Knelpunten en toekomstmogelijkheden voor de wiskunde in het VO

Aad Goddijn en Martin Kindt
Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

Summary
In this article some major problems in the mathematics curriculum for secondary education are identified, specially in the traditional fields of algebra and geometry. One problem concerns the average level of algebraic competence in upper secondary school that is too low for the demands of subjects like calculus; this is a.o. a consequence of recent changes in the curriculum in junior highschool. Mere adding of more exercises in junior highschool is not seen as a solution, but a change of focus from too much attention on 'realistic graphs' to the study of interesting number relations and their visualisation could be worth to explore. It is a natural way to strengthen the basic concept of variables and the more formal handling of expressions at the same time. In this way exercises become connected with problem situations and are less prone to deteriorisation into meaningless dull manipulation. Other problems concern the geometry curriculum. The geometry curriculum in the Netherlands takes the exploration of natural space as a starting point. It is generally felt that this part of the curriculum works well for the average and below-average students, but also that the approach is not provoking enough for the more able ones. Only at the end of secondary education is there room for the study of formal proof, and currently only for a small minority of students. The latter is recently explored. This is a recent curriculum change and as could be expected, opnions about it differ. Students concerned like to explore the beauty of tradional Euclidian geometry in the combination with modern applications like Voronoi-diagrams, but currently there is due to the (now completely defunct) wave to the New Math a lack of didactical tradition in this field and some teachers find things quite hard. In this article the authors argue for the use of more demanding realistic and formal geometric problems for the more able students in junior highschool, for the further strengthening of the use of computerprograms like Cabri in both junior and senior highschool and for the use of modern advanced applications of geometry in senior high school. Also a better connection between the geometric and algebraic part of the curriculum could be an improvement for both, based on their point of departure that mathematics is a continuing process of reflection which is to be learned by the students in a situation where arguing and listining are important activities, the authors conclude with a warning against the current trend to diminish the available time for teacher-student interaction and the shift to the so called 'studiehuis' were students are forced to work too much on their own.

1. Inleiding
Curriculumveranderingen wiskunde zijn in Nederland een regelmatig terugkerend verschijnsel. Wie wat langer bij het onderwijs betrokken blijft weet dat

wiskundeleerplannen sneller slijten dan generaties van het koninklijk huis. Belangrijke momenten in de laatste halve eeuw zijn:

- 1958: Invoering differentiaalrekening. Definitieve aftocht Beschrijvende Meetkunde.
- 1968: Mammoetwet ingevoerd. Invoering van de New Math.
- 1985: Invoering Hewet; de nieuwe wiskunde A werd gericht op de sociale en economische wetenschappen, wiskunde B op de exacte wetenschappen.
- 1990: Invoering Hawex. Wiskunde op de Havo werd gesplitst in wiskunde A en B.
- 1993: Invoering nieuw onderbouwprogramma, samen met de basisvorming.
- 1998: Herprofilering bovenbouw Havo/Vwo. Inhoudelijk vernieuwd wiskunde B-programma in het vwo.

Vooral de laatste twee veranderingen lijken elkaar wat tegen te werken. Met de invoering van de basisvorming lijkt er wel wat veel over boord te zijn gegaan dat nu vooral bij de invoering van de nieuwe B-programma's op havo en vwo gemist wordt.

In het vervolg van dit artikel brengen we dat op twee gebieden enigszins in kaart, maar geven ook wat nieuwe mogelijkheden aan. De twee delen gaan over Algebra en over Meetkunde en kunnen los van elkaar gelezen worden.

In een korte slotbeschouwing komen de lijnen weer bij elkaar. Daar wordt een oproep gedaan, waarvan de positieve beantwoording van groot belang is voor het behouden en verbeteren van de kwaliteit van het wiskunde onderwijs in het vwo.

