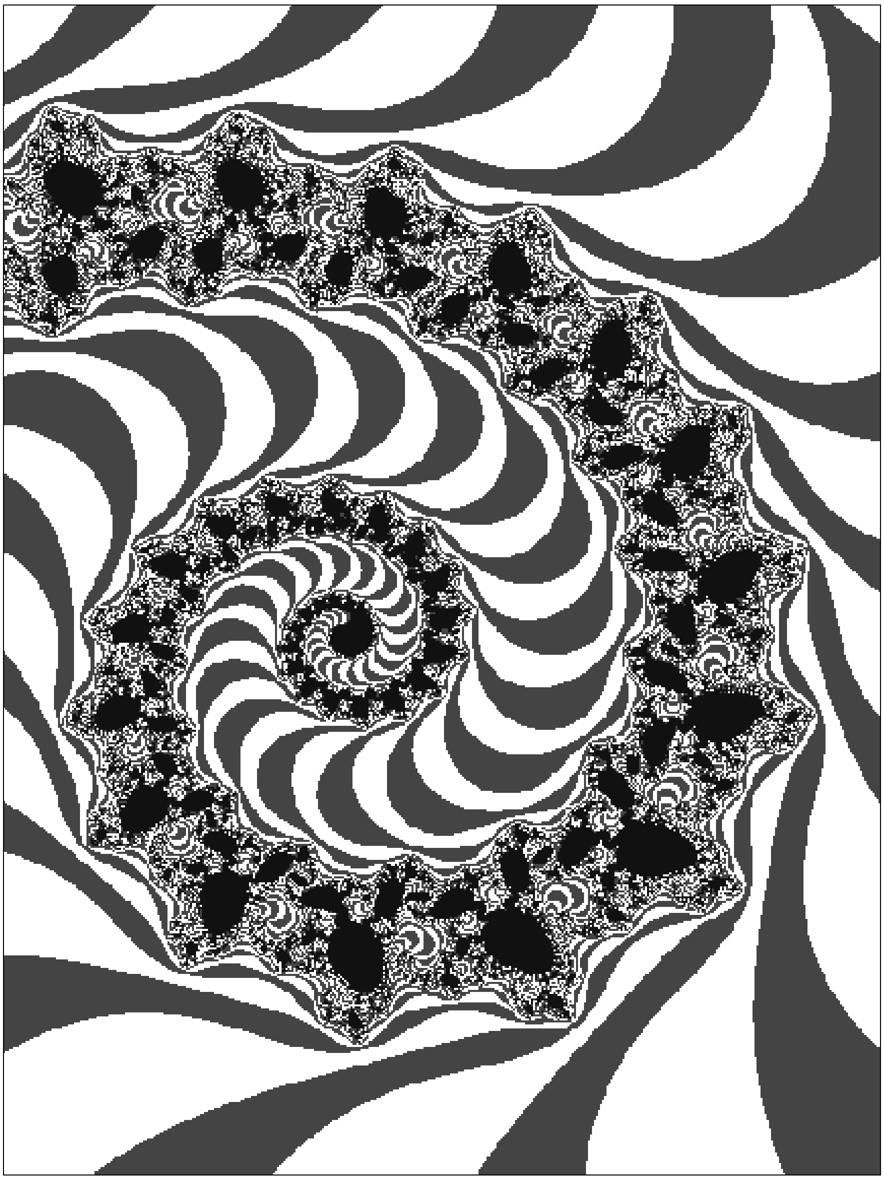
Eindeloze Regelmaat



Nieuwe wiskunde tweede fase
Profiel N&T
Freudenthal instituut

Eindeloze Regelmaat

Project: Wiskunde voor de tweede fase
Profiel: N&T
Domein: Voortgezette Analyse
Klas: VWO 6
Staat: Herziene versie
Ontwerp: Aad Goddijn, Martin Kindt, André Holleman, Gerard Stroomer

Inhoud

Vooraf

discrete processen

In dit boek gaat het over stapsgewijze processen, ook *discrete* processen genoemd.
Je kunt denken aan een populatie waar van generatie tot generatie uitbreiding optreedt of aan een serie figuren waarin vaste patronen terugkeren of aan rijen getallen die een zekere wetmatigheid vertonen.
Een belangrijk punt van onderzoek zal steeds zijn of er op den duur een soort van stabiliteit ontstaat, of er sprake is van een *limiet.*

rijen

Het basisgereedschap zal bestaan uit regels en stellingen voor oneindig voortlopende rijen van getallen (kortweg *rijen*). Af en toe zullen we daarbij een beroep doen op je kennis van de differentiaal- en integraalrekening.

GR

En ook in dit boek zal de GR een belangrijk hulpmiddel zijn.
Enerzijds om inleidende berekeningen te verrichten en op het spoor te komen van interessante verbanden.
Anderzijds om theoretische resultaten te toetsen aan numeriek verkregen uitkomsten.

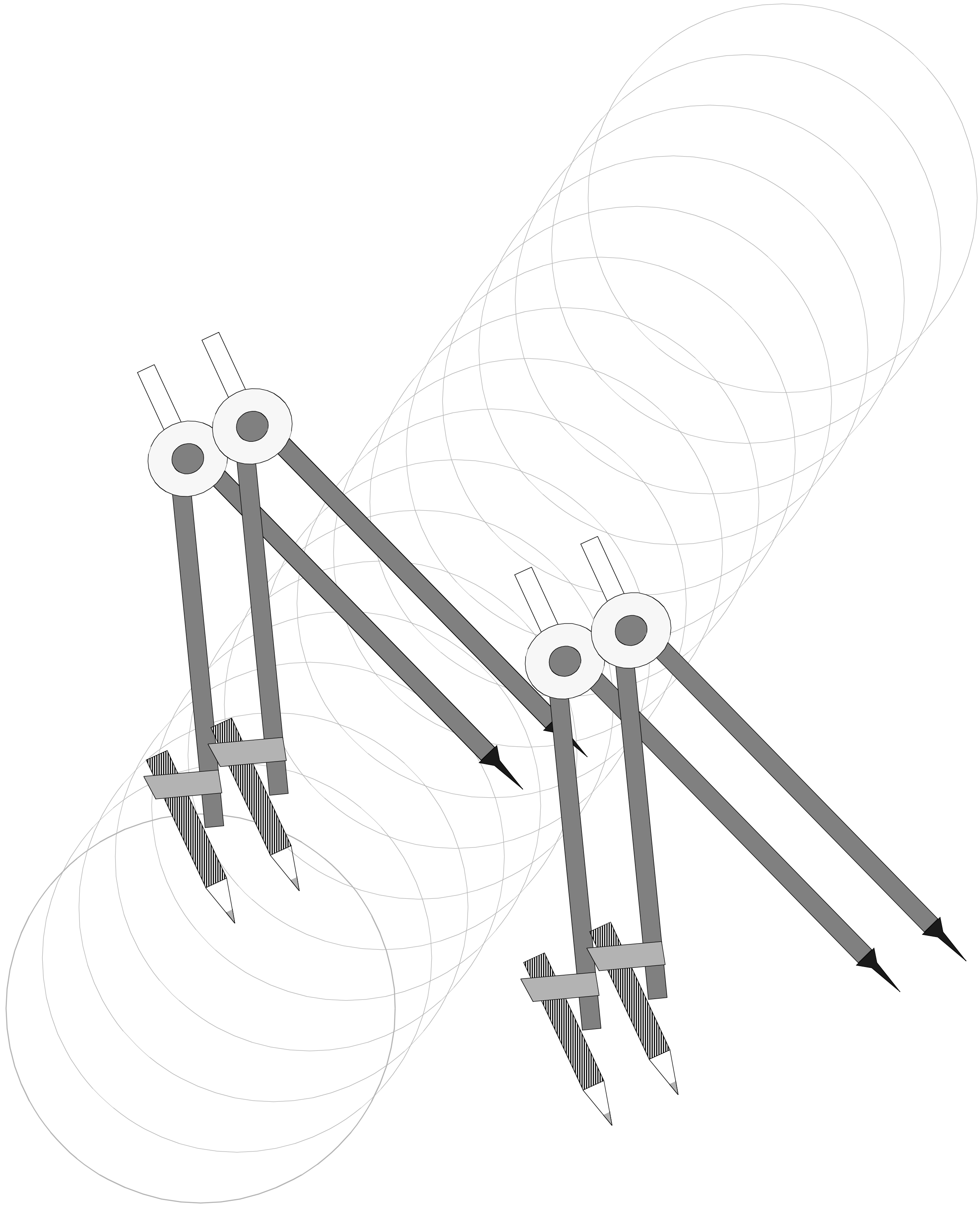
kernbegrippen

De kernbegrippen waar je mee te maken krijgt, zijn
– *iteratie* (letterlijk: herhaling);
– *convergentie* (letterlijk: samenkomst in één punt):
– *inductie* (letterlijk: opklimming van het bijzondere naar het algemene).

theorie

Dit boek heeft duidelijk een meer abstract karakter dan de deeltjes over differentiaal- en integraalrekening. Hoewel er wel enige concrete toepassingen worden behandeld, is het geheel toch tamelijk theoretisch. Er komen ook ‘echte’ bewijzen in voor.
Al met al geeft het boek je een beeld van wat je te wachten staat als je een studie kiest met een zwaar exact accent.

Hoofdstuk 1
Passers op herhaling



Dit hoofdstuk heeft een verkennend karakter. Een herhaald uitgevoerde meetkundige constructie blijkt aanleiding te zijn tot bestudering van oneindige rijen van getallen die een bijzondere eigenschap bezitten: ze worden als het ware aangezogen door een vast getal. Dat vaste getal speelt dan de rol van *limiet.* In een notendop tref je hier bijna alle kernbegrippen van dit boek aan. Het gaat daarbij om een eerste kennismaking. Nadere verkenning en verdieping komen in de volgende hoofdstukken aan bod.

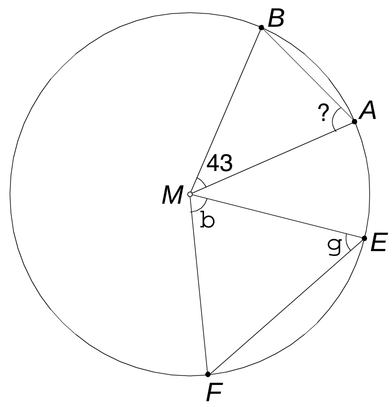
1: Inleidend voorbeeld, voorkennis

In dit hoofdstuk kom je een situatie tegen waarin regelmaat bijna uit het niets opduikt. Je gaat wat kenmerken van die regelmaat verkennen. Het voorbeeld gaat uit van tekenen met de passer.
Eerst een kleine voorstudie over gelijkbenige driehoeken.

1 Hier is een cirkel getekend met middelpunt *M*; op die cirkel liggen de punten *A*, *B*, *E* en *F*.

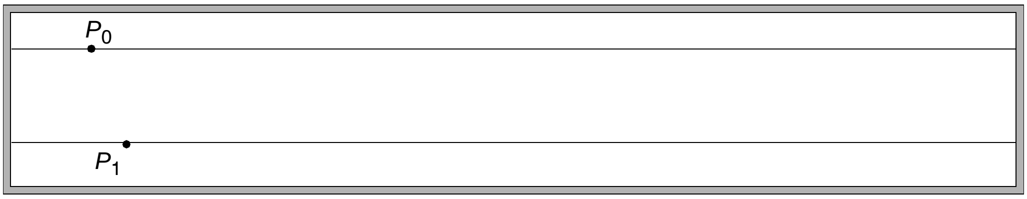
a. $\angle AMB$ is 43 . Bereken $\angle MAB$.

b. De grootte van twee andere hoeken is aangeduid met respectievelijk g en b.
Druk g uit in b.

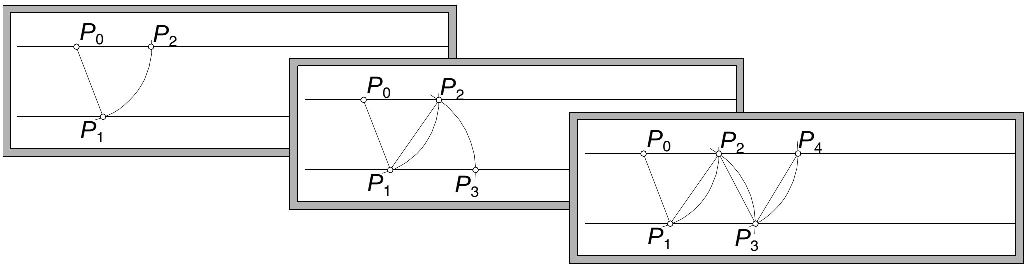


Je bent nu gewapend met de juiste voorkennis om aan het hoofdprobleem van dit hoofdstuk te beginnen.

In het voorbeeld waar we ons wat meer in gaan verdiepen, zijn twee *evenwijdige* lijnen gegeven met op elke lijn een punt.



Er worden steeds nieuwe punten gemaakt door cirkels te tekenen. Hoe dat gaat, wordt duidelijk in de volgende drie figuren.



Bij elke stap wordt toegevoegd: lijnstuk, cirkel(boog), punt. De passerpunt staat hierbij steeds op het *voorlaatste* punt, het passerpotlood op het *laatste*. Er ontstaan driehoeken.

2 Op werkblad **A**, bladzijde 165, staan vier beginsituaties van de lijnen met op elk een beginpunt P_0 .

a. Kies er een uit, plaats zelf naar keuze P_1 op de andere lijn en voer het herhaalproces zo'n 10 stappen met je passer uit.

b. Kijk ook bij anderen naar het resultaat. Wat valt op?

c. Zouden, als je 100 stappen doorging, de ontstane driehoeken nog in vorm verschillen?

d. Formuleer een vermoeden over de vorm die de driehoeken *op den duur* krijgen.

notatie

Om het vermoeden dat we nu hebben over de vorm van de driehoeken te kunnen onderzoeken, kiezen we eerst handige notaties.

We noemen de punten:

$P_0 \quad P_1 \quad P_2 \quad P_3 \ldots$

de lijnstukken:

$l_0 \quad l_1 \quad l_2 \quad l_3 \ldots$

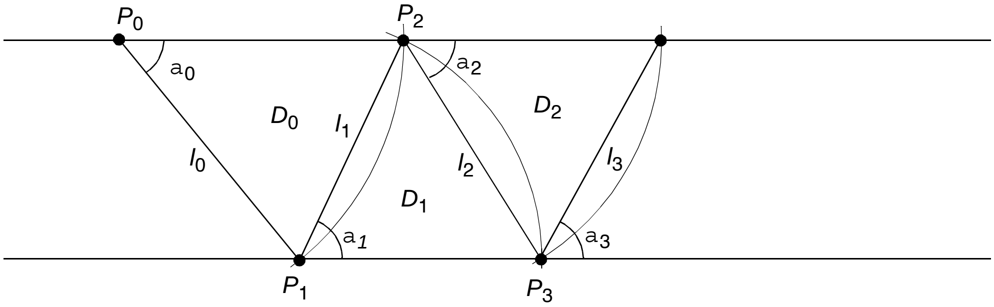
de hoeken (in graden) van de lijnstukken met de lijnen:

$a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \ldots$

en de driehoeken:

$D_0 \quad D_1 \quad D_2 \quad D_3 \ldots$

Al deze notaties in één figuur:



oneindige rij

Soms zullen we over een punt of hoek in het algemeen praten. Dan noteren we bijvoorbeeld P_n en a_n. De n heet *index*; in dit voorbeeld begint hij bij 0 en loopt onbeperkt door. We hebben het over een *oneindige rij* punten, hoeken, lijnstukken en driehoeken.

Met P_{n+1} zullen we het punt bedoelen dat in de constructie ná P_n komt. Voor de hand ligt nu wat bedoeld wordt met P_{n-1}, a_{n-1}, a_{n+1}, enzovoort.

3 Kies één van de gevallen van de vorige bladzijde en vul nevenstaande tabel in. Je mag de lengte van de lijnstukken en de grootte van de hoeken gewoon opmeten, maar doe dit wel zo nauwkeurig mogelijk.

a. Formuleer een vermoeden over het stijgen en dalen van de rijen getallen in de twee laatste kolommen.

b. Wat vermoed je: zijn de getallen verderop in die kolommen op den duur allemaal hetzelfde of blijven ze verschillend, maar valt dat niet meer na te meten?

Op de vermoedens bij deze opgave gaan we nu verder in.

index n	l_n in mm	a_n in graden
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

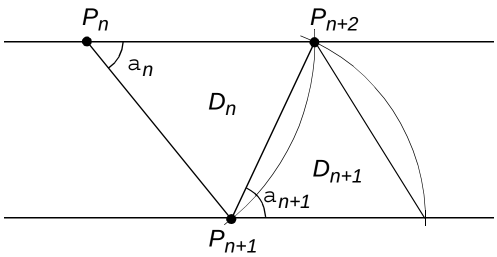
Berekeningen herhalen met één toetstik

We hebben *waargenomen* dat de vorm van de driehoeken D_n op den duur die van de gelijkzijdige driehoek wordt, of in ieder geval steeds meer daar datop gaat lijken. Als we dat willen bewijzen, kunnen we ons beter op de hoeken concentreren dan op de lijnstukken; de hoeken bepalen immers de vorm!
Bovendien moeten we nog aangeven wat er *wiskundig* met zulke vage termen als *'op den duur'* en *'steeds meer lijken op'* bedoeld wordt.

berekenen in plaats van tekenen

We gaan nu eerst die hoeken *berekenen*, zonder dat de passer gebruikt wordt.

4 Met behulp van deze figuur bepaal je hoe a_{n+1} direct uit a_n berekend kan worden.



a. Driehoek D_n is gelijkbenig. Waarom?

b. Laat nu zien waarom a_{n+1} ook als hoek in driehoek D_n is te vinden en toon aan dat:

$$a_{n+1} = 90 - \tfrac{1}{2}a_n$$

c. Kies als startwaarde $a_0 = 40$. Bereken nu a_1 uit a_0, daarna a_2 uit a_1 en zo door tot en met a_5. Komt het gedrag van de rij a's overeen met wat je geconstateerd hebt in opgave **3**?

Voor verder onderzoek zetten we natuurlijk de rekenmachine in. Er moet immers steeds hetzelfde gedaan worden. Hier kun je zien hoe de GR je dat gemakkelijk maakt.

recept voor de GR.

ACTIE	RESULTAAT
a. Voer een startwaarde in, bijvoorbeeld 40.	
40 <ENTER>	40
b. Voer de rekenstap uit door verwijzen naar het laatste resultaat.	
90 - 0.5 * ANS <ENTER>	70
c. Door steeds op ENTER te drukken, herhaal je de laatste rekenstap.	
<ENTER>	55
<ENTER>	62.5
<ENTER>	58.75

5 **a.** Voer dit ook eens uit met elk van de volgende startwaarden: 0; 20; 100; 500. Ontstaan er uiteindelijk soortgelijke getalrijen?

b. Ga door met op <ENTER> tikken tot de resultaten op het scherm niet meer veranderen. Dat duurt helemaal niet zo lang.

c. Met welke startwaarde moet je beginnen om steeds hetzelfde getal te krijgen? Beredeneer dat dit inderdaad zo is en dat er niet toch – onzichtbaar op het scherm – ooit een getal als bijvoorbeeld 60.0000000000000000000001 in de rij voorkomt.

d. Als je *niet* met de startwaarde van vraag **c** begint, mag je daar eigenlijk ook nooit op terechtkomen. Beredeneer waarom dat zo is, en laat je niet van de wijs brengen door de GR met zijn afrondingen.

2: Van berekenen naar bewijzen

De GR maakte afrondingsfouten, maar heeft ons wel geholpen: we zijn er bijna van overtuigd dat, met wat voor startwaarde ook begonnen wordt, de getallen steeds dichter bij 60 komen te liggen en afwisselend *groter* en *kleiner* dan 60 zijn.
Ons laatste restje zekerheid verkrijgen we echter pas na een wiskundig bewijs. Dat kan op het eerste gezicht overbodig lijken, maar vaak leveren bewijzen nog een paar inzichten meer op dan het te bewijzen feit alleen. Zo hebben we hier gezien dat je na drie of vier rekenstappen een 0 of 9 meer achter de 60. of 59. krijgt. De GR kan je niet vertellen waarom dat zo is en het heeft er toch echt mee te maken hoe snel de 60 benaderd wordt.

cruciaal idee

Het cruciale idee voor het bewijs is:
kijk niet naar de a_n *zelf, maar naar de verschillen van* a_n *met* 60.
In een tabel wordt dat:

n	a_n	$a_n - 60$
0	42	-18
1	69	9
2	55.5	-4.5
3	62.25	2.25

6 De getallen in de laatste kolom zijn inderdaad afwisselend positief en negatief; bovendien worden ze kleiner in absolute waarde.

a. Over de opeenvolgende absolute waarden valt nog wel iets meer te zeggen. Wat?

b. In de vorige paragraaf hebben we gezien dat a_{n+1} in a_n uitgedrukt kon worden door de formule:

$$a_{n+1} = 90 - \tfrac{1}{2}a_n$$

Geef nu aan hoe $a_{n+1} - 60$ in $a_n - 60$ uitgedrukt zou kunnen worden, op grond van wat je ziet in de tabel.

7 In de vorige opgave hebben we het vermoedelijk juiste verband tussen $a_{n+1} - 60$ en $a_n - 60$ gevonden op grond van waarnemingen in de tabel. Je kunt dit verband netjes bewijzen met behulp van algebra. Ga uit van de vergelijking:

$$a_{n+1} = 90 - \tfrac{1}{2}a_n$$

en trek aan beide zijden 60 af. Herleid het geheel daarna tot de gewenste vorm:

$$a_{n+1} - 60 = -\tfrac{1}{2}(a_n - 60)$$

8 Je kunt er nu zeker van zijn dat wat in opgave **6** is geconstateerd, juist blijft, hoe ver je de tabel ook voortzet! De verschillen worden per stap van *n* gehalveerd en tegengesteld genomen. Maar we willen meer: in één keer bijvoorbeeld a_{100} berekenen, zonder eerst alle vorige waarden uit te rekenen. Dat kan.

a. Toon door aan elkaar knopen van de gevallen $n = 0$ en $n = 1$ aan dat:

$$a_2 - 60 = \frac{1}{4}(a_0 - 60)$$

Toon ook aan:

$$a_3 - 60 = -\frac{1}{8}(a_0 - 60)$$

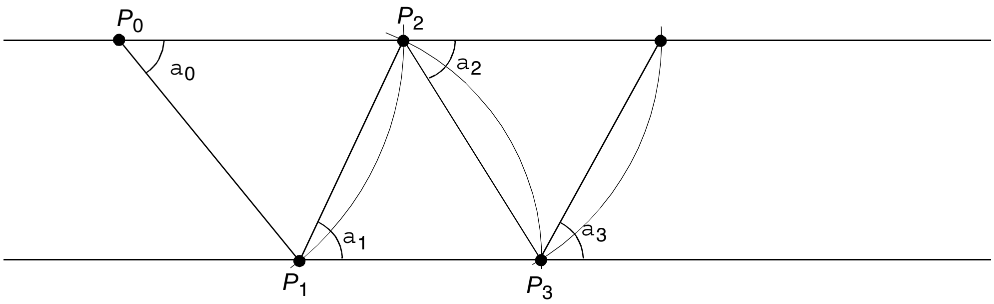
b. Druk nu ook in het algemeen:

$$a_n - 60 \text{ uit in } (a_0 - 60)$$

c. Bereken, uitgaande van $a_0 = 42$ nu eerst $a_{100} - 60$ met de GR en van daaruit a_{100} zelf. Geef commentaar op wat er op het scherm verschijnt.

Samenvatting en gevolgtrekkingen

We hebben bij het vinden van de opeenvolgende punten P_n in deze figuur



ontdekt dat de opeenvolgende waarden van a_n berekend kunnen worden als de startwaarde a_0 gegeven is.
Er waren twee manieren om dat te doen:

stapformules

a_1 vanuit zijn voorganger a_0 berekenen, dan a_2 vanuit zijn voorganger a_1, enzovoort. Daarbij wordt herhaaldelijk de *stapformule* :

$$a_{n+1} = 90 - \frac{1}{2}a_n$$

gebruikt. Hieruit volgt een stapformule voor opvolgende verschillen met 60:

$$a_{n+1} - 60 = -\frac{1}{2}(a_n - 60)$$

directe formules

Het verschil van a_n met 60 direct uitdrukken in het verschil van a_0 met 60:

$$a_n - 60 = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (a_0 - 60)$$

Deze formule is te herleiden tot:

$$a_n = 60 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (a_0 - 60)$$

9 Beredeneer op grond van een stapformule of een directe formule dat:
a. als a_0 gelijk is aan 60, ook *alle* a_n gelijk zijn aan 60.
b. als a_0 *niet* gelijk is aan 60, ook *alle* a_n *niet* gelijk zijn aan 60.
c. als een a_n minder dan 0.1 van 60 verschilt, dit ook geldt voor *alle* volgende getallen a_n van de rij.

10 Welk van de voorgaande formules geeft voor jou het beste aan:
a. dat de verschillen met 60 steeds kleiner worden,
b. dat de getallen van de rij afwisselend onder de 60 en boven de 60 liggen,
c. dat de getallen dichter bij 60 komen te liggen naarmate *n* groter wordt?

11 **a.** Neem nu eens het geval dat $a_0 = 70$. Wat is de eerste a_n die minder dan 1 van 60 verschilt? En de eerste a_n die minder dan 0.1 van 60 verschilt? En 0.01? En 0.001? Controleer je antwoorden op de GR.
b. Als je lang genoeg doorrekent op de GR komt er 60 op het scherm; toch is de waarde dan niet precies gelijk aan 60. Wat weet je nu van het verschil tussen die precieze waarde en 60?
c. Je kunt je voorstellen dat een computer meer decimalen geeft dan de GR. Stel je voor dat een zeker rekenprogramma zestien cijfers achter de decimaalpunt geeft. Je begint weer met $a_0 = 70$ en laat stap voor stap alle volgende waarden uitrekenen. Komt er een moment waarop de computer het antwoord 60 geeft?
d. En hoe zit dat als je een nog machtiger computer hebt, die wel honderd cijfers achter de decimaalpunt geeft?

limiet, voorlopige omschrijving

Wat zojuist is vastgesteld over de rij getallen a_n zullen we vaker tegenkomen, in andere situaties, met andere getallen dan 60.
In dit geval zeggen we:

de rij getallen $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ *heeft de limiet 60.*

Limieten van rijen getallen en manieren waarop je een limiet kunt opsporen, dat zijn de belangrijkste thema's van dit boek.

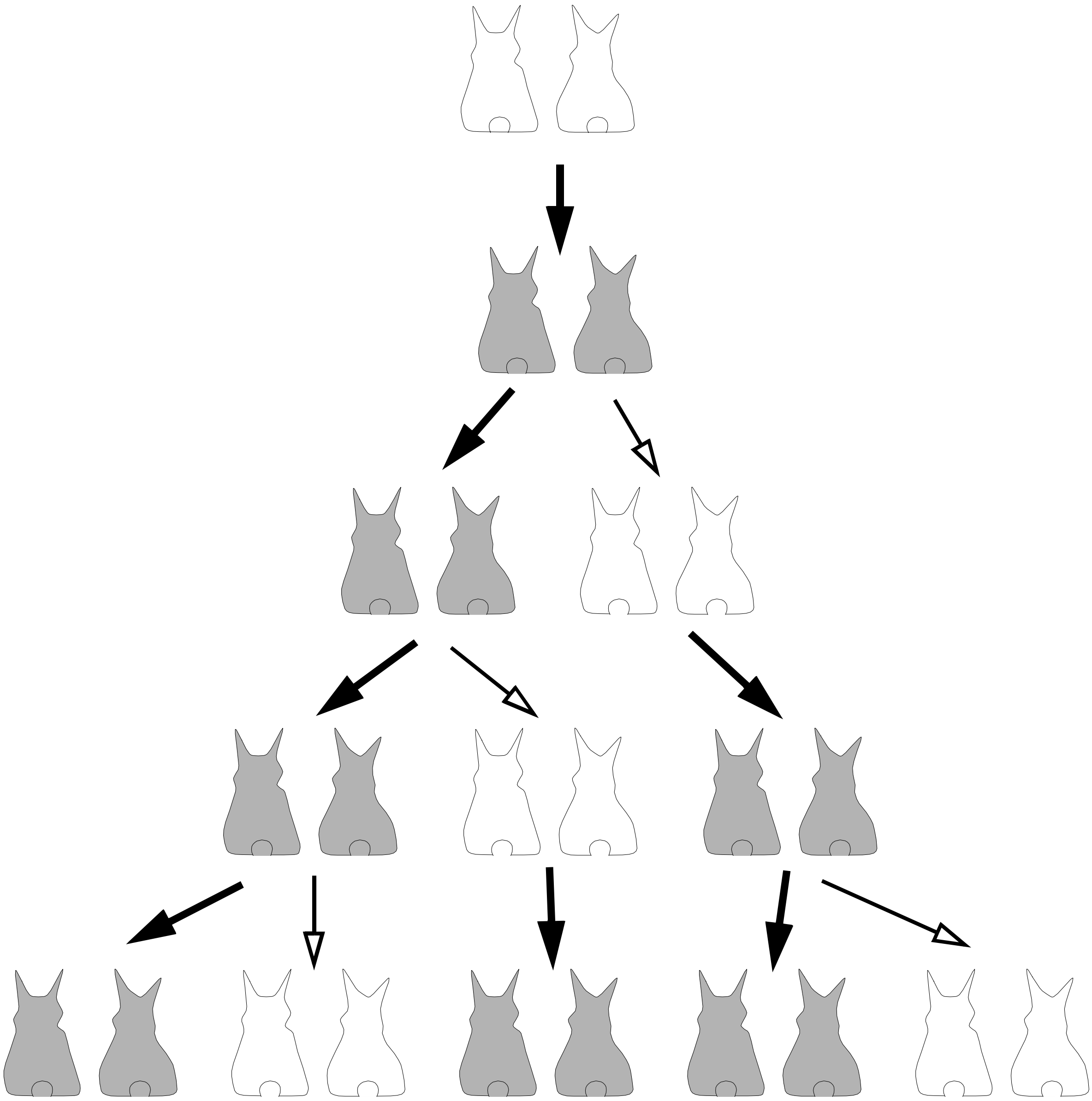
12 Bekritiseer de volgende uitspraak:

de rij $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ *heeft de limiet 60*

betekent:

voor grote waarden van n is a_n *gelijk aan 60.*

Hoofdstuk 2
Rijen in soorten en maten



Bekende getalrijen met een wetmatig patroon zijn de rekenkundige (of lineaire) rij en de meetkundige (of exponentiële) rij. Zonder veel moeite kunnen allerlei andere wetmatige rijen worden bedacht. Een hele beroemde is de rij van Fibonacci (die past bij het schema met konijntjes op de openingsbladzij van dit hoofdstuk). Om een rij vast te leggen, kun je gebruik maken van een formule. Daarbij onderscheiden we twee soorten: *directe formules* en *stapformules*.

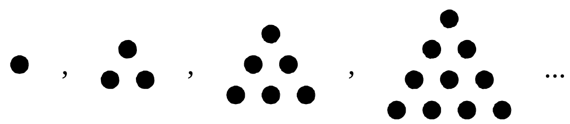
3: Getalrijen

In dit hoofdstuk komen er allerlei oneindige getalrijen langs waarin een zekere regelmaat optreedt. Hier zijn rijen bij mét een limiet, maar ook rijen die geen limiet hebben. Bij sommige rijen zie je direct de regelmaat, bij andere rijen moet je daar misschien even naar zoeken.
Hieronder volgen vijftien voorbeelden van getalrijen.

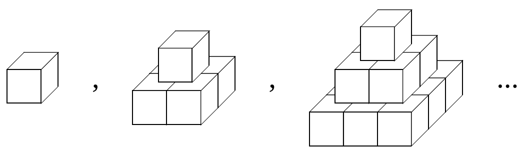
termen van de rij

Elk van deze rijen kent een eigen regel die de opeenvolgende getallen, de zogenaamde *termen* van de rij, vastlegt. Met behulp van deze regel kun je elk van deze rijen eindeloos voortzetten.
De laatste twee rijen zijn gegeven door figuren.

(*a*) 2, 5, 8, 11, 14, ...
(*b*) 1, 3, 5, 7, 9, 11, ...
(*c*) 0, 1, 4, 9, 16, 25, ...
(*d*) 1, 2, 4, 8, 16, 32, ...
(*e*) 1, 1, 2, 6, 24, 120, ...
(*f*) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...
(*g*) $1, \sqrt{2} - 1, \sqrt{5} - 2, \sqrt{10} - 3, \sqrt{17} - 4, \ldots$
(*h*) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$
(*i*) 0.3, 0.33, 0.333, 0.3333, ...
(*j*) 1, -1, 1, -1, 1, -1, ...
(*k*) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots$
(*l*) $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}, \ldots$
(*m*) $1, 1+\frac{1}{1}, 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}, 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}, \ldots$
(*o*)



(*p*)



1 **a.** Geef bij elke rij de volgende twee termen in dezelfde vorm als de gegeven termen.
b. Bereken de twintigste term van de rijen (*a*), (*c*), (*h*), (*j*), (*o*) en (*p*).

index

Het is een oude gewoonte om de termen van een rij te noteren met behulp van een kleine letter die van een *index* is voorzien, bijvoorbeeld $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{98}, \ldots$.
De indices, ook wel de *rangnummers*, zijn hier dus de getallen 0, 1, 2, 3, ...
De beginterm van een rij krijgt in plaats van 0 ook vaak het rangnummer 1.

Sommige van de bovenstaande rijen heb je al eerder ontmoet. Zo is (*b*) de rij van de oneven getallen en (*c*) de rij van de kwadraten. Bij zulke oude bekenden is het noemen van de *naam* al voldoende om te weten over welke rij het gaat.
Meestal zullen we echter een *formule* gebruiken, als we een oneindige rij volledig willen beschrijven. In hoofdstuk 1 heb je al kennisgemaakt met twee typen formules: een *directe formule* en een *stapformule*.

directe formule

Voorbeelden van directe formules:
De rij (*b*) van de oneven getallen wordt volledig gegeven door:

$$b_n = 2n + 1 \quad \text{voor } n = 0, 1, 2, \ldots$$

De rij (*h*): $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$ wordt volledig gegeven door:

$$h_n = \frac{n}{n+1} \quad \text{voor } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Merk op dat in het tweede geval de beginterm het rangnummer 1 heeft.

2 **a.** Je kunt de rij *b* ook geven met de directe formule $b_n = 2n - 1$. Hoe zit dat?
b. Je kunt voor de rij *h* ook een formule bedenken, waarbij de beginterm de index 0 heeft, dus $h_n = \boxed{}$ voor $n = 0, 1, 2, \ldots$. Geef zo'n formule.

Het is niet gemakkelijk om een directe formule te maken voor de rij:

$$(l) \qquad \sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}, \ldots$$

Maar deze rij kan wel als volgt volledig worden vastgelegd:

$$l_0 = \sqrt{2} \qquad\qquad l_n = \sqrt{2 + l_{n-1}} \quad (\text{voor } n = 1, 2, 3, \ldots)$$

recurrente betrekking

Hierbij is dus de *beginterm* gegeven en daarbij een *stapformule* die weergeeft hoe elke *volgende* term afhangt van de *vorige* term. De combinatie beginterm en stapformule wordt een *recurrente betrekking* genoemd.
Bij een recurrente betrekking kan het ook voorkomen dat de *n*-de term van twee of meer voorafgaande termen afhangt. Dan zijn er behalve de beginterm nog één of meer termen nodig om de rij volledig vast te leggen.

3 Bij een van de voorbeelden op bladzijde 15 is dat het geval. Welk voorbeeld en wat zijn de benodigde startgetallen en de stapformule?

overzicht

De twee manieren verschillen nogal en daarom zetten we ze naast elkaar.

Directe formule	***Recurrente betrekking***
Een directe formule zegt hoe je een term rechtstreeks kunt berekenen als zijn rangnummer bekend is.	**Gegeven: de beginterm (of enige termen van het begin van de rij).** **Een stapformule zegt hoe je elke term uit zijn voorganger (of enige voorgangers) kunt berekenen.**

4 In het voorbeeld van hoofdstuk 1 werd met beide methoden gewerkt. Wat was daar de stapformule (van de recurrente betrekking) en wat de directe formule?

5 **a.** Geef een directe formule van de rijen (*a*), (*c*), (*d*), (*g*), (*o*).
b. Geef een beschrijving met startwaarde en stapformule voor de rijen (*a*), (*d*), (*e*), (*i*), (*m*).

de rij van Fibonacci

De rij f van bladzijde 15 is een beroemde rij. Het is de zogenaamde *rij van Fibonacci*, genoemd naar de uitvinder ervan, die leefde van 1170 tot 1250 in Pisa, Italië. Volgens de overlevering zou Fibonacci deze rij hebben geconstrueerd naar aanleiding van een probleem over de voortplanting van konijnen:
stel dat een konijnenpaar vanaf de tweede maand na de geboorte elke maand een nieuw paar voortbrengt; hoeveel paartjes zijn er dan na 0, 1, 2, 3,... maanden, voortgekomen uit één paar?

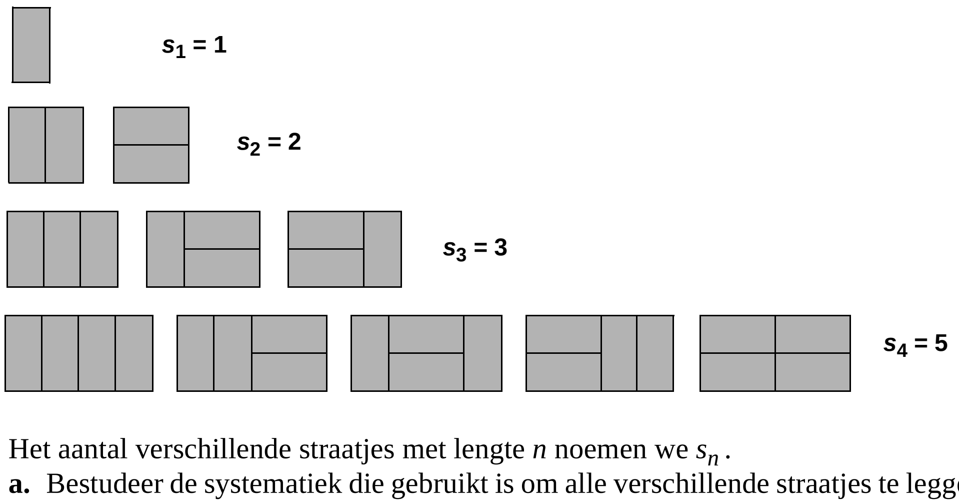
6 Op het tijdstip 0 is er 1 paar: $f_0 = 1$.
Na 1 maand zijn er nog geen konijntjes bijgekomen: $f_1 = 1$.
Na 2 maanden komt er 1 paar bij: $f_2 = 2$.
Ga na dat $f_3 = 3$, $f_4 = 5$, $f_5 = 8$. (Zie ook de voorplaat bij dit hoofdstuk.)

Als de konijnensoort onsterfelijk zou zijn, ontstaat er een oneindige rij die als volgt kan worden beschreven:

$$f_n = \begin{cases} 1 & \text{als } n = 0,1 \\ f_{n-1} + f_{n-2} & \text{als } n \geq 2 \end{cases}$$

Dit is een voorbeeld van een recurrente betrekking, waarbij twee beginwaarden nodig zijn om term voor term te kunnen vinden.
De rij van Fibonacci kun je in allerlei situaties tegenkomen.
Een voorbeeld is:

7 Met klinkers van 1 bij 2 kun je straatjes plaveien van 2 bij n met n = 1, 2, 3, ...,



Het aantal verschillende straatjes met lengte n noemen we s_n.

a. Bestudeer de systematiek die gebruikt is om alle verschillende straatjes te leggen. Hoe kun je begrijpen dat moet gelden: $s_5 = s_4 + s_3$?

b. Hoeveel verschillende straatjes zijn er met lengte 10?

8 **a.** Noteer een recurrente betrekking voor de rij F die met twee 2-en begint (in plaats van 1-en bij rij f) en waarvan de volgende getallen gevonden worden door de twee voorgaande getallen te *vermenigvuldigen* (in plaats van optellen bij f).

b. De rij F stijgt behoorlijk snel. Bepaal F_7 met de GR.

c. Reken na dat geldt: $F_7 = 2^{f_7}$.

Dat is geen toeval! Beredeneer dat algemeen voor alle n geldt:

$$F_n = 2^{f_n}$$

9 Geef een recurrente betrekking voor de rij z, die gegeven wordt door de logaritme van de rij van Fibonacci te nemen, m.a.w. door:

$$z_n = \log(f_n)$$

In de recurrente betrekking mag geen verwijzing naar f voorkomen!

10 De rij $u_0, u_1, u_2, \ldots$ is gedefinieerd door:

$$u_n = \begin{cases} 0 & \text{als } n = 0 \\ 1 & \text{als } n = 1 \\ u_{n-1} - u_{n-2} & n \ddagger 2 \end{cases}$$

a. Bepaal de eerste 8 termen.

b. Bepaal u_{100}

c. De rij $u_0, u_1, u_2, \ldots$ is periodiek. Waarom is dat zo?

11 De rij $v_0, v_1, v_2, \ldots$, gedefinieerd door:

$$v_n = \begin{cases} 1 & \text{als } n = 0 \\ 0 & \text{als } n = 1 \\ v_{n-1} - v_{n-2} & n \ddagger 2 \end{cases}$$

heeft dezelfde periode als de rij $u_0, u_1, u_2, \ldots$ van opgave **10**; dat zie je snel door enkele termen uit te rekenen.

12 Toon nu aan, door handig combineren van de beide voorgaande rijen, dat ook de rij $w_0, w_1, w_2, \ldots$, gedefinieerd door

$$w_n = \begin{cases} a & \text{als } n = 0 \\ b & \text{als } n = 1 \\ w_{n-1} - w_{n-2} & n \ddagger 2 \end{cases}$$

dezelfde periode heeft, wat a en b ook zijn.

4: Termen berekenen

Bij rijen die door een recurrente betrekking gegeven zijn, is het soms lastig een bepaalde term uit te rekenen: om bijvoorbeeld de twintigste term uit te rekenen, moet je vaak eerst alle voorafgaande termen kennen.
De GR kent een optie waarbij je de beginterm en de stapformule kunt invoeren. Daarna doet de GR het verdere rekenwerk.

Hoe dat gaat, illustreren we aan de hand van de rij $u_0, u_1, u_2, \ldots$, waarvan de startwaarde en de opvolgregel zijn:

$$u_0 = \sqrt{2} \quad \text{en} \quad u_n = \sqrt{2 + u_{n-1}}$$

Op de GR gaat het bijvoorbeeld als volgt:

recurrente betrekking op GR

RECEPT VOOR BEREKENING VAN RECURRENT GEGEVEN RIJ OP DE TI-83

a> MODE kiezen
Kies in het MODE-menu Seq (sequence = rij).
Dit staat op de regel: FUNC PAR POL SEQ.
b> Startwaarde(n) invoeren
Kies bijvoorbeeld *n*MIn = 0 en u(*n*Min) = $\sqrt{2}$.
Kies bij TblSet: TblMin = 0 en DTbl = 1.
c> Stapformule invoeren
Met Y= kun je nu (drie) rijen invoeren.
Zorg dat je in het functiebestand
u(*n*) = (2 + u(*n*-1))
op het scherm krijgt. Je krijgt **u** via 2nd 7 en ***n*** via X,T,J,*n*
d> Resultaat bekijken
In de tabel zie je nu de waarden van u(*n*) voor *n* = 0, 1, 2, 3, ...,
afgerond op vier decimalen.

13 Onderzoek de waarden van u_n voor grotere waarden van n. (Zet nu in de tabel op de GR de cursor op die waarden.)
Vanaf welke n lijkt het, alsof u_n niet meer groter wordt?

De GR kan ook de grafiek van de rij $u_0, u_1, u_2, \ldots$ tekenen.

grafiek van rij op GR

RECEPT VOOR GRAFIEK VAN EEN RIJ

a> MODE kiezen
Kies in het MODE-menu op de vijfde regel Dot.
b> Window instellen
Kies *n*Min = 0, *n*Max = 10, Xmin = 0, Xmax = 10, Ymin = 0, Ymax = 4.
c> Grafiek vertonen
Via GRAPH krijg je nu een puntengrafiek van de rij.
Ook nu kun je TRACE gebruiken, gevolgd door ▸.
Om een groter deel van de grafiek op het scherm te krijgen, moet je *n*Max en Xmax aanpassen.

14 Doe dit voor de rij $u_0, u_1, u_2, \ldots$ van de vorige opdracht.

15 a. Onderzoek met de GR de rij die wordt gegeven door de recurrente betrekking:

$$\begin{cases} v_o = 0 \\ v_n = \cos(v_{n-1}) \end{cases}$$

(Deze rij(en) maak je makkelijk ook door herhalen van COS ANS <ENTER>.)

b. Probeer eens andere beginwaarden, bijvoorbeeld $v_0 = 10$. Wat valt op?

In opgave **13** heb je gezien dat volgens de GR de daar bedoelde rij wel eens de limiet 2 zou kunnen hebben.
Ook de termen van de rij van opgave **15** lijken op de GR niet meer te veranderen vanaf een zekere waarde van *n*. Ook deze rij lijkt een limiet te hebben. Alleen is deze limiet zo te zien geen direct herkenbaar getal.
Opmerkelijk is dat de stapformule die bij de rij van **15** hoort dezelfde limiet op lijkt te leveren bij verschillende startwaarden.

Op de GR kun je in bij u(*n*) ook een directe formule van een rij invoeren.

directe formule op GR

INVOERING DIRECTE FORMULE VAN EEN RIJ IN DE TI-83

a> MODE kiezen, zoals bij recurrente rijen.
b> Invoering formule
In het functiebestand achter u(*n*) = de gewenste formule invulllen (voor *n* gebruik je de toets $\boxed{X,T,\theta,n}$).
c> Resultaat bekijken (tabel of grafiek), zoals bij recurrente rijen**.**
d> Startwaarde bijstellen
Controleer de waarde van de beginterm en pas zo nodig u(nMin) aan.

16 a. Voer de rij $u_n = \sqrt{(n^2+1)} - n$ in. Bekijk de tabel en laat ook de grafiek tekenen.
b. Welke zaken vallen je op?

5: Eigenschappen van rijen

Dit hoofdstuk eindigt met de omschrijving van enige eigenschappen van rijen.

monotoon stijgend

De rij $x_0, x_1, x_2, ...$ is *monotoon stijgend* als de termen steeds groter worden.
Preciezer gezegd:
De rij $x_0, x_1, x_2, ...$ is *monotoon stijgend* als $x_n > x_{n-1}$ voor n = 1, 2, 3, ...

monotoon dalend

De rij $x_0, x_1, x_2, ...$ is *monotoon dalend* als als de termen steeds kleiner worden.
Ofwel:
De rij $x_0, x_1, x_2, ...$ is *monotoon dalend* als $x_n < x_{n-1}$ voor n = 1, 2, 3, ...

begrensd

De rij $x_0, x_1, x_2, ...$ is *naar boven begrensd,* als er een getal *g* bestaat zó dat $x_n \leq g$ voor n = 0, 1, 2, ...
Het getal *g* is dan een *bovengrens* van de rij $x_0, x_1, x_2, ...$.

De rij $x_0, x_1, x_2, ...$ is *naar beneden begrensd,* als er een getal *g* bestaat zó dat $x_n \geq g$ voor n = 0, 1, 2, ...
Het getal *g* is een *ondergrens* van de rij $x_0, x_1, x_2, ...$.

alternerend

Een rij is *alternerend* als de termen beurtelings positief en negatief zijn.

constant

Een rij is *constant,* als alle termen gelijk zijn.

17 a. Geef bij de rijen (*a*) tot en met (*p*) van bladzijde 15 aan welke van de hierboven genoemde eigenschappen de rij heeft.
b. Geef bij een begrensde rij zo mogelijk een boven- en/of een ondergrens.

18 Sommige rijen hebben een term die de grootste van alle termen is: een *maximum*. Ook kan een rij een term hebben die de kleinste van alle termen is: een *minimum*.
a. Geef van elk van de rijen (*g*), (*h*), (*i*), (*k*) en (*m*) zo mogelijk het maximum en/of het minimum.
b. Construeer zelf een rij die geen maximum en ook geen minimum heeft.
Je kunt volstaan met het geven van zes termen, waaruit duidelijk blijkt hoe de rij in elkaar zit, zonder dat je een directe formule geeft.
c. Geef commentaar op de uitspraak:
elke begrensde monotoon stijgende rij heeft een maximum.

19 a. Verzin twee rijen die beide alternerend zijn. Doe het zo, dat de som van de twee rijen constant is. (Een duidelijk begin van beide rijen aangeven is genoeg.)
b. Kan de som van een constante en een alternerende rij monotoon zijn?
c. Kan de som van een monotone rij en een alternerende rij weer monotoon zijn?

Aan een opvallende eigenschap van rijen – het al dan niet geleidelijk naderen tot een vast getal (een zogenaamde *limiet*) – is hier geen aandacht besteed. Dat is het thema van het volgende hoofdstuk.

6: Extra: de rij van Fibonacci op de GR

De rij van Fibonacci wordt gegeven door een recurrente betrekking, maar de stapformule gebruikt twee voorgaande termen. De GR laat dat niet zonder meer toe, er is namelijk geen mogelijkheid u_{n-2} aan te roepen.

Er zijn (minstens) twee manieren om toch termen van deze rij te berekenen.

met een hulprij

20 Bij deze manier maak je twee rijen tegelijk, *u* en *v*; de rij *u* wordt de gewone rij van Fibonacci, de rij *v* zal als het ware één stap achterlopen. De *v*-rij gebruiken we voor aanroepen van v_{n-1} en omdat *v* één stap achter loopt, is dat juist u_{n-2}.

a. Voer de startwaarden 1 en 1 in voor de rijen *u* en *v* en de stapformules:

$$u_n = u_{n-1} + v_{n-1} \qquad \text{en} \qquad v_n = u_{n-1}$$

(v_{n-1} krijg je via 2nd 8)

b. Maak de tabel en constateer dat de verbanden voor *u* en *v* die zijn aangegeven, voortdurend aanwezig zijn.

c. Door de pijl-neer toets te gebruiken, kun je snel veel getallen uit de rij van Fibonacci onder ogen krijgen.
Ongeveer bij $n = 30$ gaat de GR op E-notatie over. Hoeveel stappen van *n* kost het in het algemeen om een ‘volgende’ exponent te bereiken? Let op: het is misschien niets steeds hetzelfde aantal stappen!

met doorschuiven

Ga eens uit van de twee Fibonaccigetallen 5 en 8.
Het volgende getal vind je door optellen: $5 + 8 = 13$
Voor het volgende getal moet weer worden opgeteld,
nu met 8 waar eerst 5 stond en met 13 waar eerst 8 stond: $8 + 13 = 21$

21 Je kunt dat ook met letters schematiseren. Hieronder zie je steeds de tussenstand van drie getallen *A*, *B* en *C*, die op grond van de acties in de regels ertussen veranderen. De beginstand is $A = B = 1$. De beginwaarde van *C* doet er niet toe.

<table>
<tr><th>A</th><th>B</th><th>C</th><th></th></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td></td><td>beginstand</td></tr>
<tr><td colspan="3">Zet A+B in C, vervolgens B in A, dan de nieuwe C in B.</td><td>actie</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>tussenstand</td></tr>
<tr><td colspan="3">Zet A+B in C, vervolgens B in A, dan de nieuwe C in B.</td><td>actie</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>tussenstand</td></tr>
<tr><td colspan="3">Zet A+B in C, vervolgens B in A, dan de nieuwe C in B.</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>...</td><td>...</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Zet A+B in C, vervolgens B in A, dan de nieuwe C in B.</td><td></td></tr>
<tr><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Zet A+B in C, vervolgens B in A, dan de nieuwe C in B.</td><td></td></tr>
</table>

a. Vul de lege plekken in de tabel van de vorige bladzijde in en overtuig jezelf ervan dat onder zowel *A*, *B* als *C* de rij van Fibonacci verschijnt.

b. Voer nu beginstand en actie-regel als volgt in de GR in.

Beginstanden opgeven: 1 STO▸ ALPHA A ENTER
en daarna:
1 STO▸ ALPHA B ENTER .

De *actieregel* bevat drie opdrachten, gescheiden door dubbele punten en moet er zo uit zien: A + B fi C : B fi A : C fi B
De letters tik je in met de ALPHA-toets, het pijltje met de STO-toets, de dubbele punt met 2nd .

c. Herhaal nu de actieregel een aantal keren; de GR drukt steeds de laatst berekende waarde af, dat is dus de waarde van *B*.

d. *A* en *B* zijn steeds twee opeenvolgende Fibonacci-getallen. Door de actieregel uit te breiden tot A + B fi C : B fi A : C fi B : B/A dwing je de GR de verhouding van twee opeenvolgende Fibonacci-getallen af te drukken.
Doe dat (gebruik 2nd ENTER) en formuleer een vermoeden.

