Met dit applet kunnen delen van expressies als geheel worden beschouwd, wat inzichtbevorderend werkt.



figuur 14: Een formuleboom met het applet Algebraexpressies

Behalve modelomgevingen voor het werken met formules en expressies is er ook gereedschap. Met name computeralgebra programma's bieden goede mogelijkheden voor het bewerken van formules. In figuur 15 wordt bijvoorbeeld een functievoorschrift herschreven met de commando's factor en expand. Uit de vorm in de tweede regel zijn de nulpunten en de vertikale asymptoot af te lezen. In de laatste gedaante is de vergelijking van de scheve asymptoot terug te vinden. Het benutten van dergelijke potentie van het ICT-gereedschap vraagt wel een zekere mate van inzicht en overzicht.

$$f(x) := \frac{4\cdot x^2 + 7\cdot x}{8\cdot x - 2} \qquad \text{"Done"}$$

$$\text{factor}(f(x)) \qquad \frac{x\cdot(4\cdot x + 7)}{2\cdot(4\cdot x - 1)}$$

$$\text{expand}(f(x)) \qquad \frac{1}{4\cdot x - 1} + \frac{x}{2} + 1$$

figuur 15: Herschrijven van een functievoorschrift

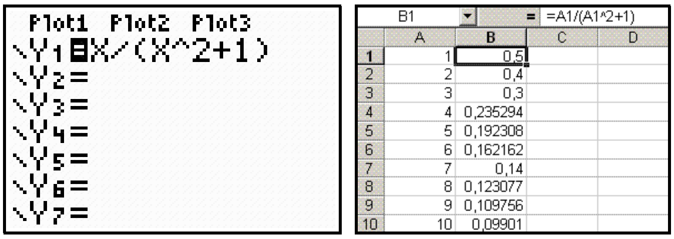
ICT-gebruik lijkt dus een bijdrage te kunnen leveren aan het inzicht in formules en expressies. Een kanttekening met betrekking tot het invoeren van formules en het interpreteren van de uitvoer is echter wel op zijn plaats. Het invoeren van formules gebeurt in sommige ICT-toepassingen via één invoerregel, wat betekent dat met haakjes moet worden gewerkt. In figuur 16 staat bijvoorbeeld hoe een uitdrukking wordt ingevoerd op de grafische rekenmachine TI-84 en in Excel:

$$\frac{x}{x^2 + 1}$$

Het is niet denkbeeldig, dat een leerling de haakjes vergeet en per ongeluk invoert:

$$\frac{x}{x^2} + 1$$

Een tweedimensionale 'pretty print' formule editor verdient dan ook de voorkeur, al vraagt ook daarbij het invoeren een zeker inzicht in de structuur van de expressie of formule, met name als er delingen, wortels en haakjes in voorkomen. Naar verwachting zal steeds meer software zo´n formule-editor bieden en zal de éénregelige invoer in de toekomst verdwijnen.



figuur 16: Invoeren van een formule op de TI-84 en in Excel

Ook het interpreteren van formules en expressies die als uitvoer van het ICT-werk te voorschijn komen vraagt aandacht. Figuur 17 laat zien dat de oplossing van de algemene kwadratische vergelijking door sommige computeralgebraprogramma´s anders wordt weergegeven dan meestal in de boeken gebeurt. De oplossing van de tweede vergelijking, $x^2 + b \cdot x + 1 = 0$, wordt door een leerling foutief overgenomen in het schrift. Zowel het invoeren van formules als het interpreteren van algebraïsche uitvoer doen dus beroep op het vermogen om de structuur ervan te doorzien. Symbol sense wordt dan ook zeker niet minder belangrijk door het gebruik van ICT.

$$\text{solve}\left(a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0, x\right)$$

$$x = \frac{\sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c} - b}{2 \cdot a} \text{ or } x = \frac{-\left(\sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c} + b\right)}{2 \cdot a}$$

$$\text{solve}\left(x^2 + b \cdot x + 1 = 0, x\right)$$

$$x = \frac{\sqrt{b^2 - 4} - b}{2} \text{ or } x = \frac{-\left(\sqrt{b^2 - 4} + b\right)}{2}$$

$$\text{nulpunten} = \frac{\sqrt{b^2 - 4 - b}}{2} \quad \text{en} \quad \frac{-(\sqrt{b^2 - 4 + b}}{2}$$

figuur 17: Moeilijkheden bij het interpreteren van uitvoer

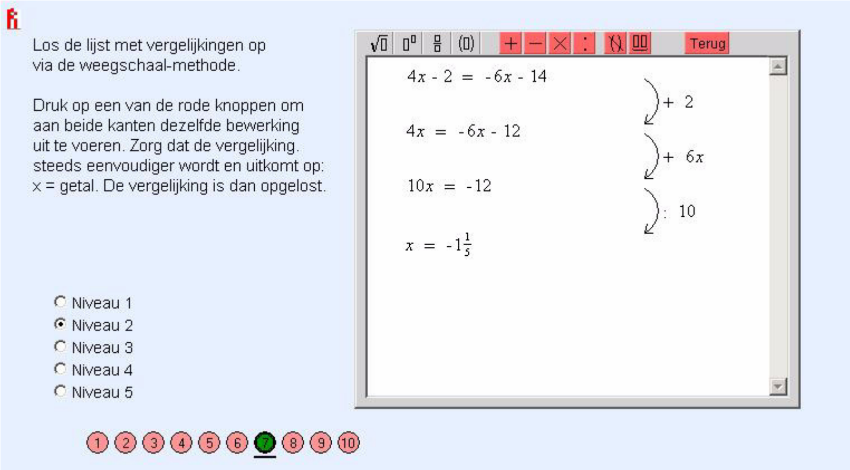
Samengevat zien we dat ICT bij functies en formules mogelijkheden biedt om verschillende representaties te combineren, om grafieken te tekenen en om het formuleinzicht te versterken. Modelomgevingen bevorderen het inzicht en gereedschap brengt meer algebraïsch werk binnen het bereik van de leerling. Dit maakt een nieuwe didactische aanpak mogelijk en creëert kansen voor uitdagende opgaven. Wanneer de algebraïsche bewerkingen meer aan ICT worden overgelaten, ligt het voor de hand dat meer aandacht wordt besteed aan het opstellen van het algebraïsche model en aan het interpreteren van en redeneren met de resultaten. Om goed met de ICT om te kunnen gaan, moet de leerling inzicht hebben in de mogelijkheden en de beperkingen ervan, en dat hangt samen met begrip van de achterliggende algebraïsche concepten.

8.6 Vergelijkingen met ICT

Voor het oplossen van vergelijkingen is er een scala aan ICT-hulpmiddelen beschikbaar. In de aanleer- en oefenfase zijn verschillende *modelapplets* beschikbaar. In hoofdstuk 4 is een applet voor het oplossen van vergelijkingen met de bordjesmethode besproken. De variabele heeft daarbij het karakter van een onbekende, waarvan de waarden moet worden gezocht die de vergelijking ‘waarmaken’.

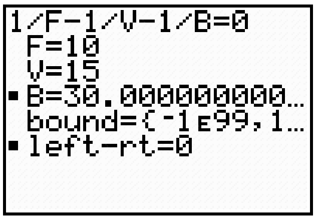
Na het aanleren kan er ook met ICT worden geoefend. Figuur 18 bevat een schermafdruk van het *oefenapplet* Vergelijkingen oplossen met weegschaal, een oefenomgeving met gerichte, gesloten opdrachten (beschikbaar op www.wisweb.nl). Op het scherm staat een vergelijking. De leerling

kan nu kiezen welke bewerking daarop (links én rechts, volgens het weegschaalmodel) moet worden toegepast om een eenvoudiger equivalente vorm te krijgen. Door op deze manier een reeks bewerkingen achter elkaar toe te passen wordt de vergelijking opgelost. Het applet zorgt voor directe feedback op de stappen. Van dit applet is een aantal varianten ontwikkeld, die verschillen in moeilijkheidsgraad van de vergelijkingen en qua hoeveelheid werk die het applet overneemt. Een dergelijke serie applet-varianten vormt in feite een leerlijn, waarin het accent geleidelijk verschuift van de ontwikkeling van het denkmodel naar het oefenen van de oplossingsprocedure.
Om te voorkomen dat het werk met het applet een vluchtig karakter heeft, kunnen de resultaten van de leerlingen worden opgeslagen in een digitale werkomgeving. Dat maakt het mogelijk dat leerlingen hun werk verbeteren en reviseren; voor de docent betekent dit een middel voor controle en correctie. In feite ontstaat op deze manier een digitaal volgsysteem, waarin de voortgang van de leerling wordt vastgelegd (zie ook figuur 5).



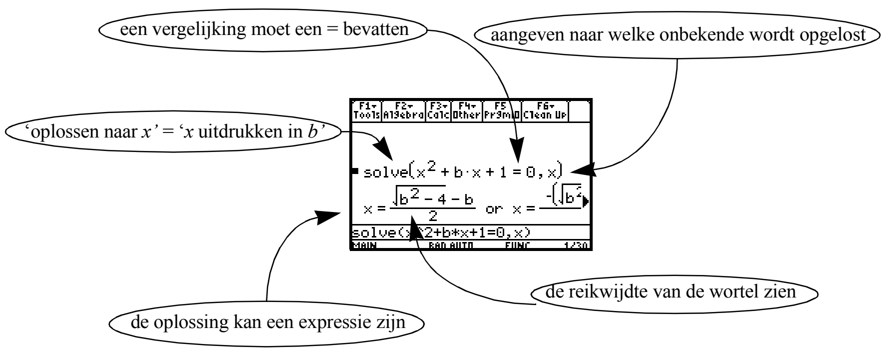
figuur 18: Het applet Vergelijkingen oplossen met weegschaal

Voor het eenvoudigweg oplossen van vergelijkingen kan de *grafische rekenmachine* als grafisch/ numeriek gereedschap worden ingezet, zoals dit in de tweede fase van havo en vwo op grote schaal gebeurt door twee grafieken te snijden. Het voordeel van deze aanpak is dat leerlingen zich het oplossen van vergelijkingen kunnen voorstellen als het zoeken naar een snijpunt, wat in veel gevallen een adequaat beeld is.
Vermoedelijk iets minder frequent gebruikt wordt de zogeheten Solver van grafische rekenmachines. Figuur 19 laat bijvoorbeeld zien hoe de lenzenvergelijking $1/f = 1/v + 1/b$, die in hoofdstuk 1 aan de orde is gekomen, met de TI-84 kan worden opgelost naar b voor het geval dat $f = 10$ en $v = 15$. De vergelijking moet in zo'n geval eerst op 0 worden herleid. In tegenstelling tot het oplossen vanuit twee snijdende grafieken kunnen op deze manier ook vergelijkingen met meer variabelen worden opgelost en is de keuze van de onbekende flexibel. Daarmee benadrukt het gebruik van de Solver-module dus dat de rol van onbekende in een vergelijking door verschillende variabelen gespeeld kan worden.



figuur 19: Oplossen met de Solver van de TI-84

Het oplossen van vergelijkingen met *computeralgebra* of symbolische rekenmachine lijkt een koud kunstje te zijn. Voor leerlingen met weinig ervaring met dit type ICT-gereedschap is dit toch niet altijd triviaal, omdat aspecten van het oplossingsproces benadrukt worden die bij het werken met pen en papier vaak op de achtergrond blijven [10]. Leerlingen realiseren zich bijvoorbeeld soms onvoldoende het verschil tussen een expressie en een vergelijking, zodat ze bijvoorbeeld $x^2 + b \cdot x + 1$ op willen lossen in plaats van $x^2 + b \cdot x + 1 = 0$. Ook zijn ze zich er bij een vergelijking met meer variabelen dikwijls niet van bewust dat een vergelijking altijd *naar een onbekende* wordt opgelost, en dat het dan ook begrijpelijk is dat het programma moet weten welke variabele die rol krijgt, wat bij het oplossen met pen en papier in het algemeen niet expliciet aangegeven wordt. Als in zo'n geval de oplossing een algebraïsche expressie blijkt te zijn, vinden sommige leerlingen dat er eigenlijk nog niets is opgelost: een vergelijking is pas opgelost als er een getal uitkomt! Figuur 20 vat de verwevenheid van de techniek van het oplossen en de conceptuele aspecten samen. Meer algemeen gesproken vraagt het uitvoeren van het oplossingsproces in de computeralgebra omgeving om andere inzichten dan de pen-en-papier methode: je neemt meer afstand tot het uitvoerende werk, maar moet wel op een abstracter niveau formuleren waaruit dat werk bestaat. Het gaat om het 'maken dat het wordt gedaan' in plaats van het zelf doen. Daardoor word je gedwongen om je bepaalde onderliggende begripsmatige aspecten beter te realiseren.



figuur 20: Begripsmatige kanten van het oplossen van een vergelijking met computeralgebra

Samengevat staan voor het oplossen van vergelijkingen verschillende ICT-middelen ter beschikking, elk met specifieke eigen accenten op denkmodellen, oefenen of gebruiken. Tijdens het leerproces in de onderbouw van havo en vwo bevelen we het gebruik van de beschreven applets aan. Voor de M-profielen van havo en vwo ligt het grafisch/numeriek oplossen vanuit grafieken met de grafische rekenmachine voor de hand. Voor leerlingen van de N-profielen van havo en vwo is de Solver van de TI-84 interessant. Daarnaast zal voor deze doelgroep het oplossen met de hand belangrijk blijven en kan het gebruik van computeralgebra een ander licht op het oplossen van vergelijkingen werpen.

8.7 ICT in algebraonderwijs

Een mooie ICT-toepassing maakt nog geen goed algebraonderwijs. Omdat ICT geen wondermiddel is dat aloude didactische moeilijkheden als sneeuw voor de zon doet verdwijnen, gaan we in deze paragraaf in op de integratie van ICT in de onderwijspraktijk. Dat doen we aan de hand van de drie vragen uit paragraaf 8.1 over begripsontwikkeling en oefening, het werken in de klas en de rol van de docent, en de verhouding met de algebraïsche basisvaardigheden met pen en papier.

Welke kansen biedt ICT voor begripsontwikkeling en oefening in het algebraonderwijs en hoe kunnen die worden benut?

In de rol van modelomgeving, oefenomgeving of gereedschap kan ICT exploratie, begripsontwikkeling en oefening bevorderen. De voorgaande paragrafen geven hiervan tal van voorbeelden. ICT biedt mogelijkheden voor variatie en visualisatie, evenals voor eigen onderzoek en eigen productie. Daardoor verandert de positie van de leerling van een passieve uitvoerder in die van een actieve onderzoeker en kan hij zich hogere doelen stellen. Dynamiek, interactie en gerichte feedback maken het leren efficiënt en eigentijds. Leerlingen vinden ICT-gebruik vaak motiverend en uitdagend. Zo kan ICT het algebraonderwijs betekenisvoller en interessanter maken. Kansen genoeg dus!

Maar hoe deze kansen te benutten? Daarvoor is het allereerst van belang dat het ICT-gebruik wordt *ingebed in een leerlijn* en een natuurlijk onderdeel vormt van het onderwijs. Als de inzet van ICT in de ogen van de leerlingen een geïsoleerd verschijnsel is, kan het zijn doel voorbijschieten, omdat de opgedane kennis niet verbonden wordt met de bestaande kennis. Teleurstellende ervaringen met ICT in de klas kunnen het gevolg zijn. Voorbeelden van de manier waarop ICT-gebruik in een leerlijn rond letterrekenen kan worden gezet zijn beschreven in de artikelen van Boon en Doorman [6, 7].

Omdat technologie een bepaalde kijk op een wiskundig begrip of een specifieke aanpak van een procedure bevordert, is de inzet van ICT zelden didactiek-vrij. Een *didactische doordenking* van de beelden of methoden die het werken met de technologie oproept is dan ook noodzakelijk. Dat betekent dat de docent – of liever de sectie of de groep docenten van een jaarlaag – goed afweegt op welke manier het ICT-gebruik de beoogde inzichten of vaardigheden bevordert. Welke kijk op het algebraïsche onderwerp wordt nagestreefd en hoe functioneert de ICT daarin? Als een modelapplet wordt gebruikt, sluit het denkmodel dan aan bij het huidige beeld van de leerlingen en welke vervolgstap lokt het uit? Een docent formuleerde dat doordenken als volgt:

> Je moet het applet ook leren kennen, hoe het werkt. Ik zelf ja en dan dus ook goed nadenken van: hoe ga ik dat gebruiken of hoe ga ik dat kortsluiten met mijn leerlingen.

In een recent artikel over een praktische opdracht met computeralgebra [11] stelt een van de docenten dat het hele curriculum niet meteen op zijn kop gezet hoeft te worden als ICT wordt ingezet. De beschreven praktische opdracht ligt in het verlengde van het huidige programma, maar gaat net een stapje verder. Het ICT-gereedschap biedt daartoe de algebraïsche en grafische experimenteerruimte. Je kunt dus voorzichtig beginnen. Dat neemt niet weg dat ICT-gebruik op termijn bij algebra ook kan leiden tot een *accentverschuiving in de doelen*.

Met name zullen algebraïsch modelleren, toepassen en begrijpen meer ruimte krijgen. Hierop komen we in de volgende paragraaf terug.

Wat betekent de inzet van ICT voor het werken in de klas en voor de rol van de docent?

Het benutten van de kansen die ICT in principe biedt, leidt tot veranderingen in de onderwijssetting en in de rol van de docent. Daardoor zet het gebruik van ICT een proces van verandering en leren in gang, waarin de docent de hoofdpersoon is.

Behalve de didactische doordenking die hierboven is genoemd, moet een aantal praktische zaken worden overwogen om het gebruik van ICT productief te maken. Is het bijvoorbeeld nodig om de software eerst kort bij de leerlingen te introduceren? In veel gevallen zal een *klassikale demonstratie* van enkele ‘handgrepen’ nuttig zijn, al moet dat ook weer niet al het gras voor de voeten van de leerlingen wegmaaien. Zoals een ervaren docente het formuleerde:

> Ik moest dus heel duidelijk zijn in wat ik ze wilde uitleggen. Ik had ook zoiets van: ik mag ook niet teveel vertellen. Alleen echt de basis vertellen en dat heeft wel heel goed gewerkt.

Bij het rondlopen in de klas terwijl leerlingen in tweetallen (of individueel, of in kleine groepen) aan

het werk zijn, zullen sommige leerlingen nadrukkelijk aangemoedigd moeten worden om te experimenteren, om hun vermoedens niet aan de docent voor te leggen, maar ze te testen met de beschikbare technologische hulpmiddelen. Daar staat tegenover dat anderen zullen moeten worden aangezet tot reflectie, tot nadenken over de vraag ‘wat hebben we nu eigenlijk gevonden?’ Leerlingen hebben als ze met ICT aan de slag zijn in het algemeen sterker de neiging tot doen dan tot denken. Daarnaast worden verschillen tussen leerlingen dikwijls uitvergroot.
Juist omdat leerlingen geneigd zijn om snel door een groot aantal opgaven te gaan als ze met ICT aan de slag zijn, is een goede *klassikale nabespreking* van enkele kernopgaven groot belang. Een klassegesprek rond een scherm, aan de hand van uitwerkingen van leerlingen of uitleg van de docent, is nodig om de conclusies uit het werken met de ICT samen te vatten en te expliciteren en om daarover overeenstemming in de klas te bereiken. Aangezien leerlingen tijdens het werken met ICT hun eigen beelden en methodes kunnen ontwikkelen, is het van belang om ervoor te zorgen dat het denken in de klas convergeert [12]. Bij zo´n nabespreking kunnen ook leerlingen de computer bedienen, zodat verschillende methoden en technieken aan het licht komen. Een projector in de klas is daarbij natuurlijk onmisbaar.

Als het gaat om het opsporen van algebraïsche rekenfouten of het geven van feedback op door de leerling uitgevoerde procedures kan de inzet van ICT de taak van de docent verlichten. Allerlei andere taken blijven aan de docent voorbehouden. Denk aan het stellen van reflectievragen, het samenvatten van de essentie, het schetsen van grote lijnen, het prikkelen tot onderzoek en tot redeneren over de met ICT gevonden resultaten, het leggen van verbanden tussen ICT-gebruik en het werken met pen en papier, het monitoren van de voortgang van leerlingen, en het diagnosticeren van de moeilijkheden waar leerlingen tegenaan lopen tijdens het werken met ICT. Bij ICT-middelen die gedurende langere tijd worden gebruikt, zoals bijvoorbeeld de grafische rekenmachine of Excel, zal de docent ook de ontwikkeling van gedeelde machinevaardigheden moeten begeleiden, zodat in de klas een aantal standaardtechnieken ontstaat. Ook moet de docent de klas duidelijkheid geven over de bewijskracht die aan ICT (vaak slechts in beperkte mate) kan worden ontleend en over de vereiste papier-en-pen vaardigheden. Wat uit deze opsomming duidelijk naar voren komt, is dat ICT bepaalde taken van de docent kan verlichten maar hem zeker niet kan vervangen.
Al met al leidt de integratie van ICT tot een *uitbreiding en aanpassing van het didactisch repertoire* van de docent. Dat is een proces dat onvermijdelijk tijd en energie kost, omdat het raakt aan de eigen ideeën van wat goed onderwijs is en wat essentieel is in de algebra. Daarnaast vraagt het een verdere verdieping in de mogelijkheden van de verschillende ICT-toepassingen, en een visie

op de sterke en zwakke punten daarvan. Dat proces kan natuurlijk het beste samen met collega's worden doorlopen.
De integratie van technologie in het onderwijs heeft invloed op werkvorm, lesorganisatie en interactie met leerlingen. Een voorwaarde hierbij is vanzelfsprekend *een goede infrastructuur*. Dat betekent goede en toegankelijke computervoorzieningen, adequaat systeembeheer, mogelijkheden om computerschermen zowel in computerlokalen als in de vaklokalen te projecteren en mogelijkheden om via Internet materiaal te verspreiden en werkruimten voor leerlingen te creëren. Laptops, beamers en interactieve whiteboards worden snel populair, en met reden. Meer hierover in paragraaf 8.8.

Hoe verhoudt ICT-gebruik bij algebra zich tot algebraïsche basisvaardigheden met pen en papier?