2. Deel I: Algebra kan ook natuurlijk zijn

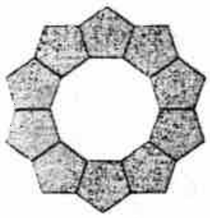
2.1. Inleiding

Klachten over algebraïsche vaardigheden zijn van alle tijden. De hevigheid en het aantal ervan zijn de afgelopen jaren sterk toegenomen. Zorgt de tijdgeest er voor dat de doorsnee-leerling zich met te veel dingen bezighoudt en niet meer de concentratie kan opbrengen of de accuratesse bezit om algebra te leren? Of is er wat mis met het wiskundeprogramma? Sommigen schuiven de schuld op het bezit van geavanceerde rekenapparaten, zoals de grafische rekenmachine. Anderen beweren juist dat diezelfde apparaten de algebra bijna overbodig maken.

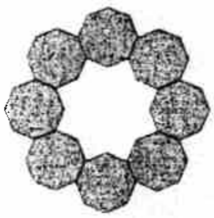
Wij menen dat de klachten over het gebrek aan elementaire algebravaardigheden niet ongegrond zijn. Sterker nog wij constateren regelmatig bij havo/vwo leerlingen een gebrek aan zelfvertrouwen bij het gebruik van algebra. Dit manco is deels te wijten aan de op reproduktie gerichte algebra-didactiek in de diverse methoden. Zonder te pretenderen dat wij daarvoor een kant en klare oplossing weten, willen wij hier enkele ideeën lanceren, die de leerling actiever bij het leerproces zouden kunnen betrekken en hem uiteindelijk meer kans zouden moeten bieden algebra op adequate wijze te gebruiken in daartoe geëigende situaties.

2.2. Het stond zo in het boek

In het kader van het project BPS (bèta-profielen in het studiehuis) legden we een groepje N&T-leerlingen (4 vwo) een onderzoeksopdracht voor die onder andere handelde over de vraag of je met regelmatige veelhoeken van dezelfde soort een krans kunt maken (Kindt, 2001) en zo ja welke aantallen van veelhoeken daarbij nodig zijn. Albrecht Dürer heeft zich met dit probleem bezig gehouden en dacht dat dit met vijfhoeken bijvoorbeeld niet mogelijk was. Zijn tekening was blijkbaar niet nauwkeurig; hij beschikte echter niet over een computer waar je bijvoorbeeld met Cabri constructies kunt uitvoeren die wel precies zijn. Met dit programma konden de leerlingen bijna in een handomdraai kransen van regelmatige veelhoeken maken.



krans van 10 vijfhoeken



krans van 8 achthoeken

Blijkbaar heeft Dürer, die veel affiniteit met meetkunde had, niet gezien dat rekenen en algebra soms helpen om inzicht te krijgen in een meetkundig probleem. Bij dit onderzoek bestaat de wiskundige kern uit hoekberekening en vaststelling van deelbaarheid. Immers, bij de vorming van een krans wordt de veelhoek een aantal keren geroteerd om een zeker punt buiten die veelhoek totdat hij weer terug is in de oorspronkelijke stand. Een aanloopvraag betrof het verband tussen de hoekgrootte van een regelmatige veelhoek en zijn aantal zijden. Een van de leerlingen vroeg de observant of dit goed was:

$$\text{hoekgrootte} = \frac{(\text{aantal hoeken} - 2) \times 180}{\text{aantal hoeken}}$$

De laatste beaamde dit, maar vroeg ook om uitleg. Dat was te veel gevraagd; niet zonder enige schroom luidde het antwoord: `het stond zo vorig jaar in het boek'. Op de vraag of hij de formule korter kon opschrijven (met de bedoeling om 'aantal hoeken' te vervangen door één letter), antwoordde hij gretig: je kan dit (= aantal hoeken) tegen dit wegstrepen. `Oh, ja, wat hou je dan over?' Het voorstel werd schielijk ingetrokken. Op nader verzoek wilde hij wel 'aantal hoeken door *N* vervangen. Mede in verband met het vervolg stuurde de begeleider aan op de rondwandelingstrategie: als je één compleet rondje om de *N*-hoek loopt maak je *N* keer dezelfde draai. Gevolg: het aantal graden van een buitenhoek is 360/*N* en van een binnenhoek dus 180 - 360/*N*. De leerling snapte dit meteen, maar wilde nu ook wel eens kijken of het klopte met die eerdere formule, met andere woorden of