Samenvatting

vastleggen van een rij

Er zijn twee belangrijke manieren waarop een rij van getallen kan worden vastgelegd.
– via een *directe formule*
– via een *recurrente betrekking*

In het eerste geval wordt de ‘algemene term’ u_n gegeven als functie van n.
In het tweede geval wordt u_n uitgedrukt in een of meer voorgaande termen (‘stapformule’) en bovendien moeten dan een of meer begintermen gegeven zijn.

rekenkundige rij

De *rekenkundige* (of *lineaire*) rij kan met een directe formule worden gegeven van de vorm:

$$u_n = an + b$$

waarbij a en b constanten zijn.
Dezelfde rij wordt ook gegeven door een recurrente formule van de vorm:

$$u_n = \begin{cases} b & \text{als } n = 0 \\ u_{n-1} + a & \text{als } n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

meetkundige rij

De *meetkundige* (of *exponentiële*) rij kan met een directe formule worden gegeven van de vorm:

$$u_n = b \quad a^n$$

waarbij a en b constanten zijn.
Dezelfde rij wordt ook gegeven door een recurrente formule van de vorm:

$$u_n = \begin{cases} b & \text{als } n = 0 \\ a \quad u_{n-1} & \text{als } n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

rij van Fibonacci

De rij van Fibonacci wordt gegeven door de recurrente betrekking:

$$f_n = \begin{cases} 1 & \text{als } n = 0, 1 \\ f_{n-1} + f_{n-2} & \text{als } n = 2, 3, 4, \ldots \end{cases}$$

monotoon

De rij u_0, u_1, u_2, ... is *monotoon stijgend (dalend)* als $u_n > u_{n-1}$ ($u_n < u_{n-1}$) voor $n = 1, 2, 3, \ldots$

constant

Een rij u_0, u_1, u_2, ... is *constant* als $u_n = u_{n-1}$ voor $n = 1, 2, 3, \ldots$

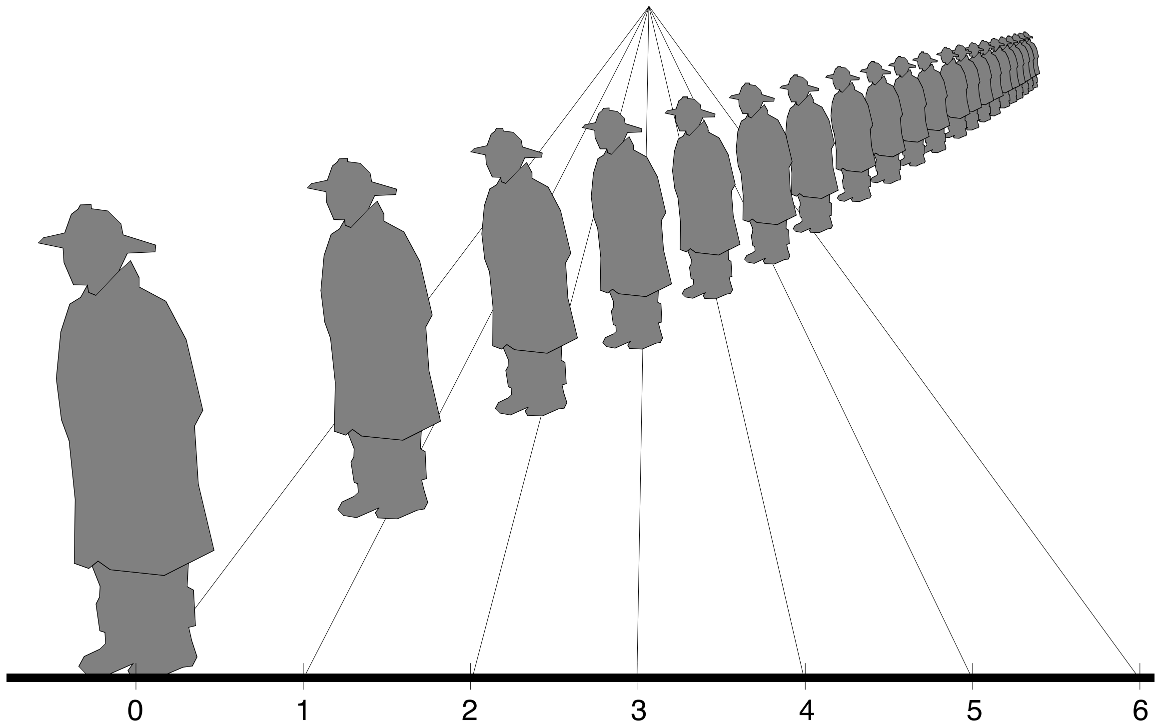
alternerend

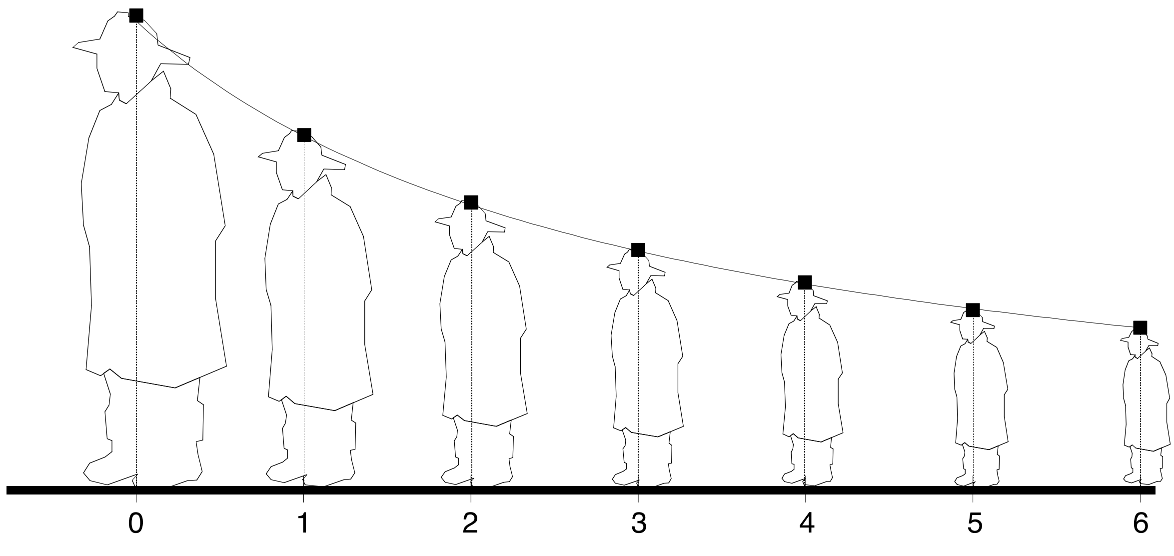
Een rij u_0, u_1, u_2, ... is *alternerend* als $u_n u_{n-1} < 0$ voor $n = 1, 2, 3, \ldots$

begrensd

De rij u_0, u_1, u_2, ... is *naar boven (beneden) begrensd,* als er een getal g bestaat zó dat u_n £ g (u_n ‡ g) *voor* $n = 0, 1, 2, \ldots$.
Het getal g is een *bovengrens* (*benedengrens*) van de rij.

Convergente rijen





Rijen gaan eindeloos door. Als je de eerste triljoen termen van een rij weglaat, zit je nog steeds met een ‘staart’ van oneindig veel termen. We richten ons nu op het staartgedrag’ van een rij. In het speciale geval dat de termen van een rij ‘op den duur’ willekeurig dicht een vast getal (*limiet*) benaderen, spreekt men van een *convergente* rij. Het vaststellen of een rij convergent is en het berekenen van de eventuele limiet, daarover gaat het in dit hoofdstuk.

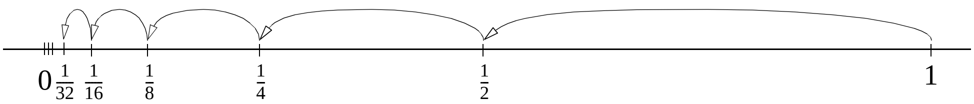
7: Nader tot nul

Inleiding

Rijen kunnen een limiet hebben. In het eerste hoofdstuk heb je rijen met stapformule $a_{n+1} = 90 - \frac{1}{2}a_n$ onderzocht. De getallen van deze rijen bleken willekeurig dicht bij 60 te komen, en dat verschijnsel hebben we op bladzijde 12 voorlopig omschreven als: de rij heeft de limiet 60.
In de vorige paragraaf heb je gezien dat je via de GR een idee kunt krijgen van de limietwaarde van rijen. Maar *zekerheid* omtrent de exacte waarde van de limiet kun je zo niet krijgen.
We gaan rijen bestuderen waarvan de limiet exact te berekenen is. Onze eerste taak is precies vast te leggen wat we met limiet bedoelen. We doen dat in twee stappen: eerste een speciaal geval, de zogenaamde nulrijen, dan – in een volgende paragraaf – het algemene geval.

dichtbij 0

In de figuur hieronder zie je een plaatje van de rij gegeven door $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.



In het plaatje kun je zien dat de streepjes, die de opvolgende termen aangeven, steeds dichter bij het punt 0 komen te liggen: de afstand tot 0 wordt immers steeds gehalveerd. Maar het getal 0 wordt door deze rij nooit bereikt.
Je zou het als volgt kunnen zeggen: de termen van de rij komen steeds dichter bij 0.
Een scherpslijper kan dan opmerken dat de opvolgende termen ook steeds dichter bij -1 of bij -100 komen. Er is natuurlijk een belangrijk verschil: de termen komen weliswaar steeds dichter bij -1 maar het verschil met -1 blijft altijd groter dan 1: de termen blijven een flink stuk van -1 af. Wil je het gedrag van de rij beschrijven, dan zegt 'dichter bij -1' dus niet veel. We moeten ons dus nauwkeuriger uitdrukken, want we willen op een of andere manier vastleggen wat we bedoelen met: u_n komt *willekeurig* dicht bij nul.

nulrijen

We maken daarbij gebruik van wat in hoofdstuk 1 al is gebeurd: we vergelijken de rij met de decimale getallen 0.1, 0.01, 0.001, enzovoorts.
De rij $a_0 - 60$, $a_1 - 60$, $a_2 - 60$,... die we daar hadden, bleek wat kleinheid betreft op den duur al deze getallen achter zich te laten. Anders gezegd, bij zo'n speciaal decimaal getal, was altijd een rangnummer te vinden waarbij de rij in grootte definitief onder dat decimale getal dook en er niet meer boven kwam. Zo'n rij zullen we voortaan een *nulrij* noemen. Nu de definitie:

definitie nulrij

Een rij u_0, u_1, u_2, ... is een *nulrij* als er bij *elk* getal van de vorm 0.0...1 (= 10^{-p}), een rangnummer N te vinden is, waarvoor geldt:

als $n \geq N$, dan is de afstand van u_n tot 0 kleiner dan 10^{-p}.

notatie

Dat u_0, u_1, u_2, ... een nulrij is, schrijven we kernachtig zó op:

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 0$$

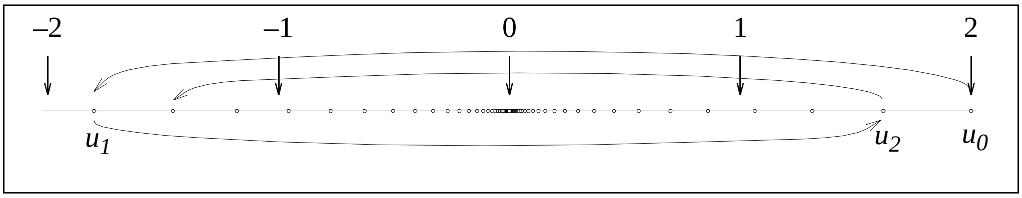
Spreek uit: *de limiet voor n naar oneindig van u_n is nul.*

staartgedrag

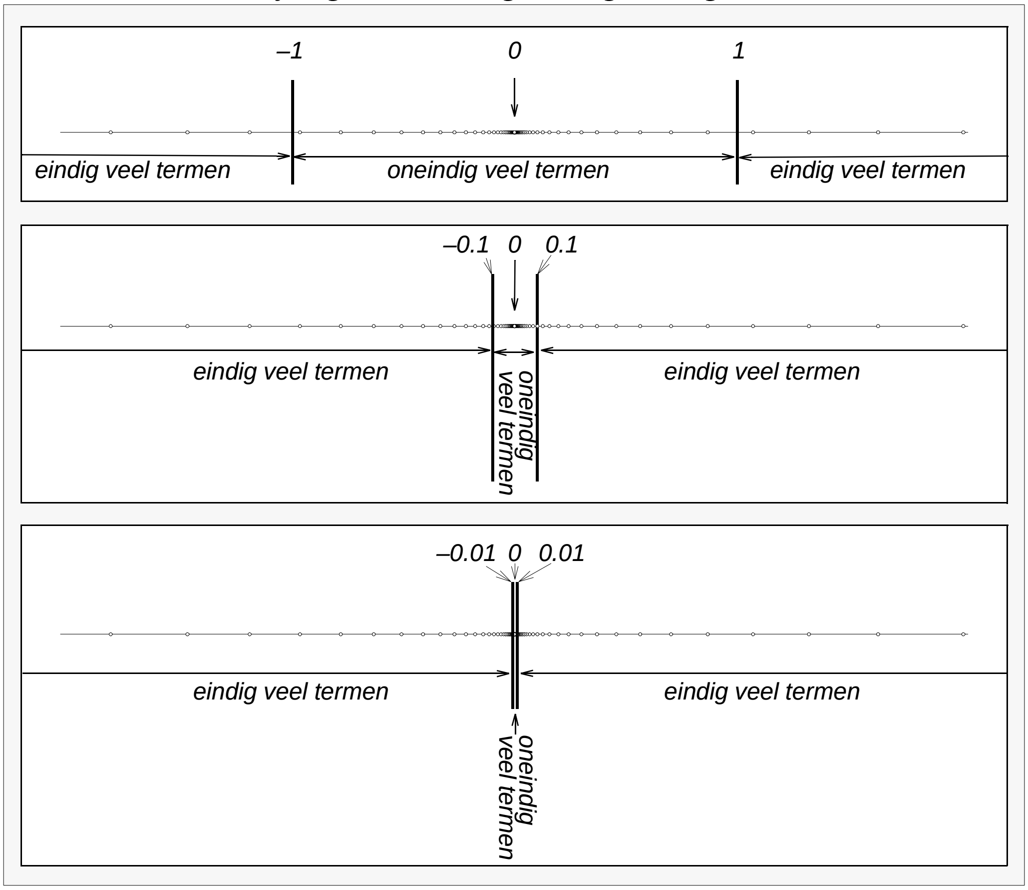
Voor een nulrij geldt dat iedere term van de *staart* $u_N, u_{N+1}, u_{N+2}, \ldots$ binnen het intervalletje met grenzen -10^{-p} en 10^{-p} ligt.
Het betekent dat *binnen* zo'n intervalletje altijd *oneindig* veel en *buiten* zo'n intervalletje slechts een *eindig* aantal termen van de rij liggen.
Je zou zelfs kunnen zeggen dat, hoe klein het intervalletje om 0 ook gekozen wordt, 'bijna alle' termen van de rij in zo'n intervalletje gevangen worden.

Met een voorbeeld brengen we dat in beeld.
Eerst zie je de rij zelf, de pijlen geven de volgorde der termen aan.

Het gaat om de nulrij $u_n = 2 \quad (-0{,}9)^n$.



Hieronder is de nulrij-definitie driemaal geïllustreerd, met $p = 0$, $p = 1$ en $p = 2$. Verdere illustraties worden aan je eigen voorstellingsvermogen overgelaten.



Besef hierbij dat, ook al vallen er zoveel termen buiten het intervalletje als er zandkorrels aan het strand van de zee zijn, dit vrijwel niets is vergeleken met de oneindigheid aan termen die binnen het intervalletje vallen.

1 In de definitie wordt dat niet expliciet gezegd, maar natuurlijk is het wél zo: bij een *andere* p moet een *andere* N gevonden worden.
Bij opgave **11 a,** bladzijde 12 in hoofdstuk 1, heb je dat gezien. Welke waarde van N heb je daar nodig als $p = 3$? En als $p = 4$?

2 **a.** Is de rij $1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{8}, 0, \frac{1}{16}, \ldots$ een nulrij?
En de rij $1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, \ldots$?
b. Bedenk een nulrij die uitsluitend negatieve termen bevat.

traag of snel

Sommige nulrijen naderen snel, andere nulrijen naderen traag tot 0, zoals je in de volgende opgave zult zien.

3 In de kop van deze tabel staat van vier nulrijen de directe formule. Neem de tabel over en vul op de open plaatsen een rangnummer N in dat aan de in de tabel genoemde voorwaarde voldoet. Let erop dat helemaal niet geëist wordt het scherpst mogelijke getal N te vinden; alleen: ‘*een* rangnummer N, waarvoor geldt .... .’.

Geschikte ***N*** bij gegeven afstanden tot 0 voor diverse rijen.
Voor rangnummers ***n*** hoger dan ***N*** liggen de termen van de rij minder dan de aangegeven afstand van 0 af.

afstand tot 0 minder dan:	$u_n =$	$\frac{1}{\log n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$
0.1					4
0.001					
0.000 001					
0.000 000 001					

extra

Bij de volgende opgave gaat het om trager of sneller naar 0 gaan. Het gaat niet om een paar termen achterlopen, maar echt of de te vinden N bij gegeven 10^{-p} bijvoorbeeld twee keer zo groot moet zijn, of nog op een andere manier veel groter is.

4 **a.** Zoek een rij die veel sneller naar 0 gaat dan de snelste rij van opgave **3**.
b. Zoek een rij die veel trager naar 0 gaat dan de traagste rij van opgave **3**.

c. Gaat de rij $1, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{16}, 0, \frac{1}{64}, 0, \frac{1}{256}, \ldots$ sneller of juist trager naar 0 dan de rij $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$?

Als de termen van een rij *in absolute waarde* kleiner zijn dan de termen van een nulrij, dan is die rij zelf een nulrij. Of, wat nauwkeuriger geformuleerd:

vergelijkingsstelling voor rijen

Vergelijkingsstelling voor rijen

Laten $u_0, u_1, u_2, \ldots$ en $v_0, v_1, v_2, \ldots$ twee rijen zijn.

Als de rij $u_0, u_1, u_2, \ldots$ een nulrij is, en vanaf een zeker rangnummer N geldt $|v_n| \leq |u_n|$, dan is de rij $v_0, v_1, v_2, \ldots$ ook een nulrij.

Dit vergelijkingsprincipe behoeft nauwelijks bewijs. Dit is eigenlijk alles: de N die je bij een 10^{-p} voor de rij u_n vindt, is ook goed genoeg voor v_n. Dat die N voor de rij v_n misschien niet het best mogelijke is, doet er niet toe. In de definitie wordt slechts geëist dat er een N met de gevraagde eigenschap is.

5 Gegeven is de rij:

$$\sin 1, \tfrac{1}{2}\sin 2, \tfrac{1}{3}\sin 3, \tfrac{1}{4}\sin 4, \tfrac{1}{5}\sin 5, \ldots$$

a. Maak op de GR een tabel van de rij. Je ziet dat de termen flink schommelen en je moet wel een aardig eindje afdalen in de tabel om het vermoeden te krijgen dat de limiet nul is.

b. Hoe kun je met behulp van de vergelijkingsstelling aantonen dat dit wel degelijk een nulrij is?

6 Welke van de volgende rijen hebben de limiet nul en waarom? Gebruik zo nodig de vergelijkingsstelling.

a. $u_n = 1 - \cos(n\pi)$

b. $v_n = \dfrac{1 - \cos n}{\sqrt{n}}$

c. $x_n = \dfrac{2^n \sin n}{3^n}$

d. $y_n = \left(\tfrac{1}{2}\sin n\right)^n$

8: The sky is the limit

Het tegenovergestelde van het begrip nulrij is ‘de rij waarvan de termen naar oneindig gaan’. Zo’n rij laat in grootte elk van de getallen 10, 100, 1000, 10000, enzovoort, op zeker moment voor altijd achter zich.

Bekijk nog eens de definitie van een *nulrij*.

definitie nulrij

> **Een rij u_0, u_1, u_2 , ... is een *nulrij* als er bij *elk* getal van de vorm 0.0...1 (= 10^{-p}) , een rangnummer N te vinden is, waarvoor geldt:**
>
> **als $n \geq N$, dan is de afstand van u_n tot 0 kleiner dan 10^{-p}.**

7 Definieer nu zelf op een soortgelijke manier wat ‘de rij u_0, u_1, u_2, ... gaat naar oneindig’ precies betekent.

Als de rij u_0, u_1, u_2, ... naar oneindig gaat, kun je schrijven:

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \infty$$

8 Beschrijf een illustratie in de stijl van de figuren op bladzijde 28 om het idee ‘gaat naar oneindig’ uit te beelden. Gebruik de rij $u_n = \sqrt{n}$ als voorbeeld.

9 **a.** Gaat de rij 1, 2, 4, 8, 16, ... naar oneindig?
b. En 1, 2, 1, 4, 1, 8, 1, 16, ... ?

10 Gegeven is de rij $u_n = n^2 - 100n$ (n = 0, 1, 2, ...) .
Onderzoek of deze rij naar oneindig gaat.

11 **a.** Gegeven de rij door $u_n = \log n$.
Vanaf welk rangnummer n zijn de termen groter dan 1000?
b. Dezelfde vraag voor: $u_n = n^2$ en voor $u_n = n^{0.00001}$.

12 In opgave **3** heb je al gemerkt dat $\frac{1}{\log n}$ traag tot nul nadert.
Dit betekent ook dat log n traag naar oneindig gaat.
Maak op de GR met x-interval [0 , 10000] een grafiek van $y = \log x$.
Welk y-interval kies je om een behoorlijk plaatje te krijgen?

13 **a.** Hoe groot moet n zijn om log n groter dan 10^p te krijgen?
Hoeveel nullen achter de 1 heeft dat getal?
b. Op een bladzijde van een tijdschrift gaan ongeveer 10000 tekens (letters of spaties). Een hele jaargang van dat tijdschrift bevat 1000 bladzijden. De dikte van zo’n jaargang is ongeveer 10 cm. Hoe hoog moet een stapel jaargangen zijn die in totaal 10-tot-de-macht-10^{10} tekens bevat?

14 Belangrijk zijn de rijen $u_n = r^n$, waarbij $r > 1$. Deze rijen zijn monotoon stijgend voor alle waarden van $r > 1$.
a. Wat denk je, gaat zo’n rij naar oneindig, ook als r slechts een heel klein beetje groter is dan 1?
b. Neem $r = 1.1$. Vanaf welke waarde van n geldt: $r^n > 100$?
c. Dezelfde vraag voor $r = 1.01$ en voor $r = 1.001$.

15 Wat je in **14b** en **c** hebt gedaan, kun je generaliseren.
Vanaf welk rangnummer N geldt: als $n > N$, dan $r^n > 10^p$?

In het voorgaande is het verband gelegd tussen het gedrag van de rijen:

$$\log 2, \log 3, \log 4, \log 5, \ldots.$$

en

$$\frac{1}{\log 2}, \frac{1}{\log 3}, \frac{1}{\log 4}, \frac{1}{\log 5}, \ldots$$

De eerste rij gaat (traag, maar onherroepelijk) naar oneindig, de tweede rij nadert tot nul.
De termen van beide rijen zijn elkaars omgekeerde.
Neem nu een rij $u_0, u_1, u_2, \ldots$ waarvan de termen $\neq 0$ zijn. Dan geldt:

stelling

> **Als de rij $u_0, u_1, u_2, \ldots$ naar oneindig gaat,**
>
> **dan nadert de rij $\frac{1}{u_0}, \frac{1}{u_1}, \frac{1}{u_2}, \ldots$ tot nul**

16 De stelling volgt direct uit de twee definities van 'nulrij' en 'gaat naar oneindig'. Ga dit na.

17 Hieronder volgen drie rijen, gedefinieerd met een directe formule. Gebruik bovenstaande stelling om na te gaan of die rijen tot nul naderen voor $n \to \infty$.

a. $a_n = \dfrac{1}{n^2 - 100n + 1}$

b. $b_n = \dfrac{1}{2 + \sin(n\pi)}$

c. $c_n = 1{,}01^{-n}$

18 a. Bewijs dat voor elk natuurlijk getal n geldt:

$$\sqrt{n^2+1} - n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n}$$

Tip: twee getallen zijn elkaars omgekeerde zijn als hun product gelijk is aan 1.

b. Verklaar nu:

$$\lim_{n \to \infty} (\sqrt{n^2+1} - n) = 0$$

c. Kies een getal a zodat:

$$\lim_{n \to \infty} (\sqrt{n^3+1} - n^a) = 0$$

enige kans op waarheid heeft.
Toon voor die waarde van a aan dat deze limietbewering geldt.

19 De stelling zegt dat bij een rij die naar oneindig gaat, een nulrij hoort.
Kun je deze uitspraak omkeren, dat wil zeggen: hoort bij een nulrij ook een rij die naar oneindig gaat? Zo nee, bedenk 'tegenvoorbeelden'.

9: Convergente rijen

We keren even terug naar hoofdstuk 1.
De rij $a_0 - 60$, $a_1 - 60$, $a_2 - 60$, ... bleek, ongeacht de keuze van a_0, een nulrij te zijn.
Als je bedenkt dat:

$$a_n - 60 = \left(-\tfrac{1}{2}\right)^n (a_0 - 60)$$

en

$$\lim_{n \to \infty} \left(-\tfrac{1}{2}\right)^n = 0$$

is dat duidelijk.
We zeggen nu dat de rij a_0, a_1, a_2, ... *convergeert* naar 60, ofwel dat: .

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 60$$

definitie van convergente rij

De rij u_0, u_1, u_2, ... convergeert naar het getal c,   **als de verschilrij $u_0 - c$, $u_1 - c$, $u_2 - c$, ... een nulrij is.**

Een rij die convergeert naar een of ander (eindig) getal c, noemt men *convergent*.

De constante c wordt de limiet van de rij genoemd en we noteren:

$$\lim_{n \to \infty} u_n = c$$

20 Gegeven is de rij u_1, u_2, u_3, ... met $u_n = \dfrac{n+1}{n}$

a. Bewijs dat de rij $u_1 - 1$, $u_2 - 1$, $u_3 - 1$, ... een nulrij is.
b. Naar welk getal convergeert u_1, u_2, u_3, ...?

21 Maak van de volgende rijen eerst een stippengrafiek (venster [1 , 20] bij [0 , 6]).
Voorspel de uitkomst van $\lim\limits_{n \to \infty} u_n$ en verifieer je voorspelling.

a. $u_n = 3 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^n$

b. $u_n = 5 - \dfrac{1}{n}$

c. $u_n = \dfrac{3 + 2n}{n}$

d. $u_n = \dfrac{n+2}{n+1}$

22 Welke van de volgende rijen zijn convergent?

a. $a_n = \sin(\pi n)$

b. $b_n = \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi n\right)$

c. $c_n = \log\left(\tfrac{1}{n}\right)$

d. $d_n = 1 + e^{-n}$

10: Rekenen met limieten

Voor het berekenen van limieten van rijen mag je in het vervolg een viertal rekenregels gebruiken. Die regels zeggen dat, als je twee convergente rijen term voor term optelt, aftrekt, vermenigvuldigt of deelt, je met de limietwaarden hetzelfde kunt doen.
Hier is deze stelling precies geformuleerd; het bewijs van deze stelling blijft achterwege.

stelling: rekenregels voor limieten

Veronderstel dat $u_0, u_1, u_2, \ldots$ en $v_0, v_1, v_2, \ldots$ rijen zijn die respectievelijk convergeren naar u en v.

Er geldt:

$$\lim_{n \to \infty} (u_n + v_n) = u + v$$

$$\lim_{n \to \infty} (u_n - v_n) = u - v$$

$$\lim_{n \to \infty} (u_n \cdot v_n) = u \cdot v$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \frac{u}{v} \quad \text{(als bovendien } v \neq 0\text{)}$$

Twee voorbeelden:

I $\quad \lim_{n \to \infty} (2 + \frac{1}{n}) = 2 \quad$ en $\quad \lim_{n \to \infty} (3 - \frac{1}{n}) = 3$

Dus: $\quad \lim_{n \to \infty} (2 + \frac{1}{n})(3 - \frac{1}{n}) = 6$

II

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2 + 5n + 8}{n^2 + 2n - 5} = \lim_{n \to \infty} \frac{1 + \frac{5}{n} + \frac{8}{n^2}}{1 + \frac{2}{n} - \frac{5}{n^2}} = \frac{1 + 0 + 0}{1 + 0 - 0} = 1$$

23 a. Welke rekenregel is in voorbeeld I gebruikt?

b. In voorbeeld II is een slimme truc toegepast. Teller en noemer van de breuk zijn gedeeld door de hoogste voorkomende macht van n (hier n^2). Daardoor krijg je met vier nulrijen te maken. Welke rekenregels zijn daarna gebruikt?

24 Bereken de volgende limieten; controleer jezelf met een stippengrafiek.

a. $\lim_{n \to \infty} (1^n + 0{,}9^n + 0{,}8^n)$

b. $\lim_{n \to \infty} (\frac{1}{\sqrt{n}} - 4)(\frac{2}{n} + 2)$

c. $\lim_{n \to \infty} \frac{3n - 1}{2n + 7}$

d. $\lim_{n \to \infty} \frac{n^2 + 100}{n^3 - 1}$

25 Bij het voorbeeld $\lim_{n \to \infty} \frac{n^2 + 5n + 8}{n^2 + 2n - 5} = 1$ zou je kunnen redeneren: de teller gaat naar oneindig en de noemer ook. Dus gaat het quotiënt naar 1. Klaar.
Laat aan de hand van een van de voorbeelden van opgave **24** zien dat die redenering niet deugt en breng onder woorden waarom het fout kan gaan.

26 Bereken elk van de volgende limieten:

a. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n}{3n + 100}$

b. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(n-1)^2}{n^2 + 2n}$

c. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3n + 100}{n}$

d. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(2n^3 - 1)(3n^2 + 1)}{(n+1)^5}$

27 a. Bereken:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \ldots + n}{n^2}$$

b. Ook:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2}{n^3}$$

28 a. Bedenk een rij $u_0, u_1, u_2, \ldots$ die naar 2 convergeert, maar waarvan alle termen $\neq 2$ zijn.

b. Bereken vervolgens $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{u_n^2 - 4}{u_n - 2}$.

29 Van de rij $u_0, u_1, u_2, \ldots$ is gegeven dat zij convergeert naar 10.
Bereken:

a. $\lim\limits_{n \to \infty} u_n^3$

b. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{u_n + 5}{u_n - 5}$

c. $\lim\limits_{n \to \infty} (u_n^2 - u_n)$

d. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{33}{1 + \dfrac{1}{u_n}}$

11: Limieten invullen

een kwestie van invullen

Stel je hebt een rij $x_0, x_1, x_2, \ldots$ die naar 7 convergeert.
Dan convergeren volgens de rekenregels van de vorige paragraaf

de rij $u_0, u_1, u_2, \ldots$ met $u_n = 10 - x_n$ naar 3,

de rij $v_0, v_1, v_2, \ldots$ met $v_n = 51 + x_n^2$ naar 100,

de rij $w_0, w_1, w_2, \ldots$met $w_n = \dfrac{10 - x_n}{51 + x_n^2}$ naar 0.03.

Je zou kunnen zeggen: in bovenstaande voorbeelden is het berekenen van de limiet een kwestie van 'invullen' in een functie *f*.

(in de voorbeelden hierboven geldt respectievelijk: $f(x) = 10 - x$, $51 + x^2$, $\dfrac{10-x}{51+x^2}$).

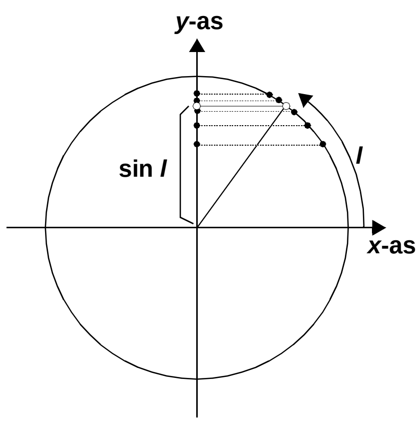
Werkt dit invulprincipe altijd?
Laten we eens een tamelijk wilde functie bekijken:

$$f(x) = \frac{\ln(10 - \sin x)}{3 + \tan^2 x} + e^{\cos(1 + x^2)}$$

Neem nu een rij $t_0, t_1, t_2, \ldots$ die convergeert naar de limiet l.
Hoe zit het met de rij $f(t_0), f(t_1), f(t_2), \ldots.$? Het ligt misschien in de lijn der verwachting dat die naar $f(l)$ convergeert, maar is dat ook zo?

sin en cos

Om dit wat nader te onderzoeken, letten we op de bouwstenen van de formule.
Een van die bouwstenen is de sinusfunctie.
De eerste vraag waar we voor staan, is nu of $\sin(t_0), \sin(t_1), \sin(t_2), \ldots.$ naar $\sin(l)$ convergeert.
Meetkundig gezien is het heel aannemelijk dat dit inderdaad het geval is. De functie sin komt voort uit de eenparige cirkelbeweging.
De rij $t_0, t_1, t_2, \ldots$ correspondeert met een rij punten op de eenheidscirkel.
Projectie daarvan op de *y*-as brengt de rij $\sin(t_0)$, $\sin(t_1), \sin(t_2), \ldots.$ in beeld.
Het witte punt op de eenheidscirkel correspondeert met l en het witte punt op de *y*-as met $\sin l$.
Als de rij (zwarte) punten op de eenheidscirkel het punt l willekeurig dicht benadert, dan zal de rij beeldpunten op de *y*-as het punt $\sin l$ willekeurig dicht benaderen. Immers: de afstanden langs de cirkelboog worden geprojecteerd tot kleinere afstanden.



Projectie op de *x*-as geeft de rij $\cos(t_0), \cos(t_1), \cos(t_2), \ldots.$ en het is duidelijk dat deze rij naar $\cos l$ convergeert. In het vervolg mag je uitgaan van:

> **ALS de rij t_0, t_1, t_2, ... convergeert naar l,**
>
> **DAN convergeert de rij sin t_0, sin t_1, sin t_2, ... naar sin l**
>
> **en convergeert de rij cos t_0, cos t_1, cos t_2, ... naar cos l.**

limiet-behoudend

We zeggen nu: sinus en cosinus zijn ‘limietbehoudende’ functies*.

In de bovenstaande formule komt $\cos(1 + x^2)$ voor en dat ziet er weer wat moeilijker uit. Dat valt echter reuze mee. Maak opgave **30** maar en het zal je duidelijk zijn dat deze functie ook limietbehoudend is.

30 Gegeven weer de convergente rij $t_0, t_1, t_2, \ldots$ met de limiet l.

a. Stel $u_n = 1 + t_n^{\,2}$.
Op grond waarvan kun je zeggen dat de rij $u_0, u_1, u_2, \ldots$ naar $1 + l^2$ convergeert?

b. Op grond waarvan weet je nu ook dat de rij:

$$\cos\left(1 + t_0^2\right), \cos\left(1 + t_1^2\right), \cos\left(1 + t_2^2\right), \ldots$$

naar $\cos(1 + l^2)$ convergeert?

schakelregel

Het principe van opgave **30** noemen we de schakelregel.
In meer algemene termen luidt die regel:

> **ALS *x* fi *f* (*x*) en *x* fi *g* (*x*) limietbehoudende functies zijn,**
>
> **DAN is ook de functie *x* fi *g* (*f*(*x*)) limietbehoudend .**

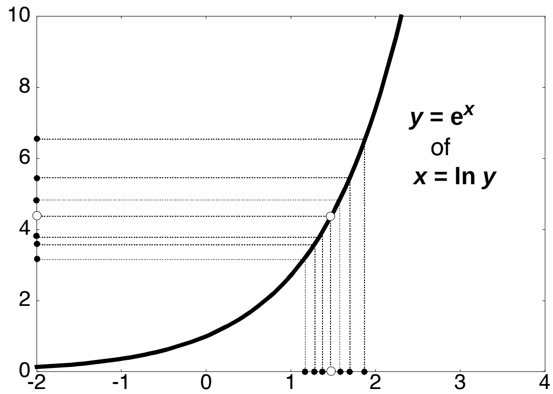
De redenering dat dit zo is, is dezelfde als de redenering bij opgave **30.**

e-macht en logaritme

Ten slotte kun je in het vervolg ook gebruikmaken van:

> - **ALS de rij $t_0, t_1, t_2, \ldots$ convergeert naar l,**
>   **DAN convergeert de rij $e^{t_0}, e^{t_1}, e^{t_2}, \ldots$ naar e^l.**
> - **ALS de positieve rij $t_0, t_1, t_2, \ldots$ convergeert naar het positieve getal l,**
>   **DAN convergeert de rij $\ln t_0, \ln t_1, \ln t_2, \ldots$ naar $\ln l$.**

Dit kunnen we niet zo mooi aannemelijk maken als de regel voor sinus en cosinus van de vorige bladzijde. Maar als je er niet aan twijfelt dat de grafiek van $y = e^x$ een kromme zonder onderbrekingen is, dan is bovenstaande regel heel geloofwaardig.



* De officiële wiskundige term is *continu*; daar komen we in de volgende paragraaf op terug.

invulprincipe Je hebt nu voldoende regels tot je beschikking om het ‘invulprincipe’ toe te passen op een grote klasse van functies.

31 a. Uit de voorgaande regels volgt nu bijvoorbeeld dat de functie $y = \ln(10 - \sin x)$ limietbehoudend is. Verklaar dit.

b. Welke regels heb je nodig om te verantwoorden dat $y = 3 + \tan^2 x$ limietbehoudend is?

c. En welke om te verantwoorden dat ook $y = e^{\cos(1+x^2)}$ limietbehoudend is?

d. Tenslotte weet je nu dat je inderdaad het invulprincipe kunt toepassen op:

$$f(x) = \frac{\ln(10 - \sin x)}{3 + \tan^2 x} + e^{\cos(1+x^2)}$$

Verklaar dit ook.

32 Op alle exponentiële functies en op alle machtsfuncties kun je het invulprincipe toepassen.

Neem bijvoorbeeld de exponentiële functie $y = 5.98^x$ en de machtsfunctie $y = x^{1.2308}$

Voor de eerste kun je schrijven: $y = e^{\ln 5{,}98 \; x}$ en voor de tweede $y = e^{1{,}2308 \; \ln x}$

Ga na volgens welke regels deze functies limietbehoudend zijn.

33 Bekijk op de GR de grafiek van $f(x) = (1 + x^2)^x$; deze functie is limietbehoudend.

a. Laat zien hoe dit uit de voorgaande regels volgt (tip: schrijf f als macht van e).

b. Bereken $\lim\limits_{n \to \infty} f\left(\frac{3n+1}{n+3}\right)$

34 Je kunt nagaan dat de functies: $y = \ln(1 - x^2)$, $y = \sqrt{1 + \sin x}$, $y = xe^{1/x}$ limietbehoudend zijn (mits de limiet in het domein van de functie zit).

Gebruik het invulprincipe om $\lim\limits_{n \to \infty} u_n$ te berekenen in de gevallen:

a. $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

b. $u_n = \sqrt{1 + \sin\left(\frac{100}{n}\right)}$

c. $u_n = \frac{n+1}{n-1} e^{\frac{n-1}{n+1}}$

35 Pas in elk van de volgende gevallen het invulprincipe toe om $\lim\limits_{n \to \infty} u_n$ te vinden.

a. $u_n = e^{\left(\frac{1+n^2}{n^3}\right)}$

b. $u_n = \ln(e - \sin(0{,}9^n))$

c. $u_n = \sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{4 + \frac{1}{n}}}}$

d. $u_n = \dfrac{30}{10 + \dfrac{40}{3 + \dfrac{5}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}}}$

e. $u_n = \cos\left(\frac{1 + 2^n}{1 - 2^n}\pi\right)$

Wees eerlijk: het zag er dreigend uit, maar het viel nogal mee!

12: Extra: continu en discontinu

36 Voer in de GR in: $y_1 = \sin(x - 1) / (x - 1)$, $y_2 = 1 + (-0{,}1)^x$ en $y_3 = y_1(y_2)$.
Zet nu in Tbl Set de startwaarde 0 en de stapgrootte 1.
Schakel y_1 uit en bekijk nu de tabellen van y_2 en y_3.

De y_2-tabel geeft je de termen van de rij $t_n = 1 + (-0{,}1)^n$.

De y_3 -tabel geeft je de termen van de rij $u_n = y_1(t_n)$.

a. De rij $t_0, t_1, t_2, \ldots$ convergeert naar 1. Verklaar dat.

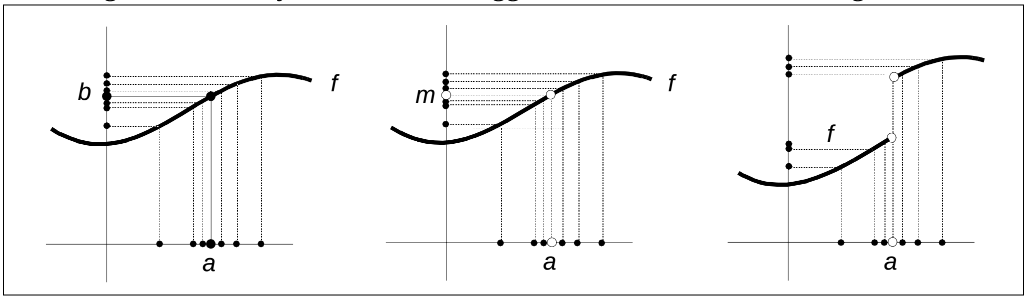
b. Hoe zit het denk je met de rij $u_0, u_1, u_2, \ldots$ (de rij in de y_3-tabel)?

c. Vervang $y_1 = \sin(x - 1) / (x - 1)$ door $y_1 = \text{abs}(x - 1) / (x - 1)$
Hoe zit het nu met de convergentie van de getallenrij in de y_3-tabel?

d. Schakel nu y_2 en y_3 uit en bekijk met als venster [0 , 2] bij [–2 , 2] de grafiek van $y_1 = \text{abs}(x - 1) / (x - 1)$. Vervang daarna weer abs door sin en bekijk ook deze grafiek. Kun je uit de grafieken je antwoorden bij vraag **b** en **c** verklaren?

grafiek mét of zonder onderbreking

Je hebt nu het gedrag bekeken van twee functies in de buurt van $x = 1$.
Als het goed is, heb je waargenomen dat:
– de grafiek van $y = \sin(x - 1) / (x - 1)$ bij $x = 1$ *een onderbreking ter grootte van een punt* heeft;
– de grafiek van $y = \text{abs}(x - 1) / (x - 1)$ bij $x = 1$ *een sprong* vertoont.
Daarnaast ken je natuurlijk massa's functies waarvan de grafiek geen onderbrekingen vertoont.
Hieronder zie je drie typen functies in een plaatje. Veronderstel daarbij dat de eerste functie gedefinieerd is op een interval I (met daarin het getal a) en dat de beide andere functies gedefinieerd zijn in I^*, dat wil zeggen: het interval I zonder het getal a.



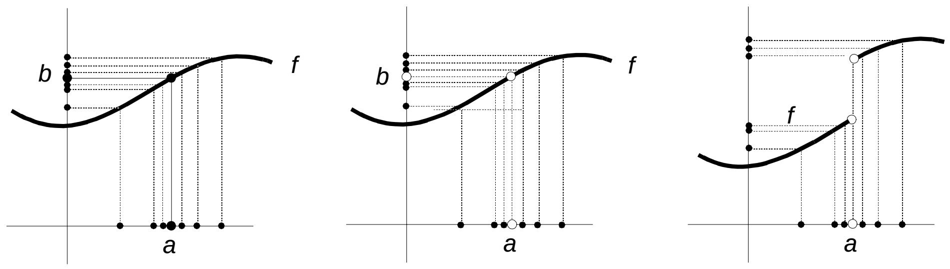
De eerste functie is limietbehoudend in a, dat wil zeggen dat voor iedere rij $x_0, x_1, x_2, \ldots$ die naar a convergeert, de rij $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots.$ naar $f(a)$ convergeert.
De derde is dat duidelijk niet. Bij de middelste is het zo dat $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots.$ wel convergent is (naar b) maar die waarde is niet gelijk aan $f(a)$; je kunt niet invullen!

limiet van een functie

In de eerste twee gevallen zeggen we: ***f(x)*** **heeft de limiet** ***b*** **voor** ***x*** **nadert tot** ***a***.

Dit betekent hetzelfde als:
voor *iedere* naar a convergerende rij $x_0, x_1, x_2, \ldots$ waarvan de termen tot het domein van f behoren, geldt dat de rij $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots.$ naar b convergeert.

De laatste zin kun je als *definitie* opvatten voor de limiet van een functie.
De limiet van een rij is in hoofdstuk 8 netjes gedefinieerd. De limiet van een functie kan dus worden gebaseerd op het limietbegrip bij rijen.
Bovenstaande definitie heeft meer belang voor de theorie dan voor de praktijk. Als je haar zou willen toepassen in vraagstukken, krijg je te maken met de moeilijkheid dat je oneindig veel rijen zou moeten bekijken. Dat is de reden dat de definitie hier niet met vette letters is gedrukt.
Overzicht:



geen onderbreking bij x = l	*punt-onderbreking bij x = l*	*sprong bij x = l*
ALS $x_0, x_1, x_2, \ldots$ ***in*** I ***en*** $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ ***DAN*** $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$	***ALS*** $x_0, x_1, x_2, \ldots$ ***in*** I^* ***en*** $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ ***DAN*** $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$	***er bestaan rijen*** $x_0, x_1, x_2, \ldots$ ***in*** I^* ***met*** $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ ***terwijl*** $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots$ ***niet convergeert!***

$\lim_{x\to a} f(x)$ bestaat

37 In het derde geval (rechter plaatje) kun je niet zeggen dat *f(x)* een limiet heeft voor *x* nadert tot *a*. Wel zou je kunnen spreken van een *rechter-limiet* en van een *linker-limiet*. Verklaar dit met behulp van rijen.

continu en discontinu

Bekijk opnieuw de drie plaatjes:
In het eerste geval zeggen we dat *f continu* is in *x* = *a*.
Dat betekent: $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

En ook: als $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, dan $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$

Continu is dus hetzelfde als limietbehoudend.

In het tweede geval noemt men *f discontinu* in *a*, omdat *f*(*a*) niet gedefinieerd is: de grafiek vertoont een ‘puntklein’ gaatje.
Je hoeft geen goede tandarts te zijn om dit gaatje te kunnen vullen: als je apart afspreekt dat *f* de waarde *b* krijgt in *x* = *a*, hef je het discontinu zijn als het ware op.

In het derde plaatje is *f* ook *discontinu,* maar dit kan niet worden gerepareerd.
De sprong kan niet worden overbrugd door het alsnog toevoegen van een functiewaarde.
Men spreekt wel van een *niet-ophefbare* discontinuïteit.

Voorbeeld van een ophefbare discontinuïteit.
de functie f met:

$$f(x) = \frac{\sin(x-1)}{x-1} \quad \text{is discontinu in } x = 1$$

Maar ... als f gedefinieerd wordt door:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x-1)}{x-1} & \text{voor} \quad x \neq 1 \\ 1 & \text{voor} \quad x = 1 \end{cases}$$

dan is f wel continu in $x = 1$.

38 Welke van de volgende functies zijn discontinu in de aangegeven waarde van x?
In welke gevallen kan deze discontinuïteit worden opgeheven en hoe moet dat?

a. $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$ voor $x = 1$

c. $f(x) = \dfrac{x^4 + 1}{x^2 + 1}$ voor $x = -1$

b. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ voor $x = 0$

d. $f(x) = x + \dfrac{|x|}{x}$ voor $x = 0$

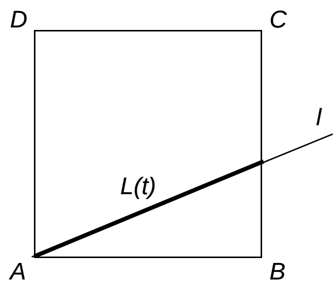
Je hebt in het vorige hoofdstuk al gezien dat je een functie bijna zo gek niet kunt verzinnen of zij is limietbehoudend, dus continu. De uitzonderingen zitten hem in het feit dat er soms ook niet toegestane ‘invulwaarden’ zijn.

continu en differentieerbaar

Verder merken we nog op dat een functie f die differentieerbaar is in $x = a$, daar zeker ook continu moet zijn.
Het omgekeerde geldt niet(!): continu in $x = a$ betekent niet automatisch differentieerbaarheid in $x = a$.
In termen van grafieken: als de grafiek geen onderbreking heeft bij $x = a$, dan hoeft die grafiek daar niet per se glad te zijn.

39 Bedenk zelf een eenvoudig voorbeeld van een functie die wél continu in $x = 0$, maar aldaar niet differentieerbaar is.

40 Gegeven is een vierkant $ABCD$ met zijde 1. De lijn l draait door het hoekpunt A. De hoek van l met AB stellen we gelijk aan t radialen. Als $0 \leq t \leq \frac{1}{2}\pi$ snijdt l het vierkant volgens een lijnstuk waarvan de lengte L afhangt van t.



a. Geef een formule voor $L(t)$ geldig voor $0 \leq t \leq \frac{1}{4}\pi$.

b. Is dezelfde formule ook geldig voor $\frac{1}{4}\pi < t \leq \frac{1}{2}\pi$?
Zo nee, geef dan de correcte formule.

c. Schets een grafiek van L als functie van t op het interval $[0, \frac{1}{2}\pi]$.

d. Is L continu in $t = \frac{1}{4}\pi$? En is L aldaar differentieerbaar?

e. Schets de grafiek van L'. Wat merk je op?

Samenvatting

nadert tot 0

Een rij $u_0, u_1, u_2, \ldots$ nadert tot nul (is een nulrij) als voor ieder interval rond nul, hoe klein dat ook is, 'bijna alle' termen in dat interval liggen. De uitdrukking 'bijna alle' betekent hier hetzelfde als 'termen vanaf een zeker rangnummer'.

Notatie: $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$

gaat naar oneindig

Een rij $u_0, u_1, u_2, \ldots$ gaat naar oneindig als voor ieder getal, hoe groot dat ook is, 'bijna alle' termen voorbij dat getal liggen.

Notatie: $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \infty$

nadert tot *c*

Een rij $u_0, u_1, u_2, \ldots$ convergeert naar het getal c als de rij $u_0 - c, u_1 - c, u_2 - c, \ldots$ naar nul convergeert.

Notatie: $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = c$

verband tussen 0 en ∞

> **Als de rij $u_0, u_1, u_2, \ldots$ naar oneindig gaat,**
>
> **dan geldt:** $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{1}{u_n}\right) = 0$

vergelijkingsstelling voor rijen

> **Laten u_n en v_n twee rijen zijn.**
>
> **Als de rij u_n een nulrij is, en voor alle n geldt $|v_n| \leq |u_n|$,**
> **dan is de rij v_n ook een nulrij.**

rekenregels

Voor het berekenen van limieten kun je gebruikmaken van de vier rekenregels:

$$\lim_{n \to \infty} (u_n + v_n) = \lim_{n \to \infty} u_n + \lim_{n \to \infty} v_n \qquad \lim_{n \to \infty} (u_n - v_n) = \lim_{n \to \infty} u_n - \lim_{n \to \infty} v_n$$

$$\lim_{n \to \infty} (u_n \cdot v_n) = \lim_{n \to \infty} u_n \cdot \lim_{n \to \infty} v_n \qquad \lim_{n \to \infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n \to \infty} u_n}{\lim\limits_{n \to \infty} v_n} \quad \text{mits } \lim_{n \to \infty} v_n \neq 0$$

invulprincipe

Een functie f is limietbehoudend (of continu) in zijn domein als voor iedere convergente rij $x_0, x_1, x_2, \ldots$ in het domein van f, waarvan de limiet ook in het domein van f ligt, geldt:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \to \infty} x_n\right)$$

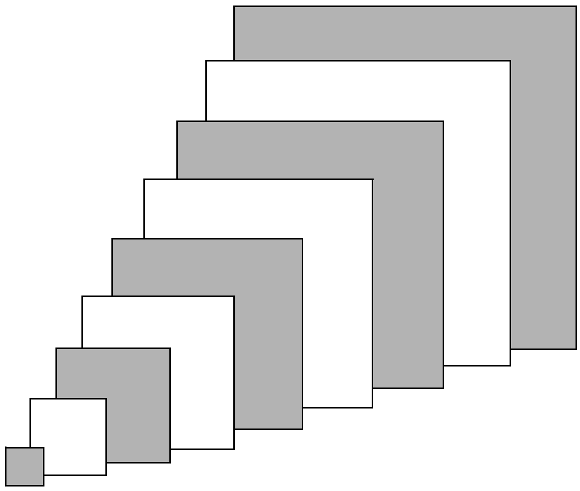
Machtsfuncties, exponentiële functies, logaritmische functies, goniometrische functies en de absolute-waardefunctie (kortom de 'standaardfuncties') zijn limietbehoudend (continu) in elk punt van hun domein.