Er lijkt een spanningsveld te bestaan tussen het gebruik van ICT bij algebra en de ontwikkeling van algebraïsche basisvaardigheden met pen en papier. Zo wordt bijvoorbeeld beschuldigend naar de grafische rekenmachine gewezen als leerlingen met de hand veel fouten maken. Hoe zit het met de verhouding tussen 'handwerk' en 'machinewerk'?
Allereerst maken de voorbeelden in dit hoofdstuk, en met name in de paragrafen 8.4-8.6, duidelijk dat de dynamiek, de interactie en de visualisatie die ICT biedt begripsontwikkeling en oefening kan bevorderen. Het lijdt geen twijfel dat daarvan een positief effect kan uitgaan op de vaardigheden met pen en papier. Als leerlingen een denkmodel ontwikkelen, kunnen ze daarop terugvallen bij het uitvoeren van procedureel werk met de hand. ICT-oefeningen hebben eveneens een positief effect op de vaardigheden met pen en papier. Leerlingen uit havo-2 bleken bijvoorbeeld na twee lesuren oefenen met het applet 'Vergelijkingen oplossen met weegschaal' beduidend beter te presteren bij het oplossen van vergelijkingen met pen en papier dan voor de oefening [1].
ICT-gebruik kan de pen-en-papier vaardigheden dus bevorderen. Daarnaast kan de inzet van ICT ook een aanvulling vormen. In paragraaf 8.6 is erop gewezen dat het oplossen van een vergelijking met computeralgebra andere aspecten benadrukt dan het oplossen met de hand, en leerlingen bijvoorbeeld bewust maakt van de variabele als onbekende. Op een vergelijkbare manier benadrukt het grafisch oplossen van een vergelijking met een grafische rekenmachine het idee dat het oplossen te beschouwen is als het zoeken naar een snijpunt. Doordat het toepassen van een ´ICT-methode´ andere accenten legt dan het werken met pen en papier, kan het de ´traditionele´ methode aanvullen.
Dat neemt niet weg dat de aard van de algebraïsche vaardigheden bij het werken met ICT in veel gevallen verschilt van die van het werken met pen en papier, omdat de leerling meer de rol van 'opzichter' heeft dan die van 'uitvoerder'. Omdat het niet goed mogelijk is om opzichter te zijn zonder ervaring als uitvoerder, blijft enige vaardigheid met pen en papier van belang. Het gaat dus om de combinatie van algebra 'met het hoofd, op papier en op het scherm'. Het juiste evenwicht is daarbij nog niet gevonden. De klachten over de grafische rekenmachine maken duidelijk dat er te veel is bezuinigd op het ontwikkelen en onderhouden van vaardigheden met pen en papier, zoals in het vorige hoofdstuk naar voren is gekomen. Overigens is de grafische rekenmachine een uitstekend stuk gereedschap dat voorbereidt op het gebruik van geavanceerdere ICT-tools, en dat het ontwikkelen en oefenen van vaardigheden met pen en papier niet in de weg hoeft te staan.
Het is dus van belang dat er duidelijkheid wordt geschapen over wat leerlingen wel en niet met de hand moeten kunnen. In de onderbouw valt het oplossen van elementaire vergelijkingen en het uitvoeren van eenvoudige algebraïsche bewerkingen bijvoorbeeld tot de papier-en-pen vaardigheden. In de tweede fase van havo en vwo is de benodigde handmatige vaardigheid voor de M-profielen geringer dan voor de N-profielen en kan die voor een deel overgelaten worden aan de grafische rekenmachine of ander ICT-gereedschap. Het traditionele functieonderzoek is bijvoorbeeld de afgelopen decennia minder belangrijk geworden. Voor de vaardigheden die wel met papier en pen beheerst dienen te worden, is er geen enkel bezwaar tegen om ze apart te toetsen in een hulpmiddelenvrij deelexamen, zoals dat op dit moment gebeurt in bijvoorbeeld Luxemburg en

Denemarken.
Hoewel we dus een meerwaarde zien in het gebruik van ICT in het algebraonderwijs, zal technologie het gebruik van pen en papier niet overbodig maken, maar het wel ondersteunen en aanvullen. We pleiten voor een duidelijke afbakening van wat leerlingen met de hand moeten kunnen en wat aan ICT kan worden overgelaten.

8.8 Algebra en ICT: toekomstmuziek?

De ontwikkeling van ICT-gereedschap, die zich grotendeels onafhankelijk van het onderwijs voltrekt, zal ongetwijfeld in hoog tempo doorgaan. Daarnaast zal naar verwachting ook het gebruik van computerspellen met educatieve aspecten een hoge vlucht nemen en zal de rol van ICT als communicatiemedium sterk toenemen. Wat betekent dit voor de inzet van ICT in het algebraonderwijs van de toekomst? We onderscheiden weer technisch-infrastructurele en didactisch-inhoudelijke gevolgen.

In *technische* zin is de vraag in welk 'formaat' ICT het best in het onderwijs gebruikt kan worden. Hoewel de toekomstige ontwikkelingen zich moeilijk laten voorspellen, is het volgende scenario niet onaannemelijk. Leerlingen zullen in toenemende mate handheld ICT gebruiken, die via draadloze netwerken eenvoudig communiceert met desktop computers en servers op school. Het werk op het ene platform kan zonder problemen worden voortgezet op een ander platform. Leerlingen hebben toegang tot virtuele werkplaatsen, waar ze samen aan praktische opdrachten werken. Computeralgebra is beschikbaar voor de bètaprofielen en vormt de motor onder speelse toepassingen, die sterk aan populariteit winnen.
In de vaklokalen kan leerlingenwerk eenvoudig worden geprojecteerd op een interactief whiteboard, waarmee de les meteen wordt opgeslagen en op die manier beschikbaar komt voor afwezigen. Computerlokalen zullen nauwelijks meer voorkomen; wel heeft elk vaklokaal een klein aantal computers en zijn er talloze werkeilanden in gangen, mediatheek en werkruimten.
De mogelijkheden voor de docent om het werk van leerlingen te volgen, te ondersteunen en te beoordelen zullen groter worden. Digitale portfolio's zijn een middel om de vluchtigheid die ICT-gebruik vaak kenmerkt tegen te gaan. Toetsen worden digitaal afgenomen op flexibele tijdstippen. De docent communiceert met de leerlingen via elektronische leeromgeving en digitaal spreekuur. De sleutelwoorden in deze ontwikkeling zijn flexibiliteit en 'connectivity'. Uitwisselbaarheid en communicatie spelen een steeds grotere rol.
Wat zijn de *vakdidactische en inhoudelijke gevolgen* van dit scenario? Allereerst zal een balans moeten worden gevonden tussen het gebruik van pen en papier en van ICT; een evenwicht tussen handmatige vaardigheden en het type algebraïsche vaardigheid dat het werken met ICT vraagt, wil het zich in handen van leerlingen ontwikkeling tot zinvol algebragereedschap.
Dit nieuwe evenwicht hangt samen met een heroverweging van de doelen van het algebraonderwijs. Geleidelijk zal een accentverschuiving plaatsvinden: procesmatige en kwalitatieve vaardigheden zoals algebraïsch modelleren en mathematiseren zullen meer nadruk krijgen. De vaardigheid om een probleemsituatie te vertalen in termen van algebra en in machinetaal wordt belangrijker, net als het vermogen om verbanden te zien tussen grafische en algebraïsche eigenschappen. Ook is flexibiliteit in oplossingsgedrag gewenst, omdat de mogelijkheden en beperkingen van ICT inventiviteit van de gebruiker vragen. Hoe kies je bijvoorbeeld handig een variabele bij het opstellen van een algebraïsch model? Op welke manier kun je ICT-gereedschap 'voeden' met gegevens, zodat de uitvoer je dichter bij de oplossing brengt? Wat betekent die oplossing voor het oorspronkelijke probleem? Onderwerpen als lineair programmeren voor het EM-profiel of analytische meetkunde voor het N-profiel lenen zich goed voor zulke vragen, terwijl ICT bij de bewerkelijke onderdelen van het oplossingsproces kan worden ingezet.
Dit alles zal worden geëvalueerd middels ICT-rijke examens; daarnaast zullen mogelijk deelexamens met pen en papier plaatsvinden, waarin algebraïsche basisvaardigheden worden getoetst.

Doorslaggevend voor het succes van de inzet van technologie zal de manier zijn waarop de docent in staat is de nieuwe leermiddelen in goed onderwijs in te bouwen. Om de geschetste ontwikkeling mogelijk te maken, is het dan ook nodig dat de expertise van docenten met betrekking tot de inzet van ICT wordt vergroot, en dat voldoende ruimte beschikbaar is voor het ontwikkelen van ICT-rijke onderwijsscenario's.

Literatuur

1. Boon, P. & Drijvers, P. (2005). *Algebra en applets, leren en onderwijze*n. Utrecht: Freudenthal Instituut.
2. Tolboom, J. (2005). Algebra en applets, leren en onderwijzen. *Euclides, 81*(2), 66-69.
3. Haspekian, M. (2005). An “instrumental approach” to study the integration of a computer tool into mathematics teaching: the case of spreadsheets. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 10*(2), 109–141.
4. Lagrange, J.-b. (2000). L’intégration d’instruments informatiques dans l’enseignement: une approche par les techniques. *Educational Studies in Mathematics, 43*(1), 1-30.
5. Bokhove, C., Heck, A. & Koolstra, G. (2005). Intelligente feedback bij digitale toetsen en oefeningen. *Euclides, 81*(2), 70-74. Zie ook www.galoisproject.nl.
6. Boon, P. (2004). WELP: Letterrekenen met applets. *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs, 23*(4), 22-27.
7. Doorman, M. (2004). Van touwpuzzels tot oppervlaktealgebra. *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs, 23*(4), 34-39.
8. Kindt, M. (1992a). Functieonderzoek begint met de grafiek I. *Euclides, 67*(7), 200-204.
   Kindt, M. (1992b). Functieonderzoek begint met de grafiek II. *Euclides, 67*(8), 227-230.
9. Docentennetwerk TI Interactive (2005). Wiskundelessen met TI Interactive. Utrecht: APS. Zie www.aps.nl/apssite/publicaties.
10. Drijvers, P. & Gravemeijer, K.P.E. (2004). Artefact en instrument: Computeralgebra en algebraïsche schema’s. *Tijdschrift voor Didactiek der Bètawetenschappen, 21*(1), 47-68.
11. Drijvers, P., Garst, S., Kop, P. & Krüger, J. (2005). Rechtlijnige krommen. *Euclides, 81*(3), 120-125.
12. Hoek, D.J. & Seegers, G. (2004). Het gebruik van de grafische rekenmachine tijdens sa-menwerkend leren in het middelbaar beroepsonderwijs. *Tijdschrift voor Didactiek der Bètawetenschappen, 21*(2), 93-106.

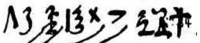
9 Van Ahmes tot Wisweb

Aad Goddijn

> Sommige dingen zijn zo gewoon dat het lijkt alsof ze er altijd geweest zijn. Onze manier om vergelijkingen op te schrijven is zoiets. Kun je je voorstellen dat er een tijd was waarin men een uitdrukking als $x^2 - 4x + 3 = 0$ niet als een vergelijking herkend zou hebben?
>
> (*Jan van Maanen, Pythagoras, jrg. 37, 1998*)

9.1 Inleiding en opzet van dit hoofdstuk

Dé geschiedenis van de algebra bestaat niet. Geschiedenis vertellen is keuzes maken en bij algebra ligt dat niet anders dan bij de geschiedenis van de muziek of die van het menselijk (on)vermogen de wereld leefbaar te maken. Keuzes als: laten we de volle kracht van de algebra zien, zoals die geëvolueerd is van spijkerschrift naar computertaal, of leggen we de nadruk op het vallen en opstaan, op het zoeken naar bruikbare notaties en oplossingsmethoden? Voor een onderwijsgericht boek als dit lijkt dat laatste het beste, per slot van rekening leren we vooral van fouten in de hoop op succes.

Maar wat is 'zoeken'? Zocht Ahmes aan de oevers van de Nijl naar $x \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = 10$ toen hij  noteerde, zo ongeveer 3700 jaar geleden? Nee, waarschijnlijk niet. Het is hoogstens zo dat in de zee van mogelijkheden bepaalde notaties en strategieën boven zijn komen drijven en de wiskundeboeken van 2006 gehaald hebben. Of Ahmes daaraan bijdroeg is voor ons op dit moment niet belangrijk, wel of we – achteraf – in de verstreken periode iets kunnen vinden dat inspirerend is voor het leren en onderwijzen van algebra nu en mogelijk ook beter helpt begrijpen wat algebra in wezen is. Want dat is de bedoeling van dit hoofdstuk.
Daartoe volgt hier een serie algebrasnapshots die oude en nieuwe gezichten van het fenomeen algebra tonen, geordend naar thema's als vergelijkingen, notaties, algebra en meetkunde, algebra en toepassingen en enige andere. Zulke observaties kunnen de lezer op gedachten brengen als: eigenlijk deed mijn leerling het op zijn kladje net als Diophantus. Of: na de geschiedenis van 'de haakjes' vraag ik me toch een en ander af over hoe ik het in de klas aanpak. Of: die geometrische voorstelling van producten als rechthoeken heeft zijn voordelen, maar blijkbaar ook zijn nadelen. Of: die historische ontwikkeling van de notatie van variabelen geeft mij inspiratie voor een didactische lijn naar het concept variabele.

Een systematisch chronologisch en uitputtend overzicht vindt u hier niet. Daar zijn vele bronnen voor; de bronnen waaruit voor dit hoofdstuk is geput, staan aan het eind van dit hoofdstuk vermeld.
In het algemeen staat in dit hoofdstuk het thema 'betekenisvolle algebra' centraal, geheel in lijn met de ondertitel van dit boek. Daarom meer aandacht voor de relatie notatie-betekenis-algoritmisering-verband met toepassen dan voor speciale onderwerpen als negatieve getallen en wortels.
Als overzicht van dit hoofdstuk hier een korte karakterisering van de onderdelen ervan:

– *Algebra is vergelijkingen oplossen*. Dat lijkt toch wel een rode draad te zijn in de geschiedenis van de algebra. Drie keer is *het* vijftien, wat is *het*? De terugzoekvraag die uiteindelijk tot bijzondere theorieën leidt (paragraaf 9.2).
– *Algebra: een notatie die verduidelijkt en ordent*. Algebra begon met nauwelijks extra tekens buiten die voor getallen en gewone woorden. Aard en belang van een algebraïsche notatie (paragraaf 9.3).
– *Algebra en meetkunde: behulpzame buren of tegenvoeters?* De algebra startte zowel in de vormen- als in de getallenwereld. Meetkundige methoden voor het oplossen van vergelijkingen, van Euclides tot nu (paragraaf 9.4).

- *Analyse en synthese, de lessen van Descartes*. Algebra is niet alleen een systematisering van het gebruik van en het rekenen met onbekenden of variabelen, maar hangt historisch nauw samen met een specifieke wiskundige methode: die van de analyse. Analyse opgevat in traditionele zin, want analyse-anno-nu betekent iets anders. Een uitweiding over *La Géométrie* van Descartes, die de oorsprong van de analytische meetkunde heet te zijn en eigenlijk op een nieuwe wijze het verband tussen algebra en meetkunde zichtbaar maakt (paragraaf 9.5).
- *Is met algebra alles berekenbaar geworden?* Dat was een droom die hoorde bij de algebraïsering van de meetkunde: elk (meetkundig) probleem oplossen door het over te geven aan de rekenautomaat met de naam 'algebra' (paragraaf 9.6).
- *Naar de brede waaier van de moderne algebra's.* In de negentiende eeuw werd ontdekt dat het oplossingen van hogere dan vierdegraadsvergelijkingen aan beperkingen onderhevig was. Over Abel, Galois en het twintigste-eeuws algebraïsch panorama (paragraaf 9.7).
- *Terug naar de schoolalgebra* (paragraaf 9.8). In de schoolalgebra wemelt het van de grafieken. Waar komen ze vandaan? Niet uit de geschiedenis van de algebra!

9.2 Algebra is vergelijkingen oplossen

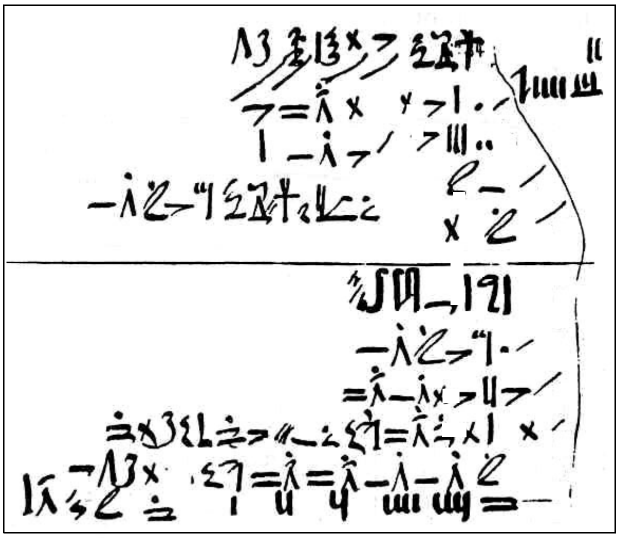
Wat wij nu het oplossen van vergelijkingen noemen is eigenlijk rekenen, maar dan in de achteruitstand. In de vergelijkingssituatie is 'iemand of iets' begonnen met een of meer getallen of grootheden en heeft wat bewerkingen van rekenkundige aard uitgevoerd met een getalsmatig eindresultaat. De opgave is om uit resultaat en bewerkingen de oorspronkelijke getallen (of het getal, of lengtes van lijnstukken) terug te vinden. Dit is de schoolse zienswijze: dat iemand het antwoord al lang weet en jou de strikkende vraag stelt. De historie is óók wel een beetje schools: veel nadruk op veeltermvergelijkingen, lang bezig zijn met de eerste- en tweedegraadsvergelijking en dan binnen veel kortere tijd de derde- en vierdegraadsvergelijking erdoor jagen als was het een wedstrijd. Maar er is ook wel wat meer rijkdom dan op school: getaltheoretische problemen samen met meetkundige, onbepaalde vergelijkingen, nauwkeurige gevalsonderscheidingen, een breed palet aan oplossingsmethoden voor schijnbaar eenvoudige maar fundamentele problemen.
In deze paragraaf blijven we aanvankelijk dicht bij het uiterlijk van de wiskunde zoals die in de oudere bronnen zelf verschijnt; zo wordt goed duidelijk dat oude algebra geen letterrekenen is, dat het werken met onbekenden aanvankelijk in heel andere gedaante verschijnt dan we nu gewend zijn. Interessant is dat de wiskunde doe Babyloniërs en andere Ouden beoefenden toch dicht blijkt te liggen bij wat nog steeds op school gedaan wordt.
Om het de lezer niet al te lastig te maken vertalen we de bronnen vaak naar modernere notaties; dit soort vertalen is echter altijd vertekenen maar we willen de verschillen in notatie en betekenissen met de standaarden van nu juist ook laten zien.

Van Thebe in Egypte naar Babylon, van rekenen naar algebra?

We beginnen met twee voorbeelden uit het tweede millennium voor het begin van onze jaartelling.
Eerst een opgave uit de Egyptische papyrus Rhind, van rond 1650 voor Christus; gekopieerd door schrijver Ahmes die zelf zegt dat het origineel zo'n 200 jaar ouder is. Zie figuur 1 rechts.
Links staat een gedeeltelijke transcriptie van het in hiëratisch schrift gestelde origineel. Lees in de transcriptie net als in de papyrus van rechts naar links.
In de eerste regel staat dat we *het* 1 keer, $\frac{1}{2}$ en nog eens $\frac{1}{4}$ keer moeten nemen en 10 moeten krijgen. De (niet expliciet) gestelde vraag is: 'Hoe groot is *het*?'
In de meest rechtse kolom in de transcriptie zien we 1, 2, 4 en $\frac{1}{7}$ onder elkaar onder '*hoop*', *Hau* in het document zelf. Onder *Hau* wordt de oplossing dus opgebouwd.

Eerst wordt $(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4})$ enkelvoudig opgeschreven, direct links naast de '1'. Daarna wordt verdubbeld, zie de kolom links naast 2, en weer verdubbeld, links naast de 4. Ook wordt nog $\frac{1}{7}$ keer $(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4})$ bepaald, dat is $\frac{1}{4}$; zie de vierde regel. De met pijlen gemarkeerde regels (vergelijk de corresponderende schuine streepjes in het origineel) geven voor de *hoop* samen 9, en voor het

10 geeft heel 't $\frac{1}{4}$ 't $\frac{1}{2}$ 't			hoop		
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{28}+\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}\ \frac{1}{2}\ 1$	1	←
	1	$\frac{1}{14}+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\ 3$	2	
			7	4	←
$\frac{1}{14}\ \frac{1}{7}\ \frac{1}{2}\ 5$ is hoop samen			$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{7}$	←



figuur 1: Fragment uit de papyrus Rhind (1650 voor Christus) met transcriptie

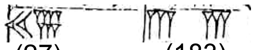
aantal keren dat $(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4})$ genomen moet worden voorlopig $1 + 4 + \frac{1}{7}$;in de *hoop* is dat nog 1 te kort. Deze '1' moet opgebouwd worden uit veelvouden van $\frac{1}{4}$, die correspondeert met de $\frac{1}{7}$ die bij de getallen hoort die de uitkomst opbouwen. We moeten dus het dubbele van het dubbele van $\frac{1}{7}$ vinden. Voor verdubbelen van stambreuken als $\frac{1}{7}$ was een tabel beschikbaar, die de uitkomst ook weer in stambreuken geeft: in dit geval treffen we $\frac{1}{28}+\frac{1}{4}$.
Deze uitdrukking staat in de tweede regel links, met daarnaast de waarde in de hoop, namelijk $\frac{1}{2}$.
Verdubbelen van deze regel geeft zonder moeite de '1' naast de $\frac{1}{14}+\frac{1}{2}$ in regel 3 links.
Het linkerdeel van regel 4 geeft de gehele oplossing. De gemarkeerde regels die samen al 9 leverden, geven samen met de $\frac{1}{14}+\frac{1}{2}$ het definitieve antwoord $\frac{1}{14}+\frac{1}{7}+\frac{1}{2}+5$.

De onderste helft van het fragment is ook een berekening; deze vertelt ons iets meer over de werkwijze als geheel. De eerste regel onder de streep van Ahmes zegt: 'Aantonen van het begin'. De tweede regel onder de streep geeft dezelfde uitdrukking als de eerste regel boven de streep, waarin helemaal links het gevonden antwoord staat, dat is in het origineel goed te zien. Dit is wat er gebeurt: Ahmes laat rechtstreeks vóórrekenend zien dat de uitdrukking $\frac{1}{14}+\frac{1}{7}+\frac{1}{2}+5$ inderdaad de oplossing van het probleem is. De fase van *vinden* van de oplossing wordt gevolgd door *bewijzen* dat het gevondene voldoet aan de oorspronkelijke vraag.

Zou het hier gaan om zoiets als het oplossen van de vergelijking $\frac{x}{4}+\frac{x}{2}+x = 10$?
Dat lijkt bij dit probleem misschien wat veel eer voor Ahmes. In feite wordt een deling, een omkering van een vermenigvuldiging, uitgevoerd en wordt er vooral gerekend binnen het niet zo makkelijke systeem van de stambreuken. Daarin moet door verdubbelen, en samennemen van gevonden uitkomsten het doel bereikt worden. Het lijkt eigenlijk heel sterk op een staartdeling. Het benoemen van de rechterkolom *Hau* kán ook als 'algebra' opgevat worden, maar de specifieke getalsmatige berekeningen vormen toch de hoofdzaak van de tekst.