$$\frac{(N-2)\times 180}{N} = 180 - \frac{360}{N}$$

een identiteit is.
Dat bleek onoverkomelijk moeilijk. Na terugkomst van een tochtje van de observant langs de andere leerlingen, besloot deze hem uit zijn lijden te verlossen. Als je nou eens die N uit de noemer wilt laten verdwijnen... Goed, hij vermenigvuldigde links en rechts met N, ging daarbij nog een keer in de fout, kwam uit op een zeer eenvoudige identiteit, die na zeer diep nadenken ten slotte werd doorzien.

We merken op dat het hier een intelligente groep leerlingen betrof en de bedoelde leerling was zeker niet de minste.

2.3. Automatismen exit?
Dit soort ervaringen hebben we ook opgedaan tijdens het Profi- project waarin het nieuwe wiskunde B programma voor vwo werd uitgetest: intelligente leerlingen met een goede probleemaanpak, die vastlopen op elementaire algebra. Een voor de hand liggende reactie is dan: `zie je wel, ze leren geen algebra meer tegenwoordig, ze missen de automatismen'.

Bij de opstelling van het algebraprogramma voor de basisvorming heeft men zich sterk laten leiden door de behoefte van de grote meerderheid van de populatie van de 12- tot 16-jarigen.

In de verantwoording van het leerplan wiskunde 12-16 ([1]) staat letterlijk: *Bij algebra gaat het in het leerplan W12-16 om het werken aan problemen, waarin verbanden tussen variabelen een rol spelen. Bij voorkeur gaat het om problemen die voortkomen uit realistische situaties. De verbanden kunnen worden voorgesteld of beschreven met diverse middelen, te weten 'tabellen', 'grafieken' en 'formules'. En even verder staat nog: In het voorgestelde leerplan vormen algebraïsche technieken geen doel op zich, maar ze staan in dienst van problemen rond verbanden tussen variabelen.*

In de praktijk van het onderwijs betekent dit dat er van meet af aan in de algebra-hoofdstukken veel aandacht is voor functies van één variabele en de samenhang tussen de representatievormen daarvan.

Wij vragen ons in alle gemoede af welk doel dit laatste precies dient en waarom dit zo belangrijk geacht wordt. Hoe het ook zij, de breedte van het totale wiskundeprogramma enerzijds en de hierboven geformuleerde doelstelling anderzijds hebben tot gevolg gehad, dat het aantal algebratechnische oefeningen in de wiskundemethoden tamelijk beperkt is. Bovendien valt op dat de auteursgroepen didactisch nauwelijks raad wisten met wat we hier badinerend 'de laatste restanten van de klassieke algebra' noemen. In een boek waarin voortdurend contextrijke wiskunde wordt aangeboden, passen geen saaie rijtjes oefeningen, waarbij de leerling op commando haakjes moet wegwerken of juist invoeren. Die didactische stijlbreuk wreekt zich in de praktijk omdat 'inoefenen' eventueel alleen effect kan hebben bij geduldige en langdurige toepassing en daar is in de huidige situatie absoluut geen tijd voor. Dat de leerlingen zich geen automatismen verwerven is dan ook niet verwonderlijk.

In de nieuwe druk van sommige onderbouwmethoden, waarvan weer aparte havo/vwo-delen zijn uitgebracht, ziet men als reactie nu weer een zekere toename van de stereotiepe rijtjes oefeningen. De grote vraag is of dat wezenlijk helpt. Eigenlijk zijn we er zeker van dat dit niet het geval is. Günther Malle zegt (Malle, 1993) dat iedere leraar vroeg of laat merkt dat de 'oefenideologie' relatief weinig oplevert: (...) *Ich erinnere mich an zahlreiche Klagen von Lehrern, die nicht verstehen konnten, warum ihre Schüler trotz 'hunderter' Übungsaufgaben immer noch Fehler beim Termumformen oder Gleichunglösen machen.*