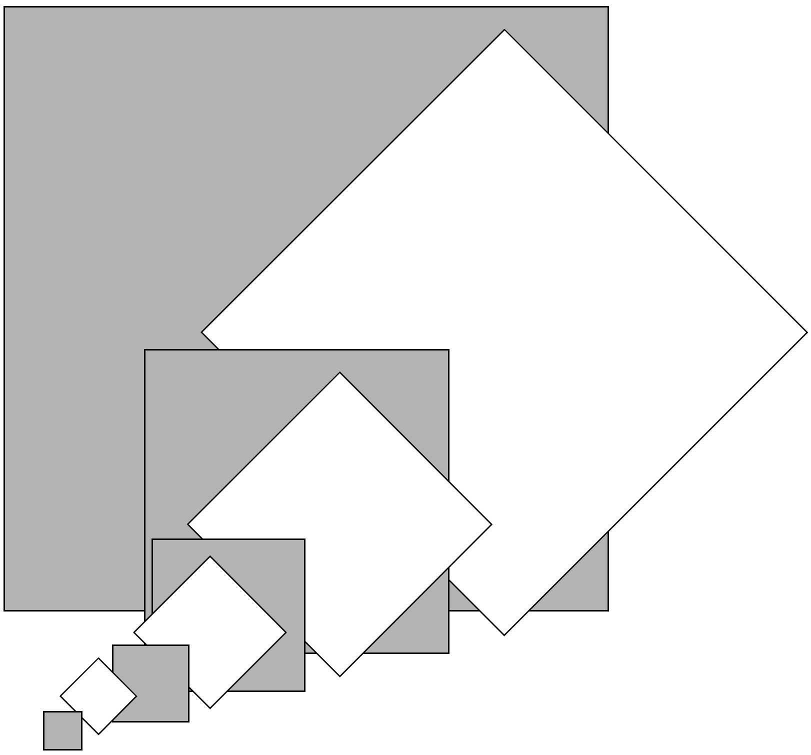
Voor functies die uit standaardfuncties zijn opgebouwd met behulp van de 'gewone' bewerkingen geldt dit ook. Dat volgt uit bovenstaande rekenregels en uit de schakelregel.

schakelregel

> **ALS $x \to f(x)$ en $x \to g(x)$ limietbehoudende (continue) functies zijn,**
>
> **DAN is ook de functie $x \to g(f(x))$ limietbehoudend (continu).**

Grenzen aan de groei





De rij 1, 4, 9, 16, 25, 36, ... (kortom de rij van de kwadraten) legt het qua groeisnelheid af tegen de rij 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ... (kortom de rij van de machten van 2). Dat kun je goed zien in het plaatje van de vorige pagina. Geloof het of niet: de rij van tiende-machten: 1, 1024, 59049, 1048576, ... verliest het op den duur royaal van de rij machten van 1.1, die zo begint: 1, 1.21, 1.331, 1.4641, ... Wat wordt daarmee bedoeld en hoe maak je het waar? Dat komt nu.

13: Soorten van groei, inleiding

wie wint?

In oude economie-boeken kom je wel eens de stelling tegen dat de productiemiddelen groeien volgens een *rekenkundige* (= lineaire) rij en de bevolking volgens een *meetkundige* (= exponentiële) rij. Vervolgens wordt dan geconstateerd dat dit jammerlijke gevolgen zal hebben...
Dat de ene soort groei de andere ruimschoots klopt, dat wist je vermoedelijk al. In dit hoofdstuk gaan we dat een beetje uitdiepen en je kennis over typen groei wat uitbreiden.

bekende typen groei

Eerst even een overzichtje van soorten groei die je al vaker bent tegengekomen.

lineaire groei:	per tijdseenheid wordt de groeiende grootheid steeds met een vast bedrag verhoogd; een voorbeeld is de toename van de prijs van een taxirit afhankelijk van de rijduur.
exponentiële groei:	per tijdseenheid wordt de groeiende grootheid steeds met een vaste factor vermenigvuldigd; een voorbeeld is de groei van een kapitaal bij een vast rentepercentage.
kwadratische groei:	de grootheid is evenredig met het kwadraat van de tijd; een voorbeeld is de groei van de valweg bij vrije val.

In dit hoofdstuk bekijken we groeiverschijnselen aan de hand van *positieve, monotoon stijgende* getalrijen.

machtrijen vergelijken

Om de smaak te pakken te krijgen, is hier een eenvoudig voorbeeld.

1 Maak op de GR de grafieken van $u_n = 1000n$ en $v_n = 0.001n^2$ zichtbaar.
Kies het WINDOW zo, dat voor $n = 1$ t/m 500 beide grafieken in beeld zijn.
Tip: Eigenlijk willen we inderdaad deze rijen in beeld hebben, maar de GR doet daar erg lang over. Dit is een goed alternatief: Maak op de GR de grafieken van $y_1 = 1000x$ en $y_2 = 0.001x^2$.

- **a.** Aanvankelijk (dat wil zeggen als n nog klein is) is u_n groter dan v_n.
Bij welke n-waarde slaat dat om?
- **b.** Laat door verandering van het WINDOW zien dat u_n op den duur erg klein wordt in vergelijking met v_n.
- **c.** De observatie van zoëven kun je onderbouwen door te bewijzen dat:
$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$$
Voer dat bewijs uit.
- **d.** Leg uit waarom het nul zijn van die limiet geïnterpreteerd kan worden als:
'u_n wordt op den duur erg klein in vergelijking met v_n'.

In de volgende twee opgaven breiden we het onderzoek sterk uit.

2
- **a.** Vergelijk op de manier van de vorige opgave $u_n = 55n^8$ en $v_n = 0{,}00321n^{11}$.
Welke rij is hier op den duur de winnaar?
- **b.** Het moment waarop de ene rij de andere inhaalt, wordt gevonden door de vergelijking $u_n = v_n$ op te lossen. Bepaal dat moment voor dit geval, maar zorg dat het uitgedrukt blijft in de getallen '55' en '0.00321'.
- **c.** Licht toe: de winnaar is die met de grootste *macht*. Het getal dat voor de macht staat (de *coëfficiënt*) speelt bij het beslissen over de uiteindelijke winnaar geen rol.

3 Maak de volgende formulering van een algemeen resultaat af (a, b beide ongelijk 0)

$$\lim_{n \to \infty} \frac{an^k}{bn^m} = \begin{cases} 0 & \text{als } k < m \\ \ldots\ldots & \text{als } \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{cases}$$

In de vorige opgave is vastgesteld hoe verschillende *machtrijen* zich tot elkaar verhouden als je let op het gedrag ervan als n naar oneindig gaat.
Nu gaan we soortgelijk onderzoek doen voor exponentiële functies.

exponentiële rijen

Je kent de situatie van het volgende voorbeeld vast wel:

Als je een laag aanvangsbedrag op de bank zet tegen een hoog rentepercentage, ben je op de lange duur toch beter uit dan bij een hoog aanvangsbedrag en een laag rentepercentage.

4 Rentebeschrijving - met samengesteld interest tegen p% - wordt beschreven met formules van de soort:

$$\text{kapitaal na } n \text{ jaren} = \text{aanvangskapitaal} \quad \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Kortom, een rij van het type (exponentiële rij)

$$u_n = ca^n$$

waarin a en c constanten zijn en a groter dan 1 is.
Zet bij een bank 1 gulden uit tegen 6% samengesteld interest en bij een andere bank 10 gulden tegen 4% samengesteld interest. Voorspel na hoeveel jaren je aangegroeide kapitaal bij de eerste bank dat van de andere rekening overschrijdt.

5 Bewijs nu volledig de volgende vergelijkingsstelling voor exponentiële groei:
Als a en b beide groter dan 1 zijn en c en d beide groter dan 0, dan geldt:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{ca^n}{db^n} = \begin{cases} 0 & \text{als } a < b \\ \dfrac{c}{d} & \text{als } a = b \\ \infty & \text{als } a > b \end{cases}$$

14: De stelling van de winnende groei

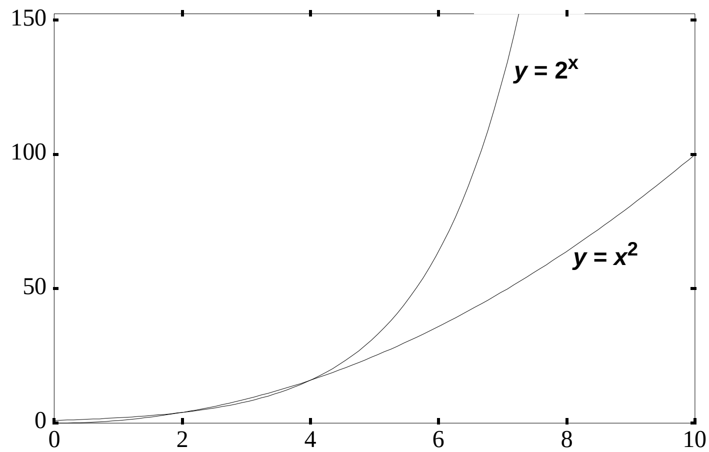
De vorige paragrafen zullen je misschien niet erg veel nieuws hebben geleerd. Het ging er vooral om je duidelijk te maken naar welke kant we verder gaan zoeken en in welke vorm dat gebeurt.
We gaan nu de groei volgens een machtsfunctie vergelijken met de exponentiële groei. Dat is veel subtieler en we beginnen met een speciaal geval.

kwadraat of 2-macht?

We vergelijken om te beginnen de rijen $u_n = n$ en $v_n = 2$
Eerst bekijken we de beginwaarden in een tabel:

n	n^2		2^n
0	0	<	1
1	1	<	2
2	4	=	4
3	9	>	8
4	16	=	16
5	25	<	32
6	36	<	64
7	49	<	128

De relatietekens < , = en > wisselen elkaar aanvankelijk af, maar als je nog een beetje verder doorrekent, krijg je het idee dat 2^n steeds verder uitloopt op n^2 voorbij $n = 5$. Dat idee wordt bevestigd door een grafiek.



Het kijken naar de grafieken geeft geen absolute zekerheid. Voor wiskundige zekerheid is een bewijs nodig.

Bij het bewijs maken we gebruik van wat we van de getallen 2^n weten, namelijk:

*bij **elke** stap van n naar n* + 1 *wordt* 2^n *verdubbeld.*

Dit voortdurend verdubbelen maakt de rij tot zo'n snelle groeier.
We gaan nu aantonen dat de rij van de kwadraten dit snelle groeien nooit kan bijbenen, omdat de kwadraten dit aanhoudend verdubbelen bij lange na niet presteren.

groeifactor

6 De rij van de kwadraten heeft geen vaste groeifactor, de groeifactor hangt van het rangnummer *n* af. De manier waarop die factor van *n* afhangt, is niet zo heel ingewikkeld: gewoon het quotiënt van de opeenvolgende termen nemen.

a. Ga na dat het volgende klopt:

Bij de rij $v_0, v_1, v_2, \ldots$, gegeven door $v_n = 2^n$ *wordt bij elke stap van n naar n*+1 *met een vaste groeifactor* $g = 2$ *vermenigvuldigd.*	*Bij de rij $u_0, u_1, u_2, \ldots$, gegeven door* $u_n = n^2$ *wordt bij elke stap van n naar n*+1 *met een variërende groeifactor* $g_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2$ *vermenigvuldigd.*

b. Toon aan dat de rij van 'groeifactoren van u_n', dus de rij gegeven door:

$$g_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$$

monotoon dalend is en het getal 1 als limiet heeft.

c. Hoe volgt daaruit nu, dat,

voor $n = 4, 5, 6, \ldots$ geldt $g_n \le \frac{25}{16}$?

Blijkbaar zijn de variabele groeifactoren (althans voor $n \ge 4$) *naar boven begrensd door een constant getal*. Dat getal is 1.5625 en dat is kleiner dan 2; dit wordt straks natuurlijk belangrijk als we met de rij der 2-machten gaan vergelijken. De begrenzing op de groeifactoren maakt een afschatting mogelijk, waar we mee kunnen werken.

d. Toon nu aan dat voor de rij $u_n = n^2$ van de kwadraten zelf geldt:

als $n > 4$, dan $u_n \le u_4 \; 1{,}5625^{(n-4)}$.

Daarmee is aangetoond:

de rij $u_0, u_1, u_2, \ldots$ is naar boven begrensd door een exponentieel groeiende rij met een vaste groeifactor die kleiner is dan 2.

7 Nu keren we terug naar de rij der quotiënten, de getalrij met de termen $\frac{u_n}{v_n}$.

Bewijs nu dat deze rij een nulrij is en vermeld daarbij wat uit het voorafgaande (eerdere opgaven, de samenvatting bij hoofdstuk 3) voor de motivering van de redeneerstappen nodig is.

tussen-resultaat

Bewezen is nu: kwadraten groeien veel trager dan 2-machten. Nauwkeuriger gezegd:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$$

Dit is echter nog slechts een bijzonder geval van de algemene stelling die we willen aantonen:

stelling van de winnende groei

> **Voor alle waarden van *k* en voor *a* > 1 geldt:**
>
> $$\lim_{n \to \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$$

In woorden:

de termen van een exponentiële rij met groeifactor > 1, zijn op den duur erg veel groter dan de termen van welke machtrij dan ook.

Een spectaculair voorbeeld hiervan is:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^{100}}{1{,}01^n} = 0$$

Omdat de getallen waarover het hier gaat (10^{100} verschijnt al snel in de noemer) buiten de range van de GR liggen, krijgen we weinig vertrouwen in de stelling door wat te proberen. Vandaar dat we nu toch behoefte hebben aan een bewijs.
Zo'n bewijs kan geleverd worden door nauwkeurig de route van het bewijs bij het bijzondere geval na te lopen.

extra: bewijs stelling van de winnende groei

Het is na het onderzoek aan de kwadraten en 2-machten niet nodig weer het hele bewijs in detail uit te voeren. Als we laten zien dat de cruciale stappen ook hier uitgevoerd kunnen worden, is dat voor ons doel wel genoeg.
Deze cruciale stappen waren:

a. het bepalen van de 'variërende groeifactor van de kwadraatrij (opgave **6a** en **b**)
b. het afschatten (vanaf zeker beginpunt voor n, in dit geval $n = 4$) van die groeifactoren met een constante (in dit geval 1.5625) die kleiner dan 2 was. (opgave **6c** en **d**).

Als we deze stappen ook hier kunnen uitvoeren, gaat de rest van het bewijs zonder veel moeite.
In de volgende opgave gaan we de bewijsgang na voor het gegeven voorbeeld.

8 In het voorbeeld hierboven gaat het om de n^{100} en 1.01^n. (Dus $a = 1.01$ en $k = 100$.)

a. Toon aan dat hier de 'variabele groeifactor' de volgende gedaante heeft:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{100}$$

b. We willen de 'variabele groeifactor' afschatten met een constant getal tussen 1 en 1.01, vanaf zekere n. Neem daarvoor het midden: 1.005.
Toon nu aan dat dit kan, door de eerste waarde van n te bepalen waarvoor:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{100} < 1{,}005$$

Herleid, vóór je naar de GR grijpt, eerst tot iets gelijkwaardigs van de vorm:

$$\frac{1}{n} < \ldots\ldots\ldots\ldots$$

c. In **6d** werd de rij der kwadraten (vanaf $n = 4$) naar boven begrensd door een exponentiële rij. In feite zo:

$$n^2 \le 4^2 \quad 1{,}5625^{n-4}$$

Ga dit na en stel nu een soortgelijke bovenbegrenzing op voor n^{100}, die vanaf de in **b** gevonden waarde voor n geldt.

d. Waarom volgt hier nu inderdaad uit: $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^{100}}{1{,}01^n} = 0$?

andere k- en a-waarden

De bewijsgang kan ook worden doorlopen voor andere waarden van k of a.

Zo geldt bijvoorbeeld ook: $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^{3{,}2}}{5{,}1^n} = 0$.

Er worden in de stelling geen beperkingen aan k opgelegd. Als k kleiner dan of gelijk aan 0 is, is er al helemaal geen probleem, dan is n^k in zijn geheel af te schatten met de waarde 1. In bewijsstap **b** moet voor positieve k wel een k-de-machtswortel getrokken worden. Dat kan.

Je hebt vroeger al gezien dat de omgekeerden van positieve nulrijen limiet oneindig hebben. Dus, als $a > 1$ geldt voor alle k

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a^n}{n^k} = \infty$$

limiet en geduld

We onderzoeken hier nog steeds rijen, maar om een grafisch beeld te krijgen, voeren we functies in de GR in. Het gaat om het idee dat de limieten volgens de theorie bestaan, maar dat je soms erg grote waarden voor n moet noemen om ook maar enigzins in de buurt van de limiet te komen.

9 Breng de grafiek van $y = \dfrac{x^{10}}{1{,}1^x}$ in beeld op het interval $0 \le x \le 100$ en $0 \le y \le$ 1EE16.

a. Is er al een limietverschijnsel in zicht?
b. Zoek een range voor x, waarop je de grafiek naar de x-as ziet dalen.
c. Zoek een range voor x, waarin de grafiek onder de 10^{-10} duikt.

d. Herhaal het onderzoek voor $y = \dfrac{x^{20}}{1{,}05^x}$. Wat zijn je bevindingen nu?

Tot welke waarde van x weet de GR nog raad met x^{20}? En met de noemer 1.05^x?

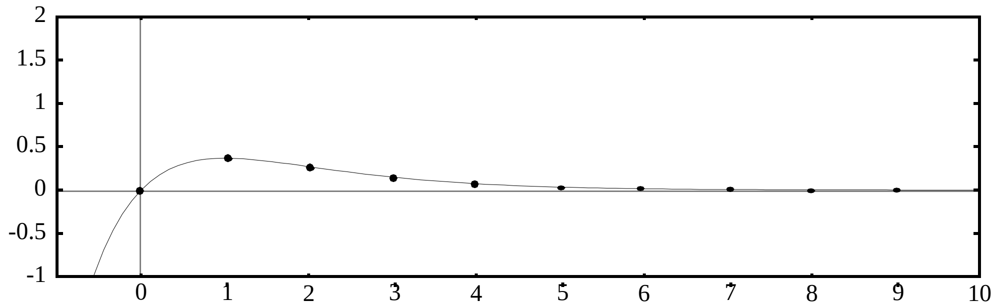
15: Twee andere bijzondere limieten

Uit het voorgaande volgt direct dat

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{e^n} = 0$$

In deze paragraaf leiden we daar op een bijzondere manier nog twee andere belangrijke limieten uit af.

Je kunt bij de rij *u*, gegeven door $u_n = \frac{n}{e^n}$ en de functie *f*, gegeven door $f(x) = \frac{x}{e^x}$ één grafiek maken, door de punten waar *x* een natuurlijk getal is, bijzonder te markeren. Zie de figuur, waarin op de grafiek punten bij $n = 0, 1, ..., 9$ gemarkeerd zijn.



10 Toon aan dat de *functie f* monotoon dalend is op het gebied $x > 1$ met behulp van de afgeleide.

asymptoot

We zeggen nu: de grafiek daalt naar de lijn $y = 0$. Dat betekent dat de afstand van de grafiek tot die lijn willekeurig klein wordt. Daarom wordt die lijn een *asymptoot* van de grafiek genoemd. In dit geval is er sprake van een horizontale asymptoot.
We schrijven nu:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

Dat betekent hetzelfde als: voor iedere rij $x_0, x_1, x_2, ...$ die naar ∞ gaat geldt:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{e^{x_n}} = 0$$

11 a. Kies $x_n = \sqrt{n}$ en teken de eerste tien stippen bij de rij $u_n = \frac{x_n}{e^{x_n}}$.

Wat weet je van $\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{n}}{e^{\sqrt{n}}}$?

b. Kies nu: $x_n = \ln(n)$. Welke limiet levert dit op?

Bij **11b** heb je misschien een bijzondere limiet gevonden.
Het komt erop neer dat logaritmische groei het royaal aflegt tegen lineaire groei.
De techniek om die limiet te vinden, kun je omschrijven als ‘een rij invullen in een speciale functie’. In dit geval moet de rij naar oneindig en de functie een limiet hebben voor *x* naar oneindig.

In hoofdstuk 3 heb je het ‘invulprincipe’ geleerd. Als een rij x_0, x_1, x_2, ... een eindige limiet heeft, en als een functie f ‘limietbehoudend’ is, dan kun je de limiet van $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, ... vinden door invullen.
Dat gebruiken we nu nog eens. We vinden dan nog een tweede bijzonder limiet.

12 In opgave **11b** heb je gezien dat

$$u_n = \frac{\ln(n)}{n}$$

een nulrij is. Pas nu het invulprincipe toe op deze rij en de functie:

$$f(x) = e^x$$

Leid nu af dat:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

13 Bepaal de volgende limieten en geef een redenering erbij met verwijzingen naar relevante stellingen.

a. $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{\log n}{n}$

b. $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{\ln(n^3)}{\sqrt{n}}$

c. $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{(\ln n)^{10}}{n^{0,1}}$

d. $\displaystyle\lim_{n \to \infty} n^{\left(\frac{1}{\ln(n) + 1}\right)}$

16: Snelle en trage groei (extra uitdagingen)

In het voorgaande kwam je groeirijen tegen van slechts enkele typen.

Type ***A***: rijen van de vorm $(\ln(n))^k$, met $k > 0$ (machten van de logaritme van n)

Type ***B***: rijen van de vorm n^k, met $k > 0$ (machten van n)

Type ***C***: rijen van de vorm a^n, met $a > 0$ (exponentiële functies van n)

Aangetoond is dat (niet geheel volledig, maar opgave **13b** is te veralgemenen):

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\text{rij van type } \boldsymbol{A}}{\text{rij van type } \boldsymbol{B}} = 0$$

Ofwel: de rijen van type ***A*** groeien uiteindelijk altijd veel trager dan die van type ***B***.

Ook is aangetoond:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\text{rij van type } \boldsymbol{B}}{\text{rij van type } \boldsymbol{C}} = 0$$

Ofwel: de rijen van type ***B*** groeien uiteindelijk altijd veel trager dan die van type ***C***.

14 a. Omschrijf net zo'n type rijen (type ***D***) waarvoor geldt:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\text{rij van type } \boldsymbol{C}}{\text{rij van type } \boldsymbol{D}} = 0$$

Verzin ook een naam voor type ***D***.

b. Kun je nog verdergaan met maken van groeitypes?

15 Zouden er ook tragere rijen bestaan dan die van type ***A***?
Bedenk een rij u_0, u_1, u_2, ... die wel naar oneindig stijgt, maar toch voor alle $k > 0$ lijdt aan een minderwaardigheidsgevoel ten opzichte van functies van type ***A***:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{\ln(n)^k} = 0$$

16 Van welk type zou de rij $e^{\sqrt{n}}$ zijn?

Bepaal daartoe de limieten $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{e^{\sqrt{n}}}{n^k}$ (alle k) en $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a^n}{e^{\sqrt{n}}}$ ($a > 1$).

Samenvatting

groeiende exponent wint

Groei volgens een exponentiële of meetkundige rij (met groeifactor > 1) wint het op den duur van groei volgens een machtrij:

Voor alle waarden van *k* en voor *a* > 1 geldt:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$$

Met andere woorden:
een macht met constant grondtal (> 1) en onbeperkt groeiende exponent gaat veel sneller naar ∞, dan een macht met onbeperkt groeiend grondtal en constante exponent (> 0).
Speciaal geval:

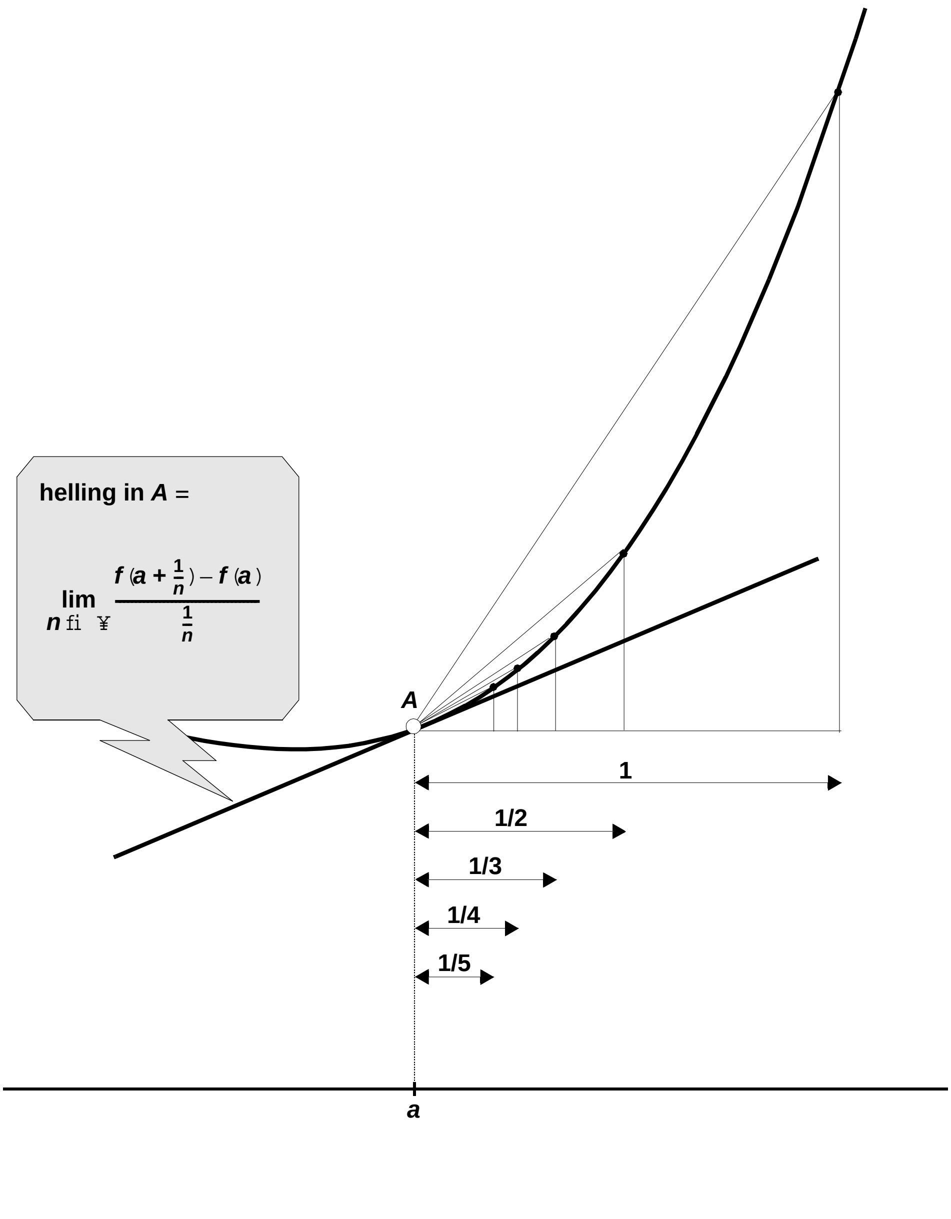
$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{e^n} = 0$$

Hieruit kan worden afgeleid dat:

ln(*n*) verliest van *n*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$

Limiet en afgeleide



In dit hoofdstuk komt een klassieke limiet aan bod. In de rij $(1\frac{1}{2})^2, (1\frac{1}{3})^3, (1\frac{1}{4})^4, (1\frac{1}{5})^5, \ldots$ vindt een interessant krachtenspel plaats. De grondtallen naderen tot 1, maar de exponenten gaan naar oneindig. De rij heeft als limiet een beroemd getal, dat zal blijken. Het vinden van de limiet hangt samen met het probleem van zogenaamde continue rentebijschrijving. En verder speelt ook het begrip afgeleide een hoofdrol in dit hoofdstuk.

17: Differentiëren om limieten te vinden

1 Laat door berekening zien dat geldt:

$$\lim_{n \to \infty} n\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 - 1 \right) = 2$$

2 **a.** Bereken:

$$\lim_{n \to \infty} n\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 - 1 \right)$$

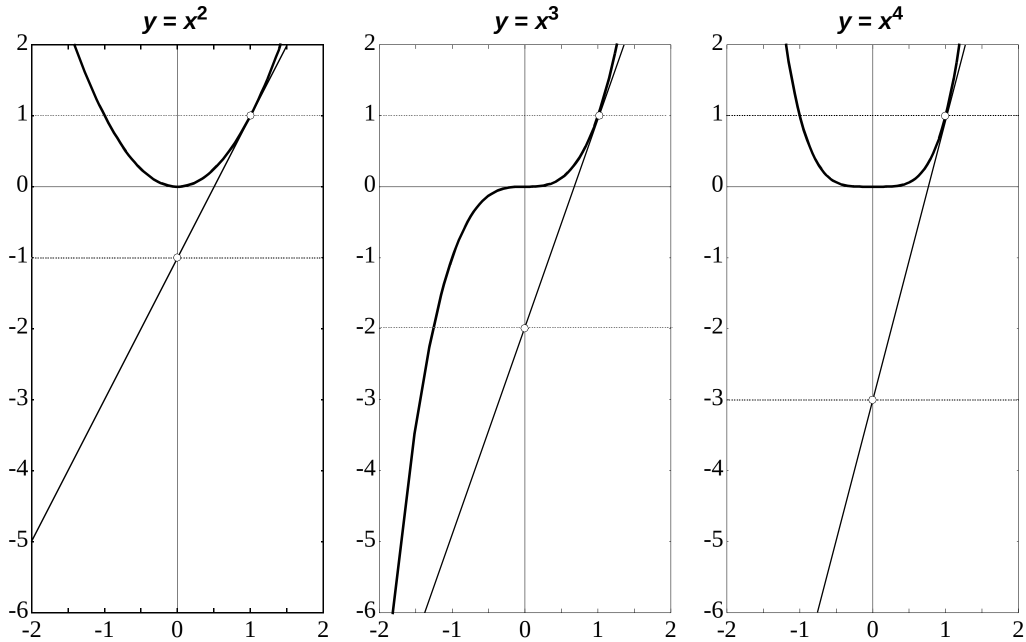
b. Ook:

$$\lim_{n \to \infty} n\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^4 - 1 \right)$$

3 Je kunt nu misschien de uitkomst raden van:

$$\lim_{n \to \infty} n\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} - 1 \right)$$

4 In de onderstaande figuur zie je de grafieken van $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$ met de raaklijn in het punt (1 , 1).
Zoals bekend (en zoals je in de figuren kunt zien), zijn de richtingscoëfficiënten van die raaklijnen gelijk aan 2, 3, 4.



Deze serie figuren geeft precies de uitkomsten van de drie limieten uit de opgaven **1, 2a** en**2b**. Dat is geen toeval! Bedenk dat de afgeleide in het punt met $x = 1$ van een functie f gelijk is aan:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h}$$

a. Verklaar nu het verband tussen de drie figuren en de uitkomsten van de drie limieten.

b. Het gokje bij opgave **3** kun je nu waarschijnlijk wel verifiëren.

Je hebt in het voorgaande gezien hoe je soms je kennis over de afgeleide van een functie kunt gebruiken om de limiet van een rij te bepalen. Een voorwaarde daarbij is dat de algemene term van de rij geschreven kan worden in een differentiequotiënt van de vorm:

$$\frac{f(x_0 + \frac{1}{n}) - f(x_0)}{\frac{1}{n}}$$

stelling over afgeleide en rij

> **Als f differentieerbaar is in x_0, geldt:**
>
> $$\lim_{n \to \infty} n\left(f(x_0 + \tfrac{1}{n}) - f(x_0)\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{f(x_0 + \frac{1}{n}) - f(x_0)}{\frac{1}{n}} = f'(x_0)$$

opmerkingen

- In de voorbeelden op de vorige bladzijde gold $x_0 = 1$ en werd de rol van f gespeeld door de machtsfuncties $f(x) = x^k$ met exponent $k = 2, 3, 4$ en 10.
- In de middelste vorm zie je de term $\frac{1}{n}$, die naar 0 gaat voor $n \to \infty$;
  in plaats daarvan kan ook een andere term worden gekozen die naar 0 gaat voor $n \to \infty$, bijvoorbeeld: $\frac{2}{n}$, $\frac{1}{\sqrt{n}}$, $(\frac{1}{2})^n$, enzovoort. De linkervorm moet dan natuurlijk worden aangepast.

5 **a.** Welk differentiequotiënt kun je herkennen in de vorm: $n\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1\right)$?

b. Bereken nu $\lim_{n \to \infty} n\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1\right)$.

c. Wat weet je nu van $\lim_{n \to \infty} \left(\sqrt{n^2 + n} - n\right)$?

d. Verklaar $\lim_{n \to \infty} n\left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} - 1\right) = 2 \lim_{n \to \infty} n\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1\right)$

e. Wat weet je nu van $\lim_{n \to \infty} \left(\sqrt{n^2 + 2n} - n\right)$?

6 De vorm $\sqrt[3]{n^3 + n^2} - n$ kan worden omgewerkt tot een differentiequotiënt met in de noemer $\frac{1}{n}$. Geef dat differentiequotiënt en bepaal vervolgens $\lim_{n \to \infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + n^2} - n\right)$.

7 Bedenk zelf ook een pittige limiet die je met behulp van bovenstaande stelling kunt bepalen. Maak een paar verschillende keuzes van f en van x_0.

8 Gegeven is de rij u door $u_n = n\left(\cos\frac{1}{n} - 1\right)$.

Toon aan dat deze rij naar 0 convergeert.

9 Onderzoek of de rij $v_n = n \sin\frac{1}{n}$ convergeert en geef in geval van convergentie de limiet.

10 a. Maak op de GR een tabel van de rij $y_n = n\sin\frac{\pi}{n}$.

b. Het lijkt erop of de rij monotoon stijgend is. Je mag aannemen dat dit inderdaad zo is. Vanaf welk rangnummer geldt: $x_n \geq 3$?

c. Vanaf welk rangnummer geldt: $x_n \geq 3.1$?

d. Vanaf welk rangnummer geldt: $x_n \geq 3.14$?

e. Naar welke limiet convergeert de rij?

11 Bereken:

a. $\lim\limits_{n \to \infty} n\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)$

b. $\lim\limits_{n \to \infty} n\left(2^{\frac{1}{n}} - 1\right)$

c. $\lim\limits_{n \to \infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

d. $\lim\limits_{n \to \infty} n \ln\left(1 + \frac{3}{n}\right)$

12 Bereken:

a. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(n\sin\frac{5}{n} - n\sin\frac{3}{n}\right)$

b. $\lim\limits_{n \to \infty} n\left(\sqrt{25 + \frac{1}{n}} - 5\right)$

c. $\lim\limits_{n \to \infty} n\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^5 - 1\right)$

d. $\lim\limits_{n \to \infty} n\left(\sqrt{25 + \frac{1}{n^2}} - 5\right)$

18: Continue rentebijschrijving

Probleem van Bernoulli

De Zwitserse wiskundige Jakob Bernoulli ben je al eerder tegengekomen in dit boek.
Hij heeft ooit de volgende vraag opgeworpen:
‘Quaritur, si creditor aliquis pecuniamsuam foenori exponat, ea lege, ut singulis momentis pars proportionalis usurae annuae sorti annumeretur; quantum ipsi finito anno debeatur?’
Vrij vertaald komt het hierop neer:
‘Er wordt gevraagd om, in het geval dat iemand een bedrag uitleent tegen rente onder de voorwaarde dat op ieder moment een evenredig deel van de jaarlijkse rente wordt bijgeschreven, te berekenen welk bedrag hij aan het eind aan van het jaar kan opeisen.’

13 Ga uit van een kapitaal K en een jaarlijkse rente van 6%.
Als de rente pas aan het eind van het jaar zou worden bijgeschreven, is het kapitaal aangegroeid tot $1.06K$.

a. Laat zien dat bij een systeem van ‘rente op rente’ een halfjaarlijkse rente van 3% meer oplevert dan een jaarlijkse rente van 6%.

b. Neem nu de situatie dat elke maand rente wordt bijgeschreven en wel $\frac{1}{2}$% van het kapitaal. Bovendien geldt weer het rente-op-rente-systeem.
Met welke factor (in acht decimalen nauwkeurig) is het kapitaal na 1 jaar vermenigvuldigd?

c. Hoe zit het als er elke dag van het jaar rente wordt bijgeschreven? En elk uur?

wiskundige vertaling

Je hebt in opgave **13** wel gezien dat bij een groter aantal termijnen de groeifactor van het kapitaal groter wordt. Niet zoveel, maar toch. En als het kapitaal heel groot is, kan het toch nog aardig wat uitmaken wat je afspreekt over het aantal termijnen.
Wiskundig gezegd komt het hierop neer:
bij een verdeling van het jaar in n termijnen, wordt de groeifactor per termijn gelijk aan:

$$1 + \frac{0{,}06}{n}$$

De groeifactor g_n na 1 jaar (= n termijnen) is dan gelijk aan:

$$\left(1 + \frac{0{,}06}{n}\right)^n$$

‘*Hoe meer termijnen, hoe meer rente*’ kan wiskundig worden vertaald in
‘*de rij g_1, g_2, g_3, ... is monotoon stijgend*’.
Deze eigenschap is heel aannemelijk: hoe vaker de rente wordt bijgeschreven, hoe sterker het rente-op- rente effect. Een wiskundig bewijs is dit niet. Omdat zo’n bewijs nogal lastig is, laten we het hier weg. Wel gemakkelijk is het om te bewijzen dat bij successieve verdubbeling van het aantal termijnen de groeifactor steeds toeneemt (zie opgave **14 a** en **b.**)
De rij g_1 , g_2, g_3, ... is niet alleen monotoon stijgend, maar bovendien is er een grens aan te geven waar de termen niet bovenuit komen (een zogenaamde *bovengrens*). In dit geval kun je voor die bovengrens bijvoorbeeld het getal 2 nemen (zie opgave **15 a** en **b**.)
Een monotoon stijgende rij die naar boven begrensd is, heeft zeker een limiet.
De limiet van de rij g_1, g_2, g_3, ... voor $n \to \infty$ noemen we nu g.

continue bijschrijving

In het geval van ‘*rentebijschrijving op elk moment*’ waar Bernoulli over spreekt, ofwel ‘*continue rentebijschrijving’* is de groeifactor over één jaar gelijk aan die limiet g.
In opgave **16** ga je die groeifactor g bepalen.

14 a. Laat zien dat geldt: $g_1 < g_2 < g_4$.

b. Gebruik: $g_{2n} = \left(1 + \frac{g_n}{2}\right)^2$ om aan te tonen: $g_n < g_{2n}$.

15 a. $g_n < 2$ is gelijkwaardig met $1 + \frac{0{,}06}{n} < 2^{\frac{1}{n}}$. Verklaar dit.

b. Bekijk de grafiek van $y = 2^x$ en stel je de koorden voor die het punt (0, 1) verbinden met de punten $(\frac{1}{n}\ ,\ 2^{\frac{1}{n}})$ (voor n = 1, 2, 3, ...)

Uit het feit dat al die koorden *steiler* zijn dan de raaklijn aan de grafiek in het punt (0 , 1), kun je inzien dat de ongelijkheid van vraag **a** waar is voor n = 1, 2, 3, ...). Verklaar dit.

16 Er zijn verschillende mogelijkheden om de limietwaarde g exact te bepalen. Een handige manier is om eerst de natuurlijke logaritme van g_n te nemen.

a. Ga na dat geldt: $\ln(g_n) = n \ \ln\left(1 + \frac{0{,}06}{n}\right)$.

b. Pas nu de in de vorige paragraaf geleerde methode toe om te bewijzen:

$$\lim_{n \to \infty} \ln(g_n) = 0{,}06$$

c. Omdat $\lim_{n \to \infty} \ln(g_n) = \ln(g)$ (de invulstelling!) heb je nu g te pakken.

Wat is de exacte waarde van g? Klopt dit met je bevindingen in opgave **13?**

17 Een ondernemer wil een kapitaal beleggen. Hij heeft de keus tussen $8\frac{1}{4}$% rente per jaar die één keer per jaar wordt bijgeschreven of een continu bijgeschreven rente op basis van 8% per jaar. Wat is gunstiger?

18 Iemand zet *f* 5000,- uit tegen een rentevoet van 5%. De rente wordt continu bijgeschreven en dat levert een effectieve jaarlijkse rente op die meer is dan 5%. Welk bedrag heeft hij na 10 jaar?

19 Een kapitaal K_0 wordt uitgezet tegen een rentevoet van r%. De rente wordt continu bijgeschreven.
K_t is het kapitaal na t jaar. Druk K_t uit in t.

20 Een groot kantoorgebouw werd gekocht voor 15 miljoen gulden. Tien jaar later werd het bedrag betaald. De schuld bedroeg toen 35 miljoen. De rente op de schuld werd continu berekend.
Van welke rentevoet werd er uitgegaan?

19: Een standaardlimiet

In paragraaf 20 heb je gezien dat $(1 + \frac{0{,}06}{n})^n$ de limiet $e^{0.06}$ heeft voor $n \to \infty$.

In plaats van die 0.06 kun je natuurlijk ook een ander getal nemen.
Er geldt namelijk:

stelling

> **Voor iedere waarde van *a* geldt:**
>
> $$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$$

Bewijs:
De bovenstaande bewering is gelijkwaardig met:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\ln\,(1 + \frac{a}{n})}{\frac{1}{n}} = a$$

En deze laatste bewering volgt uit de stelling van paragraaf 19.

21 Welke stelling krijg je voor $a = 1$?

commentaar

Het blijft uitkijken met het berekenen van en rekenen met limieten van rijen.

Dat je bij $\lim_{n \to \infty} n \cdot \frac{1}{n}$ niets opschiet door te denken aan *oneindig keer nul*, is vrij snel duidelijk.

Maar bij $\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ zou je makkelijk kunnen denken aan een *product van oneindig veel factoren 1*, en dat gaat - zoals je nu weet - hopeloos mis!
In dit hoofdstuk heb je dan ook gezien, dat het vrij nutteloos is naar de limiet van de rij

$$1 + \tfrac{1}{1}, 1 + \tfrac{1}{2}, 1 + \tfrac{1}{3}, 1 + \tfrac{1}{4}, \ldots$$

te kijken, als je eigenlijk geïnteresseerd bent in de limiet van

$$(1 + \tfrac{1}{1})^1,\ (1 + \tfrac{1}{2})^2,\ (1 + \tfrac{1}{3})^3,\ (1 + \tfrac{1}{4})^4, \ldots$$

22 Vergelijk op de GR (tabel) het gedrag van de rijen

$$(1 + \tfrac{1}{1})^1,\ (1 + \tfrac{1}{2})^2,\ (1 + \tfrac{1}{3})^3,\ (1 + \tfrac{1}{4})^4, \ldots$$

en

$$(1 - \tfrac{1}{2})^{-2},\ (1 - \tfrac{1}{3})^{-3},\ (1 - \tfrac{1}{4})^{-4},\ (1 - \tfrac{1}{5})^{-5}, \ldots$$

De eerste rij convergeert (langzaam) stijgend naar e.
Wat kun je van de tweede rij zeggen?

23 a. Hoe groot is $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$?

b. In het algemeen is dit niet juist: $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = \dfrac{1}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}$

Toon aan dat wél juist is: $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = \dfrac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}$

24 Bepaal met een beetje omwerken van de formules de volgende limieten:

a. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^n$

b. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{n}{n+3}\right)^n$

c. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{2n+1}{2n}\right)^n$

d. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^n$

Tip bij vraag **d**: om een idee te krijgen kun je met de GR eerst $n \ln\left(\frac{n+2}{n-5}\right)$ berekenen voor een grote waarde van n.

25 a. Verklaar: $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = \frac{1}{e}$

b. Verklaar ook: $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n} = 1$

extra

26 Deze opgave gaat over twee nogal ‘exotische’ limieten:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \qquad \text{en} \qquad \lim_{n \to \infty} \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^2}$$

Hij is voor jou bedoeld als je de technieken van dit hoofdstuk aantrekkelijk vindt om er zelf wat mee uit te proberen.

a. De eerste limiet valt te bepalen met de methodes die in dit hoofdstuk aan de orde zijn geweest. Omdat er weer een exponent is waar *n* in voorkomt, zul je de techniek van het logaritme nemen nodig hebben. Uiteindelijk heb je ook de kettingregel nodig om de differentieertechniek te kunnen gebruiken.

b. De tweede limiet is nog pittiger. We verklappen je dat de limiet een macht van e is. Probeer - met de GR - een vermoeden te krijgen over de exponent van die macht. Als je **a** hebt begrepen, dan kun je in elk geval een begin maken met de exacte berekening. Je hebt daarbij echter nog een extra ‘kunstgreep’ nodig.

Samenvatting

In dit hoofdstuk heb je gezien hoe je limieten van rijen soms kunt vinden via de herkenning van een differentiequotiënt van een functie f. Met wat je dan weet over de afgeleide van f heb je snel de limiet.
Dit berust op:

stelling

Als f differentieerbaar is in x_0, geldt:

$$\lim_{n \to \infty} n\left(f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) - f(x_0)\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) - f(x_0)}{\frac{1}{n}} = f'(x_0)$$

Je kunt niet alleen de x_0 en de f variëren, maar ook de gebruikte 'nulrij' met term $\frac{1}{n}$.

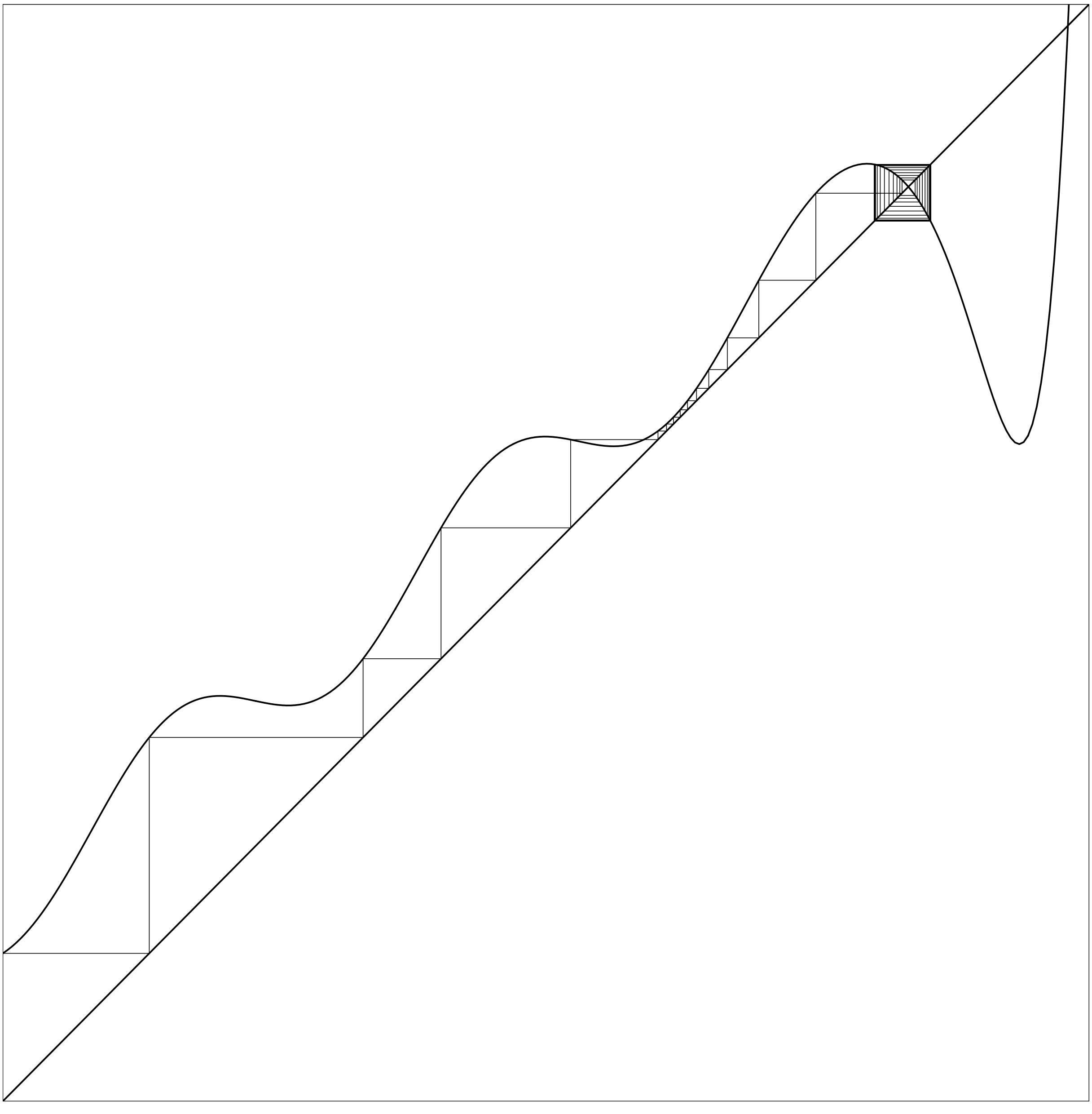
Een bijzonder geval krijg je als je voor f de natuurlijke logaritme neemt, voor x_0 de waarde 1 kiest en de nulrij $\frac{a}{n}$.
Er komt dan:

$$\lim_{n \to \infty} n \ln\left(1 + \frac{a}{n}\right) = a$$

standaard-limiet

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$$

Naar het hart van het web

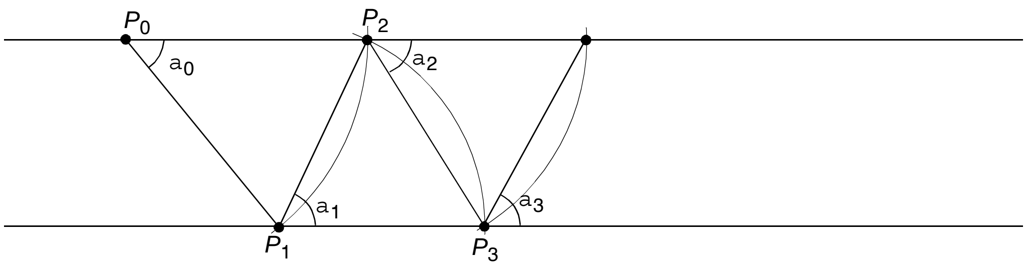


Dit boek begon met ‘passers op herhaling’, een voorbeeld van een *iteratief* proces. Zo’n proces kun je beschrijven door middel van een zekere functie f. Dit leidt, uitgaande van een startwaarde a, tot de rij a, $f(a)$, $f(f(a))$, $f(f(f(a)))$, ... Elke stap in de rij betekent toepassen van de functie f op de op dat moment laatste term. Het komt neer op $u_0 = a$ en de stapformule $u_n = f(u_{n-1})$. Aan welke eis moet f voldoen, wil zo’n rij een limiet hebben? En welke andere vormen van staartgedrag kom je zoal tegen? Dat zijn de vragen waar we voor staan.

20: Iteraties herhalen

Herinnering

In hoofdstuk 1 onderzochten we een rij van hoeken die ontstond bij voortzetting van de volgende figuur.



Nieuwe punten P_n werden bepaald met de passer.
Het ging om de rij van hoeken a_0, a_1, a_2, a_3, ...
Die rij ligt vast door beginwaarde a_0 en de stapformule:

$$a_{n+1} = 90 - \frac{1}{2}a_n$$

De rij had een limiet, namelijk 60.
Eerst gebruikten we de GR om een indruk te krijgen van het verloop van de rij. De GR maakt het ons erg makkelijk: met een keer tikken op Enter kon steeds weer dezelfde formule op het vorige rekenresultaat worden toegepast. Dit was het recept voor de GR:

ACTIE	RESULTAAT
a. Voer een startwaarde in, bijvoorbeeld 40.	
40 <ENTER>	40
b. Voer de rekenstap uit door verwijzen naar het laatste resultaat.	
90 - 0.5 * ANS <ENTER>	70
c. Door steeds op ENTER te drukken, herhaal je de laatste rekenstap.	
<ENTER>	55
<ENTER>	62.5
<ENTER>	58.75

Daarna hebben we bewezen dat de limiet inderdaad bestond door eerst aan te tonen dat de getallen a_n ook met een directe formule te berekenen zijn, namelijk:

$$a_n = 60 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (a_0 - 60)$$

Vooruitblik

In dit hoofdstuk onderzoeken we of bij gebruik van andere stapformules ook limietverschijnselen ontstaan. In het voorbeeld van hoofdstuk 1 konden we bovenstaande directe formule vinden en daarmee is de limiet duidelijk. Bij andere stapformules (zie hoofdstuk 2) zal het vaak niet lukken om een directe formule te vinden. Toch zullen we aan het eind van dit hoofdstuk van alle voorbeeldrijen uit hoofdstuk 2, die door stapformules worden gegeven, kunnen beslissen of de rij een limiet heeft of niet.