Het voorbeeld van Ahmes legt weinig tot geen nadruk op de algemene kant van de oplossingsmethode. Algebra, in de modernere zin van systematische aanpak van een probleem die loskomt van de specifieke getallen, nee, dat is het zeker nog niet. Dat is essentieel anders in een bijna 200 jaar jonger voorbeeld uit Mesopotamië, waarin de specifieke numerieke gegevens het oplossingsproces niet volledig sturen. Kleitablet AO 8862 – in figuur 2 in de transcriptie van Neugebauer, nu in het Louvre – stamt uit dezelfde periode als de beroemde wettencodex van Hammurabi, rond 1700 voor Christus.
In spijkerschrift op kleitabletten worden getallen tot 60 in een tientallig turfsysteem genoteerd, dat

heel makkelijk in klei indrukbaar is met een afgeplat stukje riet. Aan de hand van de transcriptie van dit fragment van regel 8 wordt het systeem duidelijk:



(27) (183)

De 27 is evident: $2 \times 10 + 7$. Maar die 183? Die dient in het zestigtallig stelsel gelezen te worden als 3,3 waarbij de eerste 3 dus staat voor 3 keer 60 en de tweede voor 3.[1] De betekenis van de bovenste regels van dit tablet is deze:

> Lengte, breedte. Lengte en breedte heb ik vermenigvuldigd en zo het oppervlak gevormd. Ik heb het overschot van de lengte over de breedte bij het oppervlak opgeteld: 3,3. Ik heb lengte en breedte opgeteld: 27.
> Gevraagd lengte, breedte en oppervlak.

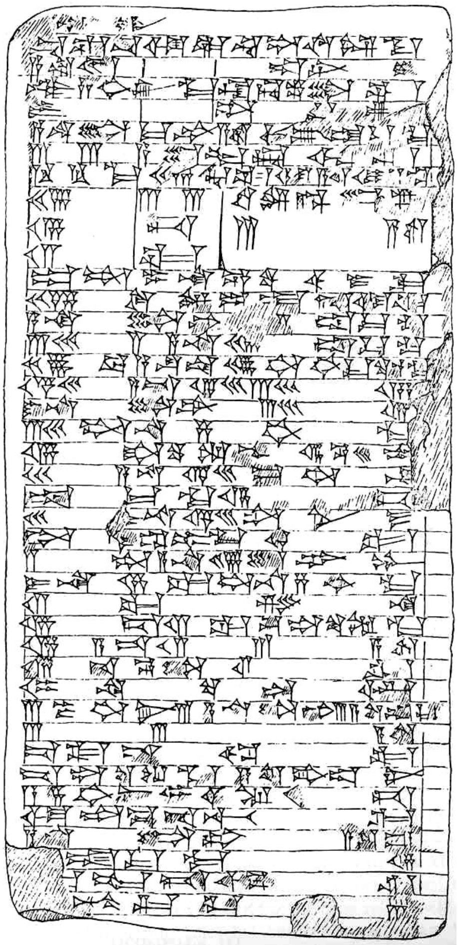
We hebben al gezien dat 3,3 hier onze 183 betekent en de lezer kan zelf aan de slag met het stelsel:

$$xy + x - y = 183$$
$$x + y = 27.$$

De aanpak op het tablet is slim. Eerst wordt overgegaan op $y' = y + 2$. Dat zit in de bewerkingen verstopt, zo'n stap wordt gedaan zonder veel uitleg. Het stelsel wordt nu:

$$xy' = 210$$
$$x + y' = 29$$

en de oplossing wordt gevonden door een beroemd Babylonisch recept toe te passen. Het gemiddelde van x en y' is $14\frac{1}{2}$. Er wordt $(14\frac{1}{2})^2 - 210$ uitgerekend, dat is $\frac{1}{4}$. De wortel daaruit is $\frac{1}{2}$ en de juiste x en y' zijn volgens dit recept dan respectievelijk $14\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ en $14\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$. De uiteindelijke oplossing is $x = 15$, $y = 12$; deze is op het afgebeelde fragment onder de regel met 27 en 3,3 te zien, want de oplossing wordt gegeven en daaronder staat pas de gevolgde methode. De oppervlakte 3 (180, zie voetnoot!) is prominent zichtbaar.



figuur 2 :Tablet AO 8862, transcriptie O. Neugebauer

Dat het bij het oplossen van het omgevormde stelsel om een standaard oplossingsproces gaat bij een standaardprobleem, blijkt ook uit het feit dat deze x en y' op hun beurt weer *lengte* en *breedte* worden genoemd. *Lengte* en *breedte* zijn hier de aanduidende woorden voor de factoren van een product, dat steevast *oppervlakte* heet. We weerstaan nog even de verleiding hier de geboorte van de algebraïsche onbekende in te zien, want daarvoor ontbreekt een schakel: de woorden *lengte* en *breedte* komen alleen in de omstaande tekst voor maar *niet* tussen de getallen zelf voor als de hoofdrolspelers in de berekening [2].

1 Deze zestigtallige getalsnotatie, waarbij de 'cijfers' van 1 t/m 59 in een tiendelig subsysteem worden genoteerd, bestond in Mesopotamië al vanaf ongeveer 3000 voor Christus.
Er waren uitgebreide delings- en vermenigvuldigings-, inverse- en worteltabellen voor beschikbaar.
Het systeem legt de positie van de 'cijfers' nog niet zo vast als wij gewend zijn; rekenkundige context helpt hier de interpretatie. Zestigtallige breukrekening was ook mogelijk, vergelijkbaar met onze tiendelige breuken. Vooral deze breukrekening heeft heel lang stand gehouden, tot in de Italiaanse Renaissance aan toe.
Wij hebben er onze zestigtallige hoekrekening in graden, minuten en seconden en tijdrekening in uren, minuten en seconden aan overgehouden. Deze twee rekenwijzen zijn nauw verbonden. Het verband zit daar waar tijd en hoek elkaar ontmoeten: het kijken naar de kosmische klok, de sterrenkunde dus.

Babylonische kleitabletten bevatten veel voorbeelden in deze sfeer. Er zijn lineaire vergelijkingen, kwadratische vergelijkingen, stelsels van twee of soms drie vergelijkingen waarvan één van de tweede graad. De tabletten geven voorbeelduitwerkingen in de vorm van met de gegeven getallen uit te voeren recepten. Hoe men aan de oplossingsmethoden is gekomen weten we niet goed. Op grond van diverse voorbeelden zijn daar dan ook uitgebreide theorieën over ontwikkeld, die nog steeds in discussie zijn.

Van alle rekenstappen wordt steeds alleen het resultaat gemeld; de rekenkundige uitvoering staat niet op dit tablet. Ook bij worteltrekken is dat zo. De nadruk ligt meer op de receptmatige structuur van het oplossingsproces en niet op de afhankelijkheid van de specifieke getallen. Daarom kunnen we hier veel meer algebra in zien dan in het werk van Ahmes: het algemene oplossingsproces wordt zichtbaar gemaakt, ook al wordt die alleen met expliciete getallen als voorbeeld in beeld gebracht.

Zullen we dan maar de conclusie trekken dat voor algebra op dit hoge niveau een goed rekensysteem voor getallen nodig is dat vlekkeloos beheerst wordt, zodat alle aandacht naar de methode zelf kan uitgaan? In onze dagen is zo'n perfect rekensysteem ook aanwezig in de vorm van de rekenmachine; de maker van het kleitablet had de tafels van vermenigvuldiging en deling op andere tabletten in de buurt.

Diophantus vindt de onbekende

Er bestaat een vers over Diophantus van Alexandrië; het is geschreven rond het jaar 500 na Christus. Uit de aan het Welp-project[1] aangepaste vertaling blijkt dat het een grafschrift in de vorm van een ingeklede vergelijking is:

> Hier ligt Diophantus, bij leven een cijferfanaat.
> Bereken met x-en en applets zijn leeftijd met al wat hier staat!
> Een zesde zijns levens genoot hij als kind, gans onbezwaard;
> Een twaalfde verder: hem sierde een woestruige baard.
> Een zevende later besloot hij te trouwen
> en zocht zich de mooiste en liefste der vrouwen.
> Vijf jaren vergleden; zij baart hem een prachtige zoon.
> alles was heerlijk, hun liefde, hun leven leek schoon.
> Maar wreed was het noodlot, en groot hun verdriet
> toen zoonlief vroeger dan zij dit leven verliet.
> In leeftijd bereikte die half zijns vaders dagen,
> toen omsloot hem de kou van 't graf. Maar Deze wou zelf niet versagen
> en schiep nog een bouwwerk van 'talrijke' pracht.
> Vier jaren later verkoos hij ook de eeuwige nacht.

Ondanks dit vers liggen de geboortedatum en sterfdatum van Diophantus niet vast, maar op grond van allerlei verbanden tussen zijn teksten en die van anderen is de periode 200-284 een goede aanname.

De *Arithmetica* van Diophantus, waarvan nog slechts zes van de dertien boeken bestaan, gaat bijna geheel over het oplossen van in woorden vertelde getalproblemen die tot vergelijkingen leiden. *Arithmetica*: over positieve gehele en rationale getallen. Er zijn bepaalde en onbepaalde vergelijkingen, zo geheten naar gelang er één of een hele schaar oplossingen zijn, al geeft Diophantus bij de laatste categorie ook steeds slechts één oplossing aan.

Hier bespreken we probleem 39 uit boek IV uitvoerig, omdat het een mooi beeld geeft van Diophantus' kunde. De details van het oplossingsproces geven inzicht in wat bij Diophantus een 'onbekende' zou kunnen zijn. We geven voor de duidelijkheid de oplossing eerst in moderne notatie

2 Het besproken probleem van dit kleitablet, met vele andere, komt ook voor in het Zebraboekje *Babylonische Wiskunde, een verkenning aan de hand van kleitabletten* van Ab van de Roest en Martin Kindt. Epsilon uitgaven, 2005.

1 Welp: een project voor klas 2 en 3 rond algebra met applets. Zie www.wisweb.nl.

en gaan pas later dieper in op de beroemde specifieke notatie van Diophantus voor machten van de ‘onbekende’. Dit is de opdracht:

> Te vinden drie getallen, zó, dat het verschil tussen het grootste en het middelste getal een gegeven verhouding heeft met het verschil van het middelste en het kleinste, en zodanig dat de som van twee van de drie getallen steeds een kwadraat is.

Het probleem wordt algemeen gesteld; de gegeven verhouding ligt niet eens vast. Maar de oplossing van Diophantus begint met een nadere specificatie:

> Laat vastgelegd zijn dat het verschil tussen de grootste en de middelste een verhouding van 3 : 1 heeft met het verschil van de middelste en de kleinste.

Als we één oplossing van dit probleem kennen, weten we er meer want je kunt een oplossingstrio met een kwadraat van een of ander getal vermenigvuldigen om weer een nieuwe oplossing te vinden. Diophantus zegt dat er niet bij, maar legt wel onmiddellijk nóg een waarde vast, het kleinste van de drie kwadraten:

> De som van de middelste term en de kleinste term moet een kwadraat zijn, laat dat 4 zijn. Dan is de middelste term groter dan 2, laat die dan $x + 2$ zijn, dan is de kleinste $2 - x$. [1]

Omdat we nu de twee eerste getallen hebben vastgelegd als $2 - x$ en $2 + x$, weten we dat het laatste getal $2 + 7x$ moet zijn; het verschil $2x$ tussen de eerste twee getallen verhoudt zich immers als 1 : 3 tot verschil van de laatste twee, dat dus $6x$ moet zijn. We weten daarom dat de andere twee sommen van twee van de drie getallen $8x + 4$ en $6x + 4$ zijn, die dus ook kwadraten moeten zijn. De behoorlijk complexe oorspronkelijke probleemstelling is nu getransformeerd naar het vinden van één onbekend getal, door ons met x aangeduid.
Het tweede kwadraat, het getal $6x + 4$, ligt tussen 4 en 16; Diophantus noemt de zijde ervan ‘onbekend plus 2’, door ons genoteerd als $z + 2$, waarbij dus z kleiner dan 2 is[2].
Diophantus geeft meteen $z^2 + 4z + 4$ en rekent uit dat het grootste van de drie kwadraten dus $1\frac{1}{3}z^2 + 5\frac{1}{3}z + 4$ moet zijn.
Vermenigvuldig dit met het kwadraat 9/4; resultaat: $3z^2 + 12z + 9$ is een kwadraat.
Nu maakt het verhaal een fraaie algebraïsche wending.

Diophantus drukt de zijde van dit kwadraat uit in ‘een aantal keren z minus 3’. Nu wordt uit:

$$3z^2 + 12z + 9 = (mz - 3)^2$$

direct afgeleid dat:

$$z = \frac{6m + 12}{m^2 - 3}$$

Het wegvallen van de 9 aan beide zijden is voorbereid door de onbekende zijde van het kwadraat ‘een aantal keren z minus 3’ te stellen. Daardoor kan de vergelijking herleid worden tot een lineaire. Het is belangrijk dit te observeren: Diophantus maakt de keuze van ‘een aantal keren z minus 3’ met het oog op de verdere afwikkeling, en met veel inzicht in de later te volgen strategie.
Diophantus besluit met uit $z < 2$ af te leiden dat $m = 5$ een goede oplossing levert; daarbij wordt en passant een vierkantsvergelijking opgelost via kwadraatafsplitsen. Er volgt:

$$z = \frac{21}{11}$$

De uiteindelijke oplossing voor het probleem zelf wordt gevonden door dit invullen in $z + 2$ en kwadrateren; 1849/121. Dat getal is het middelste kwadraat en moet dus gelijk aan $6x + 4$ zijn.
Dat geeft na vaststellen van $x = \frac{1365}{762}$ uiteindelijk dit drietal getallen als oplossing:

$$\frac{58}{484} \quad \frac{1878}{484} \quad \frac{7338}{484}$$

1 Op de notatie van Diophantus zelf komen we later nog terug.
2 In de originele tekst gebruikt Diophantus hetzelfde teken voor de nieuwe onbekende (paragraaf 9.3).

Diophantus wil hier, dat blijkt uit de laatste stappen van zijn behandeling, geen breuken meer in noemer of teller, maar in dit geval wel een gezamenlijke kwadratische noemer, zodat de breuken niet in de meest eenvoudige vorm zijn gegeven. Diophantus besluit met de zinsnede: 'En het bewijs is evident'. Evident, jazeker en gemakkelijk valt na te rekenen dat de oplossing voldoet. Niettemin valt op dat Diophantus pas op dit punt van de tekst het woord *bewijs* gebruikt. We hebben zoiets al eerder opgemerkt, bij de papyrus Rhind. Daar werd ook eerst de oplossing opgebouwd, en daarna expliciet doorgerekend in het probleem zelf; Diophantus laat het narekenen aan de lezer over. Bij andere problemen staan vaak slotopmerkingen met dezelfde strekking.

Het oplossingsproces als geheel heeft een paar opvallende kenmerken:

- Er wordt wel steeds met een onbekende gewerkt maar die onbekende is *niet* per se de oplossing van het probleem, deze lijkt eerder een handig gekozen hulpvariabele.
- Diophantus stelt het gedeelte waarin (in onze notatie) met z wordt gewerkt als een tussenprobleem voor dat eerst opgelost moet worden en komt, als eenmaal een getal als oplossing voor dat tussenprobleem gevonden is, op het oorspronkelijke probleem terug. Door deze betekenisvolle structurering gaan de zaken niet door elkaar lopen. Dat is belangrijk want, zoals we later zullen zien, heeft Diophantus *geen* notatie die zoals bij ons variabelen x en z onderscheidt.
- De 'coëfficiënten' van het probleem (bijvoorbeeld hier de gegeven verhouding) worden getalsmatig vastgelegd. Of de oplossing bij een andere keuze dan 3 : 1 ook zo soepel loopt, is de vraag.
- Als oplossingen worden specifieke getallen gegeven. In het onderhavige geval begrijpt de lezer wel dat $m = 6, 7$, etc. ook tot oplossingen leiden, maar deze 'parametrisering' van de verzameling oplossen is niet zichtbaar aanwezig en wordt niet expliciet gemaakt.

De praktische algebraïsche manipulaties die nodig zijn om dit alles te verifiëren staan niet allemaal in de *Arithmetica*, dat geen leerboek elementaire algebra is. Diophantus veronderstelt algebraïsche regels voor het optellen, aftrekken en vermenigvuldigen der verschillende vormen bij de lezer bekend. Hij geeft aanvankelijk wel regels voor transformatie van de zo ontstane 'vergelijkingen'; hij zegt bijvoorbeeld over het vereenvoudigen:

> Als een probleem leidt tot een vergelijking waarin bepaalde termen gelijk zijn aan termen van dezelfde soort maar met verschillende coëfficiënten, dan is het nodig gelijken van gelijken af te trekken aan beide zijden, tot één term gelijk is aan één term.

In de inleiding van het boek wordt aangegeven dat: 'een tekort keer een tekort een overschot geeft.' Dit moeten we niet lezen als een regel voor min-keer-min is plus; negatieve getallen komen niet voor. De regel geeft alleen aan hoe met verschillen keer verschillen wordt omgegaan. Het vermijden van negatieve getallen is zichtbaar in de oplossing van het behandelde probleem 39.
Tot slot nog een citaat uit het begin van de *Arithmetica*, waar juist na de aanhef tot Dionisius staat:

> Misschien zal het onderwerp [van dit boek] je tamelijk moeilijk voorkomen, omdat het nog geen bekende kennis is en het verstand van beginners makkelijk verward wordt door vergissingen; maar voor jou zal het makkelijk te beheersen zijn, met jouw bezieling en mijn leraarschap; want scherp verstand ondersteund door goede lessen is een snelle weg naar kennis.[1]

Vergelijkingen van derde en vierde graad

We hebben in het voorgaande gezien dat al voor het jaar 1000 op diverse wijzen aan vierkantsvergelijkingen is gewerkt. Speciale voorbeelden zagen we bij de Babyloniërs, en onbepaalde vergelijkingen waarbij gezocht werd naar gehele of rationale oplossingen vonden we bij Diophantus.

1 Volgens Paul Tannery, die een teksteditie van Diophantus' *Arithmetica* bezorgde in 1895, was deze Dionisius bisschop van Alexandrië van 248-265 en zou Diophantus christen zijn en leerling van Dionisius. Dit citaat is ook voor in dit boek opgenomen

We zullen later nog ingaan op de geometrische methoden waarmee Euclides en de Arabische wiskundigen werkten aan kwadratische vergelijkingen met één onbekende.
Zowel bij de geometrische methoden (waarin kwadraten dus echte meetkundige vierkanten zijn) als de rekenkundige benaderingen speelt lange tijd een grote rol dat vergelijkingen van de vormen (in moderne notatie):

$$x^2 + 10x = 39 \text{ en } x^2 + 10 = 13x$$

verschillend dienen te worden behandeld. Denken we aan een representatie in de vorm van oppervlakte of aantallen, dan is duidelijk waarom: alle bijdragen in linker- en rechterlid van de vergelijking moeten positief zijn. Pas als we in de algebra kunnen werken met een omvattend systeem van negatieve én positieve *getallen* waarvan we verschillen kunnen nemen en waar we optellingen mee kunnen maken, dan pas kan gezien worden dat het om een en hetzelfde type gaat. Daarom zien we bij de oudste oplossingen van vergelijkingen steeds uitvoerige gevalsindelingen.

Voor de belangrijke stappen naar de exacte en algemene oplossing van de derde- en vierdegraadsvergelijking gaan we naar de grote Italiaanse handelssteden van de 15e en 16e eeuw.
Van Leonardo Pisano Fibonacci (1170 - 1250) is bekend dat hij bij een derdegraadsvergelijking een *benaderende* oplossing gaf, maar het verhaal van de algemene *exacte* oplossing van de derdegraadsvergelijking liet toen nog drie eeuwen op zich wachten. Het is een drama van gebroken beloften en is beschreven in vele geschiedenissen van de wiskunde. Het mag hier in korte vorm niet ontbreken; vanwege de makkelijk toegankelijke bronnen op internet is het een uitstekende onderzoeksopdracht voor leerlingen, ook als deze niet zelf de derdegraadsvergelijking en zijn oplossing geheel kunnen bevatten.

De hoofdrolspelers zijn:
– Scipione del Ferro, 1465 - 1526, wiskundige aan de Universiteit van Bologna
– Antonio Fiore, 1506 - ?, uit Venetië, student bij Ferro
– Nicolo Tartaglia, 1499 - 1557, wiskundeleraar in Brescia
– Girolamo Cardano, 1501 - 1576, arts te Milaan
– Ludovico Ferrari, 1522 - 1565, student bij Cardano.

Vergelijkingen van het type $x^3 + px = q$ werden door Scipione del Ferro opgelost rond 1515, maar deze publiceerde de methode niet. Ferro overleed in 1526. Fiore, die waarschijnlijk de oplossing van Ferro in de schoolbank leerde kennen, daagde Tartaglia in 1535 uit met een serie van 30 problemen van het type $x^3 + px = q$. Uiteraard moest de uitdager bekend zijn met de oplossingen. Tartaglia's lijst met tegenproblemen was gevarieerder. Vlak voor het verlopen van de eindtijd vond Tartaglia de juiste methode, loste alle vergelijkingen binnen twee uur op en won van Fiore, die bijna niets van Tartaglia's problemenlijst oploste. Tartaglia was tevreden met de eer en zag af van de afgesproken dertig banketten.

In 1539 hoorde Girolamo Cardano, bezig met zijn eigen *Practica Arithmeticae,* van de prestaties van Tartaglia en deed eerst vergeefse moeite de oplossing van $x^3 + px = q$ zelf te vinden. Hij probeerde daarna de oplossing van Tartaglia los te krijgen. Dat lukte, zij het pas na het aanbod van Cardano voor Tartaglia als kruiwagen te dienen bij de militaire commandant van Milaan. Volgens Tartaglia zwoor Cardano een eed niet vóór Tartaglia te publiceren.
Cardano wist later – in samenwerking met Ludovico Ferrari – ook de oplossingsmethode aan te passen voor de typen $x^3 = px + q$ en $x^3 + q = px$. Het lukte Ferrari bovendien een vierdegraadsvergelijking op te lossen door herleiden tot het oplossen van een derdegraadsvergelijking.