Toch moet men vaststellen dat heel veel vroeger de leerlingen althans tot het eindexamen over veel meer technieken beschikten, vooral waar het 'letterbreuken' betrof. Oude Mulo-examens laten opgaven zien van een complexiteit die nu als verbijsterend wordt ervaren. Natuurlijk werden er in die 'goede oude tijd' ook idiote fouten gemaakt en ... ebden de algebravaardigheden na het verlaten van de school snel weg. Bovendien waren er de vaak onoverkomelijke problemen bij de zogenaamde ingeklede vergelijkingen en wat heeft de leerling aan een pakket algebravaardigheden als hij die niet kan gebruiken bij het opstellen van eenvoudige modellen? Ook de transfer naar andere schoolvakken, zoals natuurkunde of economie, liet vaak te wensen over.

In het huidige wiskundeonderwijs wordt terecht van meet af aan meer aandacht besteed aan het bouwen van formules en het opstellen van algebraïsche modellen. Naar ons gevoel heeft dat wel degelijk enig effect. Leerlingen van nu zijn niet geheel hulpeloos als ze een probleemsituatie moeten omzetten in algebra. Ze tonen zich wel vaak hulpeloos als het gaat om het herleiden van algebraïsche expressies.

We herinneren ons een voorbeeld in 5 vwo wiskunde B, waarbij leerlingen de differentie van x^3 over het interval $[k, k+1]$ moesten berekenen: *mijnheer, hoe moet je* $(k+1)^3$ *doen?* Dat niet onmiddellijk de binomiumformule voor de derde macht wordt aangeroepen, deert ons absoluut niet, wij zouden bijna zeggen, integendeel. Wat we wel erg vinden is het gebrek aan zelfredzaamheid. Merk op dat door de aard van de vraag ('bereken de differentie') het verleidelijke $(k+1)^3 = k^3 + 1$ wel verworpen móest worden: een derdegraadsfunctie kan onmogelijk een constante differentie vertonen. Deze toch 'kale' opgave bevat blijkbaar al meer context dan de klassieke algebraoefeningen waar Günther Malle op doelt en die geen controle c.q. reflectie oproepen.

2.4. Beginnersalgebra in drie methoden

Als men de nieuwste druk van de drie grote wiskundemethoden (Getal & Ruimte, Moderne Wiskunde, Netwerk) voor havo/vwo klas 1 vergelijkt, valt op dat grafieken en verhoudingstabellen aan het begin van de algebra-lijn staan. Ook wordt er in het begin van het boek aandacht besteed aan, zeg maar, voortgezet rekenen. Het 'letterrekenen' krijgt in de eerste klas bij G&R de meeste aandacht, daarna volgt Netwerk, daarna MW (bijna niets).

We richten onze aandacht op het traditionele aspect van de schoolalgebra, te weten 'rekenen met symbolen', 'manipuleren met expressies', 'herleiden', enz.. In G&R start het symbolisch rekenen in hoofdstuk 8: rekenen met formules. Het hoofdstuk begint met 'machientjes' die gebruikt worden om (lineaire) verbanden te beschrijven. Vervolgens wordt de vertaling naar een formule gemaakt en worden ook bijbehorende grafieken bekeken. Dan worden de 'levensechte' contexten verlaten. In de marge (blz. 49 deel 2) staat de veelzeggende tekst:

Overzicht van de algebra in klas 1 (hoofdstuktitels) in de drie methoden:

G&R	MW	Netwerk
getallen	*verhoudingen*	*verhoudingen*
grafieken	*breuken*	*grafieken en tabellen*
negatieve getallen en formules	*grafieken*	*rekenwerk*
rekenen met formules	*regels ontdekken*	*formules*
machten en formules	*negatieve getallen*	*variabelen*
	formules	*machten*
	vergelijken	
	vergelijkingen	