Onderzoek met de GR

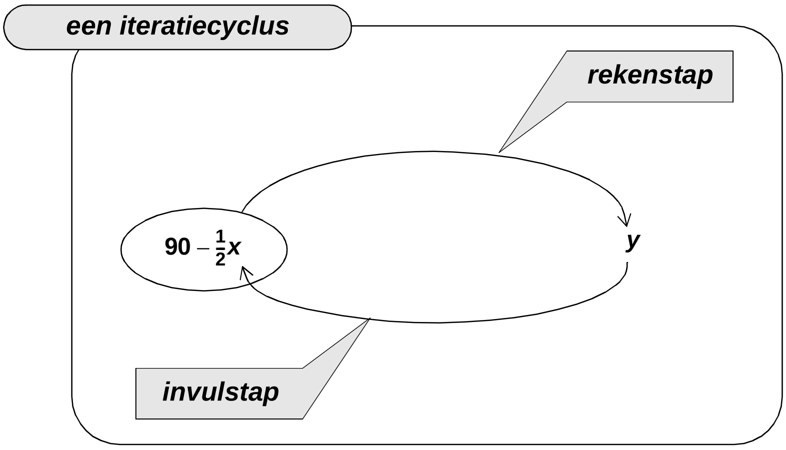
1 Eerst gaan we onderzoeken met de GR wat er *kan* gebeuren.
Daartoe neem je steeds:
- een beginwaarde en een stapformule;
- je rekent een stuk of 40 termen van de rij uit (dat is dus één keer een formule invoeren en veertig keer op <ENTER> tikken, dat valt nogal mee);
- je noteert wat je vermoeden is over de rij (bewezen heb je nog niets!)

Gebruik de bladzijde hiernaast; daar staan suggesties.
Denk er ook aan te experimenteren met andere startwaarden bij dezelfde formules, vooral in gevallen waar meteen van het begin af aan een bijzonder verschijnsel optreedt Zorg er bij de goniometrische voorbeelden voor dat de GR in RADIALEN rekent.

Terminologie

iteratie

Een technische term op dit gebied is *iteratie*. Dat betekent in principe niet meer dan 'herhaling'. Misschien heb je wel eens '*iter.*' onder een recept van een huisarts zien staan, als het recept herhaald moet worden.
De *iteratiecyclus* bij de stapformule $90 - \frac{1}{2}x$ kan als volgt uitgebeeld worden:



De werking is deze: begin met een of ander getal voor x en spring in de bocht bij *invulstap*. De formule geeft je een y-waarde na de *rekenstap*. Dan wordt deze doorgegeven om de nieuwe x-waarde te zijn; die wordt weer ingevuld, de rekenstap wordt uitgevoerd enzovoort.

Als je in de formule $90 - \frac{1}{2}x$ de waarde x = 60 invult, wordt er ook '60'afgeleverd door de formule. Dat wil zeggen: dezelfde waarde. Men spreekt in zo'n geval van een dekpunt.

dekpunt

Een getal x heet ***dekpunt*** van een functie f, als $f(x) = x$.
Men spreekt (vooral in economische toepassingen) ook wel van een ***evenwichtspunt***.

2 Bij enkele van de voorbeelden van de tabel hiernaast lijken er limieten te zijn. Controleer of die limieten ook dekpunten zijn van de gegeven functies.

	a:	b:	c:	d:	e:	f:	g:	h:	i:
$u_0 =$	40	6	1	0	1	1	2	2	2
$u_n =$	$90 - \frac{1}{2}u_{n-1}$	$20 - 1\frac{1}{2}u_{n-1}$	$\sqrt{2 + u_{n-1}}$	$\cos u_{n-1}$	$\sin u_{n-1}$	$2{,}3 \sin u_{n-1}$	$\frac{2}{u_{n-1}}$	$1 + \frac{1}{u_{n-1}}$	$u_{n-1} + \frac{1}{u_{n-1}}$
$u_1 =$	70								
$u_2 =$	55								
$u_3 =$	62.5								
$u_4 =$									
$u_5 =$									
....									
$u_{30} =$	59.9999999								
$u_{31} =$	60								
$u_{32} =$	60								
$u_{33} =$	60								
$u_{34} =$	60								
$u_{35} =$	60								
vermoeden:	convergeert naar 60								

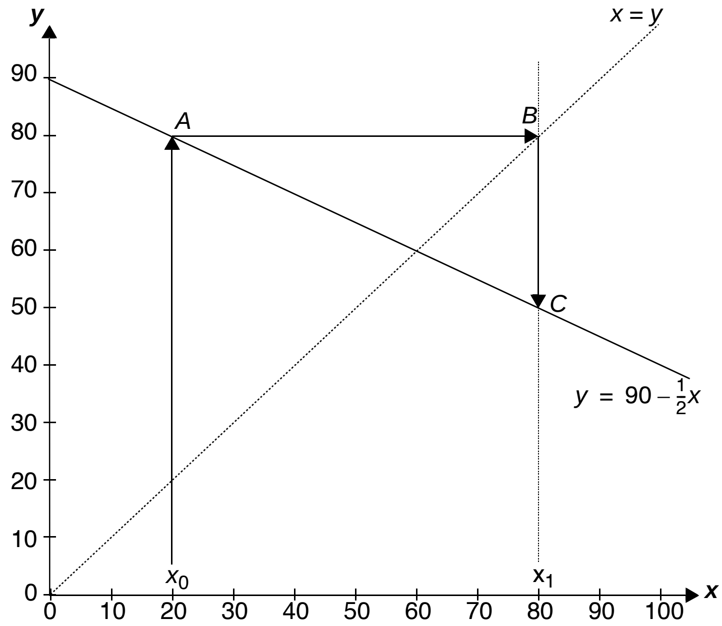
21: Iteratiecyclus en spinneweb

In elke herhaalslag van het itereren van de formule $y = 90 - \frac{1}{2}x$ gebeuren twee dingen (zie het schema op bladzijde 68):

– de *rekenstap*: $\mathbf{90 - \frac{1}{2}x}$ wordt de **nieuwe *y*-waarde** (bovenste pijl in schema)
– de *invulstap*: **de *y*-waarde** wordt **de nieuwe *x*-waarde** (onderste pijl in schema).

Bij die twee stappen horen de grafieken van $y = 90 - \frac{1}{2}x$ en $x = y$.

Hieronder staat een figuur met die twee grafieken. Je gaat nu (opgave **3**) in de figuur de iteratiecyclus een aantal keren uitvoeren.



3 In deze situatie is $x_0 = 20$ genomen.
De verticale pijl naar boven geeft de *rekenstap* aan. Die pijl komt uit in punt *A* op de grafiek van $y = 90 - \frac{1}{2}x$. De *y*-waarde aldaar is 80.
Die 80 wordt doorgegeven naar de nieuwe *x*, de horizontale pijl naar *B* beeldt dat uit. Dat is dus de *invulstap*. *B* ligt op de grafiek van $x = y$.

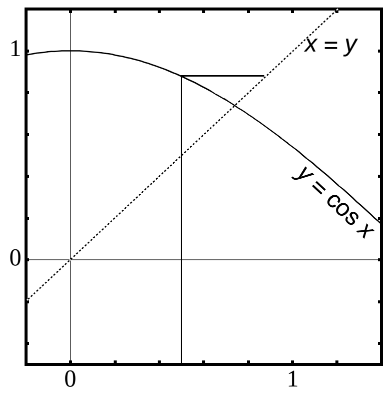
a. De verticale lijn door *B* laat zien waar x_1 op de *x*-as te vinden is. De verticale pijl van *B* naar *C* komt weer uit op de grafiek van $y = 90 - \frac{1}{2}x$. Welke stap is dat?
b. Teken de horizontale invulstap van *C* naar *D* (op de grafiek van $x = y$).
Geef x_2 op de *x*-as aan.
c. Als je dit proces voortzet, ontstaat er een soort binnenwaarts lopende spiraal. Zet het proces nu voort tot de spiraal heel dicht bij het snijpunt van de grafieken is gekomen. (Je krijgt een mooier plaatje als je de pijlpunten weglaat).
d. Wat zijn de coördinaten van dat snijpunt?

web-grafiek

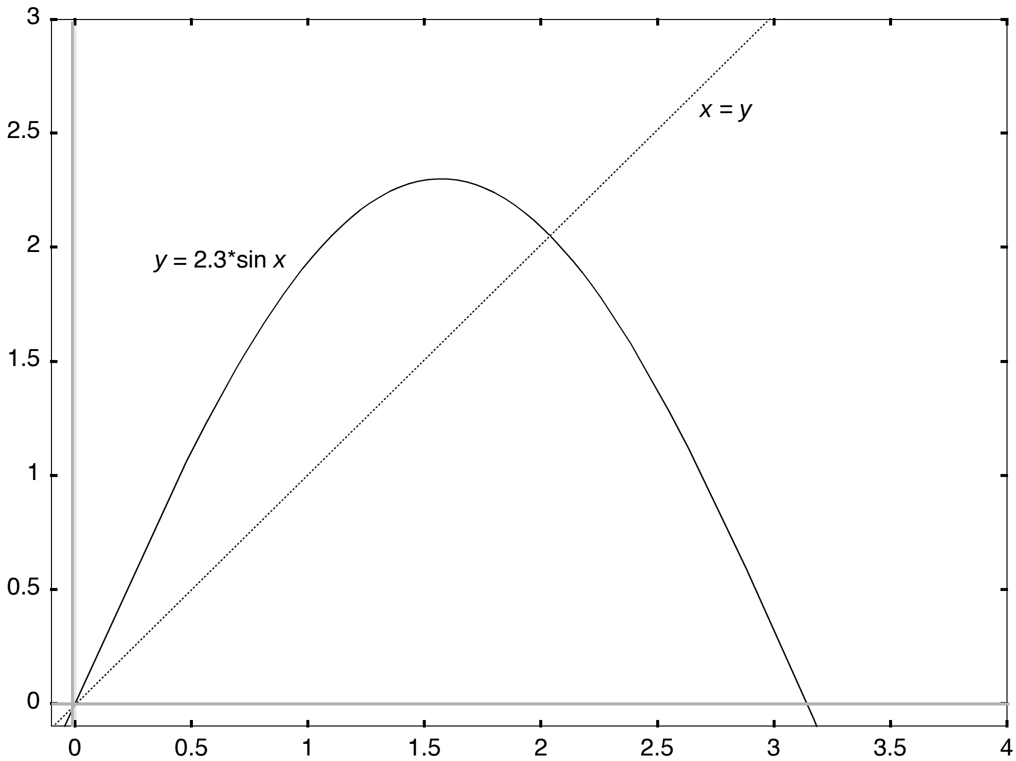
De figuur die je bij opgave **3** hebt gemaakt, heeft wel iets weg van een spinneweb. We noemen zo'n grafische voorstelling van een iteratiecyclus een **web-grafiek**.

4 Bekijk nu de webgrafiek bij de iteratiecyclus gegeven door: $u_n = \cos u_{n-1}$ met startwaarde $u_0 = 0.5$

a. Maak in de figuur hiernaast de webgrafiek af tot en met u_8. Controleer of de waarden overeenkomen met de tabel van bladzijde 69.



5 Doe hetzelfde in de figuur hieronder met de formule $u_n = 2.3\sin u_{n-1}$;
begin met $u_0 = 1$, maar ga nu iets verder door, tot je ontdekt wat voor patroon er ontstaat.
Hoe kun je dit gedrag omschrijven?



6 Het gedrag van het web is in de twee voorgaande gevallen heel verschillend. In het ene geval lijkt er sprake van convergentie te zijn, in het andere geval niet. Wat is de vermoedelijke oorzaak hiervan?

het web op de GR

De figuren zullen wat minder mooi zijn, maar het kan: een WEB-grafiek op de GR.

7 Hieronder nogmaals het recept voor invoeren van een recurrente rij in de GR:

RECEPT VOOR BEREKENING VAN RECURRENT GEGEVEN RIJ OP DE TI-83

a> MODE kiezen
Kies in het MODE-menu Seq (sequence = rij).
Dit staat op de regel: FUNC PAR POL SEQ.
b> Startwaarde(n) invoeren
Kies bijvoorbeeld *n*MIn = 0 en u(*n*Min) = $\sqrt{2}$.
Kies bij TblSet: TblMin = 0 en DTbl = 1.
c> Stapformule invoeren
Met Y= kun je nu (drie) rijen invoeren.
Zorg dat je in het functiebestand
u(*n*) = (2 + u(*n*-1))
op het scherm krijgt. Je krijgt **u** via [2nd] [7] en ***n*** via [X,T,J,*n*]
d> Resultaat bekijken
In de tabel zie je nu de waarden van u(*n*) voor *n* = 0, 1, 2, 3, ...,
afgerond op vier decimalen.

n
het voorbeeld in.

Nu het procédé voor het maken van de WEB-grafiek van een recurrente rij.

WEB-grafiek op de GR

a> Voer een recurrente rij in de GR in. (Blijf in SEQ-MODE).

b> Kies 2ND FORMAT.

c> Kies WEB in plaats van TIME.

d> Maak de grafiek, via GRAPH. Je zult zien dat ook de lijn *y* = *x* getekend wordt.

e>Geef nu de TRACE-opdracht en tik herhaaldelijk op de toets om het web steeds verder voort te zetten.

b. Voer deze acties uit bij het voorbeeld. Pas desnoods de instelling van het venster aan, zodat er iets te zien is.

8 Nu met een andere formule.
a. Voer de volgende rij in:

$$u_n = \begin{cases} 1 & \text{als } n = 0 \\ \sqrt{2 + u_{n-1}} & \text{als } n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

b. Zorg voor een geschikt venster. De *x*-range mag van 0 tot 6 lopen. Zo nodig verfijn je later.
c. Ga nu het WEB maken op de aangegeven wijze.
d. Onderin verschijnen *x*- en *y*-waarden. De GR suggereert dat er een limiet is. Welke?

9 Maak de WEB-grafiek bij elk van de volgende rijen. Ga na of de GR opvallend gedrag laat zien zoals convergentie of periodiciteit. Varieer ook de startwaarde binnen het gegeven x-interval en ga na of de startwaarde van invloed is op het gedrag.

a. $$u_n = \begin{cases} 0{,}5 & \text{als } n = 0 \\ 1 + \dfrac{1}{u_{n-1}} & \text{als } n \geq 1 \end{cases}$$

Neem het venster [0 , 4] bij [0 , 4]

b. $$u_n = \begin{cases} 0{,}1 & \text{als } n = 0 \\ 2u_{n-1}(1 - u_{n-1}) & \text{als } n \geq 1 \end{cases}$$

Venster: [0 , 1] bij [0 , 1]

c. $$u_n = \begin{cases} 0 & \text{als } n = 0 \\ \dfrac{u_{n-1} - 3}{u_{n-1} + 1} & \text{als } n \geq 1 \end{cases}$$

Venster: [-6 , 6] bij [-4 , 4].

d. $$u_n = \begin{cases} 5 & \text{als } n = 0 \\ \dfrac{u_{n-1}}{2} + \dfrac{1}{u_{n-1}} & \text{als } n \geq 1 \end{cases}$$

Venster: [0 , 6] bij [0 , 4]

e. $$u_n = \begin{cases} 0{,}2 & \text{als } n = 0 \\ \sin(\pi u_{n-1}) & \text{als } n \geq 1 \end{cases}$$

Venster: [0 , 1] bij [0 , 1].

spiraal of trap

10 Niet alle webben zien er hetzelfde uit.

a. Twee hoofdvormen springen eruit: de *spiraalvorm* en de *trapvorm*. In welke situaties treden die op?

b. De illustratie op de eerste pagina van dit hoofdstuk - bladzijde 65 - is ook een WEB-grafiek. Geef commentaar bij enkele daar opvallende verschijnselen.

11 a. Teken zelf een paar WEB-grafieken met iteratie-functies van het type $f(x) = ax$. Voor welke waarden van a ontstaat er een trap? En wanneer een spiraal?

b. Wat voor soort rij wordt voortgebracht door een iteratie-functie van het type $f(x) = ax$? Hoe hangt de convergentie af van de waarde van a?

22: Convergentie: wanneer, waarom en waarheen?

In deze paragraaf bewijzen we een stelling die aangeeft wanneer er zeker limietgedrag optreedt bij rijen voortgebracht door lineaire functies.

In het allereerste voorbeeld van dit boek, waar de formule:

$$a_{n+1} = 90 - \tfrac{1}{2}a_n$$

als stapformule gebruikt werd, toonden we aan dat de rij a_0, a_1, a_2, ... convergeerde naar het *dekpunt* van de functie:

$$y = 90 - \tfrac{1}{2}x$$

namelijk het punt $x = 60$.
Het bewijs berust op het aantonen van:

$$a_n = 60 + \left(-\tfrac{1}{2}\right)^n (a_0 - 60)$$

De convergentie van de rij a_0, a_1, a_2, ... berust op het feit dat $\lim_{n \to \infty} \left(-\tfrac{1}{2}\right)^n = 0$

Je ziet dat er voor de richtingscoëfficiënt van de lijn $y = 90 - \tfrac{1}{2}x$ een speciale rol is weggelegd.

12 a. Ga met behulp van een WEB-grafiek na dat de rij u_0, u_1, u_2, u_3, ... met stapformule $u_{n+1} = 20 - 1\tfrac{1}{2}u_n$ alléén convergeert als $u_0 = 8$.

b. Onderzoek zo ook de stapformules $u_{n+1} = 20 + 1\tfrac{1}{2}u_n$ en $u_{n+1} = 20 + \tfrac{1}{2}u_n$.

Bij een WEB-grafiek met lineaire functie is de (absolute) waarde van de richtingscoëfficiënt bepalend voor het al of niet convergeren van de voortgebrachte rij.
Preciezer gezegd:

contractie-stelling voor lineaire functies

Als

de functie $y = b + ax$ één dekpunt d en $|a| < 1$,

dan

convergeert de rij u_0, u_1, u_2, u_3, ... , die gegeven is door de beginwaarde u_0 en de stapformule

$$u_{n+1} = b + au_n$$

naar dat dekpunt d en bovendien geldt:

$$|u_n - d| = |a|^n |u_0 - d|$$

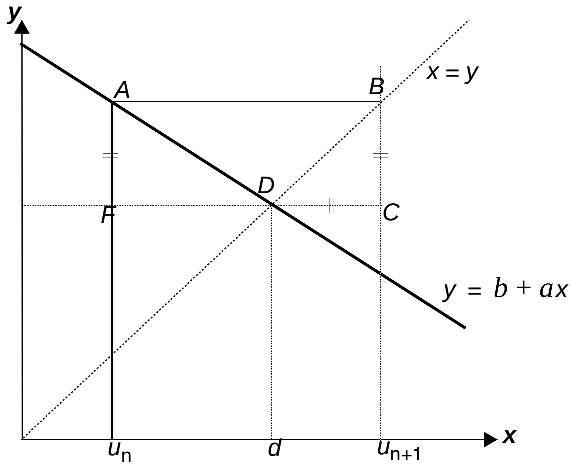
Je kunt ook zeggen:

de afstand tussen een term van de rij en het dekpunt wordt bij elke stap met een factor |a| verkleind.

Opgave **14** en **15** bevatten een bewijs van deze stelling, de volgende opgave is alleen een kleine controle op de samenhang van de vorige bladzijde.

13 Ga na dat in het voorbeeld $a_{n+1} = 90 - \frac{1}{2}a_n$ voor alle startwaarden a_0 aan de voorwaarden van de stelling voldaan is en dat ook de conclusie juist is.

14 In onderstaande figuur zie je de stap van u_n naar u_{n+1} in de WEB-grafiek uitgebeeld. Er is een horizontale stippellijn getrokken door het dekpunt d, en enkele punten in de figuur zijn gemarkeerd. Ook zijn enkele evident gelijke lengtes aangegeven.

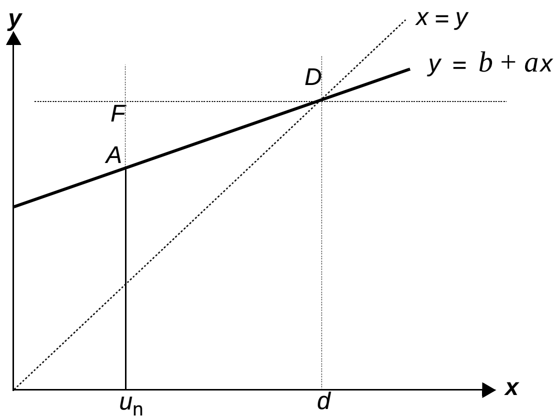


a. Waarom geldt: $|a| = \frac{|AF|}{|FD|}$?

b. Druk nu de lengtes $|AF|$ en $|FD|$ uit in u_n, u_{n+1} en d.

c. Hoe volgt hier nu uit dat $|u_{n+1} - d| = |a||u_n - d|$ en dat $|u_n - d| = |a|^n|u_0 - d|$?

15 In bovenstaande figuur was a negatief. Ga na dat het bewijs ook gevoerd kan worden als a positief is. Voer daartoe één WEB-cyclus uit in onderstaande figuur en doorloop het bewijs van de vorige opgave kritisch.



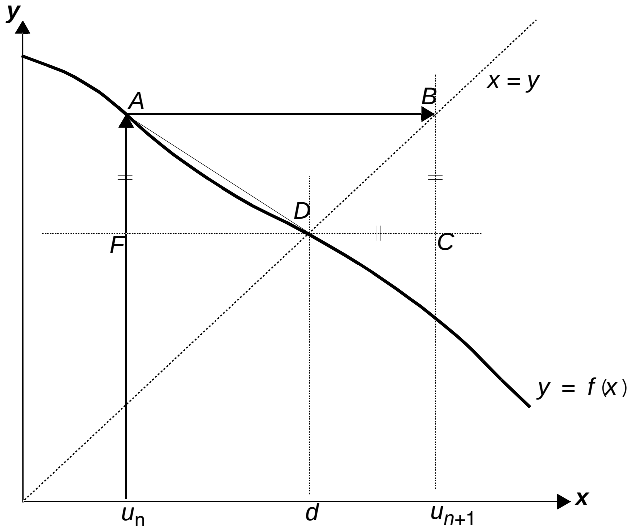
16 Het gedrag van de rijen die ontstaan in de situaties van opgave **14** en **15** is verschillend. Wat is het verschil?

23: De contractiestelling in het algemeen

We maken ons nu los van het lineaire verband $y = b + ax$. We willen namelijk ook met andere iteratie-functies *f* kunnen werken, zoals in eerdere voorbeelden al gedaan is. Het zal je niet verbazen dat de helling van de grafiek van *f* een doorslaggevende rol zal spelen. Alleen: die helling is niet meer een constante, maar varieert.
Maar de manier waarop het lineaire verband is onderzocht, kan toch worden benut.

We *zoeken* eerst een *voorwaarde* die we aan *f* gaan opleggen om toch een soortgelijke stelling te kunnen bewijzen.

In deze grafiek zie je de WEB-stap van u_n naar u_{n+1} uitgebeeld.



In het lineaire geval - $\boldsymbol{y = b + ax}$ - hadden we aangetoond:

$$\frac{|AF|}{|FD|} = |a| \qquad \text{en} \qquad |u_{n+1} - d| = |a||u_n - d|$$

Omdat $|a| < 1$, vormden de getallen $|u_n - d|$ dan een nulrij.

Je kon immers direct afleiden: $|u_n - d| = |a|^n |u_0 - d|$.

Bij een ‘willekeurige’ functie *f* is er niet zo’n *vaste a*. De quotiënten $\frac{|AF|}{|FD|}$ zijn in het geval van convergentie, bij een lineaire functie allemaal gelijk aan een vast getal tussen kleiner dan 1. Nu leggen we *f* de eis op

> dat al die quotiënten *kleiner dan of gelijk zijn aan een vast getal* **m**, *dat zelf kleiner dan 1* moet zijn.

Onder deze voorwaarde gaan we convergentie van de rij u_0 , u_1 , u_2 , u_3 , ... bewijzen.

De algemene stelling, de zogenaamde contractiestelling, ziet er misschien wat zwaarwichtig uit, maar als je goed leest, dan zie je dat ze als twee druppels water op de stelling over lineaire functies van bladzijde 74 lijkt.

contractie-stelling

Contractiestelling, algemeen

Als

f een op een bepaald interval differentieerbare functie is,
f een dekpunt d heeft in dat interval,
en de differentiequotiënten vanuit d voor een vast getal m < 1 voldoen aan

$$\left|\frac{f(x) - f(d)}{x - d}\right| \le m$$

dan

convergeert een rij $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots$, die binnen dat interval ligt en bepaald is door een beginwaarde u_0 en de stapformule

$$u_{n+1} = f(u_{n+1})$$

naar het dekpunt d van f.
Bovendien geldt:

$$|u_n - d| \le |m|^n |u_0 - d|$$

Eerst verkennen we de kracht van de stelling (opgave **17**, **18** en **19**), daarna volgt een bewijs (opgave **20**). Dat bewijs volgt vrijwel het oude spoor van de vorige stelling.

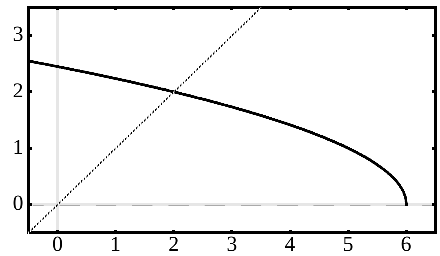
17 We bekijken de stelling eerst kritisch.

a. Op welke onderdelen wijkt deze stelling van de lichtere lineaire versie af?

b. Laat zien dat een lineaire functie met richtingscoëfficiënt a, waarbij $|a| < 1$, aan de voorwaarde voor de stelling voldoet. Wat moet voor m (zie stelling) worden gekozen?

18 We passen de stelling nu toe op de rij:

$$u_n = \begin{cases} 0 & \text{als } n = 0 \\ \sqrt{6 - u_{n-1}} & \text{als } n \neq 1 \end{cases}$$



We kiezen dus $f(x) = \sqrt{6 - x}$ als itererende functie. De grafiek ervan zie je hiernaast.

a. Laat zien dat 2 dekpunt van f is.

b. Waarom liggen alle termen van de rij tussen 0 en 6?

c. Laat aan de hand van de grafiek zien dat voor $x = 6$ het differentiequotiënt $\left|\frac{f(x) - 2}{x - 2}\right|$ op zijn grootst is.
Waarom is $m = 0.5$ dus een geschikte keuze voor m bij toepassing van de stelling in dit geval?

d. Volgens de stelling moet gelden: $|u_{10} - 2| \le |u_0 - 2| \quad 0{,}5^{10} \approx 0{,}00195$
Bepaal u_{10} met de GR en stel vast dat aan de ongelijkheid ruim voldaan wordt.

19 Kies nu $u_n = \begin{cases} 1 & \text{als } n = 0 \\ \sqrt{2 + u_{n-1}} & \text{als } n \neq 1 \end{cases}$ en vind zo'n begrenzing voor $|u_{100} - 2|$.

extra: bewijs

We willen de contractiestelling op dezelfde manier bewijzen als de eenvoudige (lineaire) versie in opgave **14** bewezen is.
Op zeker moment in het bewijs zal gebruikt moeten worden wat in het ***als***-deel van de stelling over de differentiequotiënten wordt gezegd.
Ten overvloede staat hier nog een keer de stelling zelf en de figuur die we nodig zullen hebben bij elkaar.

Contractiestelling, algemeen

Als

f een op een bepaald interval differentieerbare functie is,
f een dekpunt d heeft in dat interval,
en de differentiequotiënten vanuit d voor een vast getal m < 1 voldoen aan

$$\left|\frac{f(x)-f(d)}{x-d}\right| £ m$$

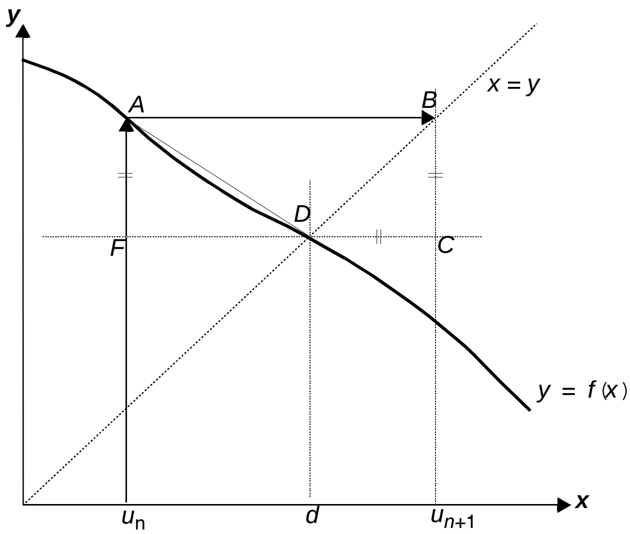
dan

convergeert een rij $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots$, die binnen dat interval ligt en bepaald is door een beginwaarde u_0 en de stapformule

$$u_{n+1} = f(u_{n+1})$$

naar het dekpunt d van f.
Bovendien geldt:

$$|u_n - d| £ |m|^n |u_0 - d|$$



20 Nu het bewijs in detail uitvoeren!

a. Waarom geldt: $\frac{|AF|}{|FD|} £ m$?

b. Druk nu de lengtes $|AF|$ en $|FD|$ uit in u_n, u_{n+1} en d.
Tip: de figuur bevat nog enkele andere lijnstukken met lengte $|AF|$.

c. Hoe volgt hier nu uit dat $|u_{n+1} - d| £ |m||u_n - d|$ en uiteindelijk dat $|u_n - d| £ |m|^n |u_0 - d|$?

24: Zwijnenjacht op de GR

In bepaald bosgebied huizen nogal wat wilde zwijnen. De dieren planten zich voort; de gemiddelde aanwas en sterfte zou bij onbeperkte beschikbaarheid van voedsel tot een jaarlijkse groei met een factor 1.5 leiden, want ook de wilde zeug werpt heel wat jongen tegelijk en dan is dit een redelijke gemiddelde groei. Omdat voedsel beperkt beschikbaar is, moet met een afremfactor gerekend worden, die kleiner is naarmate er meer zwijnen zijn. Bij een totaal van 600 zwijnen in dit bos zou het tot onmiddellijke algemene uithongering komen.

21 a. De jaarlijkse remfactor modelleren we met: $\left(1 - \dfrac{\text{aantal zwijnen}}{600}\right)$

In jaar met nummer n na het begin is het aantal zwijnen z_n.
Kies 150 zwijnen als startpunt. Licht toe dat z_n voldoet aan:

$$z_n = \begin{cases} 150 & \text{als } n = 0 \\ 1{,}5 \quad z_{n-1} \left(1 - \dfrac{z_{n-1}}{600}\right) & \text{als } n \ddagger 1 \end{cases}$$

b. Bereken een serie termen van de rij met de GR; gebruik de methode met invoeren van het startgetal en herhalen van de regel: `1.5 * Ans * (1- Ans/600)`

c. De kudde stabiliseert zich op een mooi aantal! Zou het uitgemaakt hebben als we met een ander startaantal (wel tussen 1 en 599) waren begonnen?

Een heer van stand bezit het bos en gaat elk najaar 15 zwijnen afschieten.

d. Door de invoerregel van de GR op te roepen met 2ND ENTER en met '`-15`' uit te breiden, kun je voorspellen wat het gevolg hiervan zal zijn. Een nieuw evenwicht?

e. Als er een aantal jaren niet gejaagd wordt, gaat de kudde zich weer op het oude niveau stabiliseren. Probeer dat uit. Jaag daarna weer enige tijd 15 zwijnen per jaar. Nu stelt het lagere evenwicht zich weer in.

De kleinzoon des huizes neemt vanaf zeker tijdstip deel aan deze jaarlijkse jacht. Aanvankelijk schiet hij slechts 6 zwijnen per jaar; de -15 wordt dus -21.

f. Is dit op den duur fataal voor de kudde?

Uiteindelijk worden jaarlijks 28 zwijnen afgeschoten. Aanvankelijk door grootvader en kleinzoon, later door de laatste samen met enkele intimi.

g. Voorspel met de GR het treurige einde van dit verhaal.

22 Geef met behulp van grafieken een nuchter wiskundig commentaar bij het voorgaande. Je moet kunnen verklaren:

a. waarom het aantal zwijnen zich stabiliseert als er niet gejaagd wordt,

b. dat ook stabilisatie optreedt als er regelmatig, maar beperkt, wordt gejaagd,

c. dat er een maximum is voor de jacht; daar overheen gaan is fataal,

d. dat, als de kudde zich bij matige jacht (onder dat maximumniveau) stabiliseert, het evenwichtsniveau minstens de helft is van het evenwichtsniveau bij geen jacht,

e. dat, als je ieder jaar één zwijn boven het maximumniveau afschiet, de kudde snel uitsterft; zeker sneller dan met één zwijn per jaar minder.

23 Licht ook toe dat dezelfde verschijnselen optreden als voor de '600' een ander getal is gekozen en voor de '1.5' een andere factor groter dan 1.

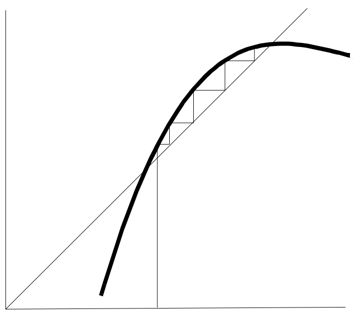
Samenvatting

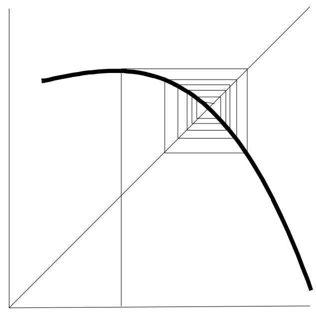
In dit hoofdstuk is studie gemaakt van het staartgedrag van rijen gedefinieerd door een recurrente betrekking:

$$u_n = \begin{cases} a & \text{als } n = 0 \\ f(u_{n-1}) & \text{als } n \geq 1 \end{cases}$$

web

Via een WEB-grafiek kun je inzicht krijgen in het staartgedrag van zo’n rij.
De basisvormen die je tegenkomt zijn ‘trappen’ en ‘spiralen’.
De plaatjes hieronder laten een convergerende trap en een convergerende spiraal zien.





dekpunt

Het getal *d* is een *dekpunt* van de functie *f* als geldt: $f(d) = d$.
Als de door bovenstaande recurrente betrekking gedefinieerde rij een limiet heeft, dan moet die limiet gelijk zijn aan een dekpunt van de functie *f*.
Omgekeerd is het zeker niet zo, dat dekpunten garant staan voor convergentie.
De steilheid van de grafiek in de omgeving van een dekpunt is bepalend voor de eventuele convergentie. Daarover spreekt de:

contractie-stelling

Contractiestelling, algemeen

Als

f een op een bepaald interval differentieerbare functie is,
f een dekpunt d heeft in dat interval,
en de differentiequotiënten vanuit d voor een vast getal $m < 1$ voldoen aan

$$\left|\frac{f(x) - f(d)}{x - d}\right| \leq m$$

dan

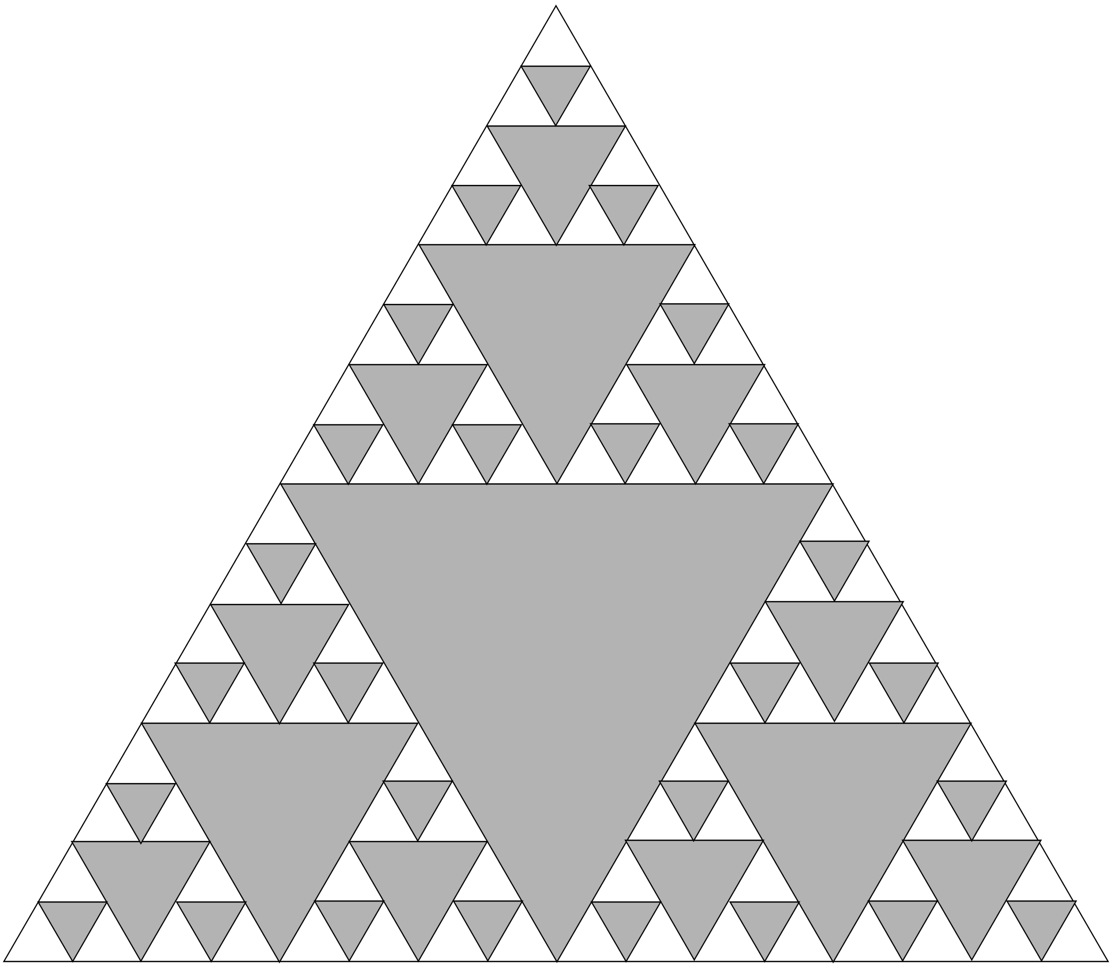
convergeert een rij $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots$, die binnen dat interval ligt en bepaald is door een beginwaarde u_0 en de stapformule

$$u_{n+1} = f(u_{n+1})$$

naar het dekpunt d van f.
Bovendien geldt:

$$|u_n - d| \leq |m|^n |u_0 - d|$$

Hoofdstuk 7
Rijen van Sommen & Sommen van Rijen



Bij een gegeven rij kun je een rij van verschillen (differenties), maar ook een rij van (partiële) sommen vormen. De verschilrij zegt veel over de groei van de oorspronkelijke rij en de oorspronkelijke rij zegt veel over de groei van de rij van sommen. Als de oorspronkelijke rij naar 0 convergeert, dan is het interessant om het gedrag van de sommen voor $n \to \infty$ te bekijken. Als de sommen een limiet hebben, dan noemen we de oorspronkelijke rij *sommeerbaar*. Voorbeeld van een sommeerbare rij: 0.3, 0.03, 0.003, 0.0003, ... De 'limietsom' 0.3333... is gelijk aan $\frac{1}{3}$.

25: Rijen van sommen

driehoek van Pascal

Misschien wel het beroemdste getallenpatroon uit de wiskunde:

						1						
					1		**1**					
				1		**2**		**1**				
			1		**3**		**3**		**1**			
		1		**4**		**6**		**4**		**1**		
	1		**5**		**10**		**10**		**5**		**1**	
1		**6**		**15**		**20**		**15**		**6**		**1**
						enz.						

Dit patroon staat bekend onder de naam ‘driehoek van Pascal’.
Het bijzondere van de driehoek van Pascal is dat, behalve de 1-en, *ieder getal van het patroon gelijk is aan de som van zijn twee* ‘*bovenburen*’. Deze regel bepaalt de driehoek van Pascal. We zullen hem voor het gemak de ‘Pascalregel’ noemen. De driehoek van Pascal speelt een rol in de kansrekening en in de algebra.

1 De driehoek van Pascal kun je in principe uitbreiden zover je wilt.
Schrijf voor jezelf de volgende twee regels op.

2 Je kunt uit de driehoek van Pascal een rij vormen door de getallen in elke horizontale regel op te tellen. Dus:

$$1,\ 1 + 1,\ 1 + 2 + 1,\ 1 + 3 + 3 + 1,\ 1 + 4 + 6 + 4 + 1,\ ...$$

a. Je krijgt zo een bekende (en mooie) rij. Welke?

b. Hoe kun je, zonder de sommen uit te rekenen, begrijpen dat

$$1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1$$

precies het dubbele moet zijn van

$$1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1\ ?$$

Tip: denk aan de Pascalregel.

c. De regels van de driehoek van Pascal worden van boven naar beneden aangegeven met de nummers 0, 1, 2, ...
Bijvoorbeeld: de regel met nummer 3 is ‘1 3 3 1’.
Stel je voor dat de driehoek van Pascal is voortgezet tot en met regel 10.
Hoe groot is dan de som van alle getallen in de driehoek?

d. Als je vraag **c** goed hebt beantwoord, heb je een *oneven* getal gevonden.
Geen wonder, als je naar het getallenpatroon in de driehoek kijkt. Zonder enig rekenwerk had je dat al kunnen weten. Verklaar dit.

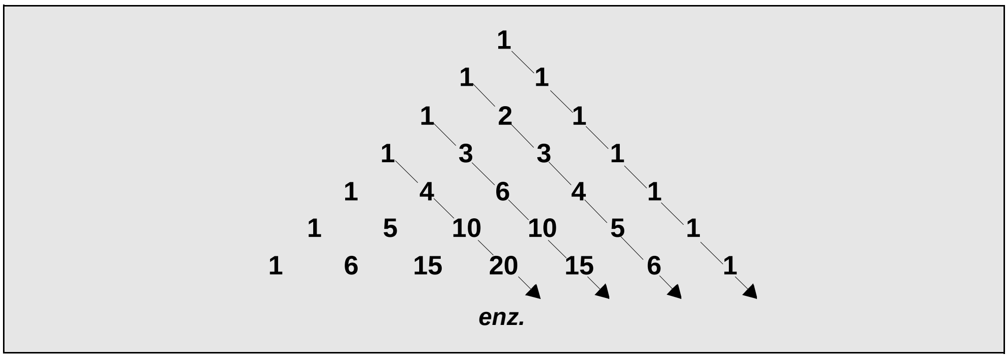
3 Uit de horizontale regels van de Pascaldriehoek maken we nu deze rij:

$$1 - 1,\ 1 - 2 + 1,\ 1 - 3 + 3 - 1,\ 1 - 4 + 6 - 4 + 1,\ ...$$

a. Wat merk je op aan deze rij?

b. Van de eerste, derde, vijfde, ..., term is niet zo moeilijk in te zien dat ze gelijk aan nul zijn. Van de andere is dat wat lastiger. Maar als je weer denkt aan de Pascalregel kun je dat ook begrijpen.
Ga dit na voor de term $1 - 6 + 15 - 20 + 15 - 6 + 1$.

Kijk nu naar de schuine regels in de driehoek van Pascal.:



Stel je voor dat de driehoek van Pascal onbeperkt wordt voortgezet. Je krijgt dan langs de schuine lijnen oneindige rijen, namelijk:

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, ...
1, 2, 3, 4, 5, 6, ...
1, 3, 6, 10, 15, ...
1, 4, 10, 20, ...
enz.

Er bestaat een eenvoudig verband tussen de eerste en de tweede rij, tussen de tweede en de derde rij, tussen de derde en de vierde rij, enzovoort.
De tweede rij kun je ook zó schrijven:

1, 1 + 1, 1 + 1 + 1, 1 + 1 + 1 + 1, ...

De derde rij kan ook zó :

1, 1 + 2, 1 + 2 + 3, 1 + 2 + 3 + 4, ...

De vierde rij bestaat uit de sommen:

1, 1 + 3, 1 + 3 + 6, 1 + 3 + 6 + 10, ...

En zo verder, en zo voort.
Iedere rij bestaat uit de sommen van termen van de voorgaande rij.

4 Deze eigenschap heeft weer alles te maken met de Pascalregel. Controleer dit. N.B.: bij de start moet je een klein trucje uithalen.

somrij

Uitgaande van een gegeven rij:

$u_0, u_1, u_2, u_3, ...$

kun je de rij van sommen:

$u_0, u_0 + u_1, u_0 + u_1 + u_2, u_0 + u_1 + u_2 + u_3, ...$

vormen.
Men spreekt wel van *de rij van partiële sommen* of eenvoudig de *somrij* die bij de rij $u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, ...$ hoort.
Vaak gebruikt men de letter s om de termen aan te duiden:

$s_0 = u_0$
$s_1 = u_0 + u_1$
$s_2 = u_0 + u_1 + u_2$
$s_3 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3$
enz.

Of met een in-één-klap-formule:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

5 Gegeven de rij oneven getallen:

1, 3, 5, 7, 9, 11, ...

Wat weet je van de termen van de bijbehorende somrij?

6 Nu de meetkundige rij:

1, 2, 4, 8, 16, ...

Laat s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, ... de somrij zijn die hierbij hoort.
Geef een directe formule voor s_n .

7 Terug naar de schuine rijen in de driehoek van Pascal:

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, ...
1, 2, 3, 4, 5, 6, ...
1, 3, 6, 10, 15, ...
1, 4, 10, 20, ...
enz.

Voor de eerste rij is de formule eenvoudig $u_n = 1$ en voor de tweede rij $u_n = n$, tenminste ... als we de beginterm u_1 nemen en niet u_0.
De derde rij, zeg u_1, u_2, u_3, ..., heb je al ontmoet in hoofdstuk 2. Het is de rij van de driehoeksgetallen en een directe formule is:

$$u_n = \tfrac{1}{2}n\,(n+1)$$

voor $n = 1, 2, 3, 4, ...$
De vierde rij, zeg s_1, s_2, s_3, ..., is de somrij van de derde rij, dus:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{2}k\,(k+1)$$

Toon aan dat:

$$s_n = \tfrac{1}{6}n\,(n+1)\,(n+2)$$

voor $n = 1, 2, 3, 4, ...$

26: Sommen van meetkundige rijen

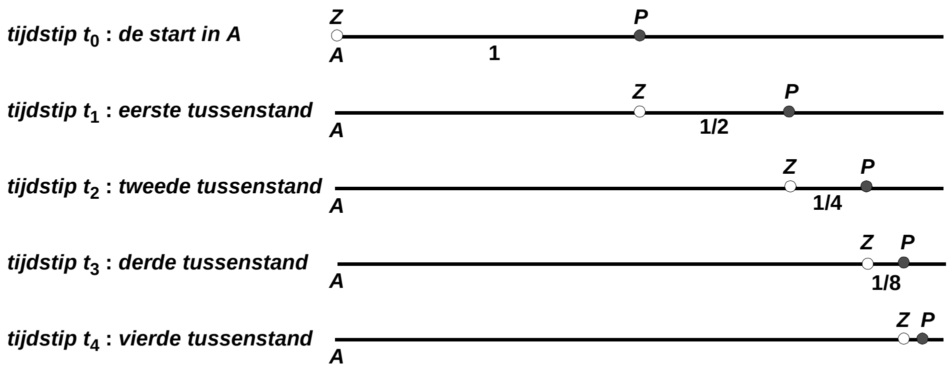
inhaal-probleem

Vader (P) en zoon (Z) joggen regelmatig. Z loopt een stuk harder dan P; om precies te zijn: de snelheid van Z is twee keer zo groot als die van P. Op een mooie morgen maken ze plannen voor een wedloop, waarbij P met voorsprong zal starten. Luister even mee:

> Z : ‘wat denk je van 1 km voorsprong pa?’
> P: ‘ akkoord, maar dan haal jij mij nooit meer in!’
> Z : ‘ ?????? ’
> P : ‘tegen de tijd dat jij 1 km hebt gelopen, ben ik 500 m verder; tegen de tijd dat jij de volgende 500 m hebt gelopen, ben ik 250 m verder; iedere keer als jij mijn vorige afstand hebt afgelegd ben ik alweer verder; dus jij haalt mij nooit in’.

8 Maak tijd, afstand-grafieken van P en Z. Bedenk zelf maar geschikte snelheden. Na hoeveel km haalt Z zijn vader in?

De redenering van P is aardig, maar niet origineel. De Griekse wijsgeer Zeno (450 voor Chr.) hield een soortgelijk betoog voor een wedloop tussen *Achilles en de schildpad*. Hij wist natuurlijk wel dat zijn conclusie niet klopte met de werkelijkheid, en presenteerde dit verhaal als een paradox (= schijnbare tegenspraak). Zeno is in zijn verhaal een soort sportverslaggever die de posities na steeds kleinere tijdsintervallen doorgeeft en die de afstand (en de tijd) van de start tot het inhaalpunt in steeds kleinere delen verdeelt.



De clou is nu dat je wel over een *oneindige* rij van tijdsintervallen kunt spreken, maar dat de ‘som’ van al die intervallen *eindig* is.
En dat betekent dat de zoon zijn vader (of Achilles de schildpad) toch inhaalt.

9 Let nu op de voorsprong van P (in km) op de tijdstippen t_0, t_1, t_2, ...
Noem die achtereenvolgens v_0, v_1, v_2, ...
- **a.** Druk v_n uit in n.
- **b.** Wat weet je van de limiet van v_n?
- **c.** De afstand die P op het moment t_n verwijderd is van het startpunt A, noemen we nu p_n. Druk p_n uit in n.
- **d.** Wat weet je van de limiet van p_n?

Je hebt je misschien al gerealiseerd dat de rij p_0, p_1, p_2, ... de somrij is van v_0, v_1, v_2, ...
Ofwel:

$$p_0 = 1$$
$$p_1 = 1 + \tfrac{1}{2}$$
$$p_2 = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}$$
$$p_3 = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8}$$

enz.

In opgave **9** heb je gezien dat:

$$\lim_{n \to \infty} p_n = 2$$

sommeerbaar en limietsom

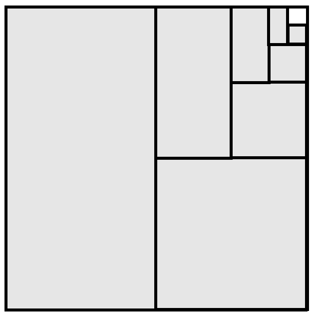
We schrijven ook wel:

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \ldots = 2$$

De oneindige rij $1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{8}, \ldots$ noemen we *sommeerbaar.*

2 is de *limietsom* (of kortweg *som*) van de rij.

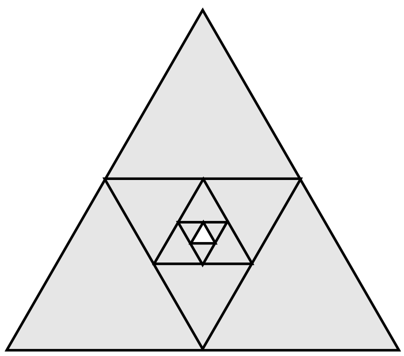
10 Bekijk het plaatje hieronder



Kun je hierbij een rij met limietsom bedenken?

11 Leg uit aan de hand van onderstaand plaatje dat:

$$\tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{16} + \tfrac{3}{64} + \tfrac{3}{256} + \ldots = 1$$



De voorafgaande rijen zijn voorbeelden van meetkundige rijen.
Een meetkundige rij met beginterm 1 en *reden* (of *groeifactor*) r heeft de gedaante:

$$1, r, r^2, r^3, \ldots$$

Laat s_0, s_1, s_2, s_3, ... de rij van (partiële) sommen hiervan zijn.

Voor de som $s_n = 1 + r + r^2 + \ldots + r^n$ ken je al een formule, namelijk:

$$s_n = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

Of, wat op hetzelfde neerkomt:

$$s_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Deze formules gelden voor alle waarden van $r \neq 1$.

12 a. Bereken $\lim_{n \to \infty} s_n$ voor het geval $r = \frac{1}{2}$. Ook voor $r = \frac{1}{4}$.

b. Kloppen de resultaten met wat je in **10** en **11** hebt gezien?

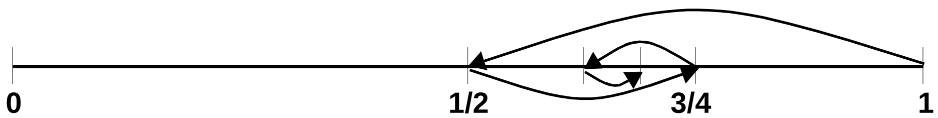
13 a. In het geval $r = 2$ is de (oneindige) rij *niet* sommeerbaar. Verklaar dit.

b. Hoe zit het bij $r = -2$?

14 Bekijk nu de meetkundige rij met beginterm 1 en reden $-\frac{1}{2}$, dus:

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$$

Op een getallenlijn zie je hoe je van ‘som naar som’ kunt springen:



a. De eerste som is 1, de tweede $\frac{1}{2}$, de derde $\frac{3}{4}$. Waaraan zijn de volgende twee sommen gelijk?

b. Probeer te voorspellen hoe groot de limietsom is. Je kunt hierbij de GR gebruiken.

c. Gebruik nu bovenstaande formule voor s_n om de limietsom exact te bepalen.

15 a. Neem in de rij $1, r, r^2, r^3, \ldots$ voor r het getal 0.9.
Is de rij sommeerbaar? Zo ja, hoe groot is de limietsom?

b. Dezelfde vragen voor $r = 1.1$

16 Neem nogmaals de bovenstaande formule voor s_n.

a. Voor welke waarden van r bestaat $\lim_{n \to \infty} s_n$?

b. Druk voor die waarden van r de limietsom uit in r.