Maar wat met al dit schoons te doen? Cardano en Ferrari voelden zich gebonden door de eed. In één van de versies van het drama komen hen geruchten ter ore dat Scipione del Ferro al vóór Tartaglia de oplossing kende. Het kostte weinig moeite deze in de nalatenschap van Ferro te vin-

den, en jawel: het stond er glashelder.
In 1545 publiceerde Cardano de volledige oplossing voor alle drie de typen in zijn *Ars Magna*, meldde zowel Ferro als Tartaglia als vinders van de oplossing van het type $x^3 + px = q$, claimde zelf de andere twee typen en gaf Ferrari de eer voor de vierdegraadsvergelijking.
Eerlijk, zeker. Maar het riep wel de mateloze woede van Tartaglia op, die beweerde zélf de drie typen opgelost te hebben.
Over naar de nu al te lang geheim gehouden oplossingsmethode bij het voorbeeld:

cubus $\overline{p}$ 6 rebus aequalis 20
(een kubus en zes keer zijn zijde is 20)

Want in deze vorm werden de vergelijkingen genoteerd. Voor ons:

$$x^3 + 6x = 20.$$

Cardano (Ferro, Tartaglia?) verving hier de zijde (x) door een verschil van twee andere lengtes, dat wil zeggen: hij stelde stel $x = u - v$.
De herleiding van $(u - v)^3$ naar $(u^3 - v^3) - 3uv(u - v)$ is nu cruciaal.

$$x^3 + 6x = (u - v)^3 + 6(u - v) = (u^3 - v^3) - 3uv(u - v) + 6(u - v) = 20.$$

Als het lukt u en v zo te kiezen, dat $u^3 - v^3 = 20$ en $3uv = 6$, dan hebben we met $x = u - v$ een oplossing te pakken voor $x^3 + 6x = 20$.
Omdat die voorwaarden voor u en v gelijkwaardig (alles positief!) zijn met $u^3 - v^3 = 20$ en $u^3v^3 = 8$ is er geen probleem meer, want met dit stelsel wist elke wiskundige van die dagen wel raad: verschil en product van twee getallen gegeven, gezocht de getallen zelf.
De huidige lezer vindt zelf wel:

$$u^3 = \sqrt{108} + 10 \text{ en } v^3 = \sqrt{108} - 10 .$$

En hier is de oplossing van $x^3 + 6x = 20$ in de vorm van de *formule van Cardano*:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10} .$$

In dit geval ziet het er allemaal tamelijk eenvoudig en heel elegant uit, maar er zijn veel gevallen waar toen nog onneembare obstakels verschenen tijdens het oplossingsproces, ook als eenvoudig in te zien was dat er een reële oplossing moest zijn. Rafael Bombelli (1526 - 1572) lukt het de derdemachtswortels, ook als er negatieve getallen binnen het wortelteken stonden, zodanig te interpreteren, dat hij altijd een oplossing vond. Hij maakte daarbij gebruik van wat later de complexe getallen zijn gaan heten.

Algemene oplossingen: Francois Viète

François Viète (1540 - 1630) zette twee belangrijke stappen om de samenhang tussen wortels en vergelijkingen te verhelderen. Ten eerste gebruikte hij een notatie van vergelijkingen, waarin niet meer de specifieke waarde van een coëfficiënt is aangegeven, maar zowel de coëfficiënt als de onbekende met een letter werd aangegeven. Viète gebruikt voor de onbekende (‘cosa’, het *ding* zoals het genoemd werd) een klinker, voor de coëfficiënten medeklinkers. Zo verschijnt bijvoorbeeld een vierkantsvergelijking in deze vorm:

B in A quadratum, plùs D plano in A, aequari Z solido.

Vertaald:

B keer het vierkant van A plus vlakstuk D keer A zal gelijk zijn aan volume Z.

Onze vergelijking:

$$BA^2 + DA = Z$$

is daar een efficiënte, maar kale schaduw van. Viète vindt het duidelijk van belang dat de vergelijking homogeen is opgesteld, dat alle componenten ofwel ‘lijnachtig’, ofwel vlak of wel ruimtelijk zijn. Blijkbaar veronderstelt hij dat B een lijnstuk is. *B in A quadratum* is dan een ‘solido’. Als D

een vlakstuk, een oppervlakte is, is *D in A* ook weer een solido. *A* zelf is duidelijk lijnachtig. Onze notatie maakt dat allemaal niet meer zichtbaar.
In zijn '*De equationem emendatione'* bereikt Viète via een route die erg lijkt op die van Cardano, een oplossing van de vergelijking:

$$A^3 + 3BA = 2Z$$

namelijk:

$$A = \sqrt[3]{\sqrt{B^3 + Z^2} + Z} - \sqrt[3]{\sqrt{B^3 + Z^2} - Z}$$

Daarin stelt *Z* dus een volume voor, en *B* een oppervlak, zodat al de bewerkingen in de wortelvorm zinvol zijn, het is waard dat even na te gaan. De conclusie moet zijn dat de 2 in de oorspronkelijke vergelijking dimensieloos is.
Hier wordt de winst die op Diophantus gemaakt is duidelijk: je hoeft maar een nieuw gekozen *B* en *Z* in te vullen in het patroon en de nieuwe oplossing rolt eruit. Bij Diophantus kon wel aan het begin van het oplossingsproces van een probleem een andere constante worden gekozen, maar dan moest daarna toch weer het hele oplossingsproces doorlopen worden; een soortgelijk verschil hebben we opgemerkt bij Ahmes en zijn Babylonische collega.
Wat het begrip generalisatie betreft, dat vaak een essentieel kenmerk van algebra wordt gevonden, is er ook wat bijzonders aan de hand. Het generalisatie-aspect zit bij Viète niet in de onbekende, *A,* van de vergelijking, maar in de coëfficiënten, hier *B* en *Z*. We komen daar in verband met de huidige inzichten in de schoolalgebra nog op terug. Zie paragraaf 9.8.

Verdere ontwikkelingen

Bijzonder is dat Viète ook weet dat omgekeerd de oplossing van een vergelijking in zekere zin de coëfficiënten bepaalt. Viète:

> *Si A cubus $\overline{-B-D-G}$ in A quad. + $\overline{B \text{ in } D + B \text{ in } G + D \text{ in } G}$ in A, aequatur B in D in G:*
> *A explicabilis est de quadlibet illarum trium, B, D, vel G.*
>
> *[Als A^3 + (– B – D – G) A^2 + (BD + BG + DG)A = BDG*
> *dan is A gelijk aan een van deze drie: B, D of G.]*

Hier krijgen we echter weer sterk de indruk dat de rollen van *A, B, D,* en *G* in de vergelijking gelijkwaardig zijn. *A* is immers gelijk aan één van de drie.
Thomas Harriot (1560 - 1621) maakte dit veel explicieter door vast te stellen dat als *a*, *b* en *c* de oplossingen van een derdegraadsvergelijking zijn, de vergelijking moet zijn:

$$(x-a)\cdot(x-b)\cdot(x-c) = 0$$

Leibniz laat in een brief aan Huygens later (1673) puur algebraïsch zien dat als de *a*, *b* en *c* gegeven worden door oplossingsformules van Cardano/Bombelli, dat dan inderdaad de derdegraadsvergelijking wordt teruggevonden. Dat is een volledig algebraïsche verificatie van de formules, die tot dan toe niet was uitgevoerd.

Ferrari, Viète, Harriot, Tschirnhaus (1651 - 1708) en nog anderen vonden oplossingen voor de algemene vierdegraadsvergelijking; ook weer door een hulpvariabele in te voeren die tot een oplosbare derdegraadsvergelijking voerde. Het rekenwerk dat hiervoor nodig is draagt voor ons niet zoveel meer bij aan inzicht in de historische ontwikkeling van de algebra.

Bijna twee eeuwen later zal blijken dat er geen oplossingsformule in (een nauw omschreven) algebraïsche zin kan bestaan voor de algemene vijfde- en hogeregraads vergelijkingen. Maar in het *bewijs* van die onmogelijkheidsbewering speelt het inzicht dat de coëfficiënten van de vergelijking uitgedrukt kunnen worden in de wortels een grote rol. Meer daarover in paragraaf 9.7.

9.3 Algebra: een notatie die verduidelijkt en ordent

De aard van de algebraïsche tekst

In het voorgaande was te zien dat bij het zoeken naar de onbekende van vergelijkingen nieuwe notatiewijzen opdoken. Dat is een belangrijk fenomeen waar we nu dieper op ingaan; het is ook een goed moment voor een korte beschouwing over de rol van notaties bij algebra.

Men kan twee verschillende extreme standpunten innemen over de verhouding van de algebra met zijn notatie:

1 Zonder notatie met letters is er geen algebra.
2 Algebra gaat om samenhang en structuren, notatie is slechts een geheugensteun.

Het eerste standpunt is een wat uiterlijke en oppervlakkige definitie van algebra; het tweede standpunt lijkt ver boven die oppervlakkigheid uit te stijgen, maar gaat dan wel voorbij aan het feit dat we zo'n geheugensteun nodig hebben in complexe situaties. En blijkt dan niet zonneklaar dat de ontwikkeling van de algebra niet zonder notatie kon?

De titel van deze paragraaf geeft aan dat het niet zo simpel ligt. De notatie van de algebra is in zekere zin van een hulpmiddel voor het geheugen geworden tot een actief mechanisme, dat zijn eigen partij meeblaast bij het oplossen van ingewikkelde problemen. In deze paragraaf willen we dit idee nader in kaart brengen aan de hand van de historische ontwikkeling van twee onderdelen van 'onze' notatie: het noteren van machten en het aangeven van structuur en samenhang in algebraïsche uitdrukkingen.

Notatie is ook een middel tot communicatie: een notatie moet duidelijk aangeven wat er bedoeld wordt. Dit alles roept wellicht de vraag op: is wiskunde (of algebra) een taal? Ja of nee, het maakt niet zoveel, want de uitspraak dat wiskunde een taal is (of niet) zegt weinig over wat wiskunde doen werkelijk is. Toch is de zegswijze behoorlijk populair en heeft zijn geschiedenis die lijkt te starten in de 17e eeuw. Mogelijk is dit Galileo's meest geciteerde uitspraak:

> Dit [het boek van de natuur] is geschreven in de taal van de wiskunde en de hoofdpersonen ervan zijn driehoeken, cirkels en andere meetkundige figuren, zonder welke het mensen onmogelijk is er ook maar een woord van te begrijpen. Zonder deze wandelt men in een doolhof.[1]

Galileo claimt vooral dat de meetkundige objecten voor ons noodzakelijk zijn om de weg te vinden in het universum. Dat is een filosofische stellingname die uitstekend past in de 17e eeuw; Galileo's *scritto in lingua matematica* is een pakkende zegswijze om dat uit te drukken, maar eenzijdige nadruk op het aspect taal in het citaat gaat voorbij aan het belang van de wiskundige objecten die aangegeven worden: driehoeken, cirkels.

Hoe ligt dat bij de algebra: wat zijn daar de wiskundige objecten en wat is hun relatie in en met taal? Een algebraïsche formule of vergelijking in een lopende tekst heeft tegenwoordig meestal de grammaticale rol van een zelfstandig naamwoord, maar heeft ook een eigen structuur die tot de wiskunde hoort. Bijvoorbeeld:

De vergelijking $x^2 = 10 * \sin(x)$ heeft 10 oplossingen

De (tamelijk letterlijke) vertaling die we gaven van een stelling van Viète, namelijk

Als $A^3 + (-B - D - G)A^2 + (BD + BG + DG)A = BDG$,
dan is A gelijk aan een van deze drie: B, D of G

is echter een mengvorm waarin het isgelijk-teken als werkwoordvorm in de voorwaardelijke bijzin optreedt. Daarmee blijkt duidelijk dat algebra-notatie van Viète nog een afkortingensysteem is bin-

1 Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.[Galileo Galilei, *Il Saggiatore*, in *Opere di Galileo Galilei* (a cura di Franz Brunetti), UTET, Torino, 1980, vol. I, pp. 631-632]

nen de gewone taal.
Bij dit voorbeeld van Viète zal nog niet iedereen protest hebben aangetekend, maar het mengen van een wiskundige notatie met dagelijkse taal doet in andere situaties toch vreemd aan:

De lengte van een voetbalveld = 90 meter en de breedte = 60. Wat is de oppervlakte?

Die scheiding van gewone schrijftaal en het formalisme van de wiskundige objecten is een product van een lange ontwikkeling. We zullen zo dadelijk bij een voorbeeld zien dat tot in de 17e eeuw de vervoegingen van Latijnse woorden nog greep hebben op de namen voor onbekenden in algebraïsche uitdrukkingen!
De wiskundige tekst heeft ook speciale restricties op de betekenis van de gewone woorden. Lijn, variabele, punt, functie: binnen de wiskundige context hebben deze woorden een eigen, beperkte betekenis. Dat is niet zo bijzonder; het is net als de eigen woorden van andere disciplines dat hebben. *Jargon*: de half-geformaliseerde taalelementen van een specifieke discipline.

Onbekenden en hun machten: van afkorting naar volledige aritmetisering

We hebben eerder gezien dat op de papyrus Rhind eigenlijk geen teken voorkwam voor het te zoeken getal in een probleem. We hebben ook gezien dat de Babylonische wiskundige de nog te zoeken getallen waarvan hij bijvoorbeeld de som en het product (de ‘oppervlakte’) weet, steevast ‘lengte’ en ‘breedte’ noemt. Functionele namen voor een getal in een bepaalde situatie, zonder dat de termen meedoen in de berekeningen zelf. Dat is anders bij Diophantus.

Diophantus
In de tekst van probleem 39 uit boek IV komt de volgende opgave voor. In de Griekse zin is gemakkelijk te zien waar de wiskundige componenten zich bevinden, met de moderne transcriptie eronder komen we snel achter de notatiemethode.

'Επεὶ δὲ συναμφότερος ὁ μέσος καὶ ὁ ἐλάσσων ποιεῖ $\square^{ov}$, ποιείτω $\mathring{M}\,\bar{\delta}$. ὁ ἄρα μέσος μείζων ἐστὶ δυάδος· ἔστω ς ᾱ $\mathring{M}\,\bar{\beta}$. ὁ ἄρα ἐλάχιστος ἔσται $\mathring{M}\,\bar{\beta}$ ⋔ ς ᾱ.

Omdat de som van de middelste term en de kleinste [term] een vierkant is, laat het 4 zijn. Dan is de middelste term groter dan twee. Laat die x + 2 zijn.
Dan is de kleinste term 2 – x.

We nemen een aantal onderdelen onder de loep.

$\square^{ov}$. Als eerste valt het gebruik op van het kleine vierkant dat als ware het een woord, in de tweede regel van de tekst staat. Het vierkantje is een afkorting voor τετραγωνον: het vierkant van een getal. Er lijkt een exponent achter te staan, ^{ov}, maar dit is een verbuigingsuitgang, die eigenlijk voor ons juist benadrukt hoe het formele element van het vierkantje in de tekst nog een echt deel van de lopende taal is.

$\mathring{M}\,\bar{\delta}$ De Grieken noteerden getallen met letters, van 1 tot en met 9 gewoon in de volgorde van het alfabet, met voor de duidelijkheid vaak een streepje er boven. α, β, γ, δ, ε, ϛ, ζ, η, θ. Hier staat dus 4, want de *M* met een rondje erboven zegt volgens Diophantus dat het om eenheden, *M*onaden gaat, de 4 is hier dus een gewoon getal. De letter ι na de θ stelde 10 voor, de daarop opvolgende letters stonden voor 20, 30, etc. Dan volgen de negen honderdtallen. Er waren aparte woorden voor 1000 en 10000.

ς ᾱ $\mathring{M}\,\bar{\beta}$ De ‘1’ en de ‘2 eenheden kunnen we nu lezen. Het teken ς vooraan is nieuw; het is de bouwsteen van Diophantus’ roem. Diophantus zegt dat het de te zoeken *onbepaalde* hoeveelheid eenheden is, de *arithmos*. Merk op dat expliciet met de letter alpha wordt aangegeven dat de *arithmos* één keer wordt genomen. Hier staat wat wij graag lezen als 1 x + 2.

$\overset{\circ}{\mathrm{M}}\,\bar{\beta}\,⋀\!\!\!\backslash\,ς\,\bar{\alpha}$ Er is bij Diophantus geen echt minteken, maar wel een verschilteken, ⋀\. Dat zien we uit het feit dat dit teken nooit voorop staat. ’*twee eraf één x*’ is een goede vertaling, of 2 – 1 x.

Gelijkheid wordt gewoon in woorden uitgedrukt, met een afkorting weliswaar.
In ς $\bar{\eta}$ $\overset{\circ}{\mathrm{M}}$ δ ἴσ. □ᵛ, καὶ ς $\bar{ς}$ $\overset{\circ}{\mathrm{M}}$ δ ἴσ. □ᵛ. lezen we: *8x + 4 is een kwadraat en 6x + 4 is een kwadraat.*

Machten van de onbekende krijgen bij Diophantus elk een eigen teken.
De transcriptie van $\Delta^{Y}\bar{\gamma}$ ς $\overline{\iota\beta}\,\overset{\circ}{\mathrm{M}}\,\bar{\theta}$ is onze drieterm $3x^2 + 12x + 9$.
Diophantus gebruikt de Δ voor het kwadraat (dynamis) van de onbekende en K (kubos) voor de derde macht, beide met een index ^{Y}, die van de tweede letter zal afstammen, de Griekse ypsilon. Vierde, vijfde, en zesde machten ontstaan door combineren. De tekencombinaties:

$$\Delta^{Y}, K^{Y}, \Delta^{Y}\Delta, \Delta K^{Y}, K^{Y}K$$

‘betekenen’ nu respectievelijk:

$$x^2, x^3, x^4, x^5, x^6.$$

Maar de omzetting met een letter als x en een exponent is hier versluierend. Diophantus gebruikt voor verschillende machten van hetzelfde (onbekende) getal verschillende tekens, maar in de structuur van de rij machten is wel te zien tot welke macht een product van twee machten leidt.

Diophantus kan ook geen verschil maken in notatie tussen twee onbekenden, maar in moderne bewerkingen van Diophantus is dat niet te zien, die spreken over bijvoorbeeld x en z.
De transcriptie van probleem 39 liet zien hoe Diophantus hier mee omging. Tijdens het oplossen van het hoofdprobleem werd bijvoorbeeld een stap gemaakt naar het oplossen van een ‘subprobleem. Daarin functioneerde de *arithmos* tijdelijk in een andere rol. Als het subprobleem was opgelost, werd de oorspronkelijke verhaallijn met de oorspronkelijke *arithmos* weer opgepakt. Het was een *verhaal in een verhaal*, zoals we dat ook kennen uit de klassieke verhalende literatuur. Homeros laat bijvoorbeeld in de Odyssee aan het hof van Alkinoös een zanger optreden die over de Trojaanse oorlog vertelt, waarbij Odysseus zelf aanwezig is, die daarna zelf in het verhaal over zijn eigen omzwervingen vertelt.

Overduidelijk is dat Diophantus’ algebraïsche notatie het karakter heeft van handige afkortingen. Nesselman (in zijn *Algebra der Griechen*, 1842) spreekt vanwege de afkortingen van *syncopische* notatie, in tegenstelling tot *retorische*, waarin alles nog in tekstvorm wordt uitgeschreven. De tekens hebben bij de syncopische notatie nog niet hun onafhankelijke symbolische betekenis; Nesselman spreekt pas vanaf Viète van *symbolische* notatie. Dat de drie typen er zijn, is heel duidelijk. Ze aan periodes te binden, zoals vaak gebeurt, is niet echt zinnig. Ze komen gewoon naast elkaar voor, vaak ook in eenzelfde tekst.

Notaties voor de onbekende en voor machten ervan, 1450 - 1637

Voor de naam van de onbekende waren in de Europese Renaissance veel woorden (en hun afkortingen) in omloop. *Cos* (het ding) met zijn varianten *cosa*, *coss*, was wel een van de bekendste. Maar ook komen voor *res* (de zaak) en *latus* (de zijde, merk het verband met *kwadraat* op) en *thynge* (Robert Recorde, Engeland, 1556). Per schrijver konden daar andere termen voor de machten bij voorkomen, veelal volgens het Diophantische patroon, soms op een andere structuur gebaseerd.
Zoals bij Pacioli (1494). Deze noteert *cosa-censo-cubo* voor wat wij zouden noemen x, x^2, x^3. Hij syncopeert naar *co*, *ce* en *cu* en gaat daarna verder met *ce.ce* voor x^4 en *ce.cu* voor x^6, en gebruikt *p.r.* (primo relato) voor x^5. De *ce.cu* moeten we dus zien als de *tweede macht van de derde macht* van de onbekende en niet de tweede macht *maal* de derdemacht.

Hier is William Oughtred, die in 1647 in zijn *Clavis mathematicae* nog dicht bij Diophantus noteert:

$$1qc - 15qq + 160c - 1250q + 6480l = 170304782.$$

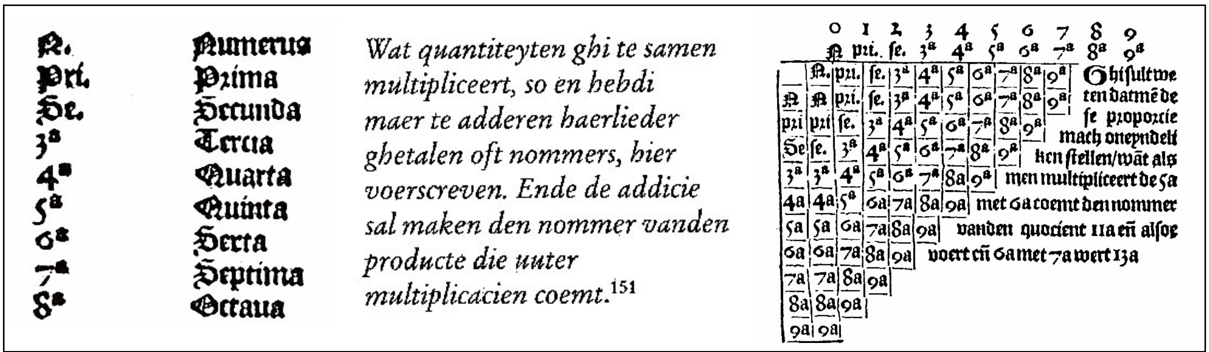
Dat is ons

$$x^5 - 15x^4 + 160x^3 - 1250x^2 + 6480x \;=\; 170304782$$

want de *q*, *c* en *l* staan voor *quadratus*, *cubus* en *latus*. Toch is Oughtred met deze constructie aan de late kant; andere methoden zijn dan al volop in zwang.[1]

De rekenkundige structuur van onze notatie met machten van variabelen, waarbij vermenigvuldigen van twee machten leidt tot optellen van de exponenten, werd voorafgegaan door notaties die in plaats van het noteren van de onbekende en zijn machten middels afkortingen, *alleen* de zogenaamde *index* noteerden. Als er maar een onbekende was (zoals we bij Diophantus hebben gezien) was dat voldoende. Bij Chuquet (1445 - 1488) bijvoorbeeld stond 10^2 voor *10 keer het kwadraat (van de onbekende)*.

Hoewel er voorgangers waren, kiezen we de Hollander *Gielis van der Hoecke* als voorbeeld met zijn *In arithmetica een sonderling excellēt boek* (Antwerpen 1537). Van der Hoecke geeft een lijst tekens voor de notatie van machten van de onbekende maar geeft ook een regel voor het vermenigvuldigen van machten. Zie figuur 3.

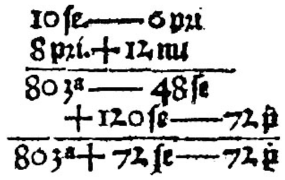


figuur 3 : De optelregel voor rekenen met exponenten, hier nommers genoemd

De tekens zijn eigenlijk de Latijnse rangtelwoorden, waarvan de eerste twee worden uitgeschreven en de rest vanaf *Terza* als cijfer wordt genoteerd. Diophantus' *M*onade treffen we in de eerste regel: *N*umerus, getal. Getal zonder de onbekende, dus de absolute getallen.

Van der Hoecke legt uit én laat met een tabel zien hoe machten gecombineerd worden bij vermenigvuldigen. '*So en hebdi maer te addiren haerlieder ghetalen oft nommers*'. In de tabel zien we nog een 0 (nul) boven de *N* van Numerus staan, als het getal dat men in dit geval te addiren heeft.