Tot nu toe kwamen formules bij verhaaltjes te voorschijn. Maar je kunt ook zonder verhaaltjes formules verzinnen. Wiskundigen gebruiken dan bij voorkeur de letters x en y (sic!).
Na een paar voorbeelden van het type:

$$4b + 7b = \underbrace{b+b+b+b}_{4b} + \underbrace{b+b+b+b+b+b+b}_{7b} = 11b$$

staat er: je *moet* zulke herleidingen *zonder tussenstap* opschrijven. Dit is een staaltje van dwingend wiskundeonderwijs. Nog zo'n staaltje: bij 'haakjes wegwerken' wordt de 'papagaaienbek' als visueel ezelsbruggetje meteen maar geïntroduceerd; het komt er op neer dat leerlingen procedures moeten inoefenen, op een voorgeschreven manier en zonder noemenswaardige oriëntatiebasis.

Vier hoofdstukken later komen *'machten en formules'* aan bod. De eerste drie paragrafen bevatten aardige voorbeelden van kwadratische verbanden, daarna komt het kale rekenwerk met machten. Geen verhaaltjes meer, maar rijtjes sommen. Eén uitzondering is de 'extra' opgave: *maak een zo groot mogelijk getal met drie drieën.*

Het lijkt er soms op of de auteurs niet in staat zijn, dan wel weigeren om op het terrein van de traditionele algebra didactische principes toe te passen uit de realistische wiskunde, zoals *'produktief (of constructief) oefenen'* en het *'opbouwen van een relatienet'*; principes die in de rekendidactiek wel vruchten hebben afgeworpen. Het moet toch mogelijk zijn om in de oefenpraktijk van de algebra deze principes toe te passen, ook al lijkt dat misschien lastig.

In MW omvat de algebralijst meer hoofdstukken, maar die zijn ook wat korter. Het symbolisch rekenen is in deze methode duidelijk verder naar achter geschoven. Er wordt heel lang gewerkt met machientjes en woordformules. Op bladzijde 258 deel 1a staat er in een roze kader: 'een *formule* over het verband tussen bijvoorbeeld nummer en aantal kun je *korter schrijven.*

Zo kun je de formule: *nummer* × 7 + 4 = aantal korter schrijven als: *n* × 7 + 4 = a.

De zeer voorzichtige opbouw gaat door in hoofdstuk 12 *Vergelijken* om ten slotte te eindigen in 14 *Vergelijkingen*, waarbij niet verder wordt gegaan dan *constante × onbekende + constante = constante*. Van symbolisch rekenen is in klas 1 nauwelijks sprake. Een leraar die met deze methode werkt, verklaarde onlangs: je hebt iedere keer het gevoel dat je alleen maar heel lange aanlopen maakt. Inderdaad is het anticiperen in MW naar ons idee veel te ver doorgevoerd.

In Netwerk worden in hoofdstuk 8 met de naam *Formules* uitsluitend (lineaire) woordformules behandeld. In hoofdstuk 11 (*Variabelen*) wordt voor het eerst met letters gerekend. De opbouw oogt wat meer doordacht dan bij G&R en de paragrafen met sommen vertonen wat meer variatie. Maar ook hier de papagaaienbek voor vermenigvuldigingen als $7 \cdot (t + 10)$. Wat opvalt is dat de vermenigvuldigingspunt nergens wordt weggelaten, dus nog geen $3a$. Alle termen zijn nog van de eerste graad.

Het hoofdstuk 13 *Machten* begint met een betekenisvolle intro. In de derde paragraaf *(rekenen met machten)* wordt geoefend in het 'korter schrijven' van vormen als $q^4 \cdot q \cdot q^9$ en $2 \cdot k^3 + 9 \cdot k^3$.

Het letterrekenen gaat duidelijk minder ver dan in G&R; termen met meer dan één variabele komen hier bijvoorbeeld niet voor. Hoewel het er allemaal wat vriendelijker uitziet dan in G&R, is ook hier weinig ruimte voor flexibiliteit en ontbreken constructieve oefeningen en problemen nagenoeg.

Samenvattend kan men zeggen dat het idee om het rekenen met letters zo lang mogelijk uit te stellen tot in klas 2 in twee van de drie methoden al weer verlaten is. Dat heeft natuurlijk alles te maken met de inmiddels ervaren aansluitingsproblematiek bij wiskunde B op havo en vwo in de bovenbouw.