17 De grensgevallen voor sommeerbaarheid van de rij $1, r, r^2, r^3, \ldots$ zijn $r = 1$ en $r = -1$. De rij 1, 1, 1, 1, ... is duidelijk niet sommeerbaar.
Hoe zit het met de rij 1, -1, 1, -1, ... ?

een veel gebruikte formule

18 Nu de meetkundige rij met willekeurige beginterm, zeg a.
Dat is dus de rij:

$$a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$$

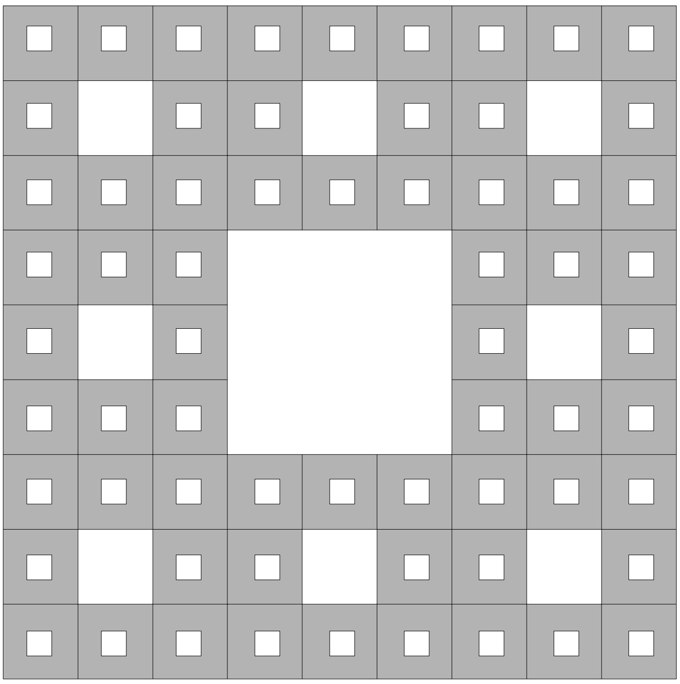
a. Noem de partiële sommen weer s_0, s_1, s_2, s_3, ...
Geef een directe formule voor s_n.
b. Voor welke waarden van r is de rij sommeerbaar?
c. Toon aan dat voor die waarden de limietsom gelijk is aan: $\frac{a}{1-r}$.

De formule die je nu gevonden hebt, is belangrijk. Je kunt hem dan ook terugvinden in de samenvatting bij dit hoofdstuk. In de rest van de opgaven van deze paragraaf kun je de formule gebruiken.

19 Welke van de volgende meetkundige rijen zijn sommeerbaar?
Geef bij elke sommeerbare rij de limietsom.
a. 5, 3, 1.8, 1.08, 0.648, ...
b. 2, -1, 0.5, -0.25, 0.125, ...
c. 1, -2, 4, -8, 16, ...
d. 0.3, 0.03, 0.003, 0.0003, 0.00003, ...

gaatjestapijt

20 Je ziet hieronder een vierkant tapijt. Het vierkant is in negen gelijke vierkantjes verdeeld, waarna het centrale vierkant (wit in de figuur) is weggehaald.
Met de overblijvende vierkantjes is hetzelfde gedaan.



a. Stel je voor dat het verdelen en verwijderen van vierkantjes tot in het oneindige wordt voortgezet. Hoeveel blijft er dan over van het tapijt?
b. Veronderstel dat alle verwijderde witte vierkantjes zijde aan zijde naast en tegen elkaar worden gelegd zó dat de onderste zijden langs één rechte lijn vallen.
Hoe lang is die rij?

27: Een reken-meetkundige rij

Uit de rekenkundige rij:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$$

en de meetkundige rij:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$$

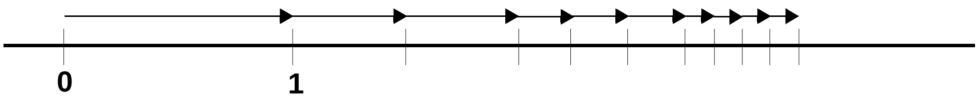
kun je door vermenigvuldiging van termen met hetzelfde rangnummer een nieuwe rij maken:

$$1 \cdot 1, 2 \cdot \frac{1}{2}, 3 \cdot \frac{1}{4}, 4 \cdot \frac{1}{8}, 5 \cdot \frac{1}{16}, 6 \cdot \frac{1}{32}, \ldots$$

Zo'n kruising van een rekenkundige en een meetkundige rij worden wel eens een reken-meetkundige rij genoemd. De vraag is nu of deze reken-meetkundige rij sommeerbaar is.

21 Eerst een vooronderzoek met de GR.
- **a.** Geef een directe formule voor de rij.
- **b.** Laat u_n een term van de somrij zijn. Neem voor u_n en voor n de startwaarde 1. Voer in: $u(n) = u(n-1) + \ldots$ Wat moet je op de plaats van de stippen kiezen om de somrij van de reken-meetkundige rij voort te brengen?
- **c.** Doe nu een voorspelling over de sommeerbaarheid.

22



In de figuur zie je één pijltje met lengte 1, twee pijltjes met lengte $\frac{1}{2}$, drie pijltjes met lengte $\frac{1}{4}$, enzovoort. Het gaat er nu om of de totale lengte van de oneindige serie van pijltjes eindig is.
- **a.** Neem eerst van elke soort één pijltje: dus één pijltje van 1, één pijltje van $\frac{1}{2}$, één pijltje van $\frac{1}{4}$, enzovoort. Stel je voor dat je die achterelkaar legt. Hoe groot is de totale lengte van die pijltjes?
- **b.** Van de overblijvende pijltjes neem je weer van iedere soort één, nu te beginnen met één pijltje van $\frac{1}{2}$. Ook die leg je achterelkaar. Wat is de totale lengte?
- **c.** Je kunt je dit proces tot in het oneindige voortgezet denken: steeds neem je van de overblijvende pijltjes één van elke soort en die leg je aan elkaar, en bereken je de totale lengte. Is de rij van alle totale lengten sommeerbaar? Zo ja, hoe groot is de limietsom?

Het voorgaande kunnen we een beetje algemener bekijken.
Daartoe nemen we de rij:

$$1, 2r, 3r^2, 4r^3, 5r^4, \ldots$$

Wil die rij sommeerbaar zijn, dan moet in ieder geval gelden: $-1 < r < 1$.

23 Ga na of je hiermee akkoord gaat.

Stel dat er aan de voorwaarde $0 < r < 1$ is voldaan.
We kunnen dan de ‘pijltjesmethode’ van opgave **22** volgen.
Het komt erop neer dat we oneindig veel limietsommen nemen:

$$\begin{aligned} 1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \dots &= \frac{1}{1-r} \\ r + r^2 + r^3 + r^4 + \dots &= \frac{r}{1-r} \\ r^2 + r^3 + r^4 + \dots &= \frac{r^2}{1-r} \\ \dots\dots\dots\dots &= \dots\dots \end{aligned}$$

24 a. Laat zien dat de limietsom van de limietsommen gelijk is aan $\dfrac{1}{(1-r)^2}$

b. Controleer nog even of je bevindingen bij **21** en **22** in overeenstemming zijn met deze formule.

Er is nog een andere manier om de limietsom

$$1 + 2r + 3r^2 + 4r^3 + 5r^4 + \dots$$

te vinden in het geval $-1 < r < 1$.
In het allereerste boekje van de vorige klas *Som & Verschil, Afstand & Snelheid* heb je een afleiding gezien om van een eindig aantal termen van een meetkundige rij de som te bepalen. Zoek dat nog maar eens op, als je het niet meer weet. Het idee was ruwweg dit: schrijf de som van de eerste n termen (= S_n) uit en vermenigvuldig S_n met r.
Trek rS_n af van S_n af (of omgekeerd), en dan vallen een heleboel termen weg.
Deel daarna door $1 - r$ (of door $r - 1$) en je krijgt een directe formule voor S_n.
Deze methode kun je ook toepassen op de reken-meetkundige rij:

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + 2r + 3r^2 + \dots + nr^{n-1} \\ rS_n &= \phantom{1 + {}} r + 2r^2 + \dots + (n-1)r^{n-1} + nr^n \\ \hline (1-r)S_n &= 1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} - nr^n \end{aligned} \quad +$$

25 a. Controleer bovenstaande berekening.

b. Leid hieruit een directe formule af voor S_n .

c. Bereken vervolgens $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$ voor het geval $-1 < r < 1$.

26 Vergelijk de twee formules:

$$1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \dots = \frac{1}{1-r}$$

en

$$1 + 2r + 3r^2 + 4r^3 + \dots = \frac{1}{(1-r)^2}$$

Je hebt misschien allang gezien dat de termen 1, $2r$, $3r^2$, $4r^3$, ... precies de afgeleiden van de termen r, r^2, r^3, r^4, ... zijn. Het is dan voorspelbaar dat de tweede uitkomst de afgeleide van de eerste zal zijn. Controleer of dat klopt.

Zo lijkt het erop dat de somregel voor differentiëren ook opgaat bij *oneindige* sommen! Onder zekere voorwaarden is dat inderdaad waar. Welke voorwaarden dat zijn, blijft hier onbesproken. Je mag de ‘regel voor het differentiëren van oneindige sommen’ zeker niet klakkeloos gebruiken, maar het is natuurlijk heel leuk dat het in dit geval goed gaat.

28: Extra: kansen en limietsommen

doorgaan tot een succes

Van de meetkundige en de reken-meetkundige rij wordt in de kansrekening gebruikgemaakt in situaties die te maken hebben met ‘doorgaan tot een succes’. In de volgende opgaven zul je zien wat hiermee wordt bedoeld.

27 Misschien wel het allereenvoudigste en allerbekendste kansexperiment is ’tossen’, dat wil zeggen ‘een munt opgooien’ waarbij de uitkomsten K(op) en M(unt) ieder de kans $\frac{1}{2}$ hebben.
Veronderstel nu dat iemand hiermee doorgaat, net zo lang tot Kop voor het eerst bovenkomt. Dit kan gebeuren na 1, 2, 3, ... beurten. De mogelijke uitkomsten bij dit experiment kunnen zó worden genoteerd:

K , *MK*, *MMK*, *MMMK*, *MMMMK*, ...

Het experiment heeft een oneindige verzameling van mogelijke uitkomsten!
De kans dat het experiment eindigt na n beurten, noteren we als p_n.

a. Druk p_n uit in n.

Er hoeft niet per se een einde te komen aan dit experiment. Het is onwaarschijnlijk, maar niettemin denkbaar dat tot in alle eeuwigheid M wordt gescoord.
De kans hierop is gelijk aan $\lim_{n \to \infty} 0{,}5^n = 0$.
Dit is dan een voorbeeld van een gebeurtenis die theoretisch niet onmogelijk is, maar wel de kans 0 heeft.

b. De ‘som van alle kansen’ moet natuurlijk gelijk zijn aan 1, ofwel: $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$

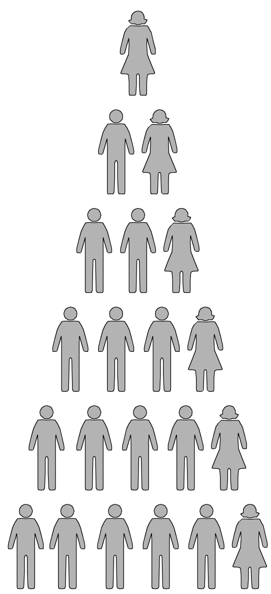
Controleer dat dit inderdaad het geval is.

c. Bij een experiment als dit, is het van belang te weten wat de verwachtingswaarde is van het benodigde aantal worpen. Dat komt neer op het berekenen van de limietsom:

$$p_1 \cdot 1 + p_2 \cdot 2 + p_3 \cdot 3 + p_4 \cdot 4 + \ldots$$

Hoe groot is dus de verwachtingswaarde?

28 Een dictator, verzot op een groot leger, bepaalt dat zodra uit een huwelijk een meisje wordt geboren, de ouders geen kinderen meer mogen krijgen. Hij wil op die manier het percentage jongens opvoeren.
Zal het hem lukken? Waarom?
Veronderstel dat de kans op een meisjesgeboorte gelijk is aan $\frac{1}{2}$ en dat er geen ouderparen zijn met een speciale aanleg om meer jongens dan meisjes (of omgekeerd) voort te brengen.
(Vraagstuk ontleend aan *Hans Freudenthal, Waarschijnlijkheidsrekening en Statistiek*).



29 Bij 'Mens erger je niet', mag je pas in het spel komen als je met de dobbelsteen een 6 hebt gegooid. Dat kan best lang duren. Noem de kans dat een speler hier *n* beurten voor nodig heeft p_n.

a. Druk p_n uit in *n* en verifieer: $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$

b. Bereken de verwachtingswaarde van het aantal beurten dat de speler moet gooien tot en met het moment waarop hij in het spel komt.

De kansverdelingen waarvan sprake was in de opgaven **27** en **28**, zijn voorbeelden van de zogenaamde *geometrische (meetkundige) verdeling*. Die naam is te danken aan het feit dat de kansen een meetkundige rij vormen.
Het komt erop neer dat een experiment met twee mogelijke uitkomsten 'succes' (kans *p*) en 'mislukking' (kans *q*) net zolang herhaald wordt, tot voor het eerst succes optreedt. De kansen op succes na 1, 2, 3, 4, ... beurten zijn achtereenvolgens gelijk aan:

$$p, qp, q^2p, q^3p, \ldots$$

Dit is een meetkundige rij met beginterm *p* en 'reden' *q*.

30 a. Bewijs dat de som van al deze kansen gelijk is aan 1.

b. De verwachtingswaarde van het aantal benodigde beurten is $\frac{1}{p}$. Bewijs dit ook.

31 Christiaan Huygens was een van de pioniers op het gebied van de kansrekening. Van zijn hand verscheen in het jaar 1657 de verhandeling *Van rekeningh in Spelen van Geluck*.* Het volgende probleem komt uit het genoemde werk.
A en B werpen om beurten met twee dobbelstenen. A wint als hij 6 ogen werpt.
B wint als hij 7 ogen werpt. A heeft het voordeel dat hij mag beginnen. B heeft het voordeel dat het iets gemakkelijker is 7 ogen te werpen (kans $\frac{6}{36}$) dan 6 ogen te werpen (kans $\frac{5}{36}$).

a. Verklaar de kansen $\frac{6}{36}$ en $\frac{5}{36}$.

b. Bereken de kans dat A wint in zijn tweede beurt (= de derde ronde van het spel).

c. Het probleem wie van de twee hier de meeste kans heeft, is niet zo simpel. Huygens had de oplossing er niet bijgeschreven. Verschillende grote wiskundigen uit zijn tijd (zoals Jakob Bernoulli) hebben later een oplossing ervan gepubliceerd. Het blijkt dat A een miniem nadeel heeft, zijn winstkans is namelijk $\frac{30}{61}$.
Bewijs dit.
Tip: gebruik de limietsom van een meetkundige rij.

* Deze verhandeling is onlangs vertaald in modern Nederlands door W. Kleijne en uitgegeven door Epsilon Uitgaven Utrecht.

29: De harmonische rij

convergentie van som en term

Een rij u_0, u_1, u_2, ... is sommeerbaar als de bijbehorende somrij:

$$u_0, u_0 + u_1, u_0 + u_1 + u_2, \ldots$$

convergent is.
Anders gezegd: als

$$\lim_{n \to \infty} (u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n)$$

bestaat.
Is dat het geval, dan mag je die limietsom schrijven als:

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k$$

Bekijk de volgende uitspraak:

Als de rij u_0, u_1, u_2, ... sommeerbaar is, dan geldt zeker $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$.

32 Probeer die uitspraak te verklaren.

De grote vraag is nu of het omgekeerde ook waar is.
Dat wil zeggen of ook geldt:

als de rij u_0, u_1, u_2, ... naar 0 convergeert, dan is de rij sommeerbaar.

Voor een speciaal soort rijen, namelijk de meetkundige rijen, gaat die vlieger op.
Maar kijk eens naar het volgende voorbeeld.

33 Hier staat het beginnetje van een rij: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots$

Je gaat deze rij nu zelf voortzetten. Daarbij moet je je houden aan een paar spelregels:
(1) alle termen moeten positief zijn;
(2) geen enkele term mag groter zijn dan een voorganger, gelijk zijn mag wel;
(3) de rij moet naar 0 convergeren.

a. De som van de eerste drie termen is 2.
Voeg nu een paar nieuwe termen toe, zó dat de som van de beginterm 1 tot en met jouw laatste term precies gelijk is aan 3
Voeg nu weer een paar termen toe zó dat de som tot en met de laatste term gelijk is aan 4.

b. Hoe kun je dit proces voortzetten zó dat de 'tussensommen' achtereenvolgens gelijk zijn aan 5, 6, 7, ... ? Vergeet daarbij niet spelregel (3)!

Als je erin geslaagd bent om een rij te construeren zoals bedoeld in opgave **33**, dan heb je een belangrijke ontdekking gedaan!
Namelijk:

dat een rij, waarvan de termen willekeurig klein worden, toch een 'oneindige som' kan hebben.

In het volgende gaan we een befaamde rij (althans in de geschiedenis van de wiskunde) onderzoeken op sommeerbaarheid. Die rij wordt de *harmonische rij* genoemd.

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$$

De harmonische rij kun je terugvinden in het onderstaande patroon van breuken, dat wel de *harmonische driehoek* wordt genoemd. Die driehoek is een ontwerp van Leibniz.

de driehoek van Leibniz

$$1$$
$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{3} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{4} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{4}$$
$$\frac{1}{5} \quad \frac{1}{20} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{20} \quad \frac{1}{5}$$
$$\frac{1}{6} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{60} \quad \frac{1}{60} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{6}$$
$$\frac{1}{7} \quad \frac{1}{42} \quad \frac{1}{105} \quad \frac{1}{140} \quad \frac{1}{105} \quad \frac{1}{42} \quad \frac{1}{7}$$

enz.

Net als de driehoek van Pascal wordt deze driehoek door een recursie-regel bepaald. Het is zo'n beetje het omgekeerde als bij de driehoek van Pascal; daar was ieder getal de som van zijn twee *boven*buren. In de driehoek van Leibniz is ieder getal de som van zijn twee *beneden*buren.

34 a. Controleer dit voor de horizontale regels met rangnummer 3 en 4. (Het nummeren van de horizontale regels gaat net zoals bij de driehoek van Pascal).

b. Als je uitgaat van de harmonische rij op een schuine rand, dan kun je de overige getallen stapsgewijs berekenen via aftrekken.

Voor de tweede diagonaalrij: $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$, $\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$, enz.

Daarna kun je de volgende diagonaalrij maken, enz. enz.
Maak nu de horizontale regel met rangnummer 8.

35 Bij onbeperkte voortzetting van de driehoek van Leibniz krijg je oneindige diagonaalrijen. Bijvoorbeeld op de tweede diagonaal van boven:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \ldots$$

Hierboven staat hoe elke term als verschil is gevonden.

a. Gebruik deze verschillen om een formule te vinden voor de som s_n van de eerste n termen.

b. Nu kun je snappen dat de rij sommeerbaar is. Wat is de limietsom?

c. Dezelfde vragen voor de derde en voor de vierde diagonaalrij.

telescoop-principe

Je begrijpt nu wel dat alle volgende diagonaalrijen in de driehoek van Leibniz sommeerbaar zijn en dat je de limietsom kunt terugvinden in de driehoek.
Het principe dat je hierbij toepast, is: *schrijf elke term als verschil zodanig dat je iedere eindige som in elkaar kunt schuiven, waarbij je alleen het eerste en het laatste getal overhoudt* (dit wordt wel het *telescoopprincipe* genoemd). Je vindt dan gemakkelijk de limiet van de som voor $n \to \infty$.

36 De enige diagonaalrij waarbij dit niet direct lukt, is de eerste en dat is juist de harmonische rij. Over de sommeerbaarheid daarvan weet je dus nog niets.
Eerst even een empirisch onderzoek op de GR.
Gebruik weer $u_n = u_{n-1} + ...$

a. Wat moet je nu op de plaats van de stippen kiezen?

b. Bekijk een tabel van uitkomsten (te beginnen met $n = 1$) en loop door de tabel tot $n = 100$. Lijkt het op convergentie of niet?

Bernoulli's oplossing

Het probleem van de harmonische rij werd opgelost door Johann Bernoulli. Zijn oplossing werd in 1689 door zijn broer Jakob gepubliceerd. Hieronder zie je die oplossing. Overigens was het probleem al veel eerder (vóór het jaar 1400) door Oresme opgelost.

XVI. *Summa ſeriei infinitæ harmonicè progreſſionalium,* $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ *&c. eſt infinita.*

Id primus deprehendit Frater: inventâ namque per præced. ſummâ ſeriei $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}$, &c. viſurus porrò, quid emergeret ex iſtâ ſerie, $\frac{1}{2}+\frac{2}{6}+\frac{3}{12}+\frac{4}{20}+\frac{5}{30}$, &c. ſi reſolveretur methodo prop. XIV. collegit propoſitionis veritatem ex abſurditate manifeſtâ, quæ ſequeretur, ſi ſumma ſeriei harmonicæ finita ſtatueretur. Animadvertit enim,

Seriem A, $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$, &c. ∞ (fractionibus ſingulis in alias, quarum numeratores ſunt 1, 2, 3, 4, &c. transmutatis) ſeriei B, $\frac{1}{2}+\frac{2}{6}+\frac{3}{12}+\frac{4}{20}+\frac{5}{30}+\frac{6}{42}$, &c. ∞ C + D + E + F, &c.

$$\left.\begin{array}{l}
C.\ \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42},\ \&c.\ \infty \text{ per præc. } \frac{1}{1}\\
D\ .\ .\ +\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42},\ \&c.\ \infty\ C-\frac{1}{2}\ \infty\ \frac{1}{2}\\
E\ .\ .\ .\ .\ +\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42},\ \&c.\ \infty\ D-\frac{1}{6}\ \infty\ \frac{1}{3}\\
F\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ +\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42},\ \&c.\ \infty\ E-\frac{1}{12}\ \infty\ \frac{1}{4}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad \&c.\ \infty \qquad \&c.
\end{array}\right\}\ \infty\ G;\ \text{unde ſequitur ſeriem } G\ \infty\ A,$$

(totum parti, ſi ſumma finita eſſet.

Ego poſtmodùm, cùm indicâſſet, idem oſtenſivè hunc in modum: Summa ſeriei infinitæ harmonicæ $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$, &c. ſuperat datum quemvis numerum. Ergò infinita eſt, per II.

37 Ook al ben je niet zo goed in Latijn, je kunt toch zien dat het over de som van de harmonische rij gaat.

a. In de tekst zie je boven de horizontale streep een som, aangeduid met de letter *B*. Dat is een beginstuk van de som van de harmonische rij (met weglating van de term 1), maar de termen zijn in een andere vorm geschreven. Ga na volgens welke methode dat gebeurd is en wat de gedaante van een paar volgende termen is.

b. Onder de streep zie je hoe de som uitgesplitst is in een rij van sommen. Herken je die techniek? Waar heb je die eerder gezien?

c. De limietsom, aangeduid met *C*, is gelijk aan 1. Dat heb je in de vorige opgaven al gezien. Ga nu na waarom de limietsommen *D*, *E* en *F* gelijk zijn aan achtereenvolgens $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$.

ergo infinita est

Maar nu komt de redenering en de conclusie. Dat leest niet zo makkelijk, zelfs niet als je het Latijn beheerst. Aan het eind staat: *Ergo infinita est*, en dat betekent: *dus is het oneindig.* Daarmee zegt Bernoulli dat de harmonische rij geen eindige som heeft, of in onze terminologie, dat zij niet sommeerbaar is. De voorafgaande redenering is van een type dat *bewijs uit het ongerijmde* wordt genoemd. In de Vlakke Meetkunde ben je zulke redeneringen al tegengekomen.
Het idee is hier:

Veronderstelling:

De harmonische rij is sommeerbaar.

Ofwel: de rij heeft een of andere limietsom *S* .

Uitgaande van de veronderstelling volgt een 'ongerijmdheid'.

Die ongerijmdheid is hier een voorwaarde waaraan *S* onmogelijk kan voldoen.

38 Bekijk nu nog eens de tekst van de gebroeders Bernoulli.

a. De veronderstelling hierboven leidt tot de bewering:
de limietsom *B* is gelijk aan $S - 1$. Verklaar dit.

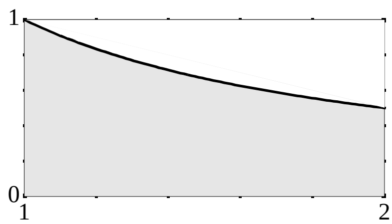
b. Maar ... als je naar de limietsommen *C*, *D*, ... kijkt, dan moet de conclusie zijn dat *B* gelijk is aan *S*. Verklaar dat ook.

Uit opgave **38** leid je nu de voorwaarde $S = S - 1$ af.
Deze voorwaarde wordt door geen enkel getal vervuld.
Daarmee is aangetoond dat de harmonische rij niet sommeerbaar kan zijn.

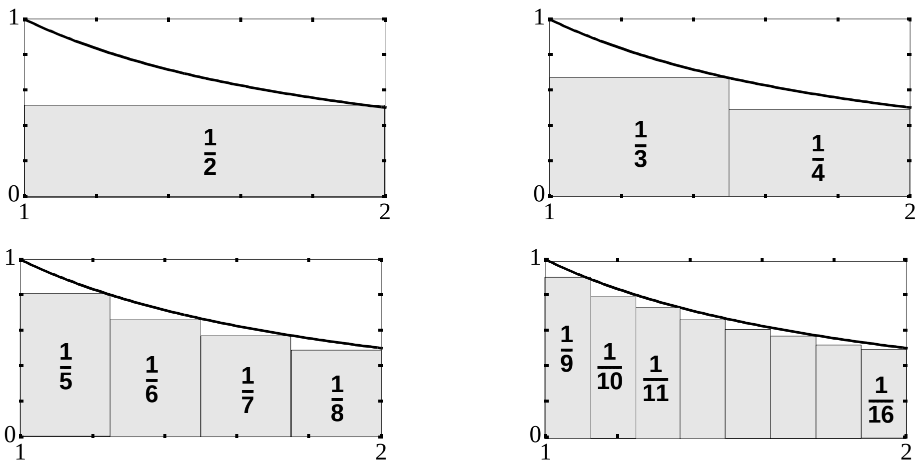
30: Som en integraal

In de vorige paragraaf heb je een historisch bewijs gezien waarom de harmonische rij niet sommeerbaar is. In de hedendaagse wiskundeboeken is meestal een ander bewijs te vinden voor het naar ¥ gaan van de sommen van de harmonische rij.
In deze paragraaf kom je een paar van die andere bewijzen tegen en leer je een methode om (niet-)sommeerbaarheid van een rij vast te stellen met behulp van een Riemannsom of van een integraal.

39 Bekijk de grafiek van $y = \frac{1}{x}$ op het interval [1 , 2].
Bereken de exacte oppervlakte onder de grafiek.



40 Je gaat nu Riemannsommen bekijken die de oppervlakte van onderen benaderen. Daarbij worden rechthoeken met gelijke breedte gebruikt. De oppervlakte van de rechthoek blijken termen van de harmonische rij te zijn. Dat moet natuurlijk nog wel even worden geverifieerd.



a. Controleer de uitkomsten in het plaatje rechtsboven.
b. Teken zelf een plaatje bij een verdeling van [1 , 2] in drie gelijke delen.
c. Bewijs dat bij een verdeling in m gelijke delen de oppervlakte van de rechthoek (van links naar rechts) gelijk zijn aan: $\frac{1}{m+1}$, $\frac{1}{m+2}$, ...

41 In bovenstaande plaatjes is het interval verdeeld in 1, 2, 4, en 8 delen.
a. Hoe kun je hieraan zien dat de som van de eerste 16 termen in ligt tussen 3 en 4?
b. Bovenstaan verdeelsysteem kan eindeloos worden voortgezet; dat geeft 16, 32, 64, ... rechthoekjes onder de grafiek.
Beredeneer dat de som van de eerste 1024 termen tussen 6 en 8 ligt.
c. Hoever kun je in de harmonische rij gaan om zeker te zijn van een som tussen 11 en 15?
d. En tussen 51 en 71.
e. De sommen van de harmonische rij gaan naar oneindig. Weliswaar langzaam, maar toch. Verklaar dit.

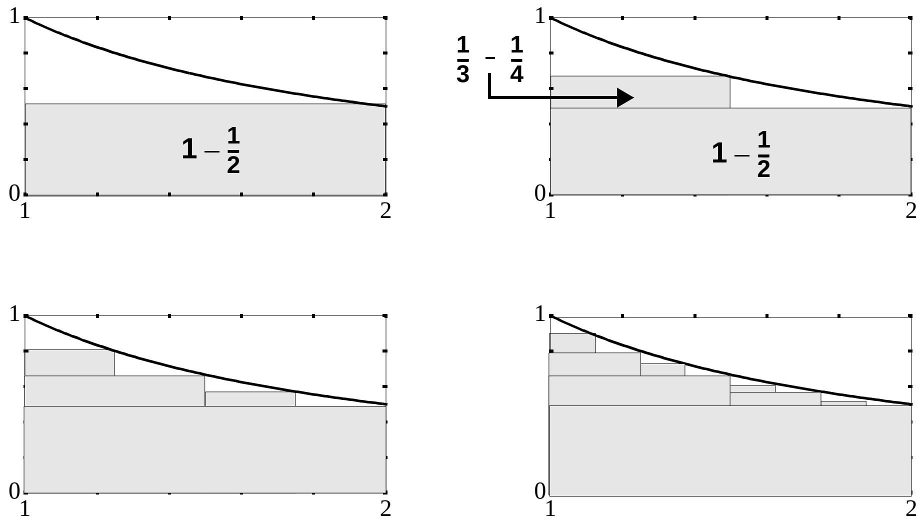
42 De rij die je krijgt door de termen van de harmonische rij om de andere tegengesteld te nemen is:

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \ldots$$

Met behulp van de getallenlijn kun je zien dat de sommen van deze rij zich bevinden op het interval $[\frac{1}{2}, 1]$. Maak een schets waarbij je van ‘som naar som’ springt.

Het kan bijna niet anders of de rij $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \ldots$ heeft een limietsom.

De vraag is natuurlijk, welk getal zou dat kunnen zijn?
Om daarachter te komen, kunnen we de Riemann-ondersommen van de vorige pagina gebruiken. We gaan die sommen echter op een ongebruikelijke manier berekenen.



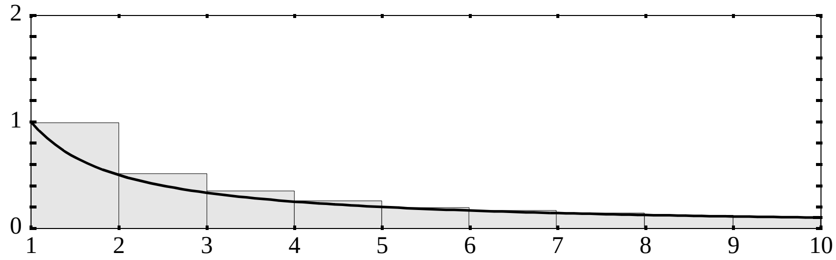
43 Bekijk bovenstaande figuur.
- **a.** In de figuur rechtsboven is een rechthoekje aangegeven met oppertvlakte $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$. Verklaar waarom dit correct is.
- **b.** In de volgende figuur (linksonder) zijn er twee rechthoekige schijfjes bijgekomen. Ga na dat je de oppervlakten van die figuren ook weer kunt schrijven als het verschil van twee ‘mooie’ breuken.
- **c.** En hoe zit dat in de vierde figuur?
- **d.** Verklaar nu:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots = \ln 2$$

- **e.** Ga met behulp van de GR na hoever de som van de eerste dertig termen van deze limiet verwijderd is.

Er is nog een andere manier om de sommen van een harmonische rij te schatten met behulp van een Riemannsom.

Daartoe bekijken we de oppervlakte onder de grafiek van $y = \frac{1}{x}$ op het interval $[1, n]$ en een Riemann-bovensom waarbij de rechthoekjes alle de breedte 1 hebben.
Op de volgende bladzijde zie je het geval $n = 10$ getekend.



44 Je kunt deze figuur onbeperkt naar rechts voortgezet denken.
In opgave **41** heb je gezien dat de som van de eerste 1024 termen in ligt tussen 6 en 8. De bovengrens 8 had iets scherper gekund: 1 + 10ln 2 = 7.93147...
Met de voortzetting van bovenstaand plaatje kun je snappen dat je voor de ondergrens ln(1025) = 6.93244... kunt nemen. Verklaar dit.

45 a. Toon aan:

$$\lim_{n \to \infty} \int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \infty$$

b. Opnieuw hebben we hiermee een bewijs voor het niet eindig zijn van de som van de harmonische rij. Verklaar dit.

Opmerking: bovenstaande bewering over de limiet van een integraal, wordt vaak beknopt zó geschreven:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \infty$$

de integraal in het linkerlid wordt wel een ‘oneigenlijke integraal’ genoemd.
Er bestaan ook integralen met bovengrens ∞, die een *eindige* uitkomst hebben.
Maak de volgende opgaven maar eens.

46 Bereken $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ ofwel $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \int_1^n \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Moraal: hoewel het gebied onder de grafiek van $y = \dfrac{1}{x^2}$ naar rechts onbegrensd is, heb je toch een eindige hoeveelheid verf nodig om dat gebied te kleuren.

47 a. Bereken $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$

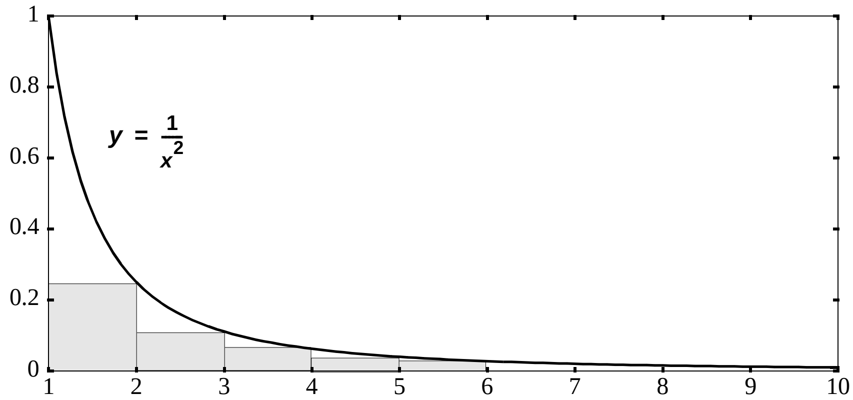
b. Bereken $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

Het eindig zijn van een integraal met bovengrens ∞, kan in verband worden gebracht met een sommeerbare rij.

Als voorbeeld nemen we de rij van de omgekeerde kwadraten:

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \frac{1}{36}, \ldots$$

De getallen van die rij (vanaf de tweede term) kun je terugvinden in de figuur:



48 a. Er geldt:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1 + \int_1^n \frac{1}{x^2}\,dx = 2 - \frac{1}{n}$$

Verklaar dit.

b. Je gelooft nu waarschijnlijk wel dat de rij van de omgekeerde kwadraten een limietsom heeft. Die limietsom is zeker niet groter dan 2. Waarom?

extra

49 De waarde van:

sum seq (1/A^2, A, 1, 99, 1)+ 1/100^2.

a. Doe dat. Wat is de uitkomst?

b. Laat zien dat deze eindige som (tot en met term 100) minder dan

$$\int_{100}^{\infty} \frac{dx}{x^2}$$

van de oneindige som verschilt en bepaal die integraal.

c. Al lijkt het er niets mee te maken te hebben: bereken ook $\frac{\pi^2}{6}$ op de GR.

Euler toonde in 1734 aan:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8} = \frac{\pi^8}{9450}.$$

Hij wist ook hoe deze rij voortgezet moest worden.
Tot op heden is nog niet iets dergelijks bekend over de oneindige sommen van de omgekeerden der derde, vijfde, zevende, enzovoort, machten.

Samenvatting

rij van sommen

Bij iedere rij $u_0, u_1, u_2, u_3, ...$ kun je de rij van (*partiële*) *sommen* maken.
Dat is de rij $s_0, s_1, s_2, s_3, ...$ waarvoor geldt:

$$s_0 = u_0$$
$$s_1 = u_0 + u_1$$
$$s_2 = u_0 + u_1 + u_2$$
$$s_3 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3$$
enz.

Kortom:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

limietsom

De rij $u_0, u_1, u_2, u_3, ...$ is *sommeerbaar* als de bijbehorende somrij een limiet (= S) heeft.
Dit getal S wordt dan de *limietsom* of kortweg de *som* van de rij genoemd.
Je kunt dan schrijven:

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + ... = S$$

of met het sigma-teken:

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = S$$

meetkundige rij

De rij $a, ar, ar^2, ar^3, ...$ is een meetkundige rij met beginterm a en reden r.
De sommeerbaarheid van een meetkundige rij hangt slechts af van de waarde van r.
Er geldt:

een meetkundige rij met reden r is sommeerbaar $-1 < r < 1$

De limietsom van een sommeerbare meetkundige rij wordt gegeven door de formule:

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r}$$

harmonische rij

De rij $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ...$ wordt de *harmonische rij* genoemd.

De harmonische rij is niet sommeerbaar.
De sommen $1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, ...$ worden onbeperkt groot, anders gezegd: ze gaan naar ∞.

Hoofdstuk 8

Rationaal en irrationaal

`t` = 1.

```
6180339887498948482045868343656381177203091798057628621354486227052604628189024
4970720720418939113748475408807538689175212663386222353693179318006076672635443
3389086595939582905638322661319928290267880675208766892501711696207032221043216
2695486262963136144381497587012203408058879544547492461856953648644492410443207
7134494704956584678850987433944221254487706647809158846074998871240076521705751
7978834166256249407589069704000281210427621771117778053153171410117046665991469
7987317613560067087480710131795236894275219484353056783002287856997829778347845
8782289110976250030269615617002504643382437764861028383126833037242926752631165
3392473167111211588186385133162038400522216579128667529465490681131715993432359
7349498509040947621322298101726107059611645629909816290555208524790352406020172
7997471753427775927786256194320827505131218156285512224809394712341451702237358
0577278616008688382952304592647878017889921990270776903895321968198615143780314
9974110692608867429622675756052317277752035361393621076738937645560606059216589
4667595519004005559089502295309423124823552122124154440064703405657347976639723
9494994658457887303962309037503399385621024236902513868041457799569812244574...
```

$$\frac{245}{137} = 1,$$

```
7883211678832116788321167883211678832116788321167883211678832116788321167883211
6788321167883211678832116788321167883211678832116788321167883211678832116788321
1678832116788321167883211678832116788321167883211678832116788321167883211678832
1167883211678832116788321167883211678832116788321167883211678832116788321167883
2116788321167883211678832116788321167883211678832116788321167883211678832116788
3211678832116788321167883211678832116788321167883211678832116788321167883211678
8321167883211678832116788321167883211678832116788321167883211678832116788321167
8832116788321167883211678832116788321167883211678832116788321167883211678832116
7883211678832116788321167883211678832116788321167883211678832116788321167883211
6788321167883211678832116788321167883211678832116788321167883211678832116788321
1678832116788321167883211678832116788321167883211678832116788321167883211678832
1167883211678832116788321167883211678832116788321167883211678832116788321167883
2116788321167883211678832116788321167883211678832116788321167883211678832116788
3211678832116788321167883211678832116788321167883211678832116788321167883211678
832116788321167883211678832116788321167883211678832116788321167883211678832116788321...
```

`p` = 3.

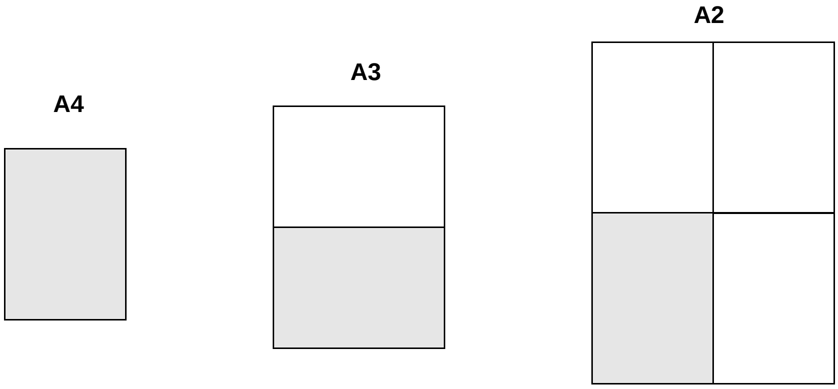
```
1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164062862089
9862803482534211706798214808651328230664709384460955058223172535940812848111745
0284102701938521105559644622948954930381964428810975665933446128475648233786783
1652712019091456485669234603486104543266482133936072602491412737245870066063155
8817488152092096282925409171536436789259036001133053054882046652138414695194151
1609433057270365759591953092186117381932611793105118548074462379962749567351885
7527248912279381830119491298336733624406566430860213949463952247371907021798609
4370277053921717629317675238467481846766940513200056812714526356082778577134275
7789609173637178721468440901224953430146549585371050792279689258923542019956112
1290219608640344181598136297747713099605187072113499999983729780499510597317328
1609631859502445945534690830264252230825334468503526193118817101000313783875288
6587533208381420617177669147303598253490428755468731159562863882353787593751957
7818577805321712268066130019278766111959092164201989380952572010654858632788659
3615338182796823030195203530185296899577362259941389124972177528347913151557485
7242454150695950829533116861727855889075098381754637464939319255060400927701...
```

Getallen die niet geheel zijn, worden vaak voorgesteld door decimale breuken. Rekenmachines breken af na een aantal decimalen, maar in werkelijkheid hebben verreweg de meeste getallen een oneindige voortlopende decimale voorstelling. Op de voorplaat bij dit hoofdstuk zie je een begin van drie zulke rijen van decimalen. Het zijn de voorstellingen van t (het gulden-snede getal), van een ‘gewone’ breuk (met als noemer 137) en van het getal p. Als je door je oogharen naar de cijferblokken kijkt, zie je iets opmerkelijks. Het middelste blok heeft een vast patroon: vanaf een zekere decimaal is de rij periodiek. Zo’n getal noemt men rationaal. De beide andere vertonen geen periodiek gedrag, en dat komt er ook nooit van, hoever je ook doorgaat in de decimale ontwikkeling! Van getallen die een niet-periodieke decimale ontwikkeling hebben, zal blijken dat ze *irrationaal* zijn. In de Oudheid is reeds het bestaan van irrationale getallen ontdekt en bewezen.

31: Een getal van formaat

A-formaten

De pagina's van dit boek zijn rechthoeken van het formaat A4.
Zo'n 'A-viertje' past precies vier keer in een krantenpagina (formaat A2).
Een soort interpolatie tussen A4 en A2 geeft het formaat A3 (het formaat van sommige streekbladen en van een één keer dubbelgevouwen krant).



Dat de rechthoeken A4 en A2 gelijkvormig zijn, spreekt vanzelf. Als je een A-viertje dubbelvouwt in de breedte krijg je een rechthoek van formaat A5 en die is natuurlijk gelijkvormig met A3. Als je een A5-vel dubbelvouwt in de breedte krijg je A6 (het standaardformaat van een ansichtkaart) en dat is weer gelijkvormig met A4 en A2.
Maar het bijzondere van de A-formaten zit 'm hierin dat ze *allemaal* gelijkvormig zijn, dus bijvoorbeeld ook A5 en A4. Je kunt de proef op de som nemen door het formaat A5 op het formaat A4 te leggen zodanig dat de diagonalen langs dezelfde rechte vallen.

1 **a.** Noem de breedte van een A4-vel b en de hoogte h.
Bewijs dat uit de gelijkvormigheid van A4 en A3 volgt: $h^2 = 2b^2$.
b. Meet de breedte en hoogte van een A4-vel in mm nauwkeurig en ga na of die getallen voldoen aan bovenstaande formule.
c. Twee uitgevouwen kranten (dubbele pagina's) maken samen één vierkante meter. Ga na of dit kan kloppen.

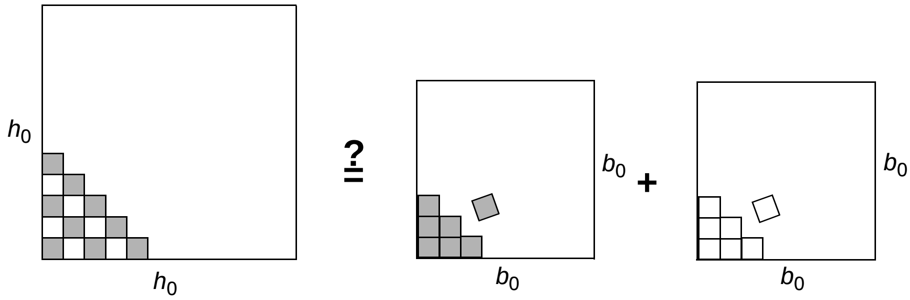
Als je de vorige opgave hebt gemaakt, dan zal je bij vraag **b** hebben geconstateerd dat het kwadraat van de hoogte een A4-vel niet *precies* gelijk is aan twee keer het kwadraat van de breedte. Dat zou natuurlijk kunnen komen door onnauwkeurig meten van jou of van de fabrikant van het papier. De 'officiële' afmetingen in mm van A4 zijn 210 en 297, maar zelfs deze getallen voldoen niet precies aan $h^2 = 2b^2$.
Misschien denk je dat bij meting in kleinere eenheden wel een precies resultaat zou kunnen worden gevonden.
Stel dat je een A4-vel nauwkeurig in micrometers zou kunnen meten; het resultaat zou dan zijn: $b = 210224$ en $h = 297302$.

2 Ook nu geldt niet precies: $h^2 = 2b^2$. Dat kun je al zien als je alleen naar het laatste cijfer van beide getallen kijkt. Verklaar dit.

De vraag is nu of er *gehele* waarden van h en b bestaan waarvoor $h^2 = 2b^2$ precies klopt. Daar gaan we in deze paragraaf dieper op in.

schaakbord halveren?

Je kunt de vraag onderaan de vorige bladzijde ook zo interpreteren: *bestaat er een (vierkant) schaakbordpatroon zodanig dat er met de helft van het aantal velden precies een vierkant kan worden gelegd?*



3 We zullen je maar uit de droom helpen: het antwoord op bovenstaande vraag is **nee**. Die ontdekking is al in de Oudheid door Griekse wiskundigen gedaan. In deze opgave ga je dat bewijzen. Het wordt een *bewijs uit het ongerijmde*, dat wil zeggen: als je er vanuit gaat dat het wel kan, bereik je een tegenspraak.
Veronderstel nu dat het wél kan en dat het aantal velden van het *kleinste* schaakbord waarbij de halvering lukt gelijk is aan $h_0 \cdot h_0$. Stel bovendien het aantal velden van het kleine bord $b_0 \cdot b_0$.

a. Het linker patroon moet natuurlijk uit een *even* aantal velden bestaan.
Hieruit volgt automatisch dat h_0 een even getal moet zijn. Verklaar dit.
(Tip: stel dat h_0 oneven is ...)

b. Als b_0 nu ook een even getal was, dan zouden h_0 en b_0 niet de *kleinste* natuurlijke getallen zijn waarvoor de halvering slaagt. Waarom?

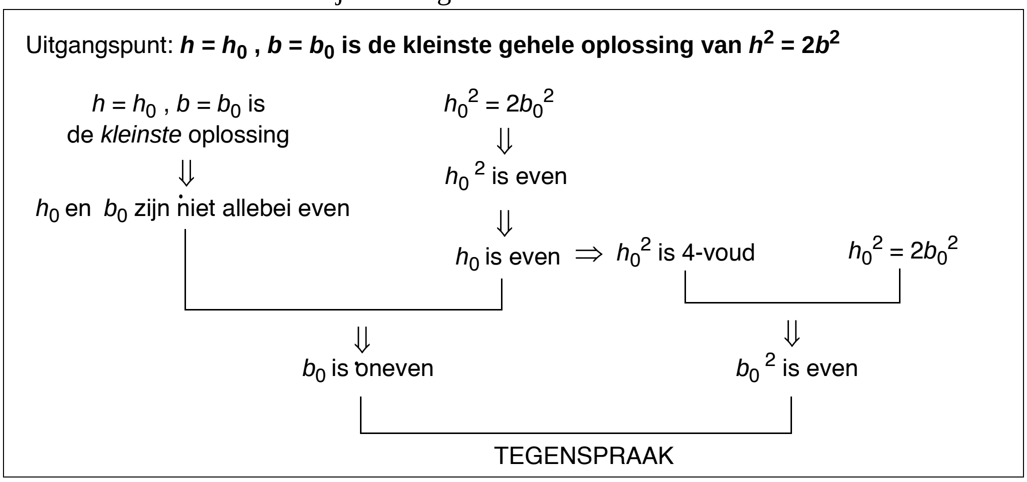
Je redeneert nu verder vanuit b_0 is *oneven*.

c. Uit h_0 is *even* en $h_0^2 = 2b_0^2$ volgt dat b_0^2 ook even moet zijn. Leg dit uit.

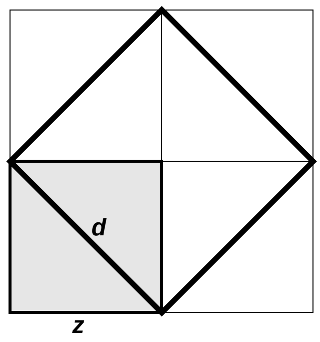
Maar als b_0^2 even is, dan kan b_0 niet oneven zijn (want het kwadraat van een oneven getal is oneven) en daarmee is een tegenspraak bereikt!

bewijs van Euclides

In opgave **3** is aangetoond dat het niet mogelijk is de velden van een schaakbord te verdelen over twee even grote vierkanten. Anders gezegd: er bestaan geen natuurlijke waarden van h en b, waarvoor $h^2 = 2b^2$ is vervuld. Dit bewijs uit het ongerijmde is afkomstig van Euclides. Hieronder zie je het nog eens in schematische vorm:



Het probleem van de halvering (of verdubbeling) van het vierkant is al heel oud. In een dialoog van Plato laat Socrates de slaaf Meno ontdekken dat je een vierkant in oppervlakte kunt verdubbelen door op de diagonaal een nieuw vierkant te maken.
Noemen we de zijde van het grijze vierkant z en die van het diagonaalvierkant d, dan geldt:



$$d^2 = 2z^2$$

Of, wat op hetzelfde neerkomt:

$$\frac{d}{z} = \sqrt{2}$$

Je hebt in het voorgaande gezien dat er geen gehele waarden voor d en z zijn die hieraan kunnen voldoen.
Anders gezegd:

Er bestaat geen breuk met gehele teller en noemer die exact gelijk is aan $\sqrt{2}$

Dat was voor de Grieken een wonderbaarlijke ontdekking.

(ir)rationaal

Zij verwoordden het een beetje anders: er bestaat geen lijnstukje (= eenheid van lengte), zodanig dat dit lijnstukje een geheel aantal keren op zowel z als d kan worden afgepast.

Daarom noemden zij de verhouding $\frac{d}{z}$ *onmeetbaar.*

Later hebben wiskundigen deze term vervangen door de term *irrationaal,* de ontkenning van *rationaal.*
De definitie van een rationaal getal is:

> ***Een rationaal getal is een getal dat kan worden voorgesteld door een breuk met gehele teller en noemer.***

Het getal $\sqrt{2}$ is gebleken niet rationaal te zijn, vandaar de aanduiding irrationaal.
Op wat een irrationaal getal dan wél is, komen we terug in de volgende paragraaf.
In ieder geval heb je nu gezien, dat wil je een lengte toekennen aan de diagonaal van een vierkant met zijde 1, dan moet die lengte een irrationaal getal zijn.

4 Het getal $\sqrt{2}$ kan wel dicht worden benaderd door rationale getallen.
De GR geeft als uitkomst 1.414213562. Dit getal is een rationale benadering (breuk met teller 1414213562 en noemer 1000000000)
Nauwkeurige meting van een A4-vel geeft de benadering: $\frac{297}{210}$ ofwel $\frac{99}{70}$
Ga na in hoeveel decimalen deze benadering overeenkomt met 1.414213562.

5 **a.** Stel je een schaakbordpatroon voor van 41 bij 41 velden. Het veld in de linkerbenedenhoek is zwart. Hoeveel zwarte en hoeveel witte velden heeft het schaakbord? Welke rationale benadering voor $\sqrt{2}$ kun je hieruit afleiden?
b. Dezelfde vraag voor een schaakbord van 99 bij 99 velden.