Een voorbeeld van het vermenigvuldigen van twee tweetermen tot slot, zie hiernaast voor *10se – 6 pri* keer *8 pri + 12 ni*. Helemaal symbolisch is de notatie nog steeds niet, in dit voorbeeld verraadt vooral de *n* van numerus nog zijn rol van een afgekort tekstelement aan de verbuiging naar het meervoud (*ni,* voor numeri), inclusief het boven de *n* noteren van de kleine *i*. Maar de uitkomst is goed en het vermenigvuldigschema overzichtelijk.



Van Descartes tot nu

Descartes gebruikte in 1637 bijna de notatie die we nu nog steeds gebruiken. Descartes week nog wel af voor tweede machten, die ook vaak (niet altijd) met letterverdubbeling werden aangegeven.

1 Ougthred's vergelijking heeft als oplossing de laatste twee cijfers van het publicatiejaartal.

Een klein fragment uit de *Géométrie* uit 1637 laat wat van de variatie zien:

> tiplier l'vne par l'autre; Et $\frac{a}{b}$, pour diuiser a par b; Et aa,
> ou $\overset{2}{a}$, pour multiplier a par soy mesme; Et $\overset{3}{a}$, pour le
> multiplier encore vne fois par a, & ainsi a l'infini; Et
> $\sqrt{\overset{2}{a}+\overset{2}{b}}$, pour tirer la racine quarrée d' $\overset{2}{a}+\overset{2}{b}$; Et
> $\sqrt{C.\,\overset{3}{a}--\overset{3}{b}+abb}$, pour tirer la racine cubique d' $\overset{3}{a}--\overset{3}{b}$
> $+abb$, & ainsi des autres.

Descartes gaf ook richtlijnen à la Viète voor het gebruik van de letters. We vinden steevast de laatste letters van het alfabet, *x*, *y* en *z* voor de onbekenden en de eerste letters, *a*, *b*, en *c*, als coëfficiënten in vergelijkingen of probleemsituaties. Deze verdeling van het alfabet in kop en staart heeft het gewonnen van die in klinkers en medeklinkers van Viète. Later is de conventie ontstaan typisch tellende variabelen, zoals indices bij rijen, met de letters *n*, *m*, *i*, *j* en *k* aan te gaan geven.

Standaardisatie van de notatie verliep heel geleidelijk. Pas door de brede bekendheid van de infinitesimaalrekening in de stijl van Newton of Leibniz (dus nog wel wat jaren later) kwam een redelijke uniformiteit tot stand. Zij legden de uiteindelijke normen voor de wiskundige notaties in principe vast, zoals de grote bijbelvertalingen (Luther, King James, Statenvertaling) dat op gebied van grammatica en spelling in diverse landen deden.

Gebroken en negatieve machten; letters als exponent

Simon Stevin (1548 - 1620) gebruikt in zijn *Van de Spiegheling der Singhkonst* al gebroken machten; Stevin behandelt hier de wiskunde van de gelijk zwevende temperatuur, het opdelen van het muzikaal octaaf in twaalf gelijke delen. Wiskundig komt dat neer op bepalen van de 12e machtswortel uit 2 en hun machten. Stevin gebruikt een notatie met breuken, maar alleen in dit in zijn tijd niet uitgegeven werk en ook niet in zijn algebraïsche werken.

Al eerder had Nicole Oresme (1323 – 1382) in zijn *Algorismus proportionum* gebruikt wat wij gebroken machten zouden noemen, maar deze waren evenmin gemeengoed geworden.

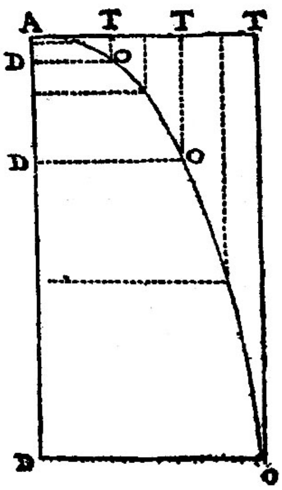
Het *rekenen* met gebroken en negatieve machten treffen we in actief gebruik aan bij John Wallis die in zijn *Arithmetica Infinitorum* van 1656 sommen van machten onderzoekt van de vorm:

$$0 + 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36$$

in verhouding tot sommen van het zelfde aantal van de grootste term, dus in verhouding tot:

$$36 + 36 + 36 + 36 + 36 + 36 + 36.$$

Wallis laat met wat hij inductie[1] noemt zien dat zo'n verhouding steeds dichter bij 1 : 3 komt. De illustratie bij propositie 23 geeft duidelijk aan waar het om gaat: de oppervlakte van het stuk *ATTTOOOA* boven de parabool ten opzichte van de oppervlakte van de hele rechthoek. Voor derde machten vond Wallis de verhouding 1 : 4, enzovoort.



1 Wallis geeft geen Volledige Inductie in de moderne zin. Hij is tevreden dat hij aan de hand van voorbeelden met topterm 1, 2, 3, 4, 5 en 6 kan laten zien dat er een patroon optreedt van breuken die steeds minder van 1/3 verschillen.

Wallis onderzoekt verderop in het boek ook andere getalrijen (en dus andere typen paraboolachtige krommen), bijvoorbeeld rijen van diverse soorten wortels en rijen die ontstaan door de termen van twee rijen te vermenigvuldigen of op elkaar te delen. Daarbij is hij heel expliciet in het aangeven van wat hij de *index* van de rij noemt.

Zo wordt bijvoorbeeld de rij van vierkantswortels:

$$\sqrt{}^{2}0a \qquad \sqrt{}^{2}1a \qquad \sqrt{}^{2}2a \qquad \sqrt{}^{2}3a$$

vermenigvuldigd met een rij van vijfdemachtswortels

$$\sqrt{}^{5}0b \qquad \sqrt{}^{5}1b \qquad \sqrt{}^{5}2b \qquad \sqrt{}^{5}3b$$

via de tussenstappen

$$\sqrt{}^{10}0a^{5} \qquad \sqrt{}^{10}1a^{5} \qquad \sqrt{}^{10}32a^{5} \qquad \sqrt{}^{10}243a^{5}$$

en

$$\sqrt{}^{10}0b^{2} \qquad \sqrt{}^{10}1b^{2} \qquad \sqrt{}^{10}4b^{2} \qquad \sqrt{}^{10}9b^{2}$$

tot

$$\sqrt{}^{10}0a^{5}b^{2} \qquad \sqrt{}^{10}1a^{5}b^{2} \qquad \sqrt{}^{10}128a^{5}b^{2} \qquad \sqrt{}^{10}2187a^{5}b^{2}$$

waarbij een rij ontstaat die Wallis beschrijft met index $\frac{7}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5}$.

In de tekst komen de samenstellingen en verschillen van indices voor, in uitdrukkingen als:

$$2 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{5}{2} \text{ en } 2 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2}.$$

Maar Wallis gebruikt de index *niet* als exponent, hij noteert de noemers van de index nog met wortels en de negatieve indices of verschillen van indices horen nog steeds bij delingen.
Newton ten slotte komt de eer toe als eerste ook in de exponent letters gebruikt te hebben, meteen ook breuken als *m/n*.

Terugblik en conclusie

De geschiedenis van de notatie van machten laat zien hoe het algebraformalisme zich ontwikkelt van beschrijving in woorden, via afkortingen en symbolen naar een mechanisme, waarin de notatie een stuk van het ‘denkwerk’ overneemt. Wat dat betreft belicht de tabel van Van der Hoecke (figuur 3) een essentie: er kunnen bij algebra eenvoudige rekenregels gegeven worden, waarbij correct opvolgen van de regels tot juiste resultaten leidt, in dit geval het volgen van de optelregel voor exponenten bij vermenigvuldiging. Dat is een belangrijk gegeven bij het bedrijven van wiskunde met behulp van algebra (in de zin van rekenen met letters en symbolen): de verplaatsing van reflectie naar algoritmisch handelen op grond van regels die de vorm van de neergeschreven algebra *beschrijven*, maar niet meer *verklaren*. In dit proces zit betekenisverlies als het ware ingebouwd, of we dat als didactici nu willen of niet.

Verlies van zichtbare betekenis was ook te zien in de geleidelijke overgang van de oude meetkundig geladen A-kwadraat en A-kubus naar A^2 en A^3. De notatie met cijfers brengt de oude meetkundige betekenissen buiten beeld en plaatst bijna vanzelf de twee machten van A in een rij, die begint met A, stapt van A^2 naar A^3 en A^4 en nergens ophoudt. De nieuwe, minder meetkundig betekenis-geladen machtnotatie maakt het mogelijk de macht A^n te beschouwen, het algemene model voor de elementen van de rij A^1, A^2, A^3, ...

Aggregatie, groepering

In de vier uitdrukkingen $(x^2 + 4) \cdot (3 - 2x)$, $\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{3 - 2x}$, $\dfrac{3 - 2x}{x^2 + 4}$, $a^{x^2 + 4} + b^{3 - 2x}$

vormen de fragmenten $x^2 + 4$ en $3 - 2x$ samenhangende onderdelen van de formules. Haakjes, wortels, deelstreep, exponentiëring, ze werken alle vier als groeperende middelen: aggregatie. Aggregratie heeft direct te maken met wat wij tegenwoordig volgorde van bewerkingen noemen, maar beperkt zich in de geschiedenis hoofdzakelijk tot het groeperen met betrekking tot optellen en aftrekken van een serie termen.

Hieronder volgt een kleine selectie van wat afwijkt van het nu gebruikelijke; de selectie is groot genoeg om vast te stellen dat ook hier betekenis in specifieke situaties interfereert met het ontdekken van algemene vormen en dat uiteindelijk een systematiek ontstaat, die van de gepaarde haakjes. Tot in het eerste kwart van de 19e eeuw komen echter vormen voor die vanuit modern perspectief bizar aandoen.

Haken behoren direct al tot de oudst gebruikte groeperingsmiddelen.
Hier *blokhaken* in combinatie met onderstreping. *Bombelli (1550):*

$$R^3\underline{[2\tilde{m}R\underline{[0\tilde{m}.121]}]}\text{ voor }\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

Wat de haken betreft is dit voorbeeld een vroeg en geïsoleerd verschijnsel.
Bombelli gebruikt ook in de gedrukte versies een letter L (Legata) en zijn spiegelbeeld om aan te geven waar de R.q (Vierkantswortel) zich over uitstrekt. Let op de minuscule tekentjes voor de variabele: boven de 20 en de 2 in het rechterlid.

4.p.R.q.L 24.m.20.⅃ Eguale à 2.

Dat is:

$$4+\sqrt{24-20x} = 2x\,.$$

Lange tijd werd ook de voorkeur gegeven aan het groeperen met één extra grafisch element, en niet twee paarvormende tekens, zoals bij haken. Strepen boven de letters, *Newton (1669)*:

$$\overline{\overline{\overline{y-4}\times y+5}\times y-12}\times y+17=0.$$

voor:

$$(((y-4)\times y+5)\times y-12)\times y+17 = 0$$

Dit is zeer gebruikelijk in de 17e en 18e eeuw. De strepen werden ook gebruikt in combinatie met wortels; de lange staart van de wortel, die wij nu gebruiken, heeft hier zijn bron.

Descartes gebruikt in *La* Géométrie *(1636)* helemaal geen haakjes; we vinden wel vormen als de volgende en vaak met nog hogere stapels termen bij de accolades:

$$y^6 -2by^5 \left.\begin{array}{l}-2cd\\+bb\\+dd\end{array}\right\} y^4 \left.\begin{array}{l}+4bcd\\-2ddv\end{array}\right\} y^3 \left.\begin{array}{l}-2bbcd\\+ccdd\\-ddss\\+ddvv\end{array}\right\} yy -2bccddy + bbccdd.$$

Punten markeerden ook vaak de aggregatie, vooral in combinatie met wortels. Zo komt $\sqrt{}.2-\sqrt{2}.$ bij Descartes voor in de rol van $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ en de punten zouden dus gelezen kunnen worden als haakjespaar. Maar de punt achter de wortel kon *op zichzelf* al aanduiden dat de wortel genomen moest worden over de verdere staart van de formule.
We treffen dan ook wel:

$$\sqrt{}.2-\sqrt{}.2+\sqrt{}.2+\sqrt{}.2+\sqrt{}.2+\sqrt{}2$$

voor de zijde van een regelmatige 128-hoek, dat wil zeggen:

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2}}}}}$$

Dit voorbeeld komt uit een tekst van Dibaudius (1605) over boek X van de Elementen van Euclides, waarin wortelconstructies van het type $\sqrt{A+\sqrt{B}}$ voorkomen. Juist hier is deze notatie ideaal.

Bij *binomiaalcoëfficiënten* worden van de 17e tot ver in de 19e eeuw vaak factoren als:

$$n,\ n-1,\ n-2$$

slechts door punten gescheiden zodat regelmatig verschijnt:

$$n \cdot n-1 \cdot n-2$$

Of werden n en 1 samengehouden door de punten zoals bij de wortelnotatie?
Deze vormen zijn zeer gebruikelijk bij bijvoorbeeld Wallis, Leibniz, Bernoulli, Euler, Gauss. Dít voorbeeld komt uit de *Exercises de Calcul Intégral* van Legendre, uit 1811!

Een bijzondere notatie die met het geordend noteren van veeltermen te maken heeft, vinden we allereerst bij Descartes, maar komt ook later voor. Bij de uitdrukking $x^6 - bx = 0$ zijn de ontbrekende machten van x en de constante term nu zichtbaar afwezig.

$$x^{\cdot 6} * \quad * \quad * \quad * \cdot\cdot\, bx * \infty\, 0$$

Universele substitutie

Vooral de voorbeelden van de punten bij wortels en binomiaalcoëfficiënten laten zien dat notaties vaak gebonden zijn aan de algebraïsche context en niet zonder meer ‘algemeen’ bruikbaar waren. Strepen (bij wortels en in delingen) en haakjes (als universeel groeperingsmiddel) hadden dat euvel niet, en deze twee notaties hebben dan ook de 21ste eeuw gehaald.
Dit is een goed moment om stil te staan bij een belangrijke eigenschap van de moderne notatie: de universele mogelijkheid van substitutie. Neem als uitgangspunt een uitdrukking als:

$$\frac{2}{1+x}$$

De atomen 2, 1 en x van deze uitdrukking kunnen we elk op zich vervangen door andere getallen, letters, maar ook door complete formules zonder dat de syntactische structuur van de formule kapot gaat. Om zekerheid te krijgen dat het nieuwe onderdeel daarbij niet gaat interfereren met de rest, plaatsen we het zo nodig binnen een haakjespaar; zo’n paar maakt van de formule een van buiten niet beïnvloedbaar blok. Vervang hier 1 door $x^2 + y^2$, 2 door een integraal en x door de oorspronkelijke formule, de formule blijft een correcte grammaticaal-syntactische structuur bezitten:

$$\frac{\displaystyle\int_{-x}^{y} \frac{dt}{2+\sin t+\cos t}}{(x^2+y^2)+\left(\frac{2}{1+x}\right)}$$

Vergelijking van de twee uitdrukkingen (de oude en de nieuwe), leert dat onze moderne notatie zowel de globale structuur als de detailstructuur in zich verenigt. Elk detail kan een nieuw geheel worden, zoals in een taalkundige zin een woord vervangen kan worden door een lange omschrijving. De moderne notatie verbeeldt vooral syntactische structuur en in veel mindere mate een uit te voeren handeling. Als waarden voor x en y voor de grote formule van zoëven gegeven zijn, dan ligt helemaal nog niet vast wat er als eerste ‘gedaan’ of berekend moet worden. Onze algebranotatie is een structuurnotatie en pas in latere instantie een rekennotatie.

Nieuwe notaties voor rekenende mensen en computers

Van de New Math-periode heeft de schoolalgebra minstens één notatie-element overgehouden: de zogenaamde pijlentaal. Daarbij staan de pijlen voor bewerkingen. Bijvoorbeeld:

$$12 \xrightarrow{+\,8} \xrightarrow{\times\,5} \xrightarrow{-\,34} 66$$

of een ander voorbeeld, nu in het jasje van de wisweb-applet Algebrapijlen:

Pijlentaal legt de nadruk op het in volgorde uitvoeren van operaties. Die volgorde is compleet uitgeschreven en de notatie geeft geen zichtbare indeling weer in subformules zoals bij de traditionele notatie het geval is.

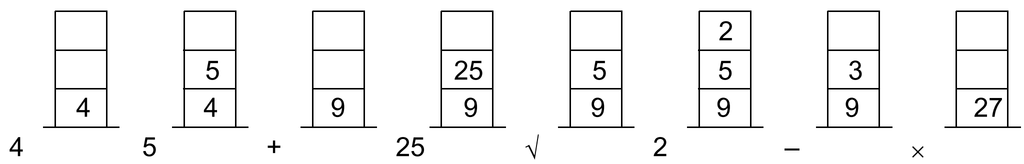
Notaties zijn gericht op wie ze lezen moet. Is de lezer een berekening-uitvoerende machine, dan is zo'n pijlenachtige notatiewijze zeer functioneel. De meest voorkomende vorm in de computerwereld is het zogenaamde postfix-systeem, dat we met het volgende voorbeeld illustreren.
Hier is een in postfix genoteerde berekening:

$$4 \quad 5 \ + \ 25 \ \sqrt{}\, 2 - \times$$

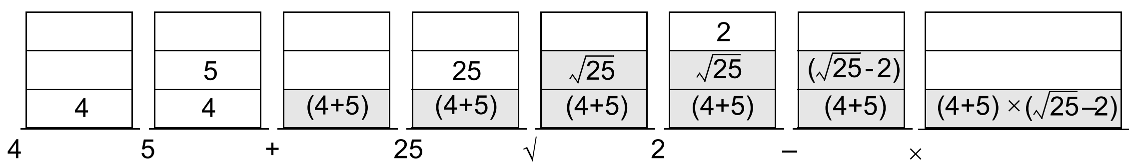
De uitvoering geschiedt door van links naar rechts te lezen en daarbij:

– getallen op een stapel op te stapelen
– bewerkingen uit te voeren op de bovenste elementen van de stapel
– uitkomst gaat voor zover nodig op de stapel
– als de hele serie is uitgevoerd, blijft de uitkomst op de stapel liggen.

Van links naar rechts is hieronder als film steeds de status van de stapel weergegeven, eronder staan de ingelezen objecten:



We kunnen ook de bewerking in standaardnotatie laten staan, dan levert de machine een algebraïsche expressie als resultaat af: de grijze veldjes hieronder zijn dus stukjes opgebouwde formule in standaardnotatie. We zien hier een vertaalproces aan het werk:



Zo kan ook bij een gegeven pijlenketting de formule in stappen worden opgebouwd, een activiteit die leerzaam lijkt maar toch zelden op school voorkomt.
Een andere nieuwe notatiewijze vinden we bij spreadsheets als Excel. Een spreadsheet is een rooster waarvan elke cel een waarde vertegenwoordigt, berekend door een aan de cel gebonden formule die naar andere cellen kan verwijzen.

C7 = B7+C6

	A	B	C	D	E	F	G
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7
3	1	3	6	10	15	21	28
4	1	4	10	20	35	56	84
5	1	5	15	35	70	126	210
6	1	6	21	56	126	252	462
7	1	7	28	84	210	462	924
8	1	8	36	120	330	792	1716

Zo hebben we dus een tweedimensionaal schema van variabelen, die elk als naam het eigen coördinatenpaar in het rooster hebben. In Excel kan bijvoorbeeld in cel *C7* de formule *B7* + *C6* staan. De waarden van de cellen naast en boven *C7* worden dan opgeteld. Plaatsen we het getal 1 in de cellen in kolom *A* en in de cellen in rij 1, en kopiëren we de cel *C7* naar de rest van de cellen, dan hebben we al een schuin liggende driehoek van Pascal te pakken.
De kracht van spreadsheets is onder andere dat een formule van een cel gekopieerd kan worden naar een groep andere cellen, waarbij de verwijzingen naar believen relatief of absoluut meegekopieerd kunnen worden. Geheel nieuwe mogelijkheden en gebruikswijzen zijn hierbij ontstaan, niet alleen voor boekhouden en het berekenen van gewogen gemiddelden bij toetsen maar ook voor wiskunde!

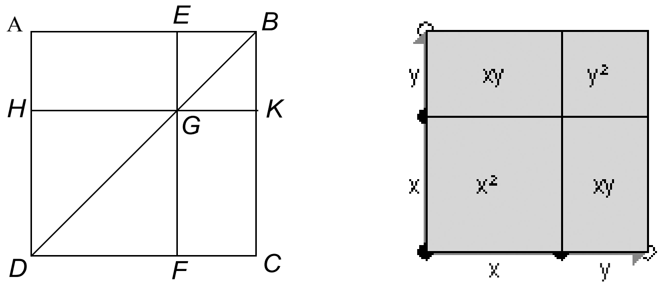
9.4 Algebra en meetkunde: behulpzame buren of tegenvoeters?

Euclides en het applet oppervlakte-algebra

Twaalfhonderd jaar vóór het woord ‘algebra’ zijn plaats in de wiskunde ging innemen, stelde Euclides, dus rond 300 voor Christus, zijn propositie II, 4 op:

> Als een lijn willekeurig in tweeën wordt gesneden, is het vierkant op het geheel gelijk aan de vierkanten op de segmenten en twee keer de rechthoek bevat door de segmenten.

Zelfs de oudst bekende handschriften van de Elementen bevatten al figuren. Bij prop. II, 4 vinden we de tekening van figuur 4 links.



figuur 4 : Euclides en het wisweb. Tweemaal geometrische algebra?

Het is voor ons 21ste-eeuwers verleidelijk daarin te lezen:

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

onder verwijzing naar een applet van het welbekende *Wisweb*[1], zoals rechts afgebeeld. Het lijkt wel heel erg op elkaar. Maar waarom staat daar die diagonaal *BD* bij Euclides? Die heeft er toch niets mee te maken?

Het wordt duidelijk als we Euclides’ bewijs doornemen. Dat bestaat uit het construeren van een vierkant op *AB*, hetgeen gebaseerd is op propositie I, 46; deze staat in de Elementen juist voor de stelling van Pythagoras. Daarna wordt de diagonaal *BD* getrokken en tenslotte *HK* evenwijdig aan *AB* door het snijpunt *G* van *CF* en *BD*. Het bewijs zelf bestaat uit een lange redenering om aan te tonen dat *DFGH* en *GKBC* gelijk zijn aan de bedoelde vierkanten en *HGCA* en *FEKG* elk gelijk aan de bedoelde rechthoek. De diagonaal *BD* speelt een dominante en noodzakelijke rol in deze redenering. Hij schept allerlei gelijke hoeken en een spel met gelijkbenige driehoeken is de ruggegraat van de beargumenteerde constructie van de figuur, die in de zin van Euclides het eigenlijke bewijs van de propositie vormt.

Zo op het eerste gezicht lijkt Euclides dus niet veel op te hebben met $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$.

1 http://www.wisweb.nl met veel meer applets rond algebra.