6 De breuk $\frac{99}{70}$ is een benadering voor $\sqrt{2}$ en geen slechte. Als je bijvoorbeeld teller en noemer 1 ophoogt (dus $\frac{100}{71}$) of met 1 verlaagt (dus $\frac{98}{69}$), krijg je benaderingen die aanmerkelijk minder goed zijn. Controleer dit.

algoritme voor $\sqrt{2}$

De Pythagoreeërs (volgelingen van Pythagoras) hadden een methode gevonden om met betrekkelijk kleine teller en noemer goede rationale benaderingen van $\sqrt{2}$ te vinden.
In plaats van teller en noemer spraken zij van *diagonaalgetal* en *zijdegetal*. Proklos schrijft hierover:

> *"De eenheid is als oorsprong van alle getallen, potentieel zowel zijde als diagonaal. Men neemt nu twee eenheden: een zijde- en een diagonaaleenheid, en vormt een nieuwe zijde door bij de zijde-eenheid de diagonaal-eenheid op te tellen. Net zo vormt men een nieuwe diagonaal door bij de diagonaal-eenheid tweemaal de zijde-eenheid op te tellen. Zo verkrijgt men het nieuwe zijde-getal gelijk aan 2 eenheden en het nieuwe diagonaal-getal van 3 eenheden. Nu is het kwadraat van 2 gelijk aan 4 en dat van 3 gelijk aan 9 en 9 is 1 meer dan 2 keer 4.*
> *Uit 2 en 3 maken we een nieuw zijde-getal en diagonaal-getal op dezelfde wijze en dat levert op 5 en 7. Maar het kwadraat van 5 is 25 en dat van 7 is 49 en 49 is 1 minder dan 2 keer 25. Etc."*

Proklos beschrijft hier misschien wel het oudste algoritme om $\sqrt{2}$ te benaderen.
Noemen we de zijde-getallen waar hij van spreekt nu z_0, z_1, z_2, ... en de diagonaal-getallen d_0, d_1, d_2, ..., dan kan dit algoritme zo worden genoteerd:

$$\begin{cases} z_{n+1} = z_n + d_n \\ d_{n+1} = 2z_n + d_n \end{cases}$$

voor $n = 0, 1, 2, ...$
Uitgaande van $z_0 = d_0 = 1$ komt er:

n	z_n	d_n	z_n^2	d_n^2	$d_n^2 - 2z_n^2$
0	**1**	**1**	**1**	**1**	**-1**
1	**2**	**3**	**4**	**9**	**1**
2	**5**	**7**	**25**	**49**	**-1**
3	**12**	**17**	**144**	**289**	**1**
4	**29**	**41**	**841**	**1681**	**-1**
5	**70**	**99**	**4900**	**9801**	**1**
6					
7					
8					

7 **a.** Vul de tabel verder in.
b. Welke is de beste benadering van $\sqrt{2}$ die je uit de tabel kunt afleiden?
c. In hoeveel decimalen komt die overeen met de GR-benadering van $\sqrt{2}$?

8 Dat het verschil tussen $2z_n^2$ en d_n^2 afwisselend 1 en −1 is, kun je constateren in de tabel, maar het is natuurlijk allerminst zeker dat dit blijft gelden voor $n = 9, 10, 11, ,,,$

a. Je kunt het voor $n = 9$ bewijzen, zonder eerst z_9 en d_9 daadwerkelijk uit te rekenen!

Ga met behulp van algebra na dat uit $d_9^2 - 2z_9^2 = (2z_8 + d_8)^2 - 2(z_8 + d_8)^2$

volgt: $d_9^2 - 2z_9^2 = -(d_8^2 - 2z_8^2) = 1$

b. De stap die in **a** is gemaakt, kun je in één keer algemeen maken:

$$d_{n+1}^2 - 2z_{n+1}^2 = (2z_n + d_n)^2 - (z_n + d_n)^2 = -(d_n^2 - 2z_n^2)$$

Toon dit aan.

stap voor stap

Volgens **8b** kun je ook de stap van $n = 9$ naar $n = 10$ maken, vanuit $n = 10$ naar $n = 11$, vanuit $n = 11$ naar $n = 12$, en zo verder, en zo voort.

$$d_8^2 - 2z_8^2 = -1$$

$$\boldsymbol{d_9^2 - 2z_9^2 = -(d_8^2 - 2z_8^2)}$$

$$d_9^2 - 2z_9^2 = 1$$

$$\boldsymbol{d_{10}^2 - 2z_{10}^2 = -(d_9^2 - 2z_9^2)}$$

$$d_{10}^2 - 2z_{10}^2 = -1$$

$$\boldsymbol{d_{11}^2 - 2z_{11}^2 = -(d_{10}^2 - 2z_{10}^2)}$$

$$d_{11}^2 - 2z_{11}^2 = -1$$

volledige inductie

Op deze wijze worden de natuurlijke getallen vanaf $n = 8$ doorlopen!
En zo is bewezen dat ook voor alle waarden van $n > 8$ geldt:

$$d_n^2 - 2z_n^2 = -1$$

Een dergelijk bewijs noemt men een ‘stapbewijs’ of meer officieel ‘een bewijs met *volledige inductie’*.

9 Bij het algoritme dat door Proklos wordt beschreven, gaat het om de berekening van de benaderingen $\frac{d_n}{z_n}$ van $\sqrt{2}$.

Kunnen we er zeker van zijn dat we op deze manier zo dicht bij $\sqrt{2}$ kunnen komen als we maar willen?

Met andere woorden, geldt: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{d_n}{z_n} = \sqrt{2}$?

Stel voor het gemak $q_n = \frac{d_n}{z_n}$

a. Bewijs uit de stapformules voor d en z dat: $q_n = \frac{2 + q_{n-1}}{1 + q_{n-1}}$ voor $n = 1, 2, 3, ...$

b. Maak een WEB-grafiek bij dit iteratie-proces (start met beginwaarde 1).

c. Omdat alleen het gebied $x > 0$ interessant is, kan de contractie-stelling worden toegepast. Het is dan duidelijk dat de rij $q_0, q_1, q_2, ...$ convergeert.

Toon aan dat geldt: $\lim\limits_{n \to \infty} q_n = \sqrt{2}$

Bovenstaande recurrente betrekking kun je ook anders schrijven:

$$q_n = \begin{cases} 1 & \text{als } n = 0 \\ 1 + \dfrac{1}{1 + q_{n-1}} & \text{als } n \geq 1 \end{cases}$$

10 Verifieer dat dit correct is.

Uitgaande van deze laatste formule, kunnen de termen van de q-rij zó worden genoteerd:

$$q_0 = 1$$

$$q_1 = 1 + \frac{1}{1 + q_0} = 1 + \frac{1}{1+1}$$

$$q_2 = 1 + \frac{1}{1 + q_1} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1+1}}$$

$$q_3 = 1 + \frac{1}{1 + q_2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1+1}}}$$

enz.

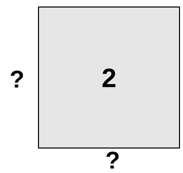
De samengestelde breuken zien er op het eerste gezicht een beetje ingewikkeld uit, maar bij nader inzien valt het wel mee. Als je het niet vertrouwt, moet je q_3 gewoon maar even terugrekenen.

Het is in elk geval niet moeilijk om in te zien hoe het verder gaat: er is een duidelijk regelmatig patroon. Omdat deze breuken $\sqrt{2}$ willekeurig dicht benaderen, schrijft men wel:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}}}}}$$

De stippeltjes betekenen dat het proces tot in het oneindige voortgezet moet worden gedacht. Een dergelijke schrijfwijze noemt men een *oneindige kettingbreuk.*
$\sqrt{2}$ kan dus niet als een gewone breuk worden geschreven, maar wel als oneindige kettingbreuk.

11 Aan het slot van deze paragraaf volgt hier nog een tweede algoritme om $\sqrt{2}$ te benaderen. Eigenlijk is dat veel eenvoudiger dan het vorige, dat toch eigenlijk uit de lucht kwam vallen.
Het idee is het volgende: er wordt gevraagd naar de zijde van het vierkant met oppervlakte 2.



Het is duidelijk dat het zijde-getal ltussen 1 en 2 ligt, want $1 \cdot 1 = 1$ en $2 \cdot 2 = 4$
Stap 1: probeer nu het gemiddelde van 1 en 2, dus $1\frac{1}{2}$.
Dit is de benadering b_1.
Deling van 2 door b_1 geeft $1\frac{1}{3}$ en daaruit blijkt dat $\sqrt{2}$ moet liggen tussen $1\frac{1}{3}$ en $1\frac{1}{2}$.

Stap 2: probeer nu het gemiddelde van $1\frac{1}{3}$ en $1\frac{1}{2}$., dat is $1\frac{5}{12}$.
Dit is de benadering b_2.
Deling van 2 door b_2 geeft $1\frac{7}{17}$ en daaruit blijkt dat $\sqrt{2}$ moet liggen tussen $1\frac{7}{17}$ en $1\frac{5}{12}$.
Stap 3: probeer nu het gemiddelde van $1\frac{7}{17}$ en $1\frac{5}{12}$. Enzovoort.

a. Bovenstaand benaderingsalgoritme kan worden beschreven met een (recurrente) formule, waarbij b_n wordt uitgedrukt in b_{n-1}.
Geef die formule.
b. Maak een WEB-grafiek op de GR.
c. In het x-interval [1 , 2] is aan de voorwaarde van de contractie-stelling voldaan. De rij b_0, b_1, b_2, ... met $b_0 = 1$ convergeert dus.
Toon aan dat de limiet gelijk is aan $\sqrt{2}$.
d. De GR geeft in de tabel decimale benaderingen voor de termen van de rij.
Met behulp van de ANS-toets en Frac (menu MATH) kun je de eerste drie benaderingen als gewone breuk krijgen. Het blijkt dan dat die benaderingen ook voorkomen in het algoritme dat Proklos beschrijft. Alleen met overslaan van (steeds meer) stappen en dat betekent dat dit laatste algoritme aanzienlijk sneller is.
Hoe zou je dat kunnen verklaren uit het gedrag van de beide iteratie-functies in de buurt van het dekpunt?

32: Repeterende en niet repeterende staarten

Als je $\sqrt{2}$ op de GR berekent, krijg je als *benaderend* resultaat 1.414213562.
Ook al zou je een supercomputer inzetten die je een miljoen decimalen achter de punt geeft, dan nog kan het antwoord niet exact zijn. Een eindige decimale breuk vertegenwoordigt immers altijd een *rationaal* getal. Het omgekeerde is echter niet waar. Lang niet ieder rationaal getal kan worden voorgesteld door een eindige decimale breuk.

12 a. Het meest eenvoudige voorbeeld is $\frac{1}{3}$. Hoe ziet de decimale voorstelling eruit? Bedenk nog een paar breuken met teller 1, waarvan de decimale schrijfwijze geen einde kent.
b. Wat voor bijzonder kenmerk hebben die decimale voorstellingen?

13 Een van de benaderingen van $\sqrt{2}$ die je in de vorige paragraaf bent tegengekomen, is het getal $\frac{99}{70}$. De GR laat van deze breuk de decimale voorstelling 1.414285714 zien. Als je aan meer decimalen wilt komen, dan kun je een trucje toepassen. Bijvoorbeeld vermenigvuldig de uitkomst met 1 000 000, waardoor er zeven cijfers voor de decimaalpunt komen. Trek dit (gehele) getal van zeven cijfers van de laatste uitkomst af en je ziet dat je vier nieuwe decimalen krijgt.
a. Controleer dat dit de benadering 1.4142857142857 oplevert.

repetitie van decimalen

Helaas kan dit spelletje niet worden voortgezet, althans niet op de TI 83. Als dit wel zo was, dan zou je kunnen constateren dat het cijferpatroon 142857 steeds terugkeert. We spreken dan van een *repeterende* (of periodieke) decimale breuk.
Dat er echt sprake is van periodiciteit kan eenvoudig worden aangetoond. De klassieke manier om bij een breuk de decimale voorstelling te vinden is 'staartdeling'.
Deel 70 op 99. Je vindt dan steeds een 'rest' „ 0.
In het delingsschema hiernaast zie je de resten 29, 10 en 30. Zodra je een rest vindt die je al eerder bent tegengekomen, begint de repetitie van decimalen.

```
70 / 99.00... \ 1.41...
     70
     ---
     290
     280
     ---
      100
       70
      ---
       30
```

b. Voer de staartdeling verder uit om te controleren dat het patroon 142857 inderdaad steeds terugkeert.

stelling

Het voorbeeld van $\frac{99}{70}$ staat als het ware model voor alle rationale getallen.
Er geldt namelijk de stelling:

> **Ieder rationaal getal kan worden voorgesteld door**
> **–óf een eindige decimale breuk**
> **–óf een repeterende oneindige decimale breuk**

14 In deze opgave kijken we naar de eindige decimale breuken.
Dat bijvoorbeeld $\frac{37}{125}$ voorgesteld kan worden door een eindige decimale breuk kun je inzien door de staartdeling uit te voeren of door te beseffen dat geldt:
$\frac{37}{125} = \frac{8\ \ 37}{8\ \ 125} = \frac{296}{1000}$ en dus: $\frac{37}{125} = 0{,}296$
a. Vind, zonder rekenmachine, de decimale voorstelling van $\frac{11}{16}$.
b. Laat $\frac{t}{n}$ een niet te vereenvoudigen breuk zijn (t, n geheel en positief). Deze breuk heeft een decimale voorstelling. Noem alle waarden van n tussen 1 en 100, waarvoor de decimale voorstelling *eindig* is.

15 Laat $\frac{t}{n}$ een rationaal getal zijn, met t en n als positieve gehele getallen dat *niet* met een eindige decimale breuk correspondeert.
Dat betekent dat je geen breuk kunt vinden van de vorm $\frac{s}{10^k}$ die gelijk is aan $\frac{t}{n}$,
of, en dat is hetzelfde: de staartdeling van n op t levert nooit de rest 0 op.
a. Hoe kun je op grond van de mogelijke *resten* die in de staart bij die deling ontstaan, beredeneren dat er vanaf een zekere rest herhaling optreedt?

Je kunt je nu afvragen of ook het omgekeerde van de stelling geldt.
Iedere *eindige* decimale breuk stelt een rationaal getal voor, allicht.
Maar hoe zit het met een willekeurige repeterende oneindige decimale breuk?

16 Neem als voorbeeld 3.25147147147147... (dus met periode 3).
Je kunt van deze breuk het niet periodieke deel afsplitsen:

$$3{,}2514717\ldots = 3{,}25 + 0{,}01 \cdot 0{,}14714717\ldots$$

a. De ‘zuiver periodieke’ vorm 0.147147147... is op haar beurt gelijk aan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{147}{1000^k}$$

Welke ‘gewone’ breuk is gelijk aan deze som?
b. Schrijf nu (na wat rekenwerk) 3.25147147147147... als gewone breuk.
c. Leg uit waarom iedere decimale voorstelling met een zuiver periodieke staart te vervangen is door een breuk met gehele teller en noemer.

17 Vind de gewone breuk bij de oneindige decimale breuken (denk de begonnen herhaling voortgezet):

a. 1.666666666666...
b. 5.090909090909...
c. 9.135135135135...
d. −0.010101010101...
e. 1.5042424242424...
f. 1999.9999999999...

Onderdeel **f** was misschien verrassend: als het repeterende stuk uit louter negens bestaat, correspondeert de decimale breuk met een *geheel* getal. Hetzelfde geldt overigens voor een repeterend stuk met louter nullen.
Zo geldt bijvoorbeeld: 13.0000000... = 13 = 12.9999999...
Bedenk bij de laatste voorstelling dat het om *oneindig* veel negens gaat!

Zo hebben we nu:

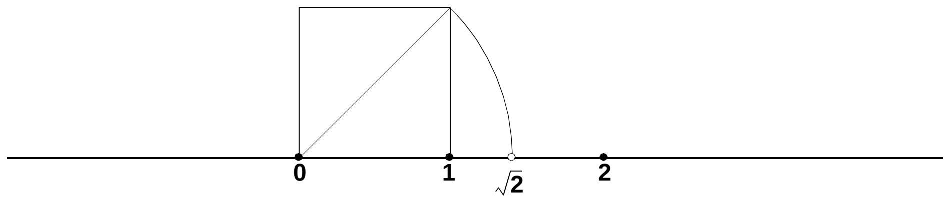
Iedere repeterende oneindige decimale breuk stelt een rationaal getal voor

Men kan ook *niet-repeterende* oneindige decimale breuken verzinnen.
Een voorbeeld is 0.1228881122288881112222888888....
Denk je dit patroon voortgezet: steeds langere rijtjes van 1-en, 2-en en 8-en. Er is wel regelmaat, maar het patroon is niet periodiek! Bij deze decimale vorm hoort geen rationaal getal, want als dat wél zo was, zou er vanaf een zekere decimaal periodiciteit zijn!

de reële getallenlijn

Je kunt je natuurlijk afvragen of iedere oneindige niet-repeterende decimale breuk wel een getal voorstelt. Dat hangt af van wat onder een getal wordt verstaan. Als uitgangspunt kiezen we de *getallenlijn.* De punten van de getallenlijn corresponderen met zogenaamde *reëele* getallen. De vraag is nu of je bij iedere niet-repeterende oneindige decimale breuk een punt op de getallenlijn kunt vinden.

Voordat we die vraag beantwoorden, gaan we eerst terug naar het niet-rationale getal $\sqrt{2}$. De decimale voorstelling daarvan (die begint met 1.41421356...) is zeker niet periodiek. $\sqrt{2}$ is immers niet rationaal!
Dat $\sqrt{2}$ met een punt van de getallenlijn correspondeert, is buiten kijf: als de diagonaal van een vierkant met zijde 1 vanuit 0 op het positieve stuk van de getallenlijn wordt afgepast, krijg je het punt $\sqrt{2}$:



$\sqrt{2}$ = 1.4142135... betekent zoveel als:

1 £ $\sqrt{2}$ £ 2

1.4 £ $\sqrt{2}$ £ 1.5

1.41 £ $\sqrt{2}$ £ 1.42

1.414 £ $\sqrt{2}$ £ 1.415

1.4142 £ $\sqrt{2}$ £ 1.4143

1.41421 £ $\sqrt{2}$ £ 1.41422

1.414213 £ $\sqrt{2}$ £ 1.414214

1.4142135 £ $\sqrt{2}$ £ 1.4142136

enz.

Het komt erop neer dat iedere decimaal een interval aangeeft waar $\sqrt{2}$ binnen zit.
De *lengten* van die intervallen uit deze oneindige serie, vormen een meetkundige rij:
1 , 0.1 , 0.01, 0.001, ...
Deze lengten convergeren naar 0 en dat betekent dat er buiten $\sqrt{2}$ niet nog een getal (punt) kan zijn dat binnen *alle* intervallen van de serie ligt.

nest van intervallen

Bij iedere oneindige decimale breuk kan zo'n *nest* van intervallen worden gemaakt.
Daarbij geldt dan dat:
– ieder interval een deel is van het vorige interval;
– de lengten van de intervallen naar 0 convergeren.

Bij de decimale breuk 0.122888112228888111222288888....vind je zo de intervallen

[0 , 1]
[0.1 , 0.2]
[0.12 , 0.13]
[0.122 , 0.123]
[0.1228 , 0.1229]
[0.12288 , 0.12289]
[0.122888 , 0.122889]
{0.1228881 , 0.1228882]
enz.

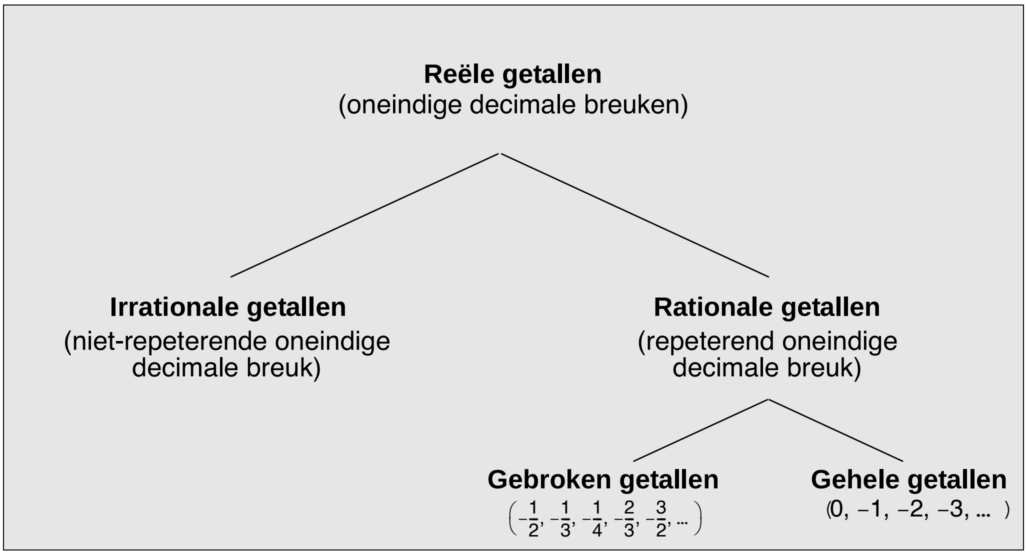
18 Je kunt er zeker van zijn dat er *hoogstens* één punt op de getallenlijn is dat in al deze intervallen ligt. Verklaar dit. (Tip: stel dat er twee verschillende punten waren ...).

Er blijven nu twee mogelijkheden over:
óf er is geen enkel punt van de getallenlijn dat binnen al deze intervallen ligt;
óf er is precies één punt op de getallenlijn dat binnen al deze intervallen ligt.
Het eerste zou betekenen dat de getallenlijn ‘minuscule gaatjes’ zou bevatten.
Liever vatten we de getallenlijn op als ‘waterdicht’ en dat houdt in dat er één punt moet zijn binnen het complete nest van intervallen.
Dat punt is de plaats van het *reële getal* 0.1228881122288888111222288888....

axioma voor reële getallen

Bovenstaande aanname kun je beschouwen als het ‘axioma van de reële getallenlijn’*:
het nest van intervallen dat correspondeert met een oneindige decimale breuk bepaalt precies één punt van de getallenlijn.

De twee soorten oneindige decimale breuken, *repeterende* en *niet-repeterende,* stellen respectievelijk *rationale* en *irrationale* getallen voor.
Tezamen vormen zij de *reële* getallen.
In overzicht:



Het klinkt misschien gek, maar er zijn ontzettend veel meer irrationale getallen dan rationale getallen. Als je aan de decimale voorstelling denkt, is het ook weer niet zo gek: periodiciteit in een oneindige decimale breuk is echt iets heel bijzonders.

Bekende voorbeelden van irrationale getallen zijn:

$$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt[3]{2},\ \log 2,\ \ln 2,\ e,\ p,\ \sin\tfrac{1}{9}p$$

Van sommige van die getallen is de irrationaliteit vrij eenvoudig te bewijzen, van andere is dat buitengewoon lastig. Een voor de hand liggende start van een onderzoek naar het al of niet rationaal zijn van een getal (zeg *x*), begint met:

stel $x = \frac{t}{n}$ *waarbij t en n gehele getallen zijn*;

bovendien kun je dan aannemen dat de breuk niet verder vereenvoudigd kan worden (dus de breuk is met kleinste teller en noemer, die gelijk is aan *x*).

bewijs uit het ongerijmde

Als deze veronderstelling dan tot tegenspraak leidt, is de irrationaliteit bewezen.
Succes van deze aanpak is echter absoluut niet zeker!

* Dit axioma noemt men wel het *continuïteitsaxioma*.

19 De hier geschetste aanpak werkt bijvoorbeeld wél bij $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$, log 2.

Gelijkstellen aan $\frac{t}{n}$ leidt voor die getallen achtereenvolgens tot:

$$t^2 = 2n^2,\; t^2 = 3n^2,\; t^3 = 2n^3,\; 10^n = 2^t.$$

a. Verifieer deze betrekkingen.

Van de eerste betrekking is al aangetoond dat zij tot tegenspraak leidt. Nu de tweede.

b. Bewijs eerst dat uit $t^2 = 3n^2$ volgt dat t een 3-voud moet zijn (dat gaat het gemakkelijkst uit het ongerijmde: als $t = 3k + 1$ of $t = 3k + 2$, dan kan $t^2 = 3n^2$ niet waar zijn!) Je kunt dus stellen $t = 3k$ en dat leidt tot n is 3-voud. Enzovoort.
Voer dit bewijs uit en schrijf het op in een overzichtelijk schema (zie pagina 106)

c. Het bewijs van de irrationaliteit van $\sqrt[3]{2}$ verloopt analoog aan het bewijs van de irrationaliteit van $\sqrt{2}$. Ga maar na.

d. Het bewijs van de irrationaliteit van log 2 is een stuk eenvoudiger, dat moet je geheel op eigen kracht kunnen geven!

20 In de vorige paragraaf heb je een snel algoritme voor de benadering van $\sqrt{2}$ leren kennen. Dit kan gemakkelijk worden aangepast tot een algoritme voor $\sqrt{3}$.

a. Ga na dat de recurrente betrekking

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{als } n = 0 \\ \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{3}{a_n}\right) & \text{als } n \ddagger 1 \end{cases}$$

een rij oplevert die convergeert naar $\sqrt{3}$.

b. Na hoeveel stappen geeft dit algoritme een benadering in negen decimalen nauwkeurig?

meer over getallen

Het overzicht op bladzijde 115 kan verder worden verfijnd. Bij gehele getallen kan onderscheid worden gemaakt tussen natuurlijke getallen 0, 1, 2, 3,... en de negatieve getallen -1, -2, -3, ...

Ook de irrationale getallen kunnen verder worden onderverdeeld.

Zo onderscheidt men *algebraïsche* getallen (het bekendste voorbeeld is $\sqrt{2}$) en *transcendente* getallen (bijvoorbeeld e en p).
Een algebraïsch getal is een getal dat een nulpunt is van een veeltermfunctie met gehele coëfficienten, dat wil zeggen van een functie van het type:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \quad ,$$

met gehele a_i.
$\sqrt{2}$ is dus algebraïsch, want dit getal een nulpunt is van $f(x) = x^2 - 2$.

Transcendent betekent nu: *niet*-algebraïsch.

Algebraïsche getallen kunnen weer worden onderverdeeld in *construeerbare* en *niet-construeerbare* getallen. Met construeerbaar wordt dan bedoeld dat het mogelijk is om met behulp van passer en liniaal de plaats op de getallenlijn te bepalen. Je weet dat $\sqrt{2}$ construeerbaar is: het is immers de diagonaal van een vierkant met zijde 1. Van daaruit is ook gemakkelijk de construeerbaarheid van een getal als $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ aan te tonen. Het optellen van de 1 is geen probleem en het construeren van de wortel uit een getal is aan bod geweest: zie *Denken in Cirkels en Ljnen*, deel I, bladzijde 55. In feite is een getal construeerbaar als het je het uit natuurlijke getallen kunt opbouwen via een eindige combinatie van de bewerkingen +, -, ·, : en $\sqrt{\ }$.
Een klassiek voorbeeld van een niet-construeerbaar algebraïsch getal is $\sqrt[3]{2}$. Dit getal geeft de verhouding aan tussen de ribben van twee kubussen, waarvan de ene de dubbele inhoud van de andere heeft.

Van de befaamde getallen e en p is de irrationaliteit in 1761 door Lambert bewezen. De transcendentie van e is in 1873 door Hermite bewezen en die van p in 1882 door Lindemann. Omdat p niet algebraïsch is, is p zeker niet construeerbaar. Daaruit volgt dat het niet mogelijk is bij een gegeven cirkel met passer en liniaal een vierkant te construeren dat gelijke oppervlakte als de cirkel heeft, want dat vierkant zou een zijde moeten hebben die $\sqrt{p}$ keer de straal van de cirkel is.. Er zijn nog steeds mensen die het toch proberen en alle Mathematische Instituten van de wereld krijgen regelmatig ‘oplossingen’ toegestuurd van dit klassieke probleem van de kwadratuur van de cirkel.
In 1929 bewees Gelfond dat e^p transcendent is. Van het getal p^e vermoedt men dat het irrationaal is, maar bewezen is het niet.

De geniale Indische ‘getalspecialist’ Ramanujan (1888 - 1920) ontdekte dat het getal

$$e^{p\sqrt{163}}$$

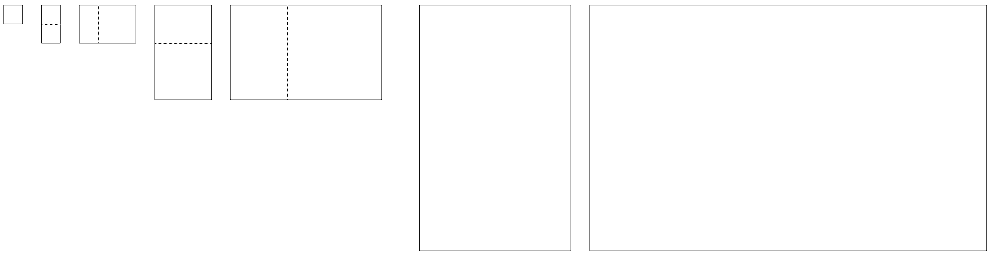
samengesteld uit de drie irrationale getallen e, p en $\sqrt{163}$, wel heel dicht bij een geheel getal zit. Hij vond als waarde: 262 537 412 640 768 743. 999999....
Als je met de GR van dit getal van Ramanujan het fPart uitrekent - dat is wat je overhoudt als je het gehele deel van het getal aftrekt, bijvoorbeeld fPart(p) = p - 3 = 0.14159... - dan geeft het apparaat het antwoord 0. Probeer maar.
In 1975 publiceerde het blad Scientific American bij wijze van Aprilgrap het bericht dat een Amerikaans wiskundige bewezen zou hebben dat .

$$e^{p\sqrt{163}} = 262537412640768744$$

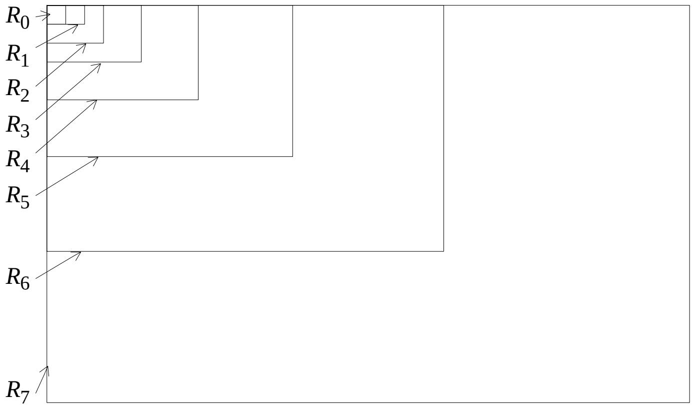
Helaas, dit wonder is niet waar, het ‘is-gelijk-teken’ moet worden vervangen door het ‘is-bijna-gelijk-teken’; ook deze macht van e is irrationaal.
Overigens is het niet zo moeilijk om een macht van e met irrationale exponent te bedenken die wél gelijk is aan een geheel getal. Wat denk je?

33: Het gulden-snede getal

De hieronder afgebeelde rij rechthoeken ontstond volgens de volgende regels:
– begin met een vierkant van 1 bij 1, (dat is óók een rechthoek)
– plak een vierkant aan de langste zijde om de volgende rechthoek te krijgen.



Vooral als je de rechthoeken nog even in dezelfde stand brengt en op elkaar legt, valt op: de rechthoeken krijgen steeds meer dezelfde vorm. Anders gezegd: het quotiënt van lengte en breedte lijkt een limiet te hebben. Zie de figuur hiernaast, waar het erop lijkt dat de diagonalen van de rechthoeken steeds meer dezelfde richting krijgen.



21 In de figuur zijn de rechthoeken genummerd. Het startvierkant is R_0.

a. Bereken achtereenvolgens de lengten en breedtes. Vul de tabel in

rechthoek	breedte	lengte
R_0		
R_1		
R_2		
R_3		
R_4		

b. Ga na dat geldt:

breedte van $R_n = f_n$ en *lengte van* $R_n = f_{n+1}$

waarbij de getallen f_n de rij van Fibonacci vormen; die was gedefinieerd door:

$$f_n = \begin{cases} 1 & \text{als } n = 0,1 \\ f_{n-1} + f_{n-2} & \text{als } n \geq 2 \end{cases}$$

22 Om te *bewijzen* dat de rechthoeken tot een vaste vorm naderen, onderzoeken we de rij $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots$ met algemene term $u_n = \dfrac{f_{n+1}}{f_n}$. Dat is immers de rij van de vormverhoudingen.

a. Bereken de eerste vier termen – als gewone breuk, niet als tiendelige breuk – en constateer dat voor de eerste vier termen geldt: $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$.

b. Toon aan, door gebruik te maken van de stapformule voor f_n, dat de gehele rij u_n aan de stapformule $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$ voldoet.

Tip: druk f_{n+2} in voorgaande termen uit; hoe kun je nu in een keer het verband zo omwerken dat u_{n+1} links verschijnt en in het rechterlid de ‘1’?

c. Toon aan dat de rij $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots$ inderdaad convergeert.

d. Bepaal het dekpunt van de iteratiefunctie (dat is tevens de limiet) nauwkeurig. Doe dat op twee manieren:
– door oplossen van een vergelijking,
– door gebruik van de GR, met CALC-INTERSECT.

e. Liggen de termen u_{18} en u_{19} in de buurt van de limiet? Welke is van die twee is groter dan de limiet, welke kleiner? Voorspel of u_{231} groter of kleiner dan de limiet is. Welke redenering ligt aan je voorspelling ten grondslag?

De limiet van de quotiënten van opvolgende Fibonacci-getallen is juist het getal τ (Griekse letter, spreek uit: tau) dat als eerste op de voorpagina van deze paragraaf is afgedrukt. Er is in de afgedrukte decimale ontwikkeling geen periodiciteit te ontdekken, maar dat zegt natuurlijk nog niets. Toch kun je aantonen dat τ een irrationaal getal moet zijn. Maak de volgende opgave.

23 Uit opgave **22** volgt dat $\tau = 1 + \dfrac{1}{\tau}$. Stel nu $\tau = \dfrac{m}{n}$, waarbij m en n positieve gehele getallen zijn. Neem bovendien aan dat m en n de kleinst mogelijke teller en noemer zijn van de breuk die gelijk is aan τ.

a. Flauw, maar waar: $m > n$. Waarom?

b. Uit de beide bovenstaande gelijkheden volgt: $\dfrac{m}{n} = \dfrac{n}{m-n}$. Bewijs dit.

Nu hebben we een breuk met kleinere teller en noemer gevonden, die gelijk is aan τ. En dat is strijdig met de veronderstelling dat $\dfrac{m}{n}$ de meest eenvoudige breuk zou zijn, waardoor je τ kunt voorstellen! Kortom: zo’n voorstelling door een ‘gewone’ breuk is onmogelijk en τ is irrationaal.

gulden snede

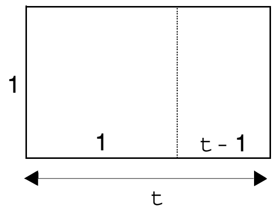
Het getal τ wordt wel het gulden-snede getal genoemd.
De rechthoek waarvan hoogte en breedte zich verhouden als $1 : \tau$, staat bekend als *gulden rechthoek*; sommige bevlogen auteurs zoals Fra Luca Paciola, tijdgenoot en vriend van Leonardo da Vinci, spreken van *goddelijke rechthoek.* Deze rechthoek lijkt overal op te duiken in de beeldende kunst en de architectuur (een beroemd voorbeeld is het Parthenon) en sommige experts spreken van een esthetische wet.

Op de voorgevel van de Santa Maria Novella in Florence zijn verschillende gulden verhoudingen te ontdekken, althans het heeft er de schijn van.
De letter F is hier gebruikt in plaats van de letter t.

24 Als een vierkant wordt afgesplitst van de gulden rechthoek, hou je een kleinere gulden rechthoek over.
Er geldt namelijk: $(t - 1) : 1 = 1 : t$
Deze evenredigheid is gelijkwaardig met de betrekking:

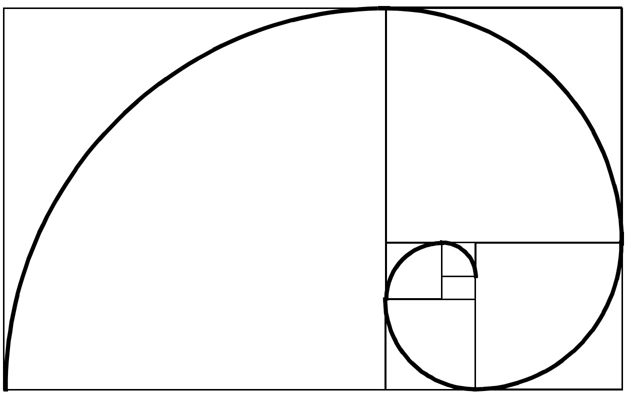
$$t = 1 + \frac{1}{t}$$

Toon dit aan.



gulden spiraal

25 Als je van de kleine overgebleven gulden rechthoek ook weer een vierkant afsplitst, krijg je weer een gulden rechthoek. Dit proces kan tot in het oneindige worden voortgezet. Door steeds in het afgesplitste vierkant een kwart-cirkelboog te tekenen, ontstaat nu een spiraal, die wel de *gulden spiraal* wordt genoemd.

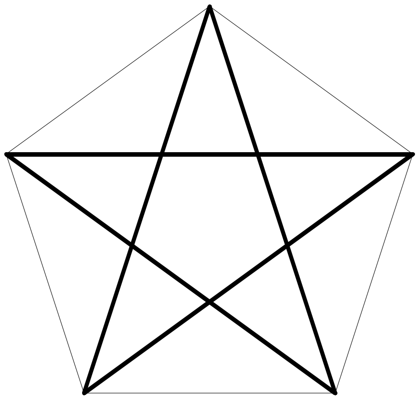


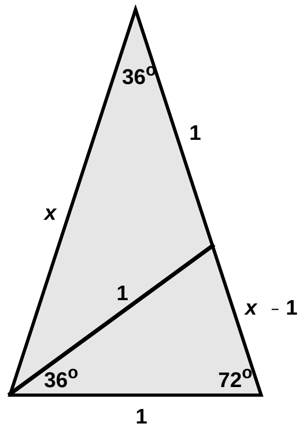
Bewijs dat de totale lengte van de (oneindig voortgezette) spiraal, gelijk is aan:

$$\tfrac{1}{2}pt^2$$

vijfpuntster

26 De gulden snede is ook terug te vinden in de vijf-puntige ster.





De zijden van de ster zijn de *diagonalen* van een regelmatige vijfhoek. Van die vijfhoek zijn de hoeken elk 108^o.

a. Toon aan dat twee diagonalen uit één hoekpunt, de hoek van de vijfhoek in drie gelijke delen verdelen.

b. In de figuur rechts zie je een gelijkbenige driehoek, gevormd door twee zijden van de ster en één zijde van de vijfhoek. Stel: lengte basis = 1 en lengte opstaande zijde = x. Bewijs: lengte van de binnendeellijn van een basishoek = 1.

c. Gebruik gelijkvormigheid van driehoeken en bewijs dat geldt: $x = \tau$.

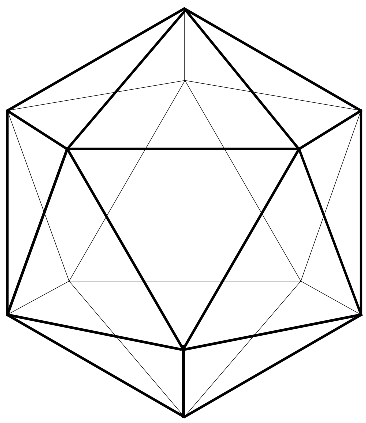
d. De punten van de ster zijn gelijkbenige driehoeken waarvan basis en opstaande zijde de ‘gulden verhouding’ hebben. Bewijs dit.

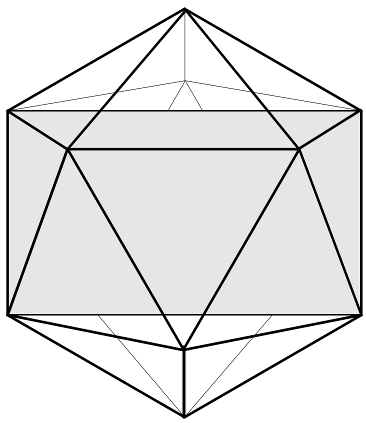
e. Toon aan dat geldt:

$$\tau = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5} = 2\cos\left(\tfrac{1}{5}\pi\right)$$

icosaëder

27 Het regelmatig twintigvlak (of *icosaëder)* wordt begrensd door 20 gelijkzijdige driehoeken. De icosaëder heeft 12 hoekpunten. Elk hoekpunt is de top van een regelmatige vijf-zijdige piramide (‘kapje’) waarvan het grondvlak een regelmatige vijfhoek is. Er zijn dus 12 van die regelmatige vijfhoeken in de figuur te vinden.





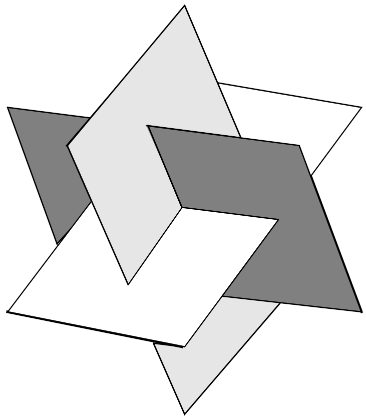
De 12 regelmatige vijfhoeken kunnen worden verdeeld in paren van vijfhoeken die in evenwijdige vlakken liggen. In de rechterfiguur is één zo’n paar uitgekozen.
Er zijn nu twee ribben die loodrecht op die twee evenwijdige vlakken staan. Die ribben vormen samen met twee diagonalen van de beide vijfhoeken een rechthoek, en je raadt het al, een gulden rechthoek.

a. Waarom is de getekende rechthoek een gulden rechthoek?

b. Er zijn 15 van zulke gulden rechthoeken te vinden in het regelmatige twintigvlak. Verklaar dit.

extra

28 Hiernaast zie je drie even grote gulden rechthoeken die twee aan twee loodrecht op elkaar staan.



a. Maak drie van zulke rechthoeken uit stevig karton en maak daarin passende insnijdingen. Je kunt ze nu in elkaar schuiven zó, dat je deze figuur krijgt. De twaalf hoekpunten zijn juist de hoekpunten van een regelmatig twintigvlak!

b. Laat de gekozen drie vlakken nu het *Oxy*-, *Oyz* en *Oxz*-vlak van een 3-dimensionaal assenstelsel zijn.
De eenheden langs de assen kun je zo kiezen dat de twaalf hoekpunten de coördinaten $(\pm t, \pm 1, 0)$, $(0, \pm t, \pm 1)$ en $(\pm 1, 0, \pm t)$ hebben.
Ga dit na.
Met een computerprogramma, waarmee je ruimtefiguren kunt maken door coördinaten op te geven, kun je nu eenvoudig een regelmatig twintigvlak maken!

34: Extra: kettingbreuken op de GR

De decimale ontwikkeling van $\sqrt{2}$ mag dan onvoorspelbaar zijn (zonder doorrekenen kun je bijvoorbeeld niet zeggen wat de miljoenste decimaal zal zijn), de oneindige kettingbreuk die je in de vorige paragraaf bent tegengekomen, vertoont een treffende regelmaat.

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}}}}}$$

Veel gebruikte notaties zijn:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\dots$$

en

$$\sqrt{2} = [1;\ 2, 2, 2, 2, 2, \dots\ ]$$

De decimale voorstelling van $\sqrt{2}$ repeteert niet, maar de kettingbreuk wel!

29 Je kunt de termen van een beginstuk van de kettingbreuk ook op je GR vinden.

a. Toets in $\sqrt{2}$ ENTER. Je ziet 1 voor de decimaalpunt staan, dat is de eerste term van de kettingbreuk.
Ga nu in het menu MATH naar NUM 4 (= fPart).
Als je fPart(Ans) berekent, krijg je de decimalen achter de decimaalpunt.
Met Ans ^ -1 bereken je het omgekeerde hiervan en voor de decimaalpunt vind je nu de tweede term van de kettingbreuk.

b. Dit kun je herhalen en dat gaat het handigst via fPart(Ans)^-1 ENTER.
Ga na dat je op het scherm steeds dezelfde vorm krijgt. Dat betekent dat de kettingbreuk repeteert.

c. Doe dit nu voor $\sqrt{3}$. Het resultaat doet vermoeden dat:

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}}}}}$$

ofwel:

$$\sqrt{3} = [1;\ 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots\ ]$$

30 De periodiciteit van de kettingbreuk van $\sqrt{3}$ kan worden afgeleid uit de betrekking:

$$(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1) = 2$$

a. Ga na dat:

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{2}{1+\sqrt{3}}$$

b. Ga ook na dat uit **a** volgt:

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{2}{1+\sqrt{3}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+\sqrt{3}}}$$

c. Nog een verdieping verder, geeft:

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{1+\sqrt{3}}}}$$

Ga ook dit na en bereken zelf nog twee stappen verder. Als je het goed hebt gedaan, begrijp je nu waarom de kettingbreuk repeteert.

Het verschil tussen rationaal en irrationaal zit hem bij de kettingbreukvoorstelling niet in het al of niet periodiek zijn, maar in het al of niet eindig zijn.
Bijvoorbeeld:

$$\frac{17}{12} = 1 + \frac{5}{12} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{5}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}$$

ofwel:

$$\frac{17}{12} = [1;\ 2,2,2]$$

Als je de procedure met de GR volgt, stop je op het moment dat er voor het eerst een geheel getal op het scherm verschijnt.

31 Kies zelf een paar rationale getallen en maak de bijbehorende kettingbreuken.

32 Het begin van de kettingbreuk van p ziet er zo uit:

$$p = [3;\ 7,15,1,292,1,1,\dots]$$

a. Controleer dit met de GR

b. Welke rationale benadering van p krijg je als je de kettingbreuk afbreekt bij de tweede term (= 7)?

c. Afbreken bij de derde term geeft: p » $3\frac{15}{106}$. Controleer dit. Ga ook na in hoeveel decimalen deze benadering correct is.

d. Als je afbreekt bij de vierde term krijg je een veel betere benadering van p, namelijk p » $3\frac{16}{113}$. Deze benadering werd ca. 500 na Chr. gebruikt door Chinese wiskundigen. Controleer deze benadering.

33 Het getal e heeft weliswaar geen periodieke, maar wel een mooie regelmatige kettingbreuk:

$$e = [2;\ 1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,\ldots\ ]$$

Controleer de hier afgedrukte termen met de GR.
Opmerking: als je verder gaat op de GR wordt het patroon gauw verbroken. Dat ligt niet aan e, maar aan de capaciteit van de GR. Na zo’n 15 stappen speelt de onnauwkeurigheid van het rekenmachientje ons parten.

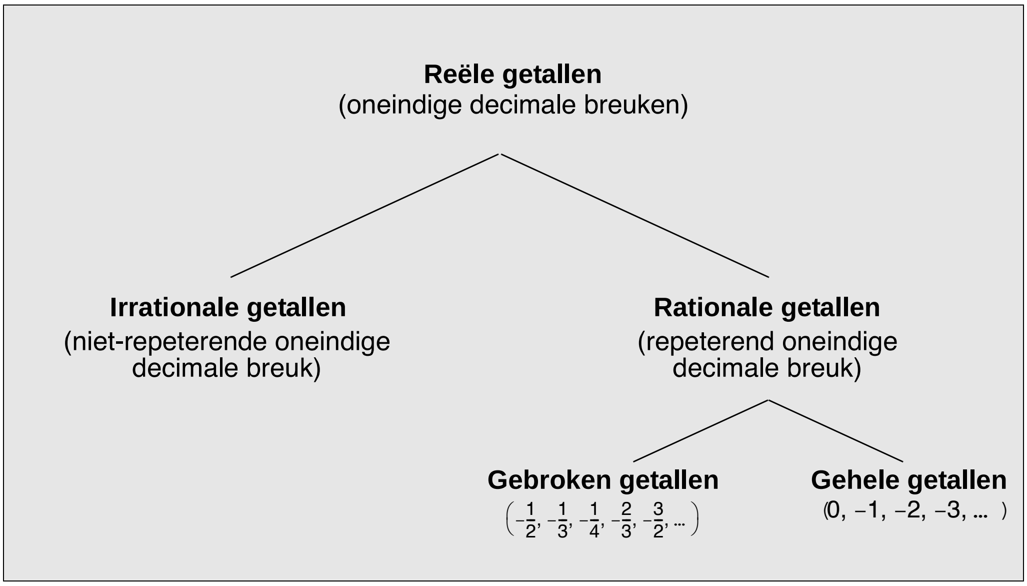
34 Het getal t kan ook worden voorgesteld door een oneindige kettingbreuk. En wel de aller- allereenvoudigste die je maar kunt bedenken. Er geldt namelijk:

$$t = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}}}$$

Dit volgt uit een recurrente betrekking van de vorige paragraaf. Zoek die op en verklaar daarmee de kettingbreuk.

Samenvatting

overzicht getalsoorten



nesten van intervallen

De reële getallen corresponderen met de punten van een getallenlijn.
Een reëel getal kan worden voorgesteld door een oneindige decimale breuk, of door een nest van intervallen waarvan de lengten gelijk zijn aan 1, 0.1, 0.01, ...
Bijvoorbeeld met $e = 2{,}7182818\ldots$ correspondeert het nest van intervallen:

$$[2\ ,3]$$
$$[2{,}1\ ,2{,}2]$$
$$[2{,}18\ ,2{,}19]$$
$$[2{,}182\ ,2{,}183]$$
$$[2{,}1828\ ,2{,}1829]$$

enz.

axioma

het nest van intervallen dat correspondeert met een oneindige decimale breuk bepaalt precies één punt van de getallenlijn.

bewijs uit het ongerijmde

De meest voor de hand liggende aanpak om de irrationaliteit van een getal x te bewijzen, is: *stel* $x = \frac{t}{n}$ *, waarbij t en n de kleinst mogelijke gehele getallen zijn, waarvoor die breukvoorstelling geldt.* Als dit tot een tegenspraak leidt, is het bewijs van de irrationaliteit geleverd.
Deze opzet van een bewijs is bijvoorbeeld toepasbaar voor:

– getallen van het type $\sqrt{a}$, waarbij a positief geheel, maar geen kwadraat is
– getallen van het type log a, waarbij a positief geheel, maar geen macht van 10 is.

Voorbeelduitwerkingen

Hoofdstuk 1: Passers op herhaling

1: Inleidend voorbeeld, voorkennis

1 **a.** $-MAB = (180\ \ -43\ \ ) / 2 = 68.5$.

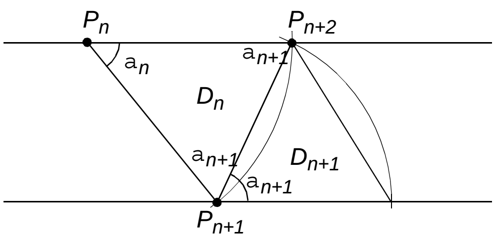
b. $g = \frac{180 - b}{2} = 90 - \frac{b}{2}$.

2 **b.** Het wordt allemaal regelmatig. Ook al begin je anders, de driehoekjes worden toch even groot.
c. Eigenlijk nog wel, maar je zou het verschil niet meer kunnen zien.
d. De driehoeken worden vrijwel gelijkzijdig.

3 **a.** Ze gaan allebei steeds op en neer, maar tegen elkaar in.
b. Waarschijnlijk zijn ze dat niet, maar doordat ze erg op elkaar lijken kun je het verschil niet meten.

index n	l_n in mm	a_n in graden
0	41.	45
1	31.3	67.5
2	34.9	56
3	32.9	62
4	33.8	59
5	33.3	60
6	33.5	60
7	33.4	60
8	33.5	60
9	33.5	60
10	33.5	60

4



a. $|P_nP_{n+1}| = |P_nP_{n+2}|$ = straal van de cirkel.

b. Vanwege de evenwijdigheid van de lijnen (*Z*-hoeken) geldt: hoek $P_nP_{n+2}P_{n+1} = a_{n+1}$.
Volgens de voorstudie (opgave **1**) geldt dan (met $g = a_{n+1}$ en $b = a_n$) direct: $a_{n+1} = 90 - \frac{1}{2}a_n$

c.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
40	70	55	$62\frac{1}{2}$	$58\frac{3}{4}$	$60\frac{5}{8}$

Ja, dat klopt. Afwisselend boven en onder de 60 ,elke keer er dichterbij en steeds meer er naar toe.

5 **a.** Ja.
b. Uitgaande van bijvoorbeeld $a_0 = 20$ duurt het maar 33 stappen voor er steeds 60 verschijnt.
c. 60 zelf. Als je 60 in de formule invult, krijg je als volgende getal 90 - 0.5 * 60 = 60. Dat is exact zo, dus blijft er steeds exact 60 komen, want elk volgend getal is daarna gelijk aan het vorige, dus ook gelijk aan 60.
d. Als je *niet* met 60 begint, maar met een ander getal, zeg *x*, dan is het volgende getal 90 - 0.5 * *x* en dat is niet gelijk aan 60. Want de enige oplossing van 90 - 0.5 * *x* = 60, is: *x* = 60. En dat was *x* juist niet. Dus ‘ongelijk aan 60’ levert weer ‘ongelijk aan 60’. Dus wordt het nóóit precies gelijk aan 60.

2: Van berekenen naar bewijzen

6 a. Die worden steeds gehalveerd.

b. $a_{n+1} - 60 = -\frac{1}{2}(a_n - 60)$.