De formule ziet eruit als een berekening met objecten die iets getalachtigs moet voorstellen, het meetkundebewijs spreekt over vormen van figuren, samennemen van wat de lijnen 'omvatten'. De mogelijkheid van de ligging van de vierkanten en rechthoeken in de figuur ziet de huidige leerling en de maker van het applet niet meer als een probleem. De nadruk ligt bij het wisweb-applet elders, namelijk:

– op identificeren van een product van twee factoren met een oppervlakte;
– op het onderzoeken van de geometrisch-combinatorische structuur die hoort bij het samennemen van lijnstukken x en y tot $x + y$, en het met zich zelf vermenigvuldigen tot $x + y)^2$;
– op het interpreteren van $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ als een samenvatting van het resultaat.

Zo gezien vormt het wisweb-applet eerder een algebraïsche voortzetting in een wat andere richting en met andere middelen dan een contrast met Euclides.

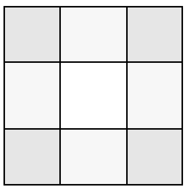
De klassieke Griekse wiskunde zelf is tweeslachtig. Er is de Pythagoreïsche stroming, die uitgaat van het getal als basis, en er is de meetkundige stroming waar figuren van punten en lijnen de toon zetten. De meetkundige boeken van Euclides' Elementen zijn voor die laatste visie gezichtsbepalend. Euclides doet daar bijvoorbeeld wat geen modern didacticus zou durven: de stelling van Pythagoras vertonen zonder gewag te maken van de 3-4-5-driehoek. Diophantus lijkt meer een vertegenwoordiger van de rekenkundige traditie. Maar Diophantus gebruikt als hij redeneerstappen in het rekenkundige proces beschrijft, wel dezelfde terminologie als Euclides in zijn 'Algemene regels', waarin bijvoorbeeld staat:

> Als gelijken van gelijken worden afgenomen, zijn de resten gelijk.

In de Arabische-Perzische wiskunde tijdens onze Middeleeuwen wordt de Griekse meetkundige stijl voortgezet. Vergelijkingen worden daarin opgelost middels meetkundige figuren en de band met de geometrische algebra van Euclides is zonneklaar. Maar een voorbeeld uit de *Hisab al-jabr w'al-muqabala* van Al'kwarizmi (780 – 850) van Bagdad doet vermoeden dat er toch net iets meer aan de hand is dan bij Euclides. *Jabr* heeft in deze traditie de betekenis van optellen van hetzelfde bij beide leden van een gelijkheid om in de beide leden geen weg te nemen termen meer te hebben. (De veelgebruikte formulering 'om negatieve termen te elimineren' is wat anti-historisch en bovendien heeft *jabr* andere betekenissen als *hergroeperen* en *het zetten van gebroken botten*).
In het volgende voorbeeld word iets aan de leden toegevoegd. De vraag luidt:

> Een vierkant vermeerderd met tien van zijn wortels is gelijk aan 39,
> hoe groot is dan het vierkant?

Eerst volgt een oplossing als rekenkundig recept: neem de helft van de 10, dat is 5. Tel het vierkant daarvan bij 39, het resultaat is 64. Neem de wortel, dat is 8. Trek hiervan de 5 af. Het antwoord is 3.



Het is weer onmiddellijk duidelijk hoe het recept op gelijksoortige vergelijkingen algemeen kan worden toegepast. Als bewijs voor de methode wordt een vierkant getekend, dat het nog te vinden vierkant voorstelt of is. Op de vier zijden worden rechthoeken geplaatst ter breedte $2\frac{1}{2}$. Deze vier rechthoeken geven samen 10 keer de wortel. De vier in de vier hoeken toegevoegde vierkanten vormen samen het vierkant van 5. Van het grote vierkant weten we nu de zijde: 8, de totale oppervlakte is immers 64. De wortel is dus 3, namelijk 8 minus twee maal de $2\frac{1}{2}$.

Het bewijs van de methode is zuiver geometrisch, in de stijl van Euclides. Maar toch smaakt het anders! Werd bij Euclides een algemene ligging van vierkanten getekend en een relatie tussen oppervlakten gegeven die uit de onderlinge ligging volgt, hier wordt in zekere zin in de figuur al uitgegaan van het te vinden vierkant. Het probleem is immers gedetermineerd door de gegeven waarden 10 en 39.

Binnen de Arabische stroom van de wiskunde wordt de traditie voortgezet om bij het construeren van oplossingen ook andere constructiemiddelen dan rechte lijn en cirkel toe te laten; met name Omar Khayam is beroemd om zijn oplossing van een kubische vergelijking met behulp van een cirkel en een hyperbool. Omar is eigenlijk nog meetkundiger dan Al'kwarizmi. Hij waakt ervoor dat de diverse grootheden in de vergelijking ofwel alle lijnvormig, ofwel vlak, of ruimtelijk zijn door bijvoorbeeld een gegeven lengte met een eenheidslengte tot rechthoek te maken.

Viète maakt heel expliciet onderscheid tussen getallen en grootheden. In zijn *In artem analytice isagogen* (1591) bouwt hij een systeem van grootheden, waarin alleen grootheden van dezelfde aard (species) konden worden samengenomen/opgeteld. In concrete vorm zagen we dit al bij de manier waarop Viète zijn vergelijkingen noteerde: homogeen, zie paragraaf 9.2.
Grootheden konden wel altijd vermenigvuldigd worden. Daarbij ontstaan nieuwe soorten zoals oppervlakte en inhoud. Maar Viète bouwt er een algemeen abstract systeem mee, waarin ook kubus met kubus wordt vermenigvuldigd tot een nieuwe grootheid, die niet zo concreet geïnterpreteerd kon worden!

De ware eenheid in verscheidenheid van meetkunde en algebra komt tot stand in de zeventiende eeuw. De algebra wordt daarbij volwassen, groeit van kind dat speelt met wat wereldvreemde problemen over vergelijkingen naar een ambachtsman die uiterste bedreven is in het helpen bij oplossen van wiskundige en zelfs niet wiskundige problemen.

9.5 Analyse en synthese, de lessen van Descartes

In 1637 publiceerde René Descartes (1596 – 1650) zijn *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences*. Het Discours zelf werd gevolgd door drie essays: *La Dioptrique, Les Météores* en *La Géométrie* die de methode in verschillende gebieden demonstreerden.

Descartes' *La Géométrie* uit 1637 is dus onderdeel van zijn algemene methode voor wetenschappelijke problemen. Uitgangspunt is dat alleen de wiskundige methode tot echte zekerheid leidt in de wetenschap. Dat levert hem een werkwijze op die eenvoudig gezegd hierop neer komt:

a. elk vraagstuk dat over grootheden gaat, kan worden teruggebracht tot een *meetkundig* probleem;
b. elk meetkundig probleem kan worden teruggebracht tot een *algebraïsch* probleem;
c. elk algebraïsch probleem kan worden teruggebracht tot het *oplossen* van een of meer *vergelijkingen* met één of meer onbekenden.

Wat de waarde van het filosofisch-methodische punt *a* ook is, de waarde van *b* en *c* zit in het aangeven van een methodiek die vanuit wiskundig standpunt beoordeeld en besproken kan worden. De eerste zin van Boek I van *La Géométrie* valt meteen met de deur in huis:

> TOus les Probleſmes de Geometrie ſe peuuent facilement reduire a tels termes, qu'il n'eſt beſoin par aprés que de connoiſtre la longeur de quelques lignes droites, pour les conſtruire.

Elke meetkundige vraag kan vertaald worden in een vraag naar het vinden van bepaalde lijnstukken in de meetkundige figuur. Het laatste woord van de eerste zin van *La Géométrie* vertelt wat de wiskundige methode daarbij is: *construire*. Het belang daarvan mag niet onderschat worden: het gaat om het bepalen van de oplossing van problemen door expliciet construeren van de oplossingen; beredenerend bewijzen van stellingen over het oplossen van een probleem is in dit kader echt een zwaktebod. Zo geeft Descartes ook meetkundige constructies voor de oplossingen van vergelijkingen.

Voor het vertalen naar algebra van een meetkundig probleem geeft Descartes vervolgens een concreet werkplan. De eerste stap daarvan is belangrijk en vraagt nadere toelichting, omdat de stap de kern van de methode vormt:

a. doe alsof het probleem opgelost is;
b. geef alle lijnstukken in de figuur namen (letters), bekende zowel als onbekende;
c. probeer één grootheid op twee verschillende manieren uit te drukken in de aldus benoemde lijnstukken; die uitdrukkingen zijn gelijk, dat geeft een *vergelijking*;
d. los de onbekende uit de vergelijking op.

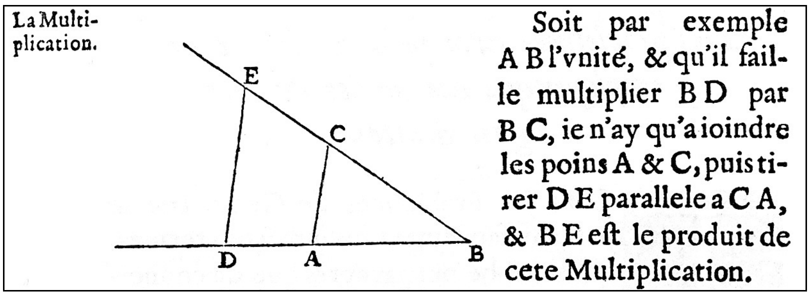
De analytische methode

Doe alsof het probleem opgelost is: Descartes grijpt hier terug op Pappus (4e eeuw na Christus). Pappus zegt dat je om de oplossing van een probleem (d.w.z. de constructie of het bewijs dat gezocht wordt) te vinden, ook uit kunt gaan van de situatie dat de constructie al gedaan is. Je bestudeert dan de figuur om de essentiële kenmerken en de verbanden met eenvoudiger proposities te vinden. Dit is de fase van de *analyse*. In de analysefase wordt de situatie als het ware uiteengerafeld. Daarna volgt de fase van de *synthese*, waarin vanuit de gevonden ontleding de constructie, of het bewijs, wordt opgebouwd.
De synthesefase is in de Griekse meetkunde de eigenlijke oplossing. ‘De oplossing’, ja, omdat het bewijs of de te vinden constructie ‘de oplossing’ van het probleem is. De analysefase is in die visie in feite een vooronderzoek.

De ‘analytische methode’ in de meetkunde heeft zijn naam aan dit onderscheid van Pappus te danken. Het nieuwe van Descartes’ methode is dat hij in de analysefase de algebra op een speciale manier inzet, op de zo even globaal beschreven manier. Later – en zeker nu op school – zal het algebraïsche proces als dé oplossingsfase worden gezien, culminerend in het vinden van waarden voor de onbekenden of van vergelijkingen die de oplossingsverzameling vastleggen. Het doorrekenen van ‘de oplossing’ in de uitgangssituatie en de eventuele meetkundige toetsing horen dan bij de controle van de oplossing en vormen niet de oplossing zelf. Voor wie zich zeker voelt van zijn algebraïsche techniek zijn ze niet eens meer essentieel. Het is een belangrijke verschuiving van de kern van de wiskundige activiteit, van *constructie* naar *analyse*.
Op vele plekken in *La Géométrie* is echter duidelijk dat de synthesefase nog niet vergeten is, integendeel.

Vermenigvuldigen, eenheid, opgeven van homogeniteit

In het begin van boek I laat Descartes de hoofdbewerkingen van de algebra zien, toegepast op lijnstukken. Samenvoegen of wegnemen komt overeen met optellen en aftrekken, de traditionele samenhang. De eerste echte constructie van het boek is die voor vermenigvuldigen van lijnstukken en die is opvallend.


La Multiplication.

Soit par exemple A B l’vnité, & qu’il faille multiplier B D par B C, ie n’ay qu’a ioindre les poins A & C, puis tirer D E parallele a C A, & B E est le produit de cete Multiplication.

Descartes heeft daarvóór al aangegeven dat hij een eenheidslijnstuk aanneemt, dat willekeurig gekozen kan worden. In de figuur op de volgende pagina is dat lijnstuk *AB*.
DB en *CB* zijn gegeven lijnstukken. *ED* wordt evenwijdig aan *AC* genomen en dan geldt dat *AB*

en *DB* zich verhouden als *BC* en *EB*. *EB* is de vierde evenredige van *AB*, *DB* en *BC*. De tekst naast de illustratie: dan is *EB* het product van *DB* en *CB*.

Het product van twee lijnstukken is hier een lijnstuk, en geen oppervlakte, zoals bij Viète! a^2 wordt dus gedefinieerd als de vierde evenredige van 1, *a* en *a*, d.w.z. door $1 : a = a : a^2$. Descartes zegt dat hij wel de termen kwadraat en kubus zoals gebruikelijk hanteert, maar dat a^2 en b^3 lijnstukken zijn. De consequentie is dat ook uitdrukkingen als $ab - c$ zinvol zijn; de eis dat algebraïsche vormen en uitdrukkingen homogeen moeten zijn, is vervallen. Descartes legt wel uit dat er door toevoegen of wegnemen van eenheden in de termen van $aabb - b$ er een grootheid van dimensie drie kan ontstaan, waaruit de kubische wortel genomen kan worden. De kubische wortel uit een grootheid, een lijnstuk *a,* is bij Descartes bepaald door een voortgezette evenredigheid, dus door de *x* in $1 : x = x : y = y : a$, en niet als het zoeken van een zijde *x* bij een gegeven kubische grootheid *a*.

Descartes' algebra is, de titel van het boek *La Géométrie* getrouw, een algebra van lijnstukken, geschapen om meetkundige problemen op te kunnen lossen en algebraïsche problemen meetkundig te kunnen benaderen.

Van meetkunde algebra maken, modelleren

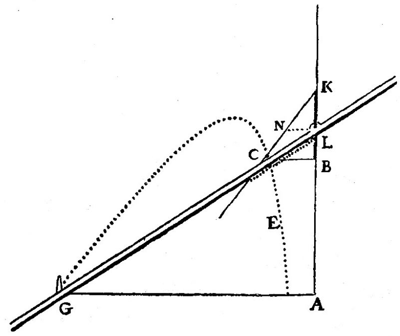
Geef alle lijnstukken in de figuur namen, zowel bekende als onbekende.

In combinatie met 'Doe als of het opgelost is' is dit een krachtige beschrijving van wat wij tegenwoordig de modelleerfase van een probleem zouden noemen. Descartes geeft bij zijn oplossingsstrategie ook nog de praktische aanwijzing: kies de letters *a, b, c, d* voor de bekende lijnstukken en *x, y, z* voor de onbekende lijnstukken. Deze aanwijzing is algemeen opgevolgd, dat hoeft geen betoog.

La Géométrie gaat over meetkunde, de gebruikte algebra is een hulpmiddel. Descartes is er vooral op uit te classificeren welke constructiemiddelen bij bepaalde problemen nodig waren.

Een bijzonder gereedschap van breed toepasbare aard is daarbij de methode om punten in het vlak vast te leggen met behulp van de afstanden tot twee gegeven lijnen. Omdat het te zoeken punt onbekend is, worden deze afstanden volgens de zojuist gegeven aanwijzing met x en *y* benoemd.

Het probleem dat in figuur 5 is uitgebeeld, is het eerste in het boek waarbij dat gebeurt. Het gaat om de gestippelde kromme lijn, die met een eenvoudig mechaniek gemaakt wordt. (Mechanisch gegenereerde krommen zijn een belangrijk thema in de meetkunde van de 17e eeuw; denk bijvoorbeeld aan de cycloïde, de kromme die ontstaat als we één punt van een rollende cirkel volgen.)



Aprés cela prenant vn point a discretion dans la courbe, comme C, sur lequel ie suppose que l'instrument qui sert a la descrire est appliqué, ie tire de ce point C la ligne C B parallele a G A, & pourceque C B & B A sont deux quantités indeterminées & inconnuës , ie les nomme l'vne y & l'autre x. mais affin de trouuer le rapport de l'vne à l'autre; ie considere aussy les quantités connuës qui determinent la description de cete ligne courbe, comme G A que ie nomme a, K L que ie nomme b, & N L parallele a G A que ie nomme c. puis ie dis, comme N L est à L K, ou c à b, ainsi C B, ou y, est à B K, qui est par consequent $\frac{b}{c}y$: & B L est $\frac{b}{c}y - b$, & A L est $x + \frac{b}{c}y - b$. de plus comme C B est à L B, ou y à $\frac{b}{c}y - b$, ainsi a, ou G A, est á L A, ou $x + \frac{b}{c}y - b$. de façon que multipliant la premiere par la derniere. & ainsi l'equation qu'il falloit trouuer est .

$$yy \propto cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac.$$

de laquelle on connoist que la ligne E C est du premier genre , comme en effect elle n'est autre qu'vne Hyperbole.

figuur 5 : x en y als afstanden tot twee vaste lijnen

GA is een vast lijnstuk. Punt *L* beweegt op de verticale lijn door *A.* Het driehoekje van vaste vorm *KLN* schuift als *L* beweegt mee over de verticale lijn. Het punt *C,* snijpunt van de lijn *GL* met de lijn door *K* en *N,* beschrijft de gestippelde kromme.
Hier is lijnstuk *CB y* genoemd en *BA x*.
Verder: *GA = a, Kl = b, NL = c,* de bekende (vaste) grootheden in het probleem.
In de figuur zijn nu direct evenredigheden te vinden wegens de gelijkvormigheden van de driehoeken *KNL* en *KCB* en die van *GAL* en *CBL*. Het lijnstuk *BL* laat zich daarom op twee manieren berekenen; zo komt Descartes tot een *vergelijking* waarin de samenhang van *x* en *y* te zien is. Het is een probleem met een onbepaalde oplossing: er zijn veel punten, of paren lijnstukken *x* en *y* als men wil, die aan het probleem voldoen.
De oplossing is in dit geval een locus, een meetkundige plaats. De vergelijking is van de tweede graad; Descartes spreekt van een kromme 'du premier genre'. Hij trekt de conclusie dat de kromme een hyperbool is.[1]

Vergelijkingen van derde en hogere graad

Los de onbekende uit de vergelijking op. Descartes geeft expliciete constructies voor het oplossen van vergelijkingen van de derde tot en met zesde graad.
In de constructies voor de derde- en vierdegraads vergelijking wordt een cirkel met een parabool gesneden; ligging en afmeting van deze figuren worden uitgedrukt in de coëfficiënten van de vergelijking. Voor de vijfde- en zesdegraads vergelijking snijdt Descartes een hulpkromme, die gegenereerd is door een mechaniek van een draaiende lijn met een verschuivende parabool. Een belangrijk thema in La *Géométrie* is het aangeven welke krommen die op verwante manieren gemaakt worden, geometrisch acceptabel zijn in constructies. Voor de derde en vierde graad zijn dat de kegelsneden, voor de vijfde en zesde graad de zojuist genoemde Cartesische parabool. De graad (in algebraïsche zin) van de Cartesische parabool is een hogere dan die van de gewone parabool; de suggestie van Descartes aan het eind van het boek dat met zijn algemene methode alle constructies (van wortels van vergelijkingen) kunnen worden gevonden is misschien wat kort door de bocht, want dit wordt verder niet uitgewerkt. Het lijkt er op is wel dat Descartes dit als noodzakelijk zag voor zijn plan om alle meetkundige problemen te kunnen oplossen.

Men treft verspreid in *La Géométrie* menige andere praktische algebraïsche aanwijzing aan. In veel situaties bijvoorbeeld kennen we een punt op de te zoeken of te onderzoeken kromme en zoeken we naar het tweede snijpunt met de kromme van een lijn door dat eerste punt. Algebraïsch komt het neer op vinden van een tweede oplossing van een vergelijking als de eerste oplossing bekend is. Het is niet handig de vergelijking dan algemeen op te lossen, het is eenvoudiger de factor die bij de bekende oplossing hoort uit te delen. Descartes demonstreert dit uitvoerig, inclusief de staartdeling bij het delen van een veelterm door een factor.

Slotopmerking

Dat René Descartes 'de analytische meetkunde' in de zin van het gebruiken van coördinaten bij meetkunde heeft bedacht en daarmee zijn grootste bijdrage aan de wiskunde heeft gegeven, is onjuist; Fermat en Mersenne gebruikten verwante methoden en ook Engelse wiskundigen claimden hier prioriteit. Maar de stellingname doet vooral onrecht aan waar het werkelijk om ging. In *La Géométrie* blijkt Descartes vooral systematisch het constructierepertoire van de meetkunde van cirkel en lijn uit te breiden naar hogeregraads krommen, die hij systematisch genereert. Descartes geeft ook aan welke krommen hij hier toelaatbaar vindt. De titel van het boek waarin Henk Bos (1999) deze visie op *La Géométrie* gedetailleerd onderbouwt is veelzeggend: *Redefining geometrical exactness: Descartes' transformation of the early modern concept of construction.*

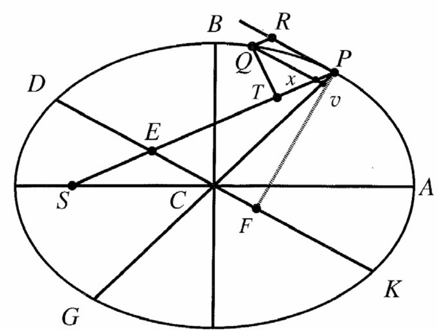
1 Frans van Schooten (1615 – 1660) vertaalde *La Géométrie* in het Latijn, voor de betere verspreiding van het boek. Hij geeft in zijn uitgave ook een (synthetisch) bewijs dat het om een hyperbool gaat.

9.6 Is met algebra alles berekenbaar geworden?

Descartes' uitspraak over het via de meetkundig-algebraïsche route oplossen van alle problemen klinkt overmoedig. Toch is het goed om te verkennen wat de verhouding meetkunde-algebra is in wat misschien wel het belangrijkste toepassingsgebied van de wiskunde is: de sterrenkunde. Het vertelt ons iets over de beperkte berekenbaarheid van de 'wereld'.

De 'grote' teksten in de West-Europese sterrenkunde van vóór 1700 zijn zonder meer:
– De *Almagest* (Ptolemaeus, 85 - 165 na Christus);
– *De revolutionibus orbium coelestium* (Copernicus, 1543);
– *Harmonices mundi* (Kepler, 1619);
– *Dialogo dei massimi sistemi* (Galileï, 1624);
– *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Newton, 1687).

Ptolemaeus beschrijft de kosmos met de aarde als middelpunt van een complex systeem van bewegende sferen en cirkels. Meetkunde dus. Ook de presentatie van de stof volgt de lessen van de meetkunde. Copernicus sluit in opzet nauw bij Ptolemaeus aan; hij gebruikt dezelfde meetkundige methoden, maar opent het gezichtspunt dat de aarde niet het vaste centrale punt van het heelal hoeft te zijn. Galileï ondersteunt hem vooral dáárin en houdt zich ook aan de meetkundige stijl. Kepler introduceert de ellipsbaan van de planeten rond de zon. Hij geeft (in de Astronomia Novae) ook een meetkundig model dat de onderliggende afstanden tussen de planeetbanen bepaalt: de geneste sferen met de vijf regelmatige veelvlakken daartussen.
Van Newton wordt wel gezegd dat hij middels de analyse (de calculus) een bewijs leverde dat de ellipsbaan van de planeten een gevolg is van de universele zwaartekrachtwet, die zegt dat deze kracht omgekeerd evenredig is met de afstand tussen de aantrekkende massa's. Figuur 6 is Newtons tekening bij de centrale propositie 10, die de ellipsbaan aan de orde stelt.



figuur 6 : Bij Newton's bewijs voor de ellipsvormigheid van de planeetbanen.