7

$$a_{n+1} = 90 - \tfrac{1}{2}a_n$$

$$a_{n+1} - 60 = 90 - \tfrac{1}{2}a_n - 60 = 30 - \tfrac{1}{2}a_n = -\tfrac{1}{2}(a_n - 60)$$

8 a.

$$a_2 - 60 = -\tfrac{1}{2}(a_1 - 60) = -\tfrac{1}{2}(-\tfrac{1}{2}(a_0 - 60)) = \tfrac{1}{4}(a_0 - 60)$$

$$a_3 - 60 = -\tfrac{1}{2}(a_2 - 60) = -\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{4}(a_0 - 60)) = -\tfrac{1}{8}(a_0 - 60)$$

b. $a_n - 60 = (-\frac{1}{2})^n (a_0 - 60)$

c. $a_{100} - 60 = (-\frac{1}{2})^{100}(42 - 60) \approx -1,42 \cdot 10^{-29}$

Bij berekenen van a_{100} volgens $a_{100} = -1,42 \cdot 10^{-29} + 60$ geeft de GR het resultaat 60. Een kwestie van afronden.

9 a. Als a_0 gelijk is aan 60, dan is volgens de directe formule a_n gelijk aan 60.

b. Als a_0 *niet* gelijk is aan 60, dan is het verschil van a_n en 60 volgens de verschilformule niet gelijk aan 0. Dus is a_n niet gelijk aan 60.

c. As a_n minder dan 0.1 van 60 verschilt, is het volgend verschil minder dan de helft van 0.1 en alle volgend verschillen nog kleiner.

10 (Je mag een andere mening hebben dan dit:)

a. de verschilformule,

b. de directe formule,

c. de directe formule.

11 a. $a_4 = 60.625$.
$a_7 = 59.921875$.
$a_{10} = 60.00976563$.
$a_{14} = 60.00061035$.

b. Het verschil is kleiner dan 0.000 000 0005 (ofwel: $5 \cdot 10^{-10}$)
Dit gebeurt na 31 stappenr; inderdaad: de GR geeft $0.5^{31} = 4.6566128\text{E-}10$

c. Ja. Immers als je bijvoorbeeld 10 keer achter elkaar het verschil keer halveert wordt dit meer dan 1000 keer zo klein; je kunt door zestig keer halveren een verschil van 1 reduceren tot minder dan $5 \cdot 10^{-18}$. (Dit gebeurt zelfs al na achtenvijftig keer halveren).

d. Ook dan komt er een moment waarop het antwoord 60 op het scherm komt. Het verschil met 60 kan door vaak genoeg te halveren zo klein worden als je maar wilt.

12 Door steeds te halveren kun je a_n ‘s kunt vinden die zo dicht bij 60 liggen als je maar wilt. De afstand wordt echter nooit nul, als je starwaarde tenminste niet gelijk is aan 60.

Hoofdstuk 2: Rijen in soorten en maten

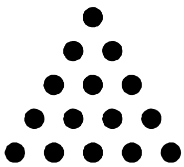
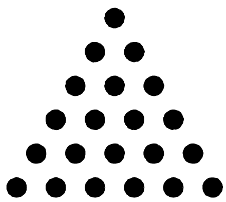
3: Getalrijen

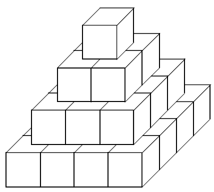
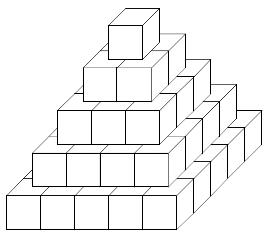
1 a.

(a) ..., 17, 20
(b) ..., 13, 15
(c) ..., 36, 49
(d) ..., 64, 128
(e) ..., 720, 5040
(f) , ..., 21, 34
(g) $\ldots, \sqrt{26} - 5, \sqrt{37} - 6$
(h) $\ldots, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}$
(i) ..., 0.33333, 0.333333
(j) ..., 1, -1
(k) $\ldots, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}$

(l) $\ldots, \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}, \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}}$

(m) $\ldots, 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}}, 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}}}$

(o) ...,  , 

(p) ... ,  , 

b.

(a) 2 + 19 . 3 = 59
(c) $19^2 = 361$
(h) $\frac{20}{21}$
(j) –1
(o) $\frac{1}{2}\ \ 20\ \ (20 + 1) = 210$
(p) $\frac{1}{6}\ \ 20\ \ (20 + 1)\ \ (40 + 1) = 2870$

2 a. De eerste term heeft dan rangnummer (index) 1.

b. $h_n = \frac{n+1}{n+2}$

3 Bij rij *(f)*.
Startgetallen: $f_0 = f_1 = 1$;
Stapformule: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

4 Stapformule: $a_{n+1} = 90 - \frac{1}{2}a_n$

Directe formule: $a_n = 60 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (a_0 - 60)$

5 **a.** Geef een directe formule van de rijen (*a*), (*c*), (*d*), (*g*), (*n*).

(*a*) $a_n = 2 + 3n$

(*c*) $c_n = n^2$

(*d*) $d_n = 2^n$

(*g*) $g_n = \sqrt{n^2 + 1} - n$

(*o*) $o_n = \frac{1}{2}n(n + 1)$

b. Geef een beschrijving met startwaarden en stapformule voor de rijen (*a*), (*d*), (*e*), (*i*), (*m*).

(*a*) $a_0 = 2$; $a_n = a_{n-1} + 3$
(*d*) $d_0 = 1$; $d_n = 2d_{n-1}$
(*e*) $e_0 = 1$; $e_n = ne_{n-1}$
(*i*) $d_0 = 0.3$; $d_n = d_{n-1} + 0.3 \cdot 10^{-n}$
(*m*) $m_0 = 1$; $m_n = 1 + \dfrac{1}{m_{n-1}}$

6 Na 2 maanden produceert het paar 1 nieuw paartje , dus $f_2 = 1 + 1 = 2$
Na 3 maanden produceert het oorspronkelijke paar opnieuw een paarje, dus: $f_3 = f_2 + 1 = 3$
Na 4 maanden zijn er twee paren (namelijk de paren die er na 2 maanden waren) die een nieuw paartje produceren, dus: $f_4 = f_3 + f_2 = 5$
Na 5 maanden produceren de konijnen die er na 3 maanden waren: $f_5 = f_4 + f_3 = 5 + 3 = 8$
Enzovoort.

7 **a.** Een straatje met lengte 5 begint óf met  óf met 
In het eerste geval moet er een straatje van 4 worden aangesloten, daarvan zijn er s_4;
in het tweede geval moet er een straatje van 3 worden aangesloten, daarvan zijn er s_3.
Gevolg: $s_5 = s_4 + s_3$.

b. $s_5 = 5 + 3 = 8$, $s_6 = 8 + 5 = 13$, $s_7 = 13 + 8 = 21$, $s_8 = 21 + 13 = 34$, $s_9 = 34 + 21 = 55$,
$s_{10} = 55 + 34 = 89$

8 **a.** $F_n = \begin{cases} 2 & \text{als } n = 0, 1 \\ F_{n-1} \cdot F_{n-2} & \text{als } n \ ‡ \ 2 \end{cases}$

b. Je hebt de eerdere termen ook nodig:

n:	0	1	2	3	4	5	6	7
F_n:	**2**	**2**	$2 \cdot 2 =$ **4**	$4 \cdot 2 =$ **8**	$8 \cdot 4 =$ **32**	$32 \cdot 8 =$ **256**	$256 \cdot 32 =$ **8192**	$8192 \cdot 256 =$ **2097152**

c. f_n: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... Nu de controle: $2^{21} = 2097152$.
Redenering I:
Als je F_n uitrekent volgens hetzelfde schema als in vraag 6c, krijg je in plaats van elke ‘1’ of ‘+1’ steeds een ‘2' of ‘ $\cdot$ 2' in de uitwerking. Er zijn in de uitwerking dus evenveel factoren 2 als de waarde van f_n.
Redenering II:
Het geldt zeker voor n = 0 en n = 1. Want $F_0 = 2^{f_0}$ en $F_1 = 2^{f_1}$
Maar dan geldt het ook voor n =3:

$$F_3 = F_2 \cdot F_1 = 2^{f_2} \cdot 2^{f_1} = 2^{f_2 + f_1} = 2^{f_3}$$

Op de zelfde manier geldt het voor elke opvolgende F_n, als je het van de voorgaanden al weet:

$$F_n = F_{n-1} \cdot F_{n-2} = 2^{f_{n-1}} \cdot 2^{f_{n-2}} = 2^{f_{n-1} + f_{n-2}} = 2^{f_n}$$

9 De eerste twee termen zijn 0, namelijk gelijk aan log 1.
Omdat we de stapformule voor de rij f_n willen gebruiken schrijven we eerst de relatie:

$$z_n = \log(f_n)$$

in de vorm:

$$10^{z_n} = f_n$$

Nu terug gaan naar alleen z_n, via de stapformule van f_n. Voor $n \geq 2$ geldt:

$$10^{z_n} = f_n = f_{n-1} + f_{n-2} = 10^{z_{n-1}} + 10^{z_{n-2}}$$

Uiteindelijk:

$$\boxed{z_n = \begin{cases} 0 & \text{als } n = 0,1 \\ \log\left(10^{z_{n-1}} + 10^{z_{n-2}}\right) & \text{als } n \geq 2 \end{cases}}$$

10 a.

n:	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n:	0	1	1 - 0 = **1**	1 - 1 = **0**	0 - 1 = **-1**	-1 - 0 = **-1**	-1 - -1 = **0**	0 - -1 = **1**	1 - 0 = **1**

b. u_6 en u_7 zijn gelijk aan u_0 en u_2. Daarom is ook u_8 gelijk aan u_2 en u_9 weer aan u_3, enzovoort. Het blok van de zes getallen 0, 1, 1, 0, -1, -1, komt dus vanaf u_6 weer terug en daarna ook weer.
$u_{100} = u_{94} = u_4$ (15 keer 6 stappen terug). $u_{100} = -1$.
c. Omdat het blok 0, 1, 1, 0, -1, -1 steeds terugkeert. De periode is 6.

11 v_0 en v_1 zijn gelijk aan u_2 en u_3. Omdat de stapformules gelijk zijn geldt: $v_n = u_{n+2}$ voor alle n.

12 Voor de hand ligt te werken met:

$$w_n = a \quad v_n + b \quad u_n$$

Dat is dus de formule die we moeten gaan *bewijzen*.
Bewijs: De formule geldt zeker voor n = 0 en n= 1.
Voor grotere n gebruiken we dezelfde opvolger-redenering.
Voor n = 2 geldt volgens de definitie van w_n, het feit dat de formule voor n = 0 en n=1 klopt:

$$w_2 = w_1 - w_0 = (a \quad v_1 + b \quad u_1) - (a \quad v_0 + b \quad u_0)$$

Nu omwerken om de stapformules voor v en u te kunnen gebruiken:

$$(a\ \ v_1 + b\ \ u_1) - (a\ \ v_0 + b\ \ u_0) = a\ \ (v_1 - v_0) + b\ \ (u_1 - u_0) = a\ \ v_2 + b\ \ u_2$$

Voor de stap van 2 naar 3 kunnen we nu hetzelfde doen, en daarna voor 3 naar 4, enz.. De algemene stap naar rangnummer n (onder bekendveronderstelling van de vorige twee stappen) ziet er zo uit:

$$\begin{aligned} w_n &= w_{n-1} - w_{n-2} \\ &= (a\ \ v_{n-1} + b\ \ u_{n-1}) - (a\ \ v_{n-2} + b\ \ u_{n-2}) \\ &= a\ \ (v_{n-1} - v_{n-2}) + b\ \ (u_{n-1} - u_{n-2}) \\ &= a\ \ v_n + b\ \ u_n \end{aligned}$$

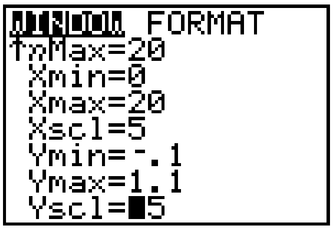
4: Termen berekenen

13 Vanaf rangnummer 19 komen er alleen 2-en.

15 a. Het gedrag lijkt wel wat op dat van de rij uit de eerste paragraaf. De getallen gaan op en neer, maar komen wel steeds dichterbij een getal: 0.7390851....

b. Dat dezelfde verschijnselen optreden. Ook het getal waar het naar toe gaat is hetzelfde!

16 a.



b. Het is een dalende rij; alle termen zijn groter dan nul, maar worden steeds kleiner en naderen tot 0.

5: Eigenschappen van rijen

17 a. Monotoon stijgend zijn (*a*), (*b*), (*c*), (*d*), (*h*), (*i*), (*l*), (*o*) en (*p*). Monotoon dalend is (*g*).
Begrensd naar boven zijn (*g*), (*h*), (*i*), (*j*), (*k*), (*l*) en (*m*)
Begrensd naar beneden zijn alle rijen (*a*) tot en met (*p*).
Alternerend zijn (*j*) en (*k*). Constant is geen van de rijen van bladzijde 15.

b. Voor elk van de naar boven begrensde rijen is 10 een bovengrens. Voor elk van de naar beneden begrensde rijen is -10 een ondergrens.

18 a. (*g*) heeft maximum 1,
(*h*) heeft minimum $\frac{1}{2}$,
(*i*) heeft minimum 0.3,
(*k*) heeft minimum 1 en maximum $-\frac{1}{2}$
(*m*) heeft minimum 1 en maximum 2.

b. 1, -2, 3, -4, 5, -6, ...

c. Deze uitspraak is niet waar, kijk maar naar (*h*) en (*i*).

19 a. Bijvoorbeeld: 1, -2, 3, -4, 5, -6, ... en -1, 1, -2, 2, -3, 3, ...

b. Nee.

c. Ja. Als de sprongen in de monotoon stijgende rij maar groter zijn dan de daalsprongen van de alternerende rij. Voorbeeld: de som van de rijen *(a)* en *(k)* van bladzijde 15.

6: Extra: de rij van Fibonacci op de GR

20

a.

b.

c. Het kost 4 of 5 stappen.

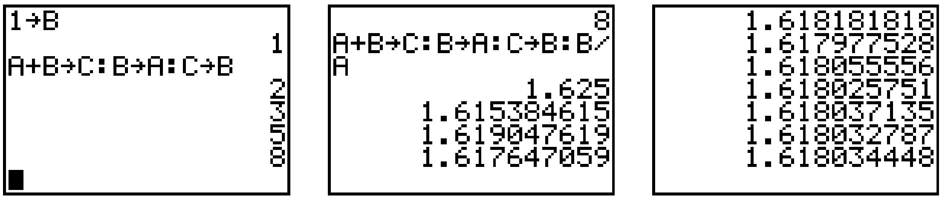
21

a.

A	*B*	*C*
1	1	
1	2	2
2	3	3
3	5	5
5	8	8
8	13	13

b.

c.



d. De quotiënten vormen weer een rij die op en neer gaat, maar waarvan de termen toch steeds dichterbij een vast getal komen, in dit geval 1.6180....

Hoofdstuk 3: Convergente rijen

7: Nader tot nul

1 Kijk bijvoorbeeld nog eens bij opgave **11a** uit hoofdstuk 1: voor $p = 3$ moet N minstens gelijk aan 14 zijn, voor $p = 4$ moet N minstens gelijk aan 17 zijn.

2 **a.** De eerste rij is een nulrij; de termen met oneven rangnummer komen willekeurig dicht bij 0, en die met even rangnummer zijn gelijk aan nul. Bij elk klein intervalletje om 0 kun je een rangnummer N vinden, zodat alle termen met een groter rangnummer in dat intervalletje liggen
De tweede rij is geen nulrij: hoe ver je ook gaat in de rij, altijd duikt er weer een term 1 op; er is dus geen staart van de rij te bedenken waarvan alle termen binnen het interval [-0.1 , 0.1] ligt.

b. Bijvoorbeeld: -1, -0.1, -0.01, -0.001, -0.0001, ...

3

afstand tot 0 minder dan:	$u_n =$	$\frac{1}{\log n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$(\frac{1}{2})^n$
0.1		10^{11}	11	101	4
0.001		10^{1001}	1001	10^7	10
0.000 001		10^{10^7}	10^6+1	10^{13}	20
0.000 000 001		$10^{10^{10}}$	10^9+1	10^{20}	30

4 **a.** $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^n$

b. $\frac{1}{\log(\log n)}$

c. Even snel.

5 **a.** De algemene term van de rij is $\frac{\sin(n)}{n}$ en omdat sin(n) voor iedere waarde van n tussen -1 en 1 ligt, geldt: $\left|\frac{\sin(n)}{n}\right| < \frac{1}{n}$. Omdat de rij $u_n = \frac{1}{n}$ een nulrij is de rij $v_n = \frac{\sin(n)}{n}$ het ook.

6 **a.** De termen zijn afwisselend 2 en 0, er is dus geen limiet.

b. $0 \le \frac{1-\cos(n)}{\sqrt{n}} \le \frac{2}{\sqrt{n}}$, en omdat $\lim_{n \to \infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0$ geldt ook: $\lim_{n \to \infty} v_n = 0$

c. $|x_n| \le \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ en omdat $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ geldt ook: $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$

d. $|y_n| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n$ en omdat $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ geldt ook: $\lim_{n \to \infty} y_n = 0$

8: The sky is the limit

7 Een rij u_0, u_1, u_2, ... gaat naar oneindig als er bij *elk* getal van de vorm 10^p met p = 1, 2, 3, ... een rangnummer N te vinden is waarvoor geldt: als $n \ge N$ dan $u_n > 10^p$.

8 Zet de getallen weer op een lijn, die nu naar rechts moet doorlopen.
Je kunt nu overal een grenslijn zetten en dan geldt:

links van de grens: *eindig* veel termen"
rechts van de grens: *oneindig* veel termen.

Omdat je nu nooit oneindig veel termen kunt suggereren wordt het plaatje minder suggestief.

9 **a.** Ja.
b. Nee.

10 $u_n = n(n-100)$; omdat de beide factoren van dit produkt naar oneindig gaan voor $n \to \infty$, gaat ook u_n naar oneindig. (Opmerking; blijkbaar is n^2 voldoende overheersend over 100n).

11 **a.** $\log n > 1000$ als $n > 10^{1000}$, dus vanaf $10^{1000}+1$.

b. $n^2 > 1000$ als $n > \sqrt{1000}$ dus vanaf $n = 32$.
$n^{0.00001} > 1000$ als $n > 1000^{100000}$ dus vanaf $n = 1000^{100000}+1$.

12 Bijvoorbeeld [0, 4].

13 a. $\log n > 10^p$ als $n > 10^{10^p}$. 10^{10^p} schrijf je als een 1 met 10^p nullen.

b. Een jaargang bevat $10^4 \quad 10^3 = 10^7$ tekens, dus er zijn $\dfrac{10^{10^{10}}}{10^7} = 10^{10^{10}-7}$ jaargangen nodig.

Dit is $10^{10^{10}-7} \quad 10 = 10^{10^{10}-6}$cm ofwel $10^{10^{10}-11} = 10^{9999999989}$km

14 a. Ja

b. $(1{,}1)^n > 100$ als $n > \dfrac{\log 100}{\log(1{,}1)}$ dus vanaf $n = 49$.

c. Vanaf $n = 463$ en vanaf $n = 4608$.

15 $r^n > 10^p$ als $n > \dfrac{p}{\log r}$, dus N is het eerste gehele getal dat groter is dan $\dfrac{p}{\log r}$

16 Als de rij u_n naar oneindig gaat, dan bestaat er voor elk getal p een rangnummer N zodat $u_n > 10^p$ voor$n > N$. Dus geldt dan ook $0 < \dfrac{1}{u_n} < 10^{-p}$ voor $n > N$ zodat de rij $\dfrac{1}{u_n}$ tot nul nadert.

17 a. De rij $u_n = n^2 - 100n + 1 = n(n - 100) + 1$ gaat naar oneindig, dus a_n nadert tot nul.

b. De rij b_n is constant: $b_n = \frac{1}{2}$. Deze rij nadert niet tot 0.

c. $c_n = \dfrac{1}{1{,}01^n}$ en de rij $1{,}01^n$ gaat naar oneindig, dus c_n nadert tot 0.

18 a. $(\sqrt{n^2+1} - n)(\sqrt{n^2+1} + n) = (\sqrt{n^2+1})^2 - n^2 = n^2 + 1 - n^2 = 1$

dus: $\sqrt{n^2+1} - n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1} + n}$

b. De rij $u_n = \sqrt{n^2+1} + n$ gaat naar oneindig, want $u_n > \sqrt{n^2} + n = 2n$, dus $\dfrac{1}{u_n}$ gaat naar nul, ofwel:

$$\lim_{n \to \infty} (\sqrt{n^2+1} - n) = 0$$

c. Kies $a = \frac{3}{2}$. De berekening van zoeven gaat haast onveranderd door en ook het bewijs dat de rij een nulrij is.:

$$\left(\sqrt{n^3+1} - n^{\frac{3}{2}}\right)\left(\sqrt{n^3+1} + n^{\frac{3}{2}}\right) = (\sqrt{n^3+1})^2 - \left(n^{\frac{3}{2}}\right)^2 = n^3 + 1 - n^3 = 1$$

Dus $\sqrt{n^3+1} - n^{\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{n^3+1} + n^{\frac{3}{2}}}$, enzovoort.

19 Nee, bijvoorbeeld de rij -1, -0.1, 0.01, -0.001, ... nadert tot nul, maar de rij van omgekeerden gaat niet naar oneindig.

9: Convergente rijen

20 a. $u_n - 1 = \dfrac{n+1}{n} - 1 = \dfrac{n+1}{n} - \dfrac{n}{n} = \dfrac{1}{n}$ en de rij $\dfrac{1}{n}$ is een nulrij.

b. $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 1$

21 a. 3

b. 5

c. $\dfrac{3+2n}{n} = \dfrac{3}{n} + 2$ dus $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 2$

d. $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 1$ want $u_n - 1 = \dfrac{n+2}{n+1} - \dfrac{n+1}{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$ is een nulrij.

22 a. Alle termen zijn 0, dus de rij convergeert naar 0

b. De termen zijn (gerekend vanaf $n = 0$): 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, ... De rij b convergeert dus niet.

c. $c_1 = 0$, $c_{10} = -1$, $c_{100} = -2$, enz. de rij gaat naar ‘min oneindig’ en covergeert dus niet.

d. e > 1, dus $\lim\limits_{n \to \infty} (d_n - 1) = \lim\limits_{n \to \infty} e^{-n} = 0$; dus de rij d convergeert naar 1.

10: rekenen met limieten

23 a. $\lim\limits_{n \to \infty} (u_n \cdot v_n) = u \cdot v$

b. Eerst de somregel $\lim\limits_{n \to \infty} (u_n + v_n) = u + v$ en daarna de quotiëntregel $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{u}{v}$

24 a. $1 + 0 + 0 = 1$

b. $-4 \quad 2 = -8$

c. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3n-1}{2n+7} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{7}{n}} = \dfrac{3}{2}$

d. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^2 + 100}{n^3 - 1} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\frac{1}{n} + \frac{100}{n^3}}{1 - \frac{1}{n^3}} = \dfrac{0}{1} = 0$

25 a. Bij opgave **24c** gaan de teller en de noemer beide naar oneindig, maar het quotiënt gaat naar $\frac{3}{2}$ en niet naar 1. Bij **24d** gaat de breuk waarvan teller en noemer beide naar oneindig gaan, naar 0; in dat geval gaat de noemer aanmerkelijk ‘sneller’ naar oneindig.

26 a. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n}{3n+100} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{3 + \frac{100}{n}} = \dfrac{1}{3+0} = \dfrac{1}{3}$.

b. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(n-1)^2}{n^2+2n} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^2 - 2n + 1}{n^2 + 2n} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{2}{n}} = 1$

c. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3n + 100}{n} = \lim\limits_{n \to \infty} \left(3 + \dfrac{100}{n}\right) = 3$

d. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(2n^3 - 1)(3n^2 + 1)}{(n + 1)^5} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\left(2 - \frac{1}{n^3}\right)\left(3 + \frac{1}{n^2}\right)}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^5} = 6$

27 a. $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n + 1) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$, daaruit volgt dat de limiet gelijk is aan $\frac{1}{2}$

b. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$, daaruit volgt dat de limiet gelijk is aan $\frac{1}{3}$

28 a. Bijvoorbeeld: $u_n = 2 + 0{,}1^n$ of $u_n = 2 + \dfrac{1}{n}$

b. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{u_n^2 - 4}{u_n - 2} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(u_n + 2)(u_n - 2)}{u_n - 2} = \lim\limits_{n \to \infty} (u_n + 2) = 4$

29

a. $\lim\limits_{n \to \infty} u_n^3 = 10^3 = 1000$

b. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{u_n + 5}{u_n - 5} = \dfrac{10 + 5}{10 - 5} = 3$

c. $\lim\limits_{n \to \infty} (u_n^2 - u_n) = 10^2 - 10 = 90$

d. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{33}{1 + \frac{1}{u_n}} = \dfrac{33}{1 + \frac{1}{10}} = 30$

11: Limieten invullen

30 a. Op grond van de rekenregels voor limieten (combinatie van ‘produkt’- en ‘som’-regel.

b. cos is een limietbehoudende functie;

omdat $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 1 + l^2$ geldt dus $\lim\limits_{n \to \infty} \cos(u_n) = \cos(1 + l^2)$

31 a. De functie sin is limietbehoudend, en vanwege de somregel dus ook de functie $x \to 10 - \sin x$; de functrie ln is limietbehoudend en in vanwege de schakelregel dus ook de functie $x \to \ln(10 - \sin x)$

b. Eerst de quotiëntregel voor limieten ($\tan x = \sin x/\cos x$, dus tan is limietbehoudend), dan de produktregel (voor $\tan^2 x$), tenslotte de somregel.

c. In **33a** is al gezegd waarom $x \to \cos(1 + x^2)$ limietbehoudend is; de e-macht is ook limietbehoudend en via de schakelregel weet je nu dat de gegeven functie limietbehoudend is.

d. Quotiëntregel (toegepast op de functies van **31a** en **b**) en vervolgens de somregel.

32 De e-macht wordt geschakeld met de functie $x \to \ln 5.98 \cdot x$; beide zijn limietbehoudend en via de schakelregel dus ook de functie $y = 5{,}98^x$.

Ook de functie $1.2308 \cdot \ln x$ is limietbehoudend, en uit weer de schakelregel volgt nu dat $y = x^{1{,}2308}$ dat ook is.

33 a. $f(x) = \left(e^{\ln(1 + x^2)}\right)^x = e^{x \cdot \ln(1 + x^2)}$.

Het limietbehoudende karakter van f volgt nu uit: $x \to \ln x$ is limietbehoudend en $x \to 1 + x^2$ is limietbehoudend (som- en produktregel), dus ook $x \to \ln(1 + x^2)$ (schakelregel).

Via de produktregel is dus ook $x \to x \cdot \ln(1 + x^2)$ limietbehoudend en via schakeling met de e-macht (die limietbehoudend is) weet je nu dat f limietbehoudend is.

b. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{3n+1}{n+3} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{3 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{n}} = 3$, dus $\lim\limits_{n \to \infty} f\left(\frac{3n+1}{n+3}\right) = f(3) = 10^3 = 1000$

34 a. $\ln(1 - 0) = 0$

b. $\sqrt{1 + \sin 0} = 1$

c. $1 \cdot e^1 = e$

35 a. $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = e^0 = 1$

b. $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \ln(e - \sin(0)) = 1$

c. $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{4 + 0}}} = 4$

d. $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \dfrac{20}{10 + \dfrac{40}{3 + \dfrac{5}{\cos(0)}}} = \dfrac{4}{3}$

e. $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \lim\limits_{n \to \infty} \cos\left(\dfrac{\frac{1}{2^n} + 1}{\frac{1}{2^n} - 1}\pi\right) = \cos(-\pi) = -1$

12: Extra: continu en discontinu

36 a. $\lim\limits_{n \to \infty} (-0{,}1)^n = 0$

b. Convergeert naar 1.

c. Convergeert niet.

d. De grafiek van $y = \text{abs}(x - 1)/(x - 1)$ vertoont en sprong bij $x = 1$, die van $y = \sin(x - 1)/(x - 1)$ heeft een (oneindig klein) gaatje.

37 Als de termen van de rij $x_0, x_1, x_2, \ldots$vanaf een zeker rangnummer blijvend kleiner dan a zijn (links van a liggen) , dan convergeert de rij $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots$. Het zelfde kan gezegd worden voor het geval de termen van de rij $x_0, x_1, x_2, \ldots$vanaf een zeker rangnummer rechts van a blijven. De beide limieten zijn echter niet gelijk, vandaar het onderscheid tussen linker- en rechterlimiet.
Als de de rij $x_0, x_1, x_2, \ldots$ weliswaar naar a convergeert, terwijl zijn termen heen en weer blijven springen rond a, dan convergeert $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots$ niet. Je kunt dus niet spreken van de limiet van $f(x)$ voor x nadert tot a.

38 a. Ophefbaar discontinu: $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} = 1 + x + x^2$ voor $x \neq 1$. Door de afspraak $f(1) = 3$ wordt de discontinuïteit van f opgeheven.

b. Niet ophefbaar discontinu. Als de rij $x_0, x_1, x_2, \ldots$ van rechts tot 0 nadert, dan gaat de rij $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots$ naar ∞ en als de rij van links tot 0 nadert, dan gaat $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots$ naar $-\infty$.

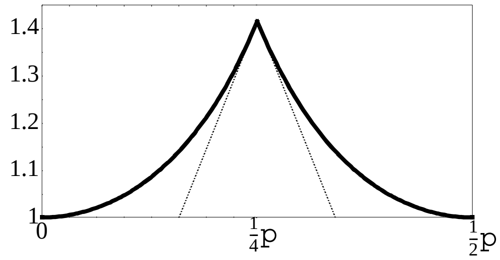
c. Continu.
d. Niet-ophefbaar discontinu. (linkerlimiet is -1, rechterlimiet = 1)

39 Bijvoorbeeld: $f(x) = |x|$

40 a. $L(t) = \dfrac{1}{\cos t}$

b. Nee: $L(t) = \dfrac{1}{\sin t}$

c. Zie figuur.

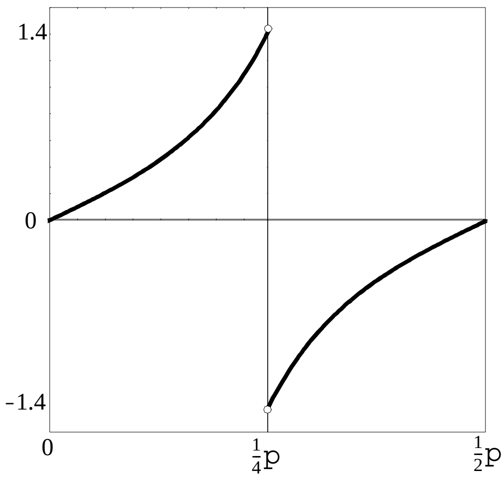


d. L is continu in $t = \frac{1}{4}\pi$.

L is niet differentieerbaar in $t = \frac{1}{4}\pi$ (de grafiek heeft een knik).

Dit kun je zien aan de raaklijnen, die hebben respectievelijk de richtingscoëfficiënt $\sqrt{2}$ en $-\sqrt{2}$.

e.



$L'(t) = \dfrac{\sin t}{\cos^2 t}$ voor $0 \le t < \frac{1}{4}\pi$

$L'(t) = \dfrac{-\cos t}{\sin^2 t}$ voor $\frac{1}{4}\pi < t \le \frac{1}{2}\pi$

Merk op dat L' een niet-ophefbare discontinuïteit heeft.

Hoofdstuk 4: Grenzen aan de groei

13: soorten van groei, inleiding

1 a. $n = 1\,000\,000$.
b. Kies bijvoorbeeld Xmin = 0 en Xmax = 10 000 000 en ZoomFit.

c. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1000n}{0.001n^2} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1000000}{n} = 0$.

d. Door n groot genoeg te kiezen wordt $\dfrac{u_n}{v_n}$ willekeurig klein, dus u_n wordt een willekeurig klein getal maal v_n.

2 a. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{55}{0{,}00321n^3} = 0$, dus de rij v_n wint op den duur.

b. $\sqrt[3]{\dfrac{55}{0{,}00321}} = 25{,}780176...$; voor $n = 25$ is $u_n > v_n$, voor $n = 26$ slaat dit om: $u_n < v_n$

c. Als je de 55 en 0,00321 vervangt door andere getallen, blijft de limiet uit vraag **a.** gelijk aan 0.

3

$$\lim_{n \to \infty} \frac{an^k}{bn^m} = \begin{cases} 0 & \text{als } k < m \\ \frac{a}{b} & \text{als } k = m \\ \infty & \text{als } k > m \end{cases}$$

4 $1 \cdot 1{,}06^n > 10 \cdot 1{,}04^n$ geeft $\left(\frac{1{,}06}{1{,}04}\right)^n > 10$ dus $n > \frac{1}{\log\left(\frac{1{,}06}{1{,}04}\right)}$, dus: $n \geq 121$, ofwel na 121 jaar.

5 Als $a < b$, dan $0 < \frac{a}{b} < 1$ dus $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{ca^n}{db^n} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{c}{d} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{c}{d} \cdot \lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{c}{d} \cdot 0 = 0$.

Als $a = b$, dan $\frac{a}{b} = 1$ en $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{ca^n}{db^n} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{c}{d} \cdot (1)^n = \frac{c}{d}$

Als $a > b$, dan $\frac{a}{b} > 1$ en $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{c}{d} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{c}{d} \cdot \lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{a}{b}\right)^n = \infty$

14: de stelling van de winnende groei

6 **a.** $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$ en $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2$ voor elke waarde van n.

b. Voor elk positief getal n geldt: $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ dus $1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{n}$ en dus $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$.

$g_{n+1} < g_n$, dus de rij is monotoon dalend.

$\lim\limits_{n \to \infty} g_n = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = (1 + 0)^2 = 1$.

c. Voor $n \geq 4$ geldt: $g_n \leq g_4$ dus $g_n \leq \frac{25}{16}$.

d. $u_n = (g_{n-1} \cdot g_{n-2} \cdot \ldots \cdot g_4) \cdot u_4 \leq g_4^{n-4} \cdot u_4 = (1{,}5625)^{n-4} \cdot u_4$ voor $n > 4$.

7 Uit opgave **6d** volgt: $\frac{u_n}{v_n} \leq \frac{u_4 \cdot 1{,}5625^{(n-4)}}{2^n}$.

Volgens opgave **5** (vergelijken van exponentiële functies) is $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{16 \cdot 1{,}5625^{-4} \cdot 1{,}5625^n}{2^n} = 0$.

Uit de vergelijkingsstelling voor rijen (zie hoofdstuk 3) volgt nu $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$.

8

a. $\frac{(n+1)^{100}}{n^{100}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{100} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{100}$.

b. $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{100} < 1{,}005$ geeft $1 + \frac{1}{n} < 1{,}005^{\frac{1}{100}}$ dus $\frac{1}{n} < 1{,}005^{\frac{1}{100}} - 1$, waaruit volgt: $n \geq 20050$.

c. $n^{100} \leq 20050^{100} \cdot 1{,}005^{(n-100)}$ als $n > 20050$.

d. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{20050^{100} \cdot (1{,}005)^{n-100}}{1{,}01^n} = 0$ en $\dfrac{n^{100}}{1{,}01^n} \leq \dfrac{20050^{100} \cdot (1{,}005)^{n-100}}{1{,}01^n}$ dus $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^{100}}{1{,}01^n} = 0$.

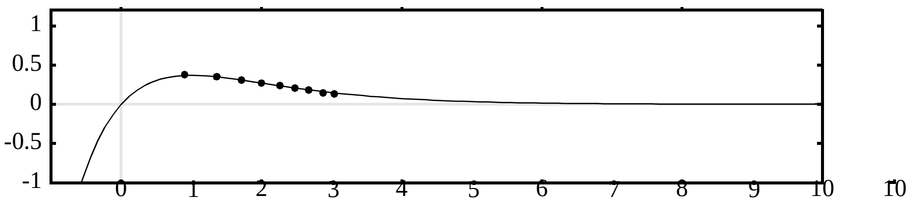
9

a. Nee.
b. Bijvoorbeeld $0 \leq x \leq 200$.
c. Bijvoorbeeld $0 \leq x \leq 1000$.
d. Op het interval $0 \leq x \leq 1000$ zie je de grafiek stijgen en weer dalen. In de buurt van de 3850ste term duikt de grafiek onder 10^{-10}.
De getallen 10^{100} en hoger zijn te groot voor de GR. $x^{20} < 10^{100}$ voor $x < 100000$.
$1.05^x < 10^{100}$ voor $x < \dfrac{100}{\log 1{,}05} \approx 4719$.

15: Twee andere bijzondere limieten

10 a. $f'(x) = \dfrac{1 \cdot e^x - x \cdot e^x}{(e^x)^2} = \dfrac{1-x}{e^x}$ dus $f'(x) < 0$ voor $x > 1$.

11 a.



De rij $x_n = \sqrt{n}$ gaat naar oneindig, dus: $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x_n}{e^{x_n}} = 0$.

Invullen geeft: $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\sqrt{n}}{e^{\sqrt{n}}} = 0$.

b. De rij $x_n = \ln(n)$ gaat naar oneindig, dus $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x_n}{e^{x_n}} = 0$.

Invullen geeft: $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\ln(n)}{e^{\ln(n)}} = 0$ dus $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$.

12 De rij $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n}$ convergeert naar 0 en $\lim\limits_{x \to 0} e^x = 1$ dus $\lim\limits_{n \to \infty} e^{\frac{\ln(n)}{n}} = 1$.

$e^{\frac{\ln(n)}{n}} = (e^{\ln(n)})^{\frac{1}{n}} = n^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{n}$ dus $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

13 a. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\log n}{n} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\ln n}{n \cdot \ln 10} = \dfrac{0}{\ln 10} = 0$

b. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\ln(n^3)}{\sqrt{n}} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{6 \ln \sqrt{n}}{\sqrt{n}} = 6 \cdot 0 = 0$

c. Stel $x_n = \ln n$, dan: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \infty$, dus: $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x_n^{10}}{(e^{0,1})^{x_n}} = 0$; invullen geeft: $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(\ln n)^{10}}{n^{0,1}} = 0$

d. $\lim\limits_{n \to \infty} n^{\left(\frac{1}{\ln(n)+1}\right)} = e$, want: $n^{\frac{1}{\ln n + 1}} = e^{\frac{\ln n}{\ln n + 1}}$ en $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\ln n}{\ln n + 1} = 1$

16: Snelle en trage groei (extra uitdagingen)

14 a. Bijvoorbeeld $u_n = a^{a^n}$ met $a > 1$.

b. Nog sneller dan deze rij is de rij $v_n = a^{a^{a^n}}$ met $a > 1$. Zo kun je nog verder gaan.

15 Bijvoorbeeld $f(n) = \ln(\ln(n))$: $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\ln(\ln(n))}{(\ln(n))^k} = \lim\limits_{x_n \to \infty} \dfrac{\ln(x_n)}{(x_n)^k} = 0$.

16 $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{e^{\sqrt{n}}}{n^k} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{e^{\sqrt{n}}}{(\sqrt{n})^{2k}} = \lim\limits_{x_n \to \infty} \dfrac{e^{x_n}}{(x_n)^{2k}} = \infty$ dus de rij groeit sneller dan die van type ***B***.

$\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a^n}{e^{\sqrt{n}}} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a^{(\sqrt{n})^2}}{e^{\sqrt{n}}} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(a^{\sqrt{n}})^{\sqrt{n}}}{e^{\sqrt{n}}} = \lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{a^{\sqrt{n}}}{e}\right)^{\sqrt{n}} = \infty$ dus de rij groeit langzamer dan die van type ***C***.

De rij zit dus tussen type ***B*** en type ***C*** in.

Hoofdstuk 5: Limiet en afgeleide

17: Differentiëren om limieten te vinden

1 $(1 + \frac{1}{n})^2 - 1 = \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}$, dus $n\left((1 + \frac{1}{n})^2 - 1\right) = n\left(\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = 2 + \frac{1}{n}$; en: $\lim\limits_{n \to \infty} (2 + \frac{1}{n}) = 2$

2 a. $n\left((1 + \frac{1}{n})^3 - 1\right) = n\left(\frac{3}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right) = 3 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}$, dus $\lim\limits_{n \to \infty} n\left((1 + \frac{1}{n})^3 - 1\right) = 3$

b. $n\left((1 + \frac{1}{n})^4 - 1\right) = n\left(\frac{4}{n} + \frac{6}{n^2} + \frac{4}{n^3} + \frac{1}{n^4}\right) = 4 + \frac{6}{n} + \frac{4}{n^2} + \frac{1}{n^3}$, dus: $\lim\limits_{n \to \infty} n\left((1 + \frac{1}{n})^4 - 1\right) = 4$

Alternatieve methode:

$$\lim_{n \to \infty} n\left((1 + \tfrac{1}{n})^2 - 1\right)\left((1 + \tfrac{1}{n})^2 + 1\right) = \lim_{n \to \infty} n\left((1 + \tfrac{1}{n})^2 - 1\right) \cdot \lim_{n \to \infty} \left((1 + \tfrac{1}{n})^2 + 1\right) = 2 \cdot 2 = 4$$

3 10

4 a. Stel $h = \frac{1}{n}$. Voor $n \to \infty$ geldt: $h \to 0$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{n \to \infty} \frac{f(1+\frac{1}{n}) - f(1)}{\frac{1}{n}} = f'(1)$$

De limiet van opgave **1** kan ook worden geschreven als: $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{(1+\frac{1}{n})^2 - 1^2}{\frac{1}{n}} \right)$ en de uitkomst is gelijk aan de afgeleide van $f(x) = x^2$ in $x = 1$, dus gelijk aan 2.

Evenzo zijn de limieten van opgave **2a** en **2b** respectievelijk gelijk aan de afgeleide van $f(x) = x^3$ en $f(x) = x^4$ in $x = 1$, dus respectievelijk gelijk aan 3 en 4.

b. De limiet van opgave **3** is gelijk aan de afgeleide van $f(x) = x^{10}$ in $x = 1$, dus gelijk aan 10.

5 a. $\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{1}}{\frac{1}{n}}$

b. De gevraagde limiet is gelijk aan de afgeleide van $f(x) = \sqrt{x}$ in $x = 1$, dus gelijk aan $\frac{1}{2}$.

c. $\sqrt{n^2 + n} - n = \sqrt{n^2(1+\frac{1}{n})} - n = n\sqrt{1+\frac{1}{n}} - n = n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right)$, dus de limiet $= \frac{1}{2}$ (zie **b**)

d. $\lim_{n \to \infty} n\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}} - 1\right) = \lim_{n \to \infty} \dfrac{\sqrt{1+\frac{2}{n}} - \sqrt{1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} \left(2 \cdot \dfrac{\sqrt{1+\frac{2}{n}} - \sqrt{1}}{\frac{2}{n}} \right) = 2 \cdot f'(1) = 2 \cdot \lim_{n \to \infty} \dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{1}}{\frac{1}{n}}$

e. Die limiet is gelijk aan $2 \cdot f'(1) = 1$ (zie ook **c**)

6 $\sqrt[3]{n^3 + n^2} - n = \sqrt[3]{n^3(1+\frac{1}{n})} - n = n \cdot \sqrt[3]{1+\frac{1}{n}} - n = n\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}} - 1\right) = \dfrac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}} - \sqrt[3]{1}}{\frac{1}{n}}$. Limiet $= \frac{1}{3}$

8 $n(\cos\frac{1}{n} - 1) = \dfrac{\cos\frac{1}{n} - 1}{\frac{1}{n}} = \dfrac{\cos(0+\frac{1}{n}) - \cos 0}{\frac{1}{n}}$. De limiet van de rij is dus gelijk aan de afgeleide van $f(x) = \cos x$ voor $x = 0$, en dus gelijk aan $-\sin 0 = 0$.

9 $n \sin\frac{1}{n} = \dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \dfrac{\sin(0+\frac{1}{n}) - \sin 0}{\frac{1}{n}}$. De rij convergeert naar sin'(0) = 1.

Je kunt je natuurlijk ook beroepen op de standaardlimiet: $\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$

10 b. Vanaf $n = 7$

c. Vanaf $n = 12$

d. Vanaf $n = 57$

e. π. Verklaring: $\lim_{n \to \infty} n \sin\frac{\pi}{n} = \lim_{n \to \infty} \dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}} = \pi \cdot \lim_{n \to \infty} \dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = \pi \cdot \lim_{t \to 0} \dfrac{\sin t}{t} = \pi$

11 a. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{e^{\frac{1}{n}}-e^0}{\frac{1}{n}}\right) = 1$

b. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2^{\frac{1}{n}}-2^0}{\frac{1}{n}}\right) = \ln 2$

c. $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \ln(1+\frac{1}{n}) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})-\ln 1}{\frac{1}{n}} = 1$

d. $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \ln\left(1+\frac{3}{n}\right) = 3 \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(1+\frac{3}{n})-\ln 1}{\frac{3}{n}} = 3$

12 a. $\lim\limits_{n\to\infty} (n\sin\frac{5}{n} - n\sin\frac{3}{n}) = 5-3 = 2$

b. $\lim\limits_{n\to\infty} n\,(\sqrt{25+\frac{1}{n}}-5) = \dfrac{1}{2\sqrt{25}} = 0{,}1$

c. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left((1-\frac{1}{n})^5-1\right) = -5 \cdot 1^4 = -5$

d. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{25+\frac{1}{n^2}}-5\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt{25+\frac{1}{n^2}}-5\right) \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0{,}1 \cdot 0 = 0$

18: Continue rentebijschrijving

13 a. $1.03^2 = 1.0609 > 1.06$
b. $1.005^{12} = 1.06167781$

c. $(1+\frac{0{,}06}{365})^{365} = 1{,}06183131$ = jaarlijkse groeifactor bij rentebijschrijving per dag

$(1+\frac{0{,}06}{8760})^{8760} = 1{,}06183633$ = jaarlijkse groeifactor bij rentebijschrijving per uur

14 a. $g_1 = 1{,}06$, $g_2 = 1{,}03^2 = 1{,}0609$, $g_3 = 1{,}015^4 \approx 1{,}0614$
b.

$$g_{2n} = (1+\frac{0{,}06}{2n})^{2n} = (1+\frac{0{,}03}{n})^{2n} = \left((1+\frac{0{,}03}{n})^2\right)^n = \left(1+\frac{0{,}06}{n}+\frac{0{,}0009}{n^2}\right)^n > (1+\frac{0{,}06}{n})^n = g_n$$

15 a. $(1+\frac{0{,}06}{n})^n < 2 \qquad \left((1+\frac{0{,}06}{n})^n\right)^{1/n} < 2^{1/n} \qquad 1+\frac{0{,}06}{n} < 2^{1/n}$

b. De richtingscoëfficiënt van de raaklijn in (0 , 1) is ln 2; de richtingscoëfficiënt van de genoemde koorde is gelijk aan: $\dfrac{2^{1/n}-1}{1/n}$.

Uit de grotere steilheid van de koorde volgt: $\dfrac{2^{1/n}-1}{1/n} > \ln 2$ ofwel: $2^{1/n} > 1+\frac{\ln 2}{n} > 1+\frac{0{,}06}{n}$

16 a. $\ln g_n = \ln\left((1 + \frac{0{,}06}{n})^n \right) = n \cdot \ln(1 + \frac{0{,}06}{n})$

b. $\lim\limits_{n \to \infty} (n \cdot \ln(1 + \frac{0{,}06}{n})) = 0{,}06 \cdot \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\ln(1 + \frac{0{,}06}{n}) - \ln 1}{\frac{0{,}06}{n}} = 0{,}06 \cdot \frac{1}{1} = 0{,}06$

c. $\ln g = 0.06$, dus $g = e^{0{,}06} \approx 1{,}0618366$

17 $e^{0{,}08} \approx 1{,}0832871$, dus de continu rente levert een effectieve groei op van bijna 8.33% en dat is meer dan 8.25%

18 $5000 \cdot (e^{0{,}05})^{10} = 5000 \cdot e^{0{,}5} \approx 8243{,}61$

19 $K_t = K_0 \cdot e^{0{,}01rt}$

20 Uit $15 \cdot (e^{0{,}01r})^{10} = 35$ volgt: $e^{0{,}1r} = \frac{35}{15}$ en dat geeft $r = 8.47\%$

19: Een standaardlimiet

21 $\lim\limits_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$

22 Convergeert ook naar e, maar de rij is dalend.

23 a. e^{-x}

b. Dit komt neer op: $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ en dat is juist.

24

a. $\lim\limits_{n \to \infty} (\frac{n+2}{n})^n = \lim\limits_{n \to \infty} (1 + \frac{2}{n})^n = e^2$

b. $\lim\limits_{n \to \infty} (\frac{n}{n+3})^n = 1 / \lim\limits_{n \to \infty} (1 + \frac{3}{n})^n = e^{-3}$

c. $\lim\limits_{n \to \infty} (\frac{2n+1}{2n})^n = \lim\limits_{n \to \infty} (1 + \frac{0{,}5}{n})^n = e^{0{,}5}$

d. $\lim\limits_{n \to \infty} (\frac{2n-1}{2n})^n = \lim\limits_{n \to \infty} (1 - \frac{0{,}5}{n})^n = e^{-0{,}5}$

25 a. Stel $n^2 = m$. Als $n \to \infty$, dan $m \to \infty$, dus: $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = \lim\limits_{m \to \infty} (1 - \frac{1}{m})^m = e^{-1} = \frac{1}{e}$

b. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = \lim\limits_{n \to \infty} \left(\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{1/n} = \lim\limits_{n \to \infty} (e^{-1})^{1/n} = e^0 = 1$

26 a. Stel $u_n = (\cos\frac{1}{n})^n$, dan $\ln(u_n) = n \cdot \ln(\cos\frac{1}{n})$. Merk op: $\lim\limits_{n \to \infty} \cos\frac{1}{n} = \cos 0 = 1$.