Newton laat hier zien dat, als de planeet *P* door een centripetale kracht naar *S* in een ellipsbaan wordt gehouden, die kracht omgekeerd evenredig met het vierkant van *SP* moet zijn[1]. Meetkunde dus. De kleine onderdelen van de figuur, bij de planeet *P*, vertegenwoordigen in zekere zin de bewegingsrichtingen en er kan aan analyse in de moderne zin gedacht worden. Wat betreft de concepten beweging en limiet (Newton gebruikt een andere terminologie) is dat zeker juist. Maar algebra, zoals we die bij Descartes in de meetkunde zagen functioneren, dat is het eigenlijk niet. Het bewijs verloopt geheel in Euclidische stijl via samenstellingen van verhoudingen onder gebruikmaking van de eigenschappen van de ellips.

maar hier is ook een grens bereikt. In de *Principia* wordt de ellips*vorm* van de baan van de planeet bewezen met meetkundige hulpmiddelen. Het voorspellen van het moment waarop een planeet zich in een bepaalde positie bevindt is echter een ander verhaal. Tijdens het rekenproces moet daarbij bij gegeven gemiddelde anomalie *M* en excentriciteit *e* de ware anomalie *E* (in radialen) gevonden worden uit:

$$M = E - e\sin E$$

E oplossen uit deze transcendente vergelijking is niet mogelijk met de klassieke meetkundige (en algebraïsche) middelen.

1 Hij voltooit het bewijs later, in propositie 17, door aan te tonen dat bij gegeven startpunt en beginsnelheid van de planeet *P* slechts een unieke mogelijke baan is.

De ellips vertegenwoordigt bovendien het twee-lichamenprobleem. Eén planeet beweegt hierbij rond één zon, zonder storende invloeden van andere planeten. Juist die zichtbare verstoringen van banen leidden later tot het ontdekken van de aanwezigheid van nog niet waargenomen planeten zoals Uranus en Neptunus. Het berekenen van deze storingen en omgekeerd het bepalen van de onbekende planeetposities op grond van deze waargenomen storingen zijn grootse prestaties geweest. Ze zijn echt algebraïsch/analytisch.

9.7 Naar de brede waaier van de moderne algebra's

Ook het algebraïsch oplossen van veeltermvergelijkingen, dat we eerder in dit hoofdstuk bij Ferrari hebben verlaten, hield een belangrijke focus van belangstelling. De pogingen ook voor vijfde- en hogeregraads vergelijkingen een expliciete oplossing met algebraïsche middelen alleen te vinden, stimuleerde veel onderzoek.

Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) liet in 1798 al zien dat de regelmatige 17-hoek met passer en liniaal geconstrueerd kon worden. Algebraïsch betekent dit dat de complexe oplossingen van de vergelijking $x^{17} = 1$ daadwerkelijk berekend kunnen worden als oplossing van een serie vierkantsvergelijkingen, waarbij de coëfficiënten van de volgende vergelijking rationale uitdrukkingen zijn in de wortels van de vorige.
Gauss karakteriseerde ook welke regelmatige *p*-hoeken (*p* priem) aldus zeker construeerbaar zijn. *p* moet een Fermat-priemgetal zijn, dus een priemgetal van de vorm $2^{2^n} + 1$. De enige bekende zijn: 3, 5, 17, 257, 65537.
Gauss toonde in 1799 ook aan dat elke polynoomvergelijking met reële of complexe coëfficiënten een oplossing heeft in het complexe vlak, dat is de zogenaamde fundamentaalstelling van de algebra. De existentie van oplossingen zegt niet veel over het vinden ervan, laat staan het uitdrukken in de coëfficiënten. Natuurlijk werd de zoektocht naar expliciete algebraïsche uitdrukkingen in de coëfficiënten van de vergelijking voor de wortels voortgezet. Echter zonder succes!
Algebraïsch betekent hier: met uitdrukkingen opgebouwd uit de coëfficiënten, met de gewone hoofdbewerkingen en worteltrekken met als index van de wortel een natuurlijk getal, dus met zogenaamde radicalen.

Paolo Ruffini (in 1799) en Niels Abel (in 1824) toonden aan dat voor de ‘quintic’ (de vijfdegraads vergelijking) zulke uitdrukkingen niet kunnen bestaan. Ruffini’s bewijs maakt gebruik van toen moderne hulpmiddelen als permutatie-eigenschappen van de wortels. Zijn bewijs is volledig op een kleine sprong na. Abel komt de eer toe een volledig bewijs te hebben geleverd. De samenhang tussen de oplossingen van vergelijkingen en de getalsstructuren waarin ze leven (de zogenaamde lichamen) werd later door Galois onderzocht; Galois wist te karakteriseren welke vergelijkingen middels radicalen konden worden opgelost. Galois’ werk leunt ook sterk op de permutatie-eigenschappen van de wortels van vergelijkingen en met name op deelverzamelingen permutaties die een deel van de wortels niet verplaatsen. Groepentheorie in optima forma.
Emmy Noether en Bartel van der Waerden brachten de negentiende-eeuwse algebra in de jaren 1920 – 1930 op een hoog abstract niveau. Structuren als groepen, ringen, modulen, lichamen, vectorruimten bepalen nu het beeld; vergelijkingen en hun oplossingen worden een illustratie in de marge van een theorie die ze oorspronkelijk zelf hebben opgeroepen.

Na deze stap naar hogere abstracties gaat het verder naar transcendente uitbreidingen, een algebraïsering van wat een afgeleide van een functie is, ideaaltheorie, algebraïsche krommen en variëteiten die enerzijds bijzondere idealen in een polynoomring lijken te zijn, anderzijds oplossingsverzamelingen van een stel vergelijkingen. Ook de topologie krijgt zijn algebraïsche karakteriseringsmethoden: de homologie- en de homotopiegroepen. Knopen- en grafentheorie, de indeling van de elementaire deeltjes in de quantummechanica, enzovoort: alles lijkt te kunnen worden gekarakteriseerd door groepen. De algemene catalogisering van eindige en oneindige groepsstructuren was dan ook een belangrijk thema van onderzoek in de afgelopen 200 jaar!

9.8 Terug naar de schoolalgebra

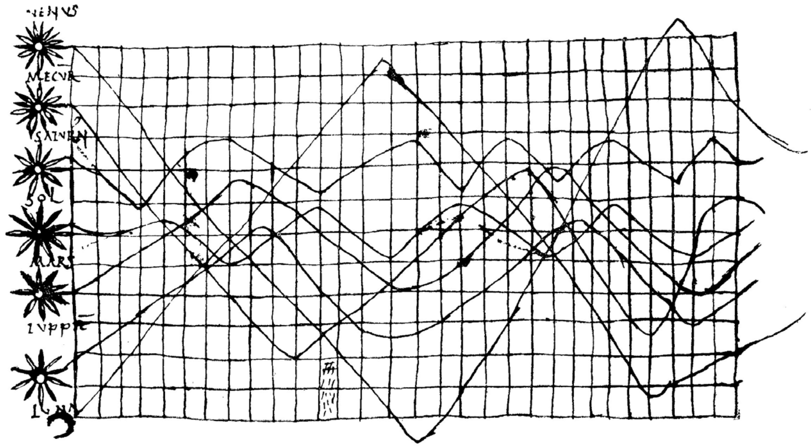
De misschien wat overgemoderniseerde leerling van nu vindt de oplossing van een vergelijking als $x^2 - 4x = 77$ op geheel andere wijze dan Ahmes, Diophantus en Galois. Hij tikt linker- en rechterlid apart in zijn grafische rekenmachine in, laat beide grafieken ervan tekenen op een ruimgekozen domein en roept de optie Intersect aan. Na enkele momenten van benaderen worden de juiste decimalen vertoond.
Deze methode wijkt op diverse punten af van de traditionele algebra:

– *Variabele en onbekende*
  De traditionale algebra ziet '*x*' als aanduiding van een oplossing waarvan het bestaan wordt aangenomen, en na omwerken van de vergelijking naar een andere vorm, bijvoorbeeld via op nul herleiden en ontbinden, wordt de onbekende als het ware ontmaskerd. Hij blijkt gewoon 11 (of 7) te zijn. De GR-aanpak ziet zowel $x^2 - 12$ als $4x$ als beschrijvingen van figuren die in het platte vlak liggen. De oplossingen ($x = 11$ en $x = 7$) worden nu geassocieerd aan de snijpunten van deze meetkundige figuren. In deze beschrijvingen moet x gezien worden als een variabele, die alle mogelijke waarden in een domein aanneemt om de grafiek te leveren. Een dergelijke interpretatie van de letter in de vergelijking is in de traditionele algebra niet aan de orde.
– *Analyse tegenover algebra*
  Het concept grafiek is nauw verbonden met het begrip verandering, dat binnen de algebra een zeer beperkte plaats heeft maar van groot conceptueel belang is voor de analyse. De INTERSECT-activiteit van de GR behoort ook al tot de analyse; bij de numeriek grafische calculators zal er een stap-voor-stap benaderingsproces aan ten grondslag liggen en geen expliciete strategie met wortels (hoewel sommige leerlingen dat wel verwachten).
– *Functie tegenover vergelijking*
  Bij Descartes kwamen we bij het oplossen van vergelijkingen ook meetkundige figuren tegen – bovendien nog in een coördinaatachtig systeem – maar die waren van geheel andere aard: de oplossing van een vergelijking werd meetkundig geconstrueerd en de getekende figuren (lijnen, cirkel, parabool) hadden niets van doen met de op te lossen vergelijking in de zin van een figuur die de vergelijking voorstelt. Essentieel voor de analytische meetkunde met een Cartesisch coördinatenstelsel is ook de gelijkwaardigheid van de *x*- en *y*- richtingen. Het gaat om het vlak en de coördinaten zijn beschrijvers van de punten. Bij een grafiek, ook in het GR voorbeeld van zo-even, heeft een variabele – hier *x* – de onafhankelijke rol, de andere variabele is afhankelijk, in dit geval via een formule.

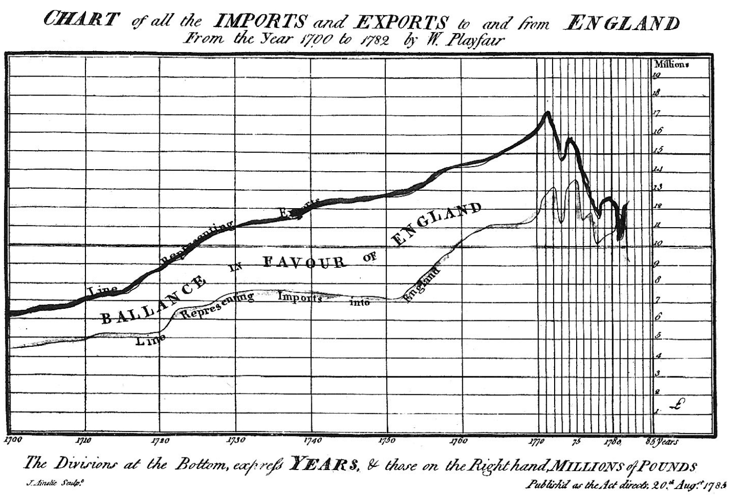
De grafiek, als representatie van veranderingsprocessen in de tijd, heeft ook zijn historische wortels, maar die liggen niet in de geschiedenis van de algebra. We zien in figuur 7 bovenaan de oudst bekende grafiek, een tiende- of elfde-eeuwse afbeelding waarin mogelijk[1] standen van planeten (dat zijn in ieder geval de tekens links) in de loop van de tijd worden afgebeeld. Tijdgrafieken, nu met typisch economische variabelen als import en export, zijn ook de volgende voorbeelden in de geschiedenis; het voorbeeld in figuur 8 is van Playfair, 1782.

In het Nederlandse onderwijs wordt veel aandacht besteed aan dit type grafieken. Er is echter weinig historische onderbouwing beschikbaar om deze grafieken met algebra te verbinden. De echte grafieken, zoals deze twee historische voorbeelden, zijn uitermate geschikt om gegevens in beeld te brengen en vooral verschillende tijdreeksen te vergelijken in één figuur. Grafische beelden van formules stammen historisch uit de analytische meetkunde; de aanpak van raaklijn- en oppervlakteproblemen heeft ook daar zijn historische wortels. Het schoolcurriculum bindt de twee benade-

1 Wat de grafiek precies betekent is niet echt bekend. De grafiek lijkt een heen en weer gaande gang van de planeten te suggereren, maar het lukt niet die met een werkelijke beweging van de planeten te associëren. Omdat er geen verwant grafisch materiaal uit dezelfde periode is, blijft elk interpretatie - ook die dat het een soort grafiek is - geheel speculatief.



figuur 7 : De oudste grafiek; 10e of 11 eeuw: planeetstanden?



figuur 8 : Grafiek van de Britse handelsbalans. Playfair, 1782

ringen van de analytische meetkunde en de grafiek als uitgebeelde verandering sinds de jaren zestig echter direct aan elkaar, mogelijk met hier en daar wat verwarring tussen beide.

De schoolalgebra trekt in meer opzichten zijn eigen spoor in de geschiedenis. In rekenboeken van de zestiende eeuw vinden we vaak een hoofdstuk waarin de algebra, soms onder namen als ‘de regel van cos’ is opgenomen. Robert Recorde schrijft een boek over de rekenkunde onder de titel *The Whettstone of Witte* (1557). Vertaling: *De slijpsteen van het verstand*.
Recorde onderscheidt in zijn boek *abstract nombers* en *nombers denominate*. Abstract nombers zijn de pure getallen zelf, denominate zijn onder andere uitdrukkingen als 10 shilling, 13 mile. Tot de denominate nombers horen verbazingwekkend genoeg ook de Cossike nombers! 3 keer cos, 4 keer het vierkant; met een Diophantus-achtige notatie. Wie nu (anno 2006) uitdrukkingen als 3a + 5b uitlegt met beelden als 3 appels en 5 bananen wordt door de beroepsdidactici niet meer serieus genomen, maar heeft wel een belangrijke Engelse leerboekschrijver uit de 16e eeuw achter zich.
Recorde bespreekt vele bladzijden lang oefeningen en bewerkingen met deze nombers en komt pas daarna tot de ware ‘Algebers Rules’ die het oplossen van vergelijkingen inhouden. Zo’n vergelijking ontstaat steevast in een *situatie*. Het eerste voorbeeld is van een nog steeds geliefde (en verguisde?) soort:

> Alexander, gevraagd hoe oud hij was, zei dat hij twee jaar ouder was dan Ciphesto.
> Ja, zei Ciphesto, en onze vader is 4 jaar meer dan wij samen.
> Al de jaren van ons en vader samen maakt 96.
> Hoe oud zijn wij allemaal?

Als volgt krijgt de leerling (het boek is in dialoogvorm geschreven) een belangrijke tip: wijs aan wat de onbekende is.

> *.... I will begin with the youngeste mannes age, and that will I call* 1 ze *which is the common supposition in all such questions.*

Het teken 1 ze staat voor één keer het te vinden getal. Er is ook een teken φ. voor onbenoemde getallen, weer net als bij Diophantus en anderen. Spoedig wordt het samengenomen geheel gelijkgesteld aan 96: 4. ze. —+— 8. φ ══ 96. φ. Acht eenheden links en rechts worden weggenomen; en dan blijkt Alexander 22 jaar te zijn.

In tegenstelling tot de *Whettstone* legt *La Géométrie* van Descartes geen nadruk op de oefenende en lerende leerling, het accent ligt vooral op de vorming van nieuwe theorie. Aparte literatuur voor leerling en wetenschapper dus, het onderscheid lijkt typisch te zijn voor de historie van de algebra.

Het meetkundeonderwijs bijvoorbeeld lijkt tot 1900 nog in grote mate gedomineerd te worden door de Elementen van Euclides, waarin de axiomatische systematiek duidelijk zichtbaar was[1]. Leerboeken volgden, zij het met veel afwijken en eigen invoegingen van de vertalers, het overgeleverde plan. Algebra onderwijzen leek echter een eigen weg te gaan en al spoedig te neigen naar overbrengen van technieken en regels, ondersteund door hoogstens wat namaaktoepassingen in vraagstukken over vaders die nu driemaal zo oud zijn als hun vier dochters over vijf jaar samen zullen zijn. Zo'n beetje zoals nu: taxitarieven waaruit concurrerend gekozen moet worden, terwijl de klant meer afhankelijk is van de vraag of er nog één taxi bij het station staat. Echte toepassingen waren het allemaal niet.

Een terugblik op de geschiedenis leert dat systematische theorievorming in de algebra een laat verschijnsel is vergeleken bij de meetkunde. En dat die theorievorming dan ook onmiddellijk in het begin van de 19e eeuw van een zo hoog niveau is, dat ze vrijwel geheel buiten bereik is voor algemeen vormend onderwijs zoals we dat nu in het VO kennen. Fraaie elementen uit de vergelijkingentheorie waren het herkennen van som, product en andere symmetrische functies van de oplossingen van een vergelijking in de coëfficiënten. We zagen het bij Viète, het is een van de pijlers onder de Galoistheorie. In de periode voor de Mammoetwet (1968) functioneert zo'n element nog wel als een achterafje bij de wortelformule voor vierkantsvergelijkingen.

Bij de traditionele Euclidische meetkunde lijkt de verhouding school-theorie ook in de 19e eeuw nog anders te liggen. Amateurs als Napoleon (keizer, generaal), Brocard (luitenant), Lemoine (ingenieur, musicus), Emmerich (leraar) droegen substantiële nieuwe vondsten aan. En – duidelijk bij de laatste – hielden ook de band tussen onderzoek en onderwijs levend.
De nadruk op nauwkeurig algebraïsch *rekenen* ten koste van *redeneren* in het onderwijs heeft mogelijk ook zijn diepe oorzaak in de 17e en 18e eeuw, met name in het geloof dat door ijverig rekenen alle problemen konden worden opgelost.

In *Oorlog en Vrede* van Leo Tolstoj geeft de wat ouderwets strenge graaf Nicolai Andrejewitsj Bolkonski zelf zijn dochter Marja les aan in meetkunde en algebra. Hij karakteriseert de verschillende vakken pedagogisch als volgt:

1 Er zijn wel wat uitzonderingen waaronder *Éléments de géometrie* van Alexis Clairaut uit 1741 en *Grondbeginsels der Meetkunst* van Pibo Steenstra uit (1763). Er zijn in de 17e eeuw ook meer beroepsgerichte meetkundeboeken, vooral voor architecten, landmeters en fortenbouwers.

> Naar zijn mening had de menselijke ondeugd slechts twee oorzaken: lediggang en bijgeloof. Hij erkende slechts twee deugden: vlijt en verstand. Hij had de opvoeding van zijn dochter zelf ter hand genomen en gaf haar, om de twee voornaamste deugden in haar te ontwikkelen, algebra- en meetkundelessen. Hij stelde voor haar een dagindeling op, die aan één stuk door aan les en andere nuttige bezigheden was gewijd.

Vlijt tegenover verstand, algebra tegenover meetkunde; de betekenisloze schoolalgebra heeft wortels in tijden die verder terug gaan dan de onderwijshervorming van het Nederlandse onderwijs van na Wereldoorlog II, ze reiken minstens terug tot de tocht van Napoleon naar Moskou in 1813.
De schoolalgebra lijkt in de 21ste eeuw nog (of weer) totaal losgegroeid te zijn van haar eigen wiskundige uitdaging. Is er een weg terug naar de betekenisvolle algebra? Natuurlijk bestaat die weg terug en talloze momenten uit de geschiedenis van de algebra bieden er aanknopingspunten voor.

Literatuur

In dit hoofdstuk is gebruik gemaakt van vele bronnen. De voornaamste geven we hier aan de hand van de indeling van het hoofdstuk.

Algemene overzichten van de geschiedenis van de wiskunde en de algebra in het bijzonder

Baumgart, J. K. (1969). The History of Algebra. In: *Historical topics for the classroom*. Washington: National Council of teachers of Mathematics.

Boyer, C. B. (1991). *A History of mathematics*. John Wiley & Sons, Inc.

Fauvel, J. & Gray, J. (1987). *The History of Mathematics, A Reader.* The Open University.

Struik, D. J. (1965). *Geschiedenis van de wiskunde*. Spectrum.

Waerden, B.L. van der (1950). *Ontwakende Wetenschap.* Groningen: Noordhoff.

Waerden, B.L. van der (1983). *Geometry and Algebra in Ancient Civilisations.* Springer.

Waerden, B.L. van der (1980). *A History of Algebra. From al-Khwârizmî to Emmy Noether*. Springer.

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/

Vergelijkingen

Ahmes (kopiist)(1550 voor Christus). *Papyrus Rhind*.

Buffum Chace, Arnold (1979). *The Rhind mathematical papyrus. Free translation and commentary with selected photographs, transcriptions, transliterations, and literal translations.* Washington: National Council of Teachers of Mathematics.

Roest, A. van de & Kindt, M. (2005). *Babylonische Wiskunde, een verkenning aan de hand van kleitabletten.* Epsilon.

Heath, T. L. (1910). *Diophantus of Alexandria*. Cambridge University Press.

Adams, J. (2005). *Cardano and the Case of the Cubic, The fictional account of a mathematical detective*. Math Horizon.

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Quadratic_etc_equations.html

Notaties

Cajori, F. (1929). *A History of mathematical notatations.* Dover.

Kool, M. (1999). *Die conste vanden getale.* Hilversum: Verloren.

http://members.aol.com/jeff570/operation.html

http://members.aol.com/jeff570/mathword.html

Analyse en Synthese, de rol van de meetkunde

Bos, H. J. M. (2001). *Redefining geometrical exactness: Descartes' transformation of the early modern concept of construction.* Springer.

Descartes, R. (1637). *La Géometrie*. In:The geometry of René Descartes / transl. from the French and Latin by David Eugene Smith and Marcia L. Latham with a facsimile of the first edition. La Salle, 1952.

http://www.math.leidenuniv.nl/~wiskonst/descartes/digitale_versie.html
(digitale versie van een 17e eeuws Nederlandse vertaling van Descartes' *Géométrie*)

Latere ontwikkelingen

Pesic, P. (2003). *Abel's Proof, An Essay on the Sources and meaning of Mathematical Unsolvability*. MIT.

Geschiedenis van de algebra op school, laatste 100 jaar

Kindt, M. (2000). *De erfenis van al-Khwarizmi. Over veranderingen in de schoolalgebra.* In: Goffree, F., Hoorn, M. van & Zwaneveld, B. (Red.), *Honderd jaar wiskundeonderwijs*. Leusden, Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.

Nawoord

Paul Drijvers

In dit boek is vanuit verschillende perspectieven een visie op algebra uitgewerkt voor verschillende typen leerlingen. In dit nawoord staan we stil bij de vraag in welke richting het algebraonderwijs zich in de toekomst zal ontwikkelen. Daarbij richten we ons op de middellange termijn, zeg de komende 5 tot 10 jaar. Het denken over de langere termijn kan niet meer dan speculatief zijn.