Je kunt $\ln(u_n)$ schrijven als produkt van twee differentie-quotiënten:

$$\ln(u_n) = \frac{\ln(\cos\frac{1}{n}) - \ln 1}{\cos\frac{1}{n} - 1} \cdot \frac{\cos\frac{1}{n} - \cos 0}{\frac{1}{n} - 0}.$$

Voor $n \to \infty$ gaat het eerste quotiënt naar ln'(1) = 1 en het tweede naar cos'(0) = 0. Het produkt heeft dus de limiet 0. Uit $\lim\limits_{n \to \infty} \ln(u_n) = 0$ volgt $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = e^0 = 1$

b. Voor de tweede limiet stuit je op

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\cos\frac{1}{n} - 1}{\frac{1}{n^2}}$$

Door nu gebruik te maken van een verdubbelingsformule voor goniometrische functies (namelijk $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$) kun je deze limiet herleiden met behulp van een standaardlimiet. Deze limiet blijkt dan gelijk te zijn aan $-\frac{1}{2}$ en de gevraagde limiet is dus $e^{-0,5} \approx 0,60653066$

Hoofdstuk 6: Naar het hart van het web

20: iteraties herhalen

1 **a.** 40, 70, 55, 62.5, 58.75, 60.625, ... convergeert naar 60.
b. 6, 11, 3.5, 14.75, -2.125, 23.1875, ... convergeert niet.
c. 1, 1.732, 1.932, 1.983, 1.996, 1.999, ... convergeert naar 2.
d. 0, 1, 0.540, 0.858, 0.654, 0.793, ... convergeert naar 0.739085...
e. 1, 0.841, 0.746, 0.678, 0.628, 0.587, ... convergeert naar 0.
f. 1, 1.935, 2.149, 1.926, 2.156, 1.917, ... convergeert niet (springt op den duur tussen 1.82... en 2.22....)
g. 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1,... convergeert niet
h. 2, 1.5, 1.667, 1.6, 1.625, 1.615, 1.619, 1.618, ... convergeert naar 1.6180339..
i. 2, 2.5, 2.9, 3.245, 3.553, 3.834, 4.095, 4.339, ... convergeert niet

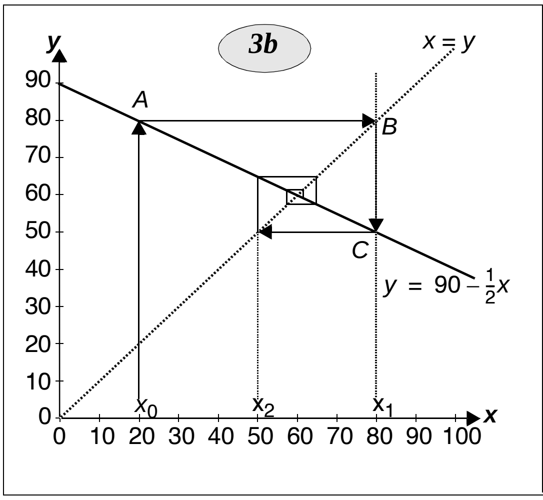
Een willekeurig gekozen andere startwaarde geeft in het algemeen hetzelfde gedrag.
Uitzonderingen vind je door te onderzoeken of de rij constant kan zijn (stel $u_1 = u_0$).
als je bij **b** kiest $u_0 = 8$, ontstaat er een constante (en dus convergente) rij: 8, 8, 8, 8, ...
als je bij **f.** een geheel veelvoud van π als startwaarde kiest, zijn alle termen vanaf u_1 gelijk aan 0;
als je bij **g** de startwaarde $-\sqrt{2}$ kiest, krijg je een constante (convergente) rij;
ook bij **h** izijn er twee startwaarden , waarbij de rij constant is; voor één van die startwaarden (namelijk $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} = -0,6180339\ldots$) geeft dit een andere limiet;

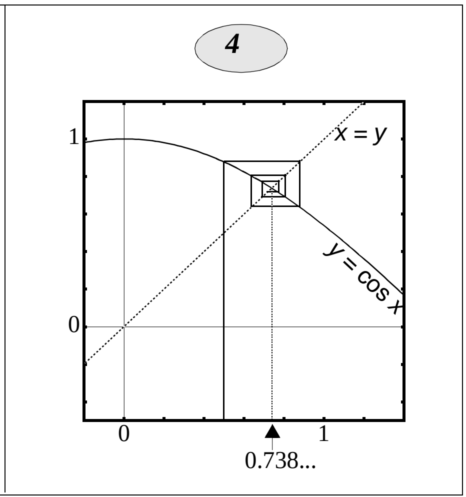
2 Ja: $90 - \frac{1}{2}\,60 = 60$, $\sqrt{2+2} = 2$, $\cos(0.739085\ldots) = 0.739085\ldots$, $\sin(0) = 0$.

$$1 + \frac{1}{1,6180339\ldots} = 1,6180339\ldots \quad \text{ofwel: } 1 + \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5},$$

21: Iteratiecyclus en spinneweb

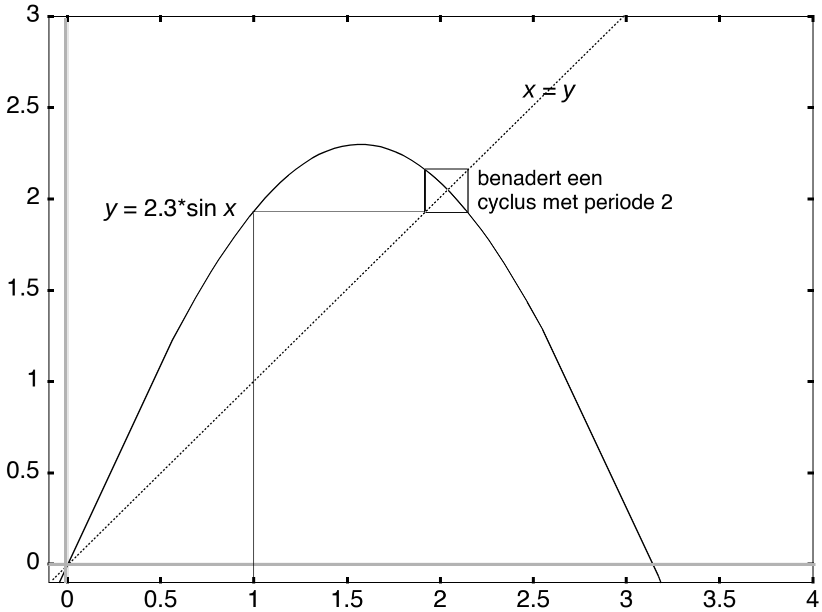
3 **a.** Rekenstap
b. Zie figuur.
c. Idem.
d. (60 , 60)





4 Zie figuur.

5



6 Vergelijk de hellingen van de grafieken van $y = \cos(x)$ en $y = 2.3 \sin(x)$ in de buurt van de dekpunten. De tweede grafiek is steiler in de buurt van het dekpunt dan de eerste.

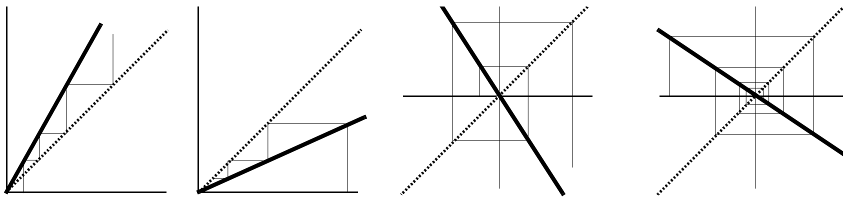
8 **d.** limiet = 2

9 **a.** limiet = 1.6180339...
b. limiet = 0.5
c. rij is periodiek: 0, -3, 3, 0, -3, 3, ...
d. limiet = 1.4142135...
e. geen limiet (er ontstaat chaos)

10 **a.** De trapvorm krijg je bij een stijgende grafiek.
De spiraalvorm krijg je bij een dalende grafiek.

11 **a.** Er ontstaat een trap als $a > 0$ (maar „ 1) en een spiraal als $a < 0$ (maar „ -1).

b. Een meetkundige (of exponentiële) rij. De rij convergeert als a tussen -1 en 1 ligt.



$a > 1$ $\quad$ $0 < a < 1$ $\quad$ $a < -1$ $\quad$ $-1 < a < 0$

22: convergentie: wanneer, waarom en waarheen?

12 **a.** De spiraal is buitenwaarts gericht en de afstand tot het snijpunt met de lijn $y = x$ (het 'hart' van de spiraal) wordt steeds groter. Omdat 8 het dekpunt is, ontstaat er bij keuze $u_0 = 8$ een constante rij en die convertgeert natuurlijk wel.

b. $20 + 1\frac{1}{2}x = x$ geeft $x = -40$; de eerste rij convergeert alleen als $u_0 = -40$. In de andere gevallen krijg je een trap als WEB-grafiek is een trap met treden die onbeperkt hoog worden.
De tweede rij convergeert voor *elke* waarde van u_0 naar het dekpunt 40. (Nu krijg je een trap met treden die onbeperkt laag worden).

13 $x = 90 - \frac{1}{2}x$ heeft één oplossing ($x = 60$) en $a = -\frac{1}{2}$, dus $|a| < 1$, dus aan de voorwaarden is voldaan. De rij convergeert dus naar 60 en het verschil met 60 wordt bij elke stap gehalveerd.

14 **a.** De richtingscoëfficiënt is gelijk aan $\frac{Dy}{Dx}$, dus $a = \frac{-|AF|}{|FD|}$, waaruit volgt $|a| = \frac{|AF|}{|FD|}$.

b. $|AF| = u_{n+1} - d \quad |FD| = d - u_n$

c. Uit **a.** volgt $|AF| = |a| \ |FD|$.
Invullen geeft: $u_{n+1} - d = |a| \ (d - u_n)$, dus ook $|u_{n+1} - d| = |a| \ |u_n - d|$.
Elke stap wordt het verschil met $|a|$ vermenigvuldigd, dus $|u_n - d| = |a|^n |u_0 - d|$.

15 Als je met absolute waarden werkt, gaat het bewijs net zo. Ook nu is $|AF| = |u_{n+1} - d|$ en $|FD| = |u_n - d|$.

16 Bij opgave **14** ontstaat een spiraalvorm, bij opgave **15** een trapvorm.

23: de contractiestelling in het algemeen

17 **a.** *f* hoeft geen lineaire functie te zijn, maar moet wel binnen het betreffende interval differentieerbaar zijn. *f* hoeft niet precies één dekpunt te hebben, maar wel in dat interval één dekpunt.

b. Elke lineaire functie is differentieerbaar; als $|a| < 1$ dan snijdt de grafiek van *f* de lijn $y = x$ in één punt; $\left|\frac{f(x) - f(d)}{x - d}\right| = |a|$, dus voor *m* kan $|a|$ gekozen worden.

18 **a.** $f(2) = \sqrt{6 - 2} = 2$.

b. $u_0 = 0$, dus $u_1 = \sqrt{6}$ en dat getal ligt tussen 0 en 6. Bij iedere term die tussen 0 en 6 ligt, ligt de

opvolger tussen 0 en $\sqrt{6}$, dus zeker tussen 0 en 6 (*) . Je weet: u_1 tussen 0 en 6, dus volgens (*) u_2 tussen 0 en 6, dus volgens (*) u_3 tussen 0 en 6, enzovoort. Alle termen van de rij liggen dus tussen 0 en 6.
Voor de scherpslijpers: stel dat er termen zijn die niet tussen 0 en 6 liggen. Dan moet er een term met kleinste rangnummer zijn, die niet tussen 0 en 6 ligt. De daaraan voorafgaande term ligt dan wel tussen 0 en 6 , maar dan moet volgens (*) de opvolger daarvan ook tussen 0 en 6 liggen en zo bereik je een tegenspraak!

c. De koorde tussen (2, 2) en (6, 0) loopt steiler omlaag dan elke andere koorde tussen (2, 2) en een punt van de grafiek van f op het interval [0, 6]. $\left|\frac{0-2}{6-2}\right| = 0.5$, dus voor m kun je 0.5 kiezen.

d. $|u_{10} - 2| = |1.999998244 - 2| = 0.000001756$, dus veel kleiner dan 0.00195.

19 Op het interval [1, 2] is $\left|\frac{f(x)-2}{x-2}\right|$ maximaal voor $x = 1$, dus je kiest $m = \left|\frac{\sqrt{2}-2}{1-2}\right| = 2 - \sqrt{2}$.

$|u_{100} - 2| \le (2-\sqrt{2})^{100}\ |u_0 - 2| = (2-\sqrt{2})^{100} \approx 6\ 10^{-24}$.

20 a. $\frac{|AF|}{|FD|} = \left|\frac{f(u_n) - f(d)}{u_n - d}\right| \le m$.

b. $|AF| = |u_{n+1} - d|$ en $|FD| = |u_n - d|$.

c. Uit $|AF| \le m\ |FD|$ volgt $|u_{n+1} - d| \le m\ |u_n - d|$. Omdat elke stap het verschil met hoogstens m wordt vermenigvuldigd, is het verschil na n stappen met hoogstens m^n vermenigvuldigd.

24: zwijnenjacht op de GR

21 a.
b. 150, 169, 182, ...
c. Nee
d. De kudde stabiliseert zich dan op ongeveer 163 zwijnen.
e.
f. Nee, de kudde stabiliseert zich op 140 zwijnen.
g. De kudde sterft uit.

22 a. Het dekpunt van $f(x) = 1.5x\left(1 - \frac{x}{600}\right)$ vind je met $x = 1.5x\left(1 - \frac{x}{600}\right)$, dus $x = 200$.

$f'(x) = 1.5 - \frac{x}{200}$, dus $f'(200) = 0.5$.

Het aantal zwijnen stabiliseert zich op 200 als er niet gejaagd wordt.

b. De dekpunten van bijvoorbeeld $f(x) = 1.5x\left(1 - \frac{x}{600}\right) - 21$ zijn 60 en 140.

$f'(60) = 1.2$ en $f'(140) = 0.8$. 60 is geen stabiel evenwichtspunt, 140 wel. Er treedt dus evenwicht op (140 dieren), maar als het startaantal onder de 60 ligt, sterft de kudde uit.

c. Hoe groter de jacht, des te lager de grafiek van f ligt. Als de jacht erg groot is, heeft de grafiek van f geen dekpunt meer en sterft de kudde uit. De grens ligt bij het aantal a waarvoor geldt: de functie

$f(x) = 1.5x\left(1 - \frac{x}{600}\right) - a$ raakt de lijn $y = x$. In het raakpunt is de helling 1, dus

$1.5 - \frac{x}{200} = 1$, waaruit volgt $x = 100$. $f(100) = 100$ geeft 150 $\frac{5}{6} - a = 100$, dus $a = 25$.

Meer dan 25 zwijnen per jaar afschieten is dus fataal voor de kudde.

d. Het stabiele evenwicht ligt rechts van de bij **c.** gevonden waarde, dus het evenwichtsniveau is minstens 100, dit is de helft van de 200 zwijnen bij geen jacht.

e. Doordat de aanwas van de kudde minder is dan het aantal dieren dat geschoten wordt, zal de kudde afnemen. Hoe minder zwijnen er zijn, des te groter is het verschil en des te sneller neemt de kudde dus af.

23 De grafiek van *f* is steeds een parabool door (0, 0) en (max. aantal, 0), die door de jacht omlaaggeschoven wordt. De helling van die parabool in (0, 0) is gelijk aan de factor; als deze factor groter dan 1 is, snijdt de parabool ‘zonder jacht’ de lijn $y = x$ dus in een tweede punt, waarbij convergentie optreedt. Als de parabool zover omlaag geschoven wordt tot hij met de lijn $y = x$ geen gemeenschappelijk punt meer heeft, dan is er geen convergentie meer en sterft de kudde uit.

Hoofdstuk 7:
Rijen van Sommen & Sommen van Rijen

25: Rijen van sommen

1 1 7 21 35 35 21 7 1 en 1 8 28 56 70 56 28 8 1.

2 **a.** 1, 2, 4, 8, 16, ... De rij $u_n = 2^n$.

b. 1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 1 + (1 + 5) + (5 + 10) + (10 + 5) + (5 + 1) + 1.
De zesde rij is met de Pascalregel gemaakt uit de vijfde rij, waarbij elk getal van de vijfde rij twee keer gebruikt wordt.

c. $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 1024 = \sum_{k=0}^{10} 2^k = \frac{2^{11} - 1}{2 - 1} = 2047$.

d. Het patroon is symmetrisch: behalve de bovenste 1 komt elk oneven getal twee keer voor. De som is dus oneven.

3 **a.** 0, 0, 0, 0, ... Elke term is gelijk aan 0.

b. 1 - 6 + 15 - 20 + 15 - 6 + 1 = 1 - (1 + 5) + (5 + 10) - (10 + 10) + (10 + 5) - (5 + 1) + 1.
Elk getal uit de vijfde rij komt twee maal voor: één keer met een plusteken en één keer met een minteken. De som is dus gelijk aan 0.

4 Bijvoorbeeld voor het getal 20 in rij 6 van de driehoek van Pascal geldt:
20 = 10 + 10 = (4 + 6) + 10 = ((1 + 3) + 6) + 10.

5 De somrij is de rij der kwadraten: $s_n = n^2$.

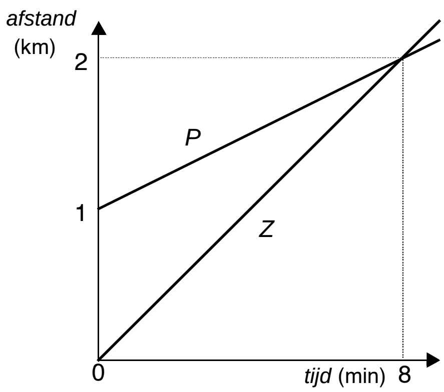
6 $s_n = \sum_{n=0}^{n} 2^n = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1$.

7 $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}k(k+1) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}\ \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}n(n+1)$.

Uitwerken geeft $s_n = (n+1)\left(\frac{1}{12}n(2n+1) + \frac{1}{4}n\right) = (n+1)\left(\frac{1}{6}n^2 + \frac{1}{3}n\right) = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$.

26: Sommen van meetkundige rijen

8 Na 2 km haalt Z zijn vader in:



9 **a.** $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

b. De limiet van v_n is 0.

c. $p_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

d. De limiet van p_n is 2.

10 Als het totale vierkant oppervlakte 1 heeft, is het verdeeld in rechthoeken met oppervlakte $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$

Dus $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 1$.

11 De figuur is gemaakt door telkens de middelste driehoek in vier nieuwe driehoeken te verdelen. Als de totale driehoek oppervlakte 1 heeft, zijn er dus drie driehoeken met oppervlakte $\frac{1}{4}$, drie met opper-vlakte $\frac{1}{16}$, drie met oppervlakte $\frac{1}{64}$, enz. Dus: $\frac{3}{4} + \frac{3}{16} + \frac{3}{64} + \frac{3}{256} + \ldots = 1$.

12 a. $\lim_{n \to \infty} \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$, $\lim_{n \to \infty} \dfrac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} = \dfrac{1}{3/4} = \frac{4}{3}$.

b. Het resultaat voor $r = \frac{1}{2}$ klopt met het resultaat van opgave **10** (want 2 - 1 = 1).

Het resultaat voor $r = \frac{1}{4}$ klopt met opgave **11** (want als je voor $\frac{3}{4} + \frac{3}{16} + \frac{3}{64} + \frac{3}{256} + \ldots$ de beginterm 3 plaatst is volgens **11** het resultaat 4 en je kunt die som ook schrijven als 3 $\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \ldots\right)$

13 a. De termen worden willekeurig groot, de som daarvan dus ook.

b. Bij de rij 1, -2, 4, -8, ... hoort de somrij 1, -1, 3, -5, ... Deze rij heeft geen limiet, dus de rij met reden -2 is niet sommeerbaar.

14 a. $\frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$ en $\frac{5}{8} + \frac{1}{16} = \frac{11}{16}$.

c. $\lim_{n \to \infty} \dfrac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{1}{1\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$.

15 a. Ja, de limietsom is $\dfrac{1}{1 - 0{,}9} = 10$.

b. Voor $r = 1.1$ is de rij niet sommeerbaar.

16 a. $-1 < r < 1$.

b. De limietsom is $\dfrac{1}{1 - r}$.

17 De somrij van de rij 1, -1, 1, -1, ... is 1, 0, 1, 0, ... Deze rij heeft geen limiet.

18 a. $s_n = a\dfrac{1-r^{n+1}}{1-r}$.

b. $-1 < r < 1$.

c. $\lim\limits_{n \to \infty} a\dfrac{1-r^n}{1-r} = a\dfrac{1}{1-r} = \dfrac{a}{1-r}$.

19 a. $a = 5$ en $r = \frac{3}{5}$ dus de rij is sommeerbaar met limietsom $\dfrac{5}{1-\frac{3}{5}} = 12\frac{1}{2}$.

b. $a = 2$ en $r = -\frac{1}{2}$, dus de rij is sommeerbaar met limietsom $\dfrac{2}{1+\frac{1}{2}} = 1\frac{1}{3}$.

c. $r = -2$, dus deze rij is niet sommeerbaar.

d. $a = 0.3$ en $r = 0.1$, dus de rij is sommeerbaar met limietsom $\dfrac{0{,}3}{1-0{,}9} = 3$.

20 a. $\lim\limits_{n \to \infty} (\frac{8}{9})^n = 0$ dus er blijft 'niets' over.

b. Als het tapijt lengte 1 heeft, wordt de lengte van de rij $\frac{1}{3} + 8\ \frac{1}{9} + 64\ \frac{1}{27} + \ldots$

Dit is een meetkundige rij met $r = \frac{8}{3}$, dus de lengte van de rij gaat naar oneindig.

27: Een reken-meetkundige rij

21 a. $u_n = \dfrac{n}{2^{n-1}}$ voor $n = 1, 2, 3, \ldots$

b. $u_n = u_{n-1} + \dfrac{n}{2^{n-1}}$.

22 a. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots = 2$.

b. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 1$.

c. De limietsom van de rij is $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots = 4$.

23 Als $r \le -1$ of $r \ge 1$ dan is de rij 1, r, r^2, r^3, ... niet sommeerbaar, dus de rij 1, $2r$, $3r^2$, $4r^3$, ... ook niet

24 a. $\dfrac{1}{1-r} + \dfrac{r}{1-r} + \dfrac{r^2}{1-r} + \ldots = \dfrac{1}{1-r}\ (1 + r + r^2 + \ldots) = \dfrac{1}{1-r}\ \dfrac{1}{1-r} = \dfrac{1}{(1-r)^2}$.

b. $\dfrac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 4$.

25 b. $(1-r)S_n = \dfrac{1-r^n}{1-r} - nr^n$ dus $S_n = \dfrac{1-r^n}{(1-r)^2} - \dfrac{nr^n}{1-r}$.

c. $\lim\limits_{n \to \infty}\left(\dfrac{1-r^n}{(1-r)^2} - \dfrac{nr^n}{1-r}\right) = \dfrac{1-0}{(1-r)^2} - \dfrac{0}{1-r} = \dfrac{1}{(1-r)^2}$. (Volgens hoofdstuk 4 gaat nr^n naar 0)

26 $\dfrac{d}{dr}(1-r)^{-1} = -(1-r)^{-2}\ \ -1 = \dfrac{1}{(1-r)^2}$ dus dat klopt.

28: Extra: kansen en limietsommen

27 a. $p_n = (\frac{1}{2})^n$

b. $\frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^3 + (\frac{1}{2})^4 + ... = \dfrac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$

c. De verwachtingswaarde is de som van een reken-meetkiundige rij en die is hier gelijk aan 2**.**

28 Neem aan dat ieder gezin net zo lang doorgaat met kinderen nemen tot er een meisje wordt geboren. Onder de gezinnen met kinderen krijg je dan de series M, JM, JJM, ..., met kansen $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ...$.

Het verwachte (gemiddeld) aantal kinderen per gezin is dan $\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 3 + \frac{1}{16} \cdot 4 + ... = 2$

Het verwachte (gemiddelde0 aantal jongens per gezin is dan $\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{8} \cdot 2 + \frac{1}{16} \cdot 3 + ... = 1$ en dat is dus net als in de ‘normale’ situatie de helft van het totaal.

29 a. $p_n = (\frac{5}{6})^{n-1} \cdot \frac{1}{6}$ en $\frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + (\frac{5}{6})^2 \cdot \frac{1}{6} + (\frac{5}{6})^3 \cdot \frac{1}{6} + ... = \frac{1}{6} \cdot (1 + \frac{5}{6} + (\frac{5}{6})^2 + (\frac{5}{6})^3 + ...) = \dfrac{\frac{1}{6}}{1 - \frac{5}{6}} = 1$

b. de verwachtingswaarde is gelijk aan: $\frac{1}{6} (1 + \frac{5}{6} \cdot 2 + (\frac{5}{6})^2 \cdot 3 + (\frac{5}{6})^3 \cdot 4 + ...) = \frac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{(1 - \frac{5}{6})^2} = 6$

30 a. $p + qp + q^2p + q^3p + ... = p\,(1 + q + q^2 + q^3 + ...) = p \cdot \dfrac{1}{1-q} = p \cdot \dfrac{1}{p} = 1$

b. $p + 2qp + 3q^2p + 4q^3p + ... = p\,(1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + ...) = p \cdot \dfrac{1}{(1-q)^2} = p \cdot \dfrac{1}{p^2} = \dfrac{1}{p}$

31 a. Er zijn 36 verschillende uitkomsten mogelijk bij het werpen met twee dobbelstenen:
(1 , 1), (1 , 2) , ..., (1, 6), (2 , 1), ... , (2 , 6), ... , ... , ... , (6 , 1) , ... , (6 , 6). Daarvonder hebben er zes de som 7 en vijf de som 6.

b. P(A wint in de derde ronde) = $\frac{31}{36} \cdot \frac{30}{36} \cdot \frac{5}{36} \gg 0{,}0997$

c. P(A wint) = $\frac{5}{36} + \frac{31}{36} \cdot \frac{30}{36} \cdot \frac{5}{36} + (\frac{31}{36})^2 \cdot (\frac{30}{36})^2 \cdot \frac{5}{36} + ... = \frac{5}{36} (1 + r + r^2 + ...)$ met $r = \frac{31 \cdot 30}{36^2}$.

Deze kans is dus gelijk aan $\frac{5}{36} \cdot \dfrac{1}{1 - \frac{31 \cdot 30}{36^2}} = \frac{5 \cdot 36}{366} = \frac{30}{61}$

29: De harmonische rij

32 Als de termen van de rij u_n op den duur niet willekeurig klein worden, kan de somrij niet willekeurig dicht naar een limietsom naderen.

33 a. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, ...$

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, ...$
Voeg 5 termen $\frac{1}{5}$ toe, 6 termen $\frac{1}{6}$, 7 termen $\frac{1}{7}$, ...

34 a. Voor regel 3: $\frac{1}{5} + \frac{1}{20} = \frac{1}{4}$ en $\frac{1}{20} + \frac{1}{30} = \frac{1}{12}$. Voor regel 4 klopt het ook.

b. Regel 7 wordt: $\frac{1}{8}\quad \frac{1}{56}\quad \frac{1}{168}\quad \frac{1}{280}\quad \frac{1}{280}\quad \frac{1}{168}\quad \frac{1}{56}\quad \frac{1}{8}$.

Regel 8 wordt dan: $\frac{1}{9}\quad \frac{1}{72}\quad \frac{1}{252}\quad \frac{1}{504}\quad \frac{1}{630}\quad \frac{1}{504}\quad \frac{1}{252}\quad \frac{1}{72}\quad \frac{1}{9}$.

35 a. Eerst een voorbeeld: $s_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{5}) = 1 - \frac{1}{5}$.

Algemeen: $s_n = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \dots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}$.

b. $\lim_{n \to \infty} (1 - \frac{1}{n+1}) = 1$

c. De derde diagonaalrij heeft limietsom $\frac{1}{2}$, de vierde heeft limietsom $\frac{1}{3}$.

36 a. $u_n = u_{n-1} + \frac{1}{n}$

37 a. De getallen zijn zo geschreven dat de teller van de n^{de} term gelijk is aan n.
Na $\frac{6}{42}$ komen $\frac{7}{56}, \frac{8}{72}, \frac{9}{90}, \dots$

b. Deze zelfde techniek is in opgave **22** toegepast op de reken-meetkundige rij.

c. Rij D is op de eerste term na gelijk aan rij C, dus de limietsom van D is $\frac{1}{2}$ minder dan de limietsom van C. Op dezelfde manier voor de rijen E, F, ...

38 a. B is op de eerste term na de harmonische rij, dus de limietsom van B is gelijk aan $S - 1$.

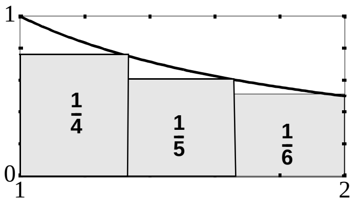
b. De limietsommen van C, D, ... zijn juist de termen van de harmonische rij, dus de limietsom van B is S.

30: Som en integraal

39 $\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$.

40 a. $\frac{1}{2} \quad \frac{1}{1\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$ en $\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

b.



c. x-coördinaten van de rechts-boven-hoekpunten van de rechthoeken : $1 + \frac{1}{m}, 1 + \frac{2}{m}, 1 + \frac{3}{m}, \dots$

De y-coördinaten zijn $\frac{1}{1 + \frac{1}{m}} = \frac{m}{m+1}, \frac{1}{1 + \frac{2}{m}} = \frac{m}{m+2}, \dots$

De oppervlakten zijn dus $\frac{m}{m+1} \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{m+1}, \frac{m}{m+2} \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{m+2}, \dots$

41 a. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{16}$ ligt tussen $1 + 4 \quad \frac{1}{2}$ en $1 + 4 \quad \ln 2$, dus tussen 3 en 4.

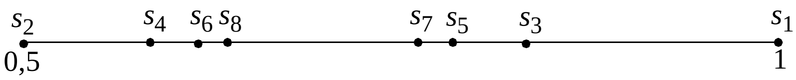
b. Evenzo ligt $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{1024}$ tussen $1 + 10 \quad \frac{1}{2}$ en 1+ 10ln(2), dus tussen 6 en 8.

c. Je hebt $2^{20} = 1048576$ termen nodig $1 + 20 \quad \frac{1}{2} = 11$ en 1 + 20ln(2) = 13.8629,,,.

d. Na 2^{100} » $1{,}27 \;\; 10^{30}$, want: $1 + 100 \;\; \frac{1}{2} = 51$ en $1 = 100\ln 2 = 70.3147....$.

e. De som van 2^n termen *van* de harmonische rij overtreffen het getal $1 + n \;\; \frac{1}{2}$ getal en gaan dus onherroepelijk naar oneindig. En let op de plaatjes bij de opgave. Elk nieuw plaatje vraagt om twee keer zoveel termen als bij het voorafgaande plaatje; de oppervlakte neemt echter slechts toe met het bedrag ln 2 (ongeveer 0,69). Dit verklaart het trage tempo van naar oneindig gaan.

42



43 a. Met behulp van het tweede plaatje op bladzijde 99 zie je dat dit rechthoekje het verschil is van twee rechthoekjes met oppervlakte $\frac{1}{3}$ en $\frac{1}{4}$.

b. De oppervlakten van die figuren zijn $\frac{1}{5} - \frac{1}{6}$ en $\frac{1}{7} - \frac{1}{8}$.

c. In de vierde figuur komen er rechthoekjes bij met oppervlakten $\frac{1}{9} - \frac{1}{10}$, $\frac{1}{11} - \frac{1}{12}$, $\frac{1}{13} - \frac{1}{14}$ en $\frac{1}{15} - \frac{1}{16}$.

d. De limietsom van de oppervlakten van de rechthoekjes is gelijk aan de oppervlakte onder de grafiek, dus $(1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} - \frac{1}{6}) + ... \;=\; \ln 2$.

sum(seq(((-1)^(X+1))/X, X, 1, 30)) = 0,6767581377. Het verschil met ln(2) is ongeveer 0,016.

44 De som van de eerste 1024 termen van de harmonische rij geven een 'bovenschatting' van de oppervlakte onder de grafiek van $y = \frac{1}{x}$ tussen $x = 1$ en $x = 1025$.

Die oppervlakte is gelijk aan: $\int_1^{1025} \frac{1}{x}dx = \ln 1025 - \ln 1 = \ln 1025$

Je kunt even goed zeggen dat die oppervlakte een 'onderschatting' is voor de som van van de eerste 1024 termen van de harmonische rij.

45 a. Een primitieve functie van $f(x) = \frac{1}{x}$ is $F(x) = \ln(x)$, dus $\lim\limits_{n \text{ fi } ¥} \int_1^n \frac{1}{x}dx = \lim\limits_{n \text{ fi } ¥} (\ln n) = ¥$.

In de figuur op bladzijde 100 zie je dat de totale oppervlakte van n - 1 rechthoekjes groter is dan de oppervlakte onder de grafiek tussen 1 en n. Aangezien voor n fi ¥ de oppervlakte onder de grafiek naar oneindig gaat (zie **a**) , gaat ook de som van de harmonische rij naar oneindig.

46 Een primitieve functie van $f(x)) = x^{-2}$ wordt gegeven door $F(x) = -x^{-1}$, dus:

$$\int_1^n \frac{1}{x}dx = F(n) - F(1) = -\frac{1}{n} - (-1) = 1 - \frac{1}{n} \text{ en } \lim_{n \text{ fi } ¥} \int_1^n \frac{1}{x^2}dx = \lim_{n \text{ fi } ¥} (1 - \frac{1}{n}) = 1 \quad .$$

47 a. Een primitieve functie van $f(x) = e^{-x}$ is $F(x) = -e^{-x}$, dus

$$\int_0^{¥} e^{-x}dx = \lim_{n \text{ fi } ¥} (-e^{-n} - (-e^{-0})) = 1 .$$

b. Een primitieve functie van $f(x) = x^{-1\frac{1}{2}}$ is $F(x) = -2x^{-\frac{1}{2}}$, dus

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \lim_{n \to \infty}\left(-2n^{-\frac{1}{2}} - (-2)\right) = 2\ .$$

48 a. De oppervlakte van de eerste n - 1 rechthoekjes is kleiner dan de oppervlakte onder de grafiek, dus:

$\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} < \int_1^n \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$, en dus ook : $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1 + \int_1^n \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$.

Uit $\int_1^n \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \left(-\frac{1}{n} - (-1)\right) = 1 - \frac{1}{n}$ volgt dat de som van de eerste n omgekeerde kwadraten kleiner is dan $2 - \frac{1}{n}$.

b. Vanwege $\lim_{n \to \infty}\left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2$

49 a. 1.6447839

b. De rechthoekjes voorbij $x = 100$ liggen onder de grafiek van $y = \frac{1}{x^2}$.

$$\int_{100}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{n \to \infty}\left(-\frac{1}{n} - \left(-\frac{1}{100}\right)\right) = \frac{1}{100}\ .$$

c. 1.644934067

Hoofdstuk 8: Irrationale getallen

31: een getal van formaat

1 a. De hoogte van A3 = $2b$ en de breedte van A3 = h.
Uit de gelijkvormigheid van A4 en A3 volgt: $b : h = h : 2b$ ofwel $h^2 = 2b^2$.

b. Breedte = 210 mm en hoogte = 297 mm. $297^2 = 88209$ en $2 \cdot 210^2 = 88200$; ze voldoen dus niet aan de vergelijking.

c. A2 heeft afmetingen 420 bij 594 mm. De oppervlakte hiervan is 0.24948 m^2.
Vier krantenpagina's samen hebben een oppervlakte van 0.99792 m^2 en dat is vrijwel gelijk aan 1 m2. (Opmerking: de rechthoek die je krijgt door breedte en hoogte van A2 met 2 te vermenigvuldigen heeft het formaat A0: de officiële afmetingen hiervan zijn 841 bij 1189 en zo heeft A0 een oppervlakte van 0.999949 m^2).

2 Het laatste cijfer van b^2 is 6 (want $4^2 = 16$) en van $2b^2$ dus 2. Het laatste cijfer van h^2 is 4.
Als je op de GR het quotiënt $h^2/2b^2$ berekent vind je 2.000004952

3 a. Stel dat h_0 oneven is, dan is $h_0{}^2$ dat ook, want $(2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$.

Omdat h_0^2 echter even is, moet h_0 wel even zijn.

b. Als h_0 en b_0 beide even waren, dan zou je zowel het grote als de beide kleine tegelvierkanten in vieren kunnen delen (zonder tegels te breken) en dan zou er dus een kleinere oplossing zijn.

c. Als h_0 even is, dan $h_0 = 2n$, dus $h_0^2 = 4n^2$ en bijgevolg $b_0^2 = 2n^2$ ofwel b_0^2 is even.

4 $\frac{99}{70} = 1{,}4142857...$ en komt in 4 decimalen achter de ‘komma’ overeen met de benadering van $\sqrt{2}$

5 **a.** 841 zwarte en 840 witte velden. 841 is het kwadraat van 29 en is $\frac{1}{2}$ meer dan de helft van het kwadraat van 41. De breuk $\frac{41}{29}$ benadert $\sqrt{2}$ en inderdaad: $\frac{41}{29}$ » 1,4137931

b. $99^2 = 9801$; het bord heeft 4901 zwarte en 4900 witte velden. Nu vormen de witte velden een vierkant (van 70 bij 70). Zoals je in **4** al thebt gezien is $\frac{99}{70}$ een rationale benadering van $\sqrt{2}$.

6 $\frac{100}{71}$ » 1,4084507 en $\frac{98}{69}$ » 1,4202899; de eerste is duidelijk te laag, de tweede te hoog.

7 **a.**

n	z_n	d_n	z_n^2	d_n^2	$d_n^2 - 2z_n^2$
0	1	1	1	1	-1
1	2	3	4	9	1
2	5	7	25	49	-1
3	12	17	144	289	1
4	29	41	841	1681	-1
5	70	99	4900	9801	1
6	**169**	**230**	**28561**	**57121**	**-1**
7	**408**	**577**	**166464**	**332929**	**1**
8	**985**	**1393**	**970225**	**1940449**	**-1**

b. $\frac{1393}{985}$ » 1,4142132

c. Zes decimalen achter de ‘komma’.

8 **a.** $(2z_8 + d_8)^2 - 2(z_8 + d_8)^2 = 4z_8^2 + 4z_8d_8 + d_8^2 - 2z_8^2 - 4z_8d_8 - 2d_8^2 = -d_8^2 + 2z_8^2$

b. Zie **a**; vervang de index 8 door de index n.

9 **a.**

$$q_n = \frac{d_n}{z_n} = \frac{2z_{n-1} + d_{n-1}}{z_{n-1} + d_{n-1}} = \frac{2 + \frac{d_{n-1}}{z_{n-1}}}{1 + \frac{d_{n-1}}{z_{n-1}}} = \frac{2 + q_{n-1}}{1 + q_{n-1}}$$

b. Neem $y(x) = \frac{2 + x}{1 + x}$

c. De vergelijking $\frac{2 + x}{1 + x} = x$ is gelijkwaardig met $x^2 = 2$ en heeft als positieve oplossing $\sqrt{2}$.

10 $\dfrac{2 + q_{n-1}}{1 + q_{n-1}} = \dfrac{1 + 1 + q_{n-1}}{1 + q_{n-1}} = \dfrac{1}{1 + q_{n-1}} + \dfrac{1 + q_{n-1}}{1 + q_{n-1}} = \dfrac{1}{1 + q_{n-1}} + 1$

11 a. $b_n = \frac{1}{2}\left(b_{n-1} + \frac{2}{b_{n-1}}\right)$

b. Neem $y(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$

c. De vergelijking $\frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) = x$ is gelijkwaardig met $x^2 = 2$ en heeft als positieve oplossing $\sqrt{2}$.

d. Let op de steilheid van beide grafieken rond het dekpunt.

De helling van de grafiek van $y(x) = \frac{2+x}{1+x}$ in het dekpunt is gelijk aan: $-\frac{1}{(1+\sqrt{2})^2}$ en dat is ongeveer -0.17.

De helling van de grafiek van $y(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$ in het dekpunt is precies 0, dus de grafiek is locaal horizontaal. Daarom is de convergentie in het tweede geval ‘sneller’.
Opmerking: een dekpunt waarin de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk is aan 0, noemt men wel een ‘super-attractor’.

32: Repeterende en niet repeterende staarten

12 a. 0.3333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333...
Bijvoorbeeld $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{11}$

b. Ze zijn vanaf een zekere decimaal periodiek (repeterend)

13 b.

```
70 / 99.00... \ 1.4142857...
     70
     290
     280
      100
       70
       300
       280
        200
        140
         600
         560
          400
          350
           500
           490
            100
```

14 a. $\frac{11}{16} = \frac{11}{2^4} = \frac{5^4 \ 11}{5^4 \ 2^4} = \frac{625 \ 11}{10^4} = \frac{6875}{10^4} = 0{,}6875$

b. 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25, 32, 40, 50, 64, 80.
Dit zijn juist de getallen van de vorm $2^n 5^m$ met n, m geheel enŠ ‡ 0 die tussen 1 en 100 liggen.

15 De resten zijn stuk voor stuk > 0 en < n. Er zijn dus slechts $n - 1$ verschillende resten mogelijk.
Na ten hoogste n keer uitdelen moet een van de resten die al eerder is opgetreden, opnieuw komen!
Vanaf die rest gaat de staartdeling zich herhalen en de decimale ontwikkeling dus ook.

16 a. $\frac{0{,}147}{1 - 0{,}001} = \frac{147}{999}$

b. $\frac{13}{4} + \frac{147}{99900} = \frac{13\ \ 99900 + 4\ \ 147}{4\ \ 99900} = \frac{1299288}{399600}$

c. Je kunt een decimale ontwikkeling met een periodieke staart splitsen in een eindige decimale breuk (beginstuk) en een produkt van de vorm: ‘0.0...1 maal een zuiver periodieke breuk’
De zuiver periodieke breuk is de limietsom som van een meetkundige rij met als groeifactor een eindige decimale breuk (bepaald door het repeterende stuk).

Die limietsom bereken je via de formule $s = \frac{a}{1 - r}$ en omdat zowel a als r te schrijven zijn als een breuk met gehele teller en noemer, dus s dat ook. Als je s deelt door een macht van 10 is het resultaat ook een breuk met gehele teller en noemer.
Optelling van het beginstuk (geschreven als breuk met gehele teller en noemer) bij het vorige resultaat geeft ten slotte een breuk met gehele teller en noemer, dus een rationaal getal.

17

a. $\frac{5}{3}$

b. $\frac{56}{11}$

c. $\frac{9126}{999}$

d. $-\frac{1}{99}$

e. $\frac{14892}{9900}$

f. 2000

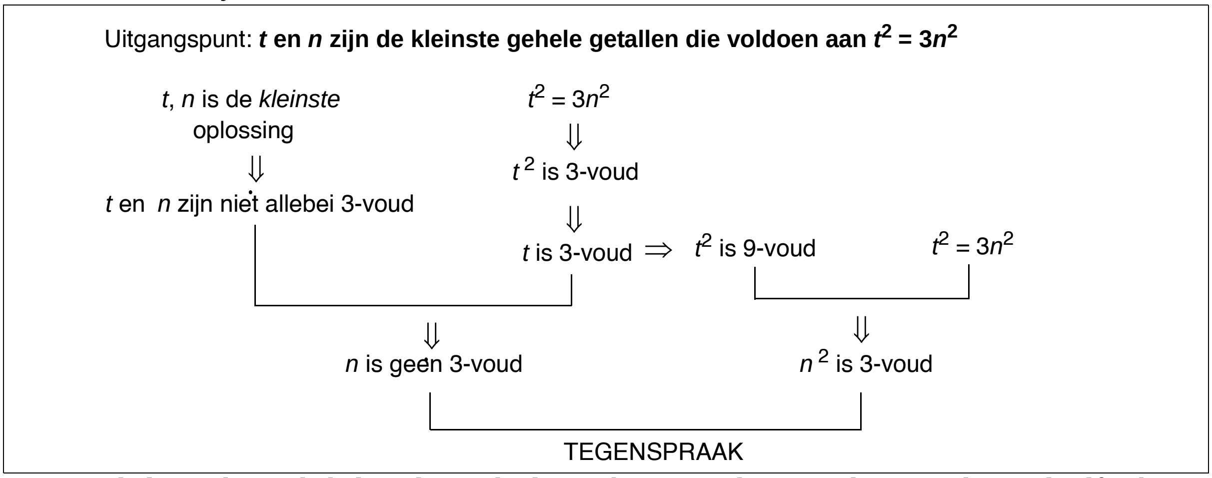
18 Als er twee verschillende punten waren, dan zou er tussen die punten een zekere afstand $d > 0$ moeten zijn. Omdat de lengten van de intervallen naar 0 convergeren, komt er in het ‘nest’ zeker een interval voor, waarvan de lengte kleiner is dan d en daarin kunnen onmogelijk die beide punten liggen.

19 b. Voor t zijn drie mogelijkheden: t = 3-voud óf t = 3-voud + 1 óf t = 3-voud + 2

Als $t = 3k$, dan $t^2 = 9k^2$, dat is een 3-voud.

Als $t = 3k + 1$, dan $t^2 = 9k^2 + 6k + 1$, dat is een 3-voud + 1

Als $t = 3k + 2$, dan $t^2 = 9k^2 + 6k + 4 = 9k^2 + 6k + 3 + 1$, dat is een 3-voud + 1
Conclusie: wil het kwadraat van een getal een 3-voud zijn, dan moet t wel een 3-voud zijn.
Nu het bewijs:



c. De belangrijkste schakel is: als een derde-macht van getal *even* is, dan moet dat getal zelf ook *even* zijn. Je kunt nu het bewijs van bladzijde 106 veranderen door alle kwadraten te vervangen door derde-machten. en door ‘is 4-voud’ te vervangen door ‘is 8-voud’. (Als je 4-voud laat staan is het natuurlijk ook goed!).

d.

Uitgangspunt: ***t* en *n* zijn de kleinste positieve gehele getallen die voldoen aan $10^n = 2^t$**
Een macht van 10 met een positief gehele exponent eindigt op een 0
Een macht van 2 met een positief gehele exponent eindigt op een 2 óf 4 óf 6 óf 8.
Er kunnen dus geen positieve gehele getallen *t* en *n* bestaan zó dat $10^n = 2^t$

20 a. Maak een web-grafiek met iteratie-functie: $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{3}{x})$. De positieve oplossing van de vergelijking $f(x) = x$ is gelijk aan $\sqrt{3}$. Als er sprake is van convergentie, dan moet de limiet gelijk zijn aan $\sqrt{3}$.

De helling van de grafiek van *f* in het punt met *x*-coördinaat $\sqrt{3}$ is gelijk aan 0. Als je een startwaarde kiest > $\sqrt{3}$, dan zijn alle volgende waarden ook > $\sqrt{3}$ en dan volgt de convergentie direct uit de contractie-stelling (in het gebied $x > \sqrt{3}$ liggen alle differentie-quotiënten tussen 0 en $\frac{1}{2}$.

Als je een startwaarde kiest tussen 0 en $\sqrt{3}$, dan kom je na één stap al bij een *x*-waarde > $\sqrt{3}$ en dan kun je weer de contractie-stelling toepassen.

b. Bij startwaarde 1 krijg je na 5 stappen: 1.732050808 en dat is een benadering van $\sqrt{3}$ in negen decimalen nauwkeurig.

33: Het gulden-snede getal

21 a.

rechthoek	breedte	lengte
R_0	1	1
R_1	1	2
R_2	2	3
R_3	3	5
R_4	5	8

b. Voor de rechthoeken geldt: $breedte\ van\ R_n = f_n = lengte\ van\ R_{n-1}$, en $lengte\ van\ R_n = lengte\ van\ R_{n-1} + breedte\ van\ R_{n-1}$, dus $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$.
Dit komt overeen met de regel voor de rij van Fibonacci.

22 a. $u_0 = \frac{1}{1} = 1$, $u_1 = \frac{2}{1} = 2$, $u_2 = \frac{3}{2}$, $u_3 = \frac{5}{3}$.

$$1 + \frac{1}{u_0} = 1 + \frac{1}{1} = 2 = u_1, \quad 1 + \frac{1}{u_1} = 1 + \frac{1}{2} = u_2, \quad 1 + \frac{1}{u_2} = 1 + \frac{1}{1\frac{1}{2}} = \frac{5}{3} = u_3 .$$

b. $1 + \dfrac{1}{u_n} = 1 + \dfrac{1}{\dfrac{f_{n+1}}{f_n}} = 1 + \dfrac{f_n}{f_{n+1}} = \dfrac{f_{n+1} + f_n}{f_{n+1}} = \dfrac{f_{n+2}}{f_{n+1}} = u_{n+1}$.

c. Voor het dekpunt geldt: $x = 1 + \frac{1}{x}$, dus $x^2 - x - 1 = 0$ met positieve oplossing $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Op de GR zie je dat de koorde tussen (1, 2) en ($\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$) steiler omlaag gaat dan een koorde van ieder ander punt met $1 £ x £ 2$ naar het dekpunt. $\dfrac{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}) - 2}{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}) - 1} » 0.1$, dus volgens de contractiestelling is de rij convergent.

d. Zie bij **c.**: ($\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$).

e. $u_{18} = 1.618033963$ en $u_{19} = 1.618033999$. u_{18} is kleiner en u_{19} is groter dan de limiet. Wegens de spiraalvorm van het WEB zijn de termen afwisselend groter en kleiner dan de limiet. Dus u_{231} is groter dan de limiet.

23 a. $t > 0$ en $t = 1 + \frac{1}{t}$, dus $t > 1$, dus $\frac{m}{n} > 1$, dus $m > n$

b. Uit $t = 1 + \frac{1}{t}$ volgt $\frac{m}{n} = 1 + \frac{n}{m}$ en dat is gelijkwaardig met $m^2 = mn + n^2$

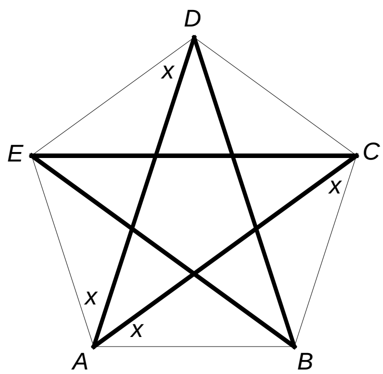
Anderzijds is $\frac{m}{n} = \frac{n}{m-n}$ gelijkwaardig met $m^2 - mn = n^2$ en dus ook met $m^2 = mn + n^2$.

24 $\frac{t-1}{1} = \frac{1}{t}$ $\qquad t - 1 = \frac{1}{t}$ $\qquad t = 1 + \frac{1}{t}$

25 De eerste cirkelboog heeft lengte $\frac{1}{2}p$. De volgende booglengten krijg je door achtereenvolgens te vermenigvuldigen met $\frac{1}{t}$, $\frac{1}{t^2}$, enz. De totale lengte is dus gelijk aan:

$$\tfrac{1}{2}p\left(1 + \frac{1}{t} + \left(\frac{1}{t}\right)^2 + \left(\frac{1}{t}\right)^3 + \dots\right) = \tfrac{1}{2}p\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{t}}\right) = \tfrac{1}{2}p\frac{t}{t-1} = \tfrac{1}{2}p\frac{t}{1/t} = \tfrac{1}{2}pt^2$$

26 a. Driehiek ABC is gelijkbenig (met $|AB| = |BC|$), dus
–BAC = –BCA (= x^o) en $2x + 108 = 180$, dus $x = 36$
Evenzo: –DAE = 36^o.
–DAC = $108^o - 36^o - 36^o = 36^o$.
De drie hoeken waarin –BAE door de beide diagonalen wordt verdeeld zijn dus aan elkaar gelijk.



b. De binnendeellijn in de grijze driehhoek maakt een hoek van 72^o met de overstaande zijde en daarom is de onderste driehoek ook gelijkbenig (hoeken 36^o, 72^o, 72^o),. Gevolg: lengte binnendeellijn = 1.

c. De grote driehoek heeft ook de hoeken 36^o, 72^o, 72^o en is dus gelijkvormig met de kleine driehoek aan de basis.

Gevolg: $\frac{x-1}{1} = \frac{1}{x}$ ofwel $x = 1 + \frac{1}{x}$ en dat is de vergelijking voor het gulden-snede getal t.

Conclusie: x = t.

d. De punten van de ster hebben ook de hoeken 36^o, 72^o, 72^o en zijn dus gelijkvormig met de grijze driehoek; basis en opstaande zijde verhouden zich dus als 1 : t.

e. Uit de vergelijking $t = 1 + \frac{1}{t}$, rekening houdend met t > o, volgt gemakkelijk: $t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$

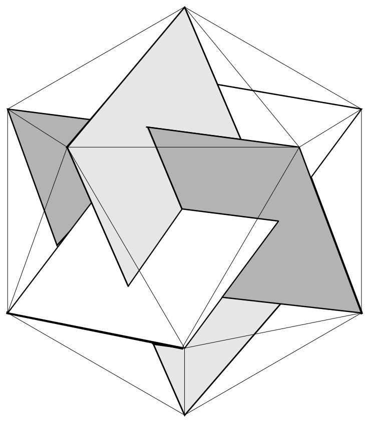
Bekijk de figuur bij de uitwerking van vraag **a.** de loodlijn uit B op AC gaat door het midden van AC. De lengte van AC is dus gelijk aan 2 cos(36^o) = $2\cos\left(\frac{1}{5}p\right)$. Anderzijds geldt: $|AC| = t$.

27 a. Stel de ribbe van het twintigvlak heeft lengte 1. De regelmatige vijfhoek, waarvan sprake is in de opgave, heeft dan zijden met lengte 1 en diagonalen met lengte t.
De zijden van de grijze rechthoek zijn dus 1 en t, dus de gulden rechthoek

b. Het twintigvlak heeft 30 ribben (immers: elk vlakje heeft 3 ribben, en elke ribbe ligt in 2 vlakjes). Er zijn dus 15 paren ‘overstaande ribben’ waarmee je een gulden rechthoek kunt maken.

28 a. Als je ‘touwtjes’ spant tussen de hoekpunten van de verschillende rechthoeken, ontstaat het regelmatige twintigvlak!

b. Het middelpunt van de drie vlakken is de oorsprong O. Laat het witte vlak het Oxy-vlak zijn.
Stel de afmetingen van de rechtoek op 2 en 2t, dan is het duidelijk dat de hoekpunten de coördinaten $(-t, -1, 0)$ hebben. Op dezelfde manier kunnen de beide andere rechthoeken worden behandeld.



34: Extra: kettingbreuken op de GR

29 a. Je krijgt:

```
 (2)
        1.414213562
fPart(Ans)
        .4142135624
Ans^-1
        2,414213562
```

b. Je krijgt steeds 2.414213562; dat geeft bij iedere stap een term 2 van de kettingbreuk.

c. Na 1.732050808 (is benadering $\sqrt{3}$) krijg je afwisselend 1.366025404 en 2.732050808 en dat geeft dus een afwisseling van de termen 1 en 2 in de kettingbreuk.

30 a. $\sqrt{3} - 1 = \frac{2}{1+\sqrt{3}}$ en dus: $\sqrt{3} = 1 + \frac{2}{1+\sqrt{3}}$

b. Een kwestie van invullen: je vervangt in de breuk bij **a** de vorm $\sqrt{3}$ door $1 + \frac{2}{1+\sqrt{3}}$ en vervolgens kunnen teller en noemer door 2 worden gedeeld

c. In de laatste vorm van **b** vervang je $\sqrt{3}$ door $1 + \frac{2}{1+\sqrt{3}}$.

31 Bijvoorbeeld: $\frac{8}{3} = 2 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2}} = [2; 1, 2]$

32 b. $3\frac{1}{7}$ of $\frac{22}{7}$

c. $3 + \cfrac{1}{7 + \frac{1}{15}} = 3 + \frac{15}{106}$. Vier decimalen achter de ‘komma’ zijn correct.

d. $3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + 1}} = 3 + \frac{16}{113}$. Zes decimalen zijn correct.

34 De betrekking is: $q_n = 1 + \frac{1}{q_{n-1}}$.

werkblad A: lijnen