Algebra op de achtergrond

Welke rol speelt algebra in de samenleving van morgen? Naar verwachting zal algebra in de toekomst wel belangrijk blijven, maar zal de algebraïsche expertise steeds meer worden 'ingeblikt' in apparaten, machines en software. Algebra zal in toenemende mate 'verstopt' worden achter interfaces. Daarmee wordt ze onzichtbaar voor de gebruiker, die zich van die rol op de achtergrond wellicht nog maar zelden bewust zal zijn.

Als algebra steeds minder zichtbaar wordt, is dit pleidooi voor betekenisvolle schoolalgebra dan niet slechts een achterhoedegevecht? We denken van niet. Ten eerste is algebrakennis cultuurhistorische kennis en heeft het leren van algebra een vormende waarde. Ten tweede is algebraïsche geletterdheid als onderdeel van 'mathematical literacy' voor iedereen in de samenleving van de toekomst van belang. Ten derde zijn er natuurlijk ook leerlingen die in vervolgonderwijs en beroep een behoorlijke hoeveelheid algebrakennis en vaardigheid nodig zullen hebben, bijvoorbeeld om de 'algebra achter de schermen' te begrijpen en te ontwerpen.

Algebra voor gebruiker en ontwerper

De samenleving van de toekomst zal van iedereen een zekere mate van algebraïsche scholing vragen, maar wellicht niet in de traditionele betekenis. Door de grote invloed van ICT-middelen op communicatie, productie en dienstverlening krijgt de maatschappij meer het karakter van een 'black box world'. Om leerlingen daarop voor te bereiden, is het van belang dat ze meer 'grey box experience' opdoen [1].

Het functioneren in de samenleving zal steeds meer een beroep doen op een algemener en 'afstandelijker' type algebrakennis, een soort metakennis over de manier waarop je:

– de algebra, die in 'black box' gedaante beschikbaar is, kunt activeren voor het doel dat je voor ogen staat;
– onderliggende modellen en aannames kunt beoordelen;
– resultaten kritisch kunt interpreteren.

De algebra waarover we het nu hebben, is onderdeel van wiskundige geletterdheid. Iedereen moet kunnen omgaan met kwantitatieve situaties die zich in de samenleving voordoen.

Hoe leerlingen moeten worden voorbereid op het 'consumeren' van algebra, zoals die zich voordoet in informele of nauwelijks zichtbare gedaante, is nog niet helemaal duidelijk. Op dit moment denken we aan zaken als het hanteren van vuistregels, het interpreteren van numerieke gegevens in de vorm van tabellen en grafieken, en het redeneren met eenvoudige verbanden. Ook het vergelijken van grootheden en het herkennen van patronen en structuren valt hieronder. De nadruk moet bij deze vaardigheden niet zozeer op het procedurele liggen; eerder zijn ze als een elementaire vorm van symbol sense te beschouwen. De ontwikkeling van algebraïsche geletterdheid voor de gebruiker kan met name in de onderbouw gestalte krijgen.

Behalve in het dagelijks leven moet men ook op de werkplek algebraïsche situaties kunnen hanteren [2]. Wat doen de apparaten waarmee wordt gewerkt en hoe doen die dat? Machines, automaten eigenlijk, werken volgens de starre regels van het ingevoerde model. Een globale voorstelling van het type model dat wordt gebruikt, om zo te kunnen begrijpen hoe het apparaat gevoed moet worden en het gebruik eventueel aan te passen aan de actuele situatie, is van belang. De gebruiker hoeft zelf niet te kunnen wat de machine kan; wel moet hij er secuur mee kunnen omgaan en kunnen beoordelen of de uitkomsten zinnig zijn. Dat is makkelijker als je zelf enige ervaring met algebra hebt opgedaan. Het omgaan met impliciete algebra in machines op de werkplek is met name een onderwerp voor de bovenbouw van het vmbo.

Naast gebruikers zullen in de toekomst natuurlijk ook experts nodig zijn om de algebra te begrijpen die zich achter de schermen afspeelt en om nieuwe toepassingen te ontwikkelen. Het gaat dan om een kleine en selecte groep van ontwerpers van modellen en toepassingen waarin algebra een grote rol speelt. Denk aan exacte wetenschappers, onderzoekers, technici, IT'ers en mensen van research-and-developmentafdelingen. Aan de leerlingen die een dergelijke functie gaan vervullen – vooral leerlingen van havo en vwo met een N-profiel – zullen hoge eisen gesteld worden, zowel qua algebraïsche basisvaardigheid als qua algebraïsch redeneren en symbol sense. De algebraïsche modellen en bewerkingen hebben een abstract en formeel karakter en zullen moeten worden doorzien op een fundamenteel niveau. Het ontwerpen en implementeren van algebraïsche modellen, bijvoorbeeld in de vorm van een computerprogramma of procedure, kan in dit algebraonderwijs een rol spelen.

De diversiteit die uit het onderscheid gebruiker-ontwerper naar voren komt, maakt duidelijk dat er in de toekomst behoefte is aan gedifferentieerd algebraonderwijs.

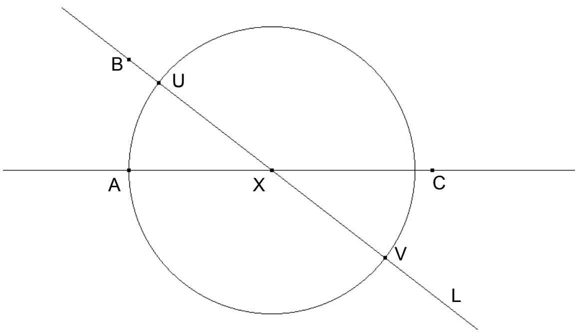
Trends voor de toekomst

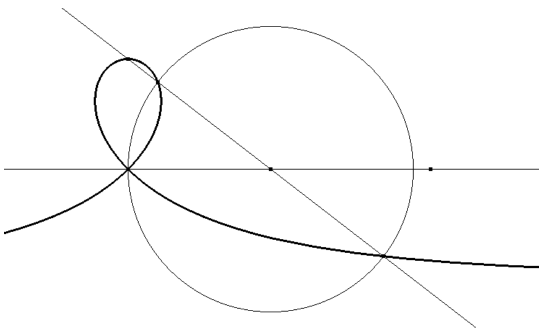
Welke ontwikkelingen zijn voor de toekomst van het algebraonderwijs op middellange termijn van belang? We verwachten dat het volgende viertal trends richting zal geven aan de veranderingen binnen het algebraonderwijs: de integratie van ICT, de samenhang tussen wiskunde en exacte vakken, de behoefte aan uitdaging, en de veranderende rol van de docent.

Integratie van ICT

In hoofdstuk 8 is aangegeven dat de integratie van steeds krachtiger en toegankelijker ICT-gereedschap naar verwachting een steeds grotere plaats in het algebraonderwijs zal innemen. Denk bijvoorbeeld aan een krachtige combinatie van dynamische meetkunde en computeralgebra.

Gegeven zijn drie vaste punten A, B en C. Een punt X loopt over de lijn AC. De lijn door B en X, L genoemd, snijdt de cirkel om X door A in twee punten: U en V. Gevraagd is de vergelijking van de baan die door de punten U en V wordt beschreven als X over AC beweegt.





$x^2y + y^3 + 4x^2 - 4y^2 = 0$

figuur 1: Een luskromme

In figuur 1 staat bijvoorbeeld een luskromme. De huidige versie van Cabri vindt in zo'n situatie moeiteloos de baan van U en V, en geeft direct ook de vergelijking daarvan: een derdegraads verband, zoals Descartes waarschijnlijk ook al wist. Op een geschikte website zoals http://mathworld.wolfram.com/ is wel een parametervoorstelling van de kromme te vinden, die de leerling in een computeralgebrapakket in de door Cabri gevonden vergelijking kan substitueren. Het pakket antwoordt met *true*.

Is dit voortaan algebraïsche bewijsvoering? En wat brengt de toekomst ons nog meer? Vermoedelijk wordt de ICT-omgeving toegankelijker en worden meetkunde en algebra geïntegreerd. Software zal flexibeler worden, zodat de gebruiker niet meer vast zit aan de *x-y* modellering van het coördinatenstelsel en zelf de modellering kan sturen door enkele vitale variabelen aan te geven, zoals de afstand van B tot AC en de positie van A ten opzichte van het voetpunt van B. Cabri-Maple-2020 vindt dan ook de vergelijking wel. Maar krijgen we die nog te zien? Misschien werkt de interface anno 2020 met plaatjes en een uitrolbaar touchscreen, veel makkelijker dan de huidige generaties van mobiele telefoon, digitale camera, gameboy, tv en PC. Je kunt allerlei vragen inspreken over je figuur, je model, zonder dat jij zelf de 'ouderwetse' algebra hoeft te kennen.
De vraag waar we op termijn voor staan, is om de beschikbare ICT-hulpmiddelen in te zetten zodat ze de nieuwsgierigheid naar de algebraïsche achtergronden oproepen en op die manier het leren kunnen bevorderen. Eigen onderzoek en modelvorming zijn daarbij sleutelbegrippen.

Samenhang tussen wiskunde en exacte vakken

Een tweede trend die voor het algebraonderwijs van de toekomst van belang is, is de samenhang tussen wiskunde en exacte vakken. Op verschillende niveaus bestaat behoefte aan een meer geïntegreerde aanpak. In hoofdstuk 3 is aangegeven dat het verband tussen wiskunde, exacte vakken en praktijkvakken in het vmbo in de ogen van de leerling dikwijls ontbreekt. Dat geldt zeker ook voor algebra. In hoofstuk 6 is beschreven hoe er bij wiskunde onvoldoende aandacht wordt besteed aan algebraïsche onderwerpen zoals evenredigheden, die bij de exacte vakken veel worden gebruikt. Scholen nemen initiatieven om zich als bètaschool te positioneren door meer geïntegreerd bètaonderwijs gestalte te geven en er komt een nieuw vak met de naam Natuur, Leven en Technologie. Zoals in hoofdstuk 6 is opgemerkt zullen de mogelijkheden voor kruisbestuiving tussen de exacte vakken en algebra het algebraonderwijs richting moeten geven. Concreet betekent dit dat de inhoud van het programma en de stijl waarin onderwerpen aan de orde komt beter moeten aansluiten bij de manier waarop algebra in de andere vakken functioneert.

Uitdagend algebraonderwijs

De derde trend tekent zich wellicht nog minder duidelijk af, maar zouden we van harte willen ondersteunen. Het gaat om de behoefte aan *meer uitdaging voor de leerling*. Als algebra beperkt blijft tot het uitvoeren van min of meer standaardprocedures, die gevoelig zijn voor kleine fouten, is het geen uitdagend of interessant onderdeel van het wiskundeprogramma. Met name in havo en vwo, zowel onderbouw als tweede fase, geven docenten aan dat er behoefte is aan uitdagende, prikkelende opgaven en onderwerpen, die de leerling het gevoel geven een eigenschap te ontdekken of een probleem op te lossen, kortom eigenaar en ontwerper te zijn van algebra. Natuurlijk moet dit op het eigen niveau gebeuren; het is niet mogelijk en ook niet nodig om de kloof tussen abstracte algebra en schoolalgebra in het voortgezet onderwijs te overbruggen. Wel bieden goed gekozen probleemstellingen, bijvoorbeeld uit de geschiedenis van de algebra, aanknopingspunten voor uitdagend algebraonderwijs dat de leerling aanspreekt op zijn capaciteiten.

Veranderende rol van de docent

Het vierde en laatste punt is misschien eerder een 'anti-trend'. Verschillende ontwikkelingen in het voortgezet onderwijs benadrukken de veranderende rol van de docent. Denk aan het nieuwe leren, aan probleemgestuurd onderwijs, aan samenwerkend leren of aan afstandsleren. Niet zelden wordt bepleit dat de docent eerder werkmeester is dan leermeester, en dat de voornaamste functie bestaat uit het begeleiden en coachen van leerprocessen. Tot op zekere hoogte is dat wel waar; in hoofdstuk 8 is bijvoorbeeld ook benadrukt dat de rol van de docent verandert onder invloed van de beschikbaarheid van ICT. Toch komt uit dit boek het beeld naar voren van de docent die niet in de laatste plaats vakdeskundige is. Het leren van algebra is een subtiele kwestie, en het begeleiden daarvan vraagt een gedegen vakinhoudelijke en didactische kennis van de docent. Het voeren van een klassengesprek op het juiste moment op het juiste niveau, waarin de inbreng van de leerlingen een plaats krijgt, vraagt behalve procesbegeleidende vaardigheden ook een grote mate van domeinkennis en ervaring. Hetzelfde geldt voor het vormgeven van gedifferentieerd algebraonderwijs, waarvoor in dit boek op verschillende plaatsen een lans is gebroken. Als trend voor de toekomst van het algebraonderwijs pleiten we er dus voor om *de docent als vakdocent* te blijven beschouwen; die optiek moet bijvoorbeeld in lerarenopleiding en in professionalisering van docenten duidelijk herkenbaar zijn.

Actie Algebra!

Wat moet er nu, uitgaande van de hierboven beschreven trends, op korte termijn in gang gezet worden om het toekomstperspectief voor algebraonderwijs op middellange termijn te verbeteren? Een vijftal actiepunten, aangeduid met de trefwoorden afbakening, uitdaging, samenhang, symbol sense en lerarenopleiding, verdient een plaats op de agenda van docenten, beleidsmakers, onderzoekers en ontwikkelaars.

1. Afbakening van vaardigheden met pen en papier
   Voor alle niveaus van onderwijs verdient het aanbeveling duidelijk te omschrijven welke vaardigheden met pen en papier beheerst moeten worden. Een dergelijke omschrijving vormt een heldere richtlijn voor de leerling zelf, voor de docent, voor de schoolboekauteur en voor de examenmaker.
   Vanzelfsprekend zal de lijst van handmatige vaardigheden voor de leerlingen van de N-profielen van havo en vwo, als de toekomstige ontwerpers van algebra, het langst zijn. Om als zodanig te kunnen functioneren, is het nodig dat zij een aantal algebraïsche basisvaardigheden met pen en papier kunnen uitvoeren en een aantal algebraïsche basisfeiten kennen.
   Als duidelijkheid is geschapen over de vereiste vaardigheden met pen en papier, kunnen deze ook getoetst worden, bijvoorbeeld in de vorm van enkelvoudige korte-antwoordvragen die zonder andere hulpmiddelen dan pen en papier worden gemaakt. Deze toets kan deel uitmaken van schoolexamen of centraal examen, zoals dat bijvoorbeeld in Denemarken het geval is. Figuur 2 bevat drie voorbeelden van zulke korte-antwoordvragen, de eerste twee uit recente Deense examens en de laatste uit het experimentele Profi-examen van 1997 (eerste tijdvak).

- Vereenvoudig $3(p+q)^2 - 6p(q-p)$
- Voor welke waarde van k heeft de vergelijking $k \cdot x^2 + k \cdot x - 1 = 0$ precies één oplossing?
- Er is één positieve waarde van *a* waarvoor geldt: $\int_1^a \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 10$. Bereken deze waarde.

figuur 2: Drie korte-antwoordvragen uit recente Deense eindexamens [3]

2. Uitdaging in algebra
   Voor alle niveaus van onderwijs is het belangrijk dat leerlingen zich uitgedaagd voelen door algebraïsche problemen. Dit actiepunt behelst dus het ontwerpen van voorbeeldmatig lesmateriaal dat zich richt op het prikkelen van het algebraïsch denken van de leerlingen. In verschillende hoofdstukken van dit boek (onder andere de hoofdstukken 4, 5 en 7) worden daartoe aanzetten gegeven. Onderwerpen als patronen en structuren bieden mogelijkheden. De bundel opgaven van Martin Kindt [4] biedt ook aanknopingspunten.

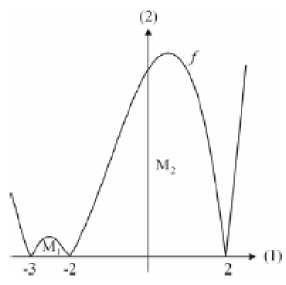
3. Samenhang van algebra met andere vakken
   Dit actiepunt betreft de inbedding van algebraonderwijs in het hele onderwijsaanbod van de leerling. Dat is voor alle schooltypen van belang, maar krijgt wel een schooltype-specifieke invulling.
   Voor vmbo-bb en -kb is, zo bleek in hoofdstuk 3, vooral de samenhang met de praktijkvakken van belang. De algebra is daar soms niet goed zichtbaar. Verbanden tussen grootheden komen bijvoorbeeld eerder in de gebruikte apparatuur tot uitdrukking dan in een geabstraheerde formule. Inzicht daarin speelt een rol bij het aflezen en interpreteren van tabellen en grafieken. Dit actiepunt houdt hier dus in dat in samenspraak met praktijkdocenten een passend algebra-aanbod wordt ontwikkeld dat ook voorbereidt op de beroepspraktijk.
   Voor vmbo-gl/tl en voor havo/vwo gaat het vooral om de samenhang met de exacte vakken. Betere afstemming en aansluiting moeten gestalte krijgen in de richting die in hoofdstuk 6 is aangeduid. Ook hier zou het actiepunt het ontwikkelen van voorbeeldmatige modules inhouden, waarin de beoogde samenhang gestalte krijgt. Het nieuwe bètavak voor de tweede fase h/v en het werk van het Sonate-project bieden aanknopingspunten.

4. Symbol sense
   In hoofdstuk 1 is de uitdrukking ‘symbol sense’ gebruikt om aan te geven dat naast algebraïsch rekenen ook algebraïsch redeneren van belang is. Het actiepunt bestaat uit het concretiseren van het wat vage begrip symbol sense in lesmateriaal.
   Voor de onderbouw kan een algemeen type van symbol sense gezien worden als de algebraïsche kant van wiskundige geletterdheid, die in hoofdstuk 3 aan de orde is gekomen. Wat voor type algebraïsch redeneren is voor iedereen van belang, en komt van pas in allerlei situaties van het leven van alledag?
   Voor de tweede fase h/v pleiten we voor het ontwikkelen van voorbeeldmatig lesmateriaal rond symbol sense, waarbij ook aanknopingspunten met het huidige algebraonderwijs aandacht krijgen. Denk bijvoorbeeld aan het opbouwen van flexibiliteit om over te kunnen schakelen op een andere probleemaanpak als de meest voor de hand liggende methode niet blijkt te werken.
   Als er meer aandacht aan algebraïsch redeneren wordt besteed, ligt het voor de hand dit ook bij de toetsing aan de orde te laten komen. Bij wijze van voorbeeld bevat figuur 3 twee recente examenopgaven uit Denemarken, die het redeneren en modelleren beogen te toetsen. De eerste, vertaald in het Nederlands, gaat om het opstellen van een formule voor radioactief verval. De tweede betreft het verband tussen integraal en oppervlakte.

Het radioactieve Strontium-90 vervalt met 2.45% per jaar. In 2004 is in een laboratorium 7 gram van deze stof aanwezig. Geef een wiskundige uitdrukking die de hoeveelheid Strontium in de loop van de tijd beschrijft.

Opgave 9 På figuren ses en grafen for en funktion, der har nulpunkterne -3, -2 og 2. Sammen med førsteaksen afgrænser grafen to punktmængder M_1 og M_2. Det oplyses, at arealerne af punktmængderne er henholdsvis $\frac{3}{4}$ og 32.

a) Bestem $\int_{-3}^{-2} f(x)\,dx$ og $\int_{-3}^{2} f(x)\,dx$.



figuur 3: Twee recente Deense examenopgaven gericht op modelleren en redeneren [3]

5. Lerarenopleiding
   Eerder in dit nawoord is betoogd dat de docent in het algebraonderwijs ook vakdocent is. Dat vraagt om een goede lerarenopleiding, waarin de vakinhoudelijke en vakdidactische component een groot aandeel vormt. Op dit moment lijkt er echter een ‘demathematisering’ van de lerarenopleiding plaats

te vinden. Een belangrijk actiepunt is dan ook om algebra en algebradidactiek een belangrijke plaats in de lerarenopleiding te geven. Het ontwikkelen van modules daarvoor kan een geschikte eerste stap zijn.

Een informele rondgang langs een aantal professionele wiskundigen bevestigt dit toekomstbeeld. Zelfs zij die werken aan het front van de ontwikkeling van de wiskunde als wetenschap onderkennen dat formele algebraïsche vaardigheden in de toekomst waarschijnlijk maar door een beperkte groep leerlingen van de N-profielen van havo en vwo zullen worden geleerd en gebruikt. Voor deze leerlingen is dit nuttig en vermoedelijk zullen ze algebra ook interessant vinden. Op die manier wordt de algebra, die momenteel zo in discussie is, in zekere zin een elitaire aangelegenheid. De vraag is of dat erg is. In de tijd voor de mammoetwet was de groep leerlingen die algebra leerde ook veel kleiner dan nu het geval is. Is het eigenlijk wel nuttig geweest om een grote massa leerlingen in het hele spectrum van het VO met algebra en met name algebraïsche vaardigheden te vermoeien?

We besluiten met een citaat van Martin Kindt [5], waarin hij de vraag naar de toekomst van de schoolalgebra beantwoordt door te verwijzen naar het verleden:

> Mohammed al-Khwarizmi leefde 1200 jaar geleden. Zijn naam is in alle talen terug te vinden in de woorden ‘algoritmisch’ en ‘algoritme’. Een algoritme is een procedure om bij een standaardopgave in een eindig aantal stappen gegarandeerd bij de oplossing te komen. ‘Algoritmisch’ duidt op een stijl van wiskundig opereren, waarmee veel mensen in het verleden zich door de schoolexamens hebben kunnen worstelen. Het grappige is dat al-Khwarizmi (als kenner van Euclides) een aantal van zijn methoden baseerde op meetkundig inzicht. ‘Algoritmisch’ zou dus net zo goed iets heel anders kunnen betekenen, inzichtelijk bijvoorbeeld, of betekenisvol. Nu de computer de algoritmische handelingen voor ons kan verrichten, zou betekenisvol leren van algebraïsche principes wel eens hét antwoord kunnen zijn op de vraag waar het heen moet met algebra.
> (Kindt, [5], p. 69)

Literatuur

1. Kenelly, J. (2000). *When machines do mathematics, what do mathematics teachers do?* Paper presentation, ICME9, Tokyo, Japan.
2. Gravemeijer, K.P.E. (2002). Reken-wiskundeonderwijs voor de 21ste eeuw. *Nieuw Archief voor de Wiskunde, 5/3*, 64-69.
   Noss, R. & Hoyles, C. (1998). *Anchoring Mathematical Meanings in Practice.* Presentatie Conference on Symbolizing and Modeling in Mathematics Education; Freudenthal Instituut, Utrecht.
3. http://us.uvm.dk/gymnasie/almen/eksamen/opgaver/?menuid=150560
   http://us.uvm.dk/gymnasie/almen/eksamen/opgaver/?menuid=150560
   http://www.emu.dk/gym/fag/ma/undervisningsministeriet/nyt/vejl_eks_opgaver.html
4. Kindt, M. (2003). *Oefeningen in algebra*. Utrecht: Freudenthal Instituut.
5. Kindt, M. (2000). De erfenis van al-Khwarizmi. In Goffree, F., Hoorn, M. van & Zwaneveld, B. (Red.) *Honderd jaar wiskundeonderwijs*. Leusden: Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.