2.5. Amerikaanse algebra

Het Freudenthal instituut heeft in samenwerking met een team van de Universiteit van Madison in het midden van de jaren '90 een leergang (National Center, 1997) voor de Amerikaanse Middleschool (leeftijdscategorie 10 tot 14) ontwikkeld. Bij het opstellen van de algebralijn zijn daarbij drie hoofdlijnen ('strands') onderscheiden:

- *Processen*
- *Restricties*
- *Patronen*

De lijn aangeduid met 'Processen' kan min of meer worden beschouwd als de pendant van wat in het Nederlandse programma 'Verbanden' wordt genoemd. Het gaat daarbij vooral om soorten groei met hun kenmerken en hun representatie. Daarbij gaat men, vanwege de leeftijdsgrens 14 jaar, niet zo ver als het Nederlandse programma, maar de geest is de zelfde.

De lijn 'Restricties' behelst het oplossen van vergelijkingen of stelsels vergelijkingen, eerst prae-formeel en later meer formeel, en het gebruiken van lineaire voorwaarden bij optimaliseringsproblemen (een aanzet tot lineair programmeren). Dit alles zoveel mogelijk in zinvolle context.

In het Nederlandse onderwijs wordt minder aandacht besteed aan stelsels vergelijkingen en optimaliseringsproblemen en ontaardt, alle goede begin bedoelingen ten spijt, het oplossen van vergelijkingen in het uitvoeren van allerlei (nauwelijks begrepen) kunstjes. In 'Mathematics in Context' is juist de geleidelijke en natuurlijke opbouw, startend met stelsels vergelijkingen buitengewoon succesvol gebleken. Jonge kinderen blijken spontaan lineaire combinaties te maken om zo naar vormen toe te werken die tot de oplossing leiden (zie het katern 'Comparing Quantities'). Ook de lineaire optimaliseringsmethoden blijken in de praktijk uitdagend voor de leerlingen en geven een goede introductie van het begrip variabele (katern 'Decision making').

Tenslotte is er de *'Patroon-lijn'*, waarbij het voornamelijk gaat om de voortzetting van ontdekte regelmaat, het bouwen van formules bij getalpatronen en figurale patronen, alsmede het ontwikkelen van inzicht in de structuur van algebraïsche expressies. Hiervan zijn zeker voorbeelden in de Nederlandse methoden te vinden, maar naar onze mening worden die daar te weinig gebruikt bij het beoefenen van 'letterrekenen'.

De ervaring met de algebra in Mathematics in Context heeft geleerd dat het mogelijk is om jonge kinderen zelf algebraïsche procedures te laten uitvinden en toe te passen in situaties die door hen als betekenisvol worden ervaren.

2.6. Algebra naar de knoppen?

In zijn inauguratie *'Wiskundeonderwijs naar de knoppen'* (Keune, 1997) schetste Frans Keune de door hem waargenomen verloedering van de schoolwiskunde. De titel verwijst naar het gebruik van rekenmachines op school. Zonder twijfel zijn er ook wiskundeleraren die menen dat met de komst van de grafische rekenmachine het verdere verval van de algebra is ingeluid, iets wat als straks de met computeralgebra toegeruste machines worden toegestaan, nog erger zal worden.

Inmiddels is de grafische rekenmachine (GR) ingeburgerd in de bovenbouw van havo en vwo en het valt te verwachten dat zij verder zal afdalen en bijvoorbeeld in klas 3 van beide schooltypen gemeengoed zal worden. Aan de landelijke invoering van de GR is een ontwikkelingsonderzoek van het Freudenthal Instituut voorafgegaan. In het verslag van dit onderzoek [3] wordt onder meer gesteld:

(...) Het gebruik van de grafische rekenmachine roept op dat de leerling zichzelf nieuwe problemen gaat stellen en problemen gaat generaliseren. Dat betekent voor de leerling een verruiming van het wiskundige blikveld en een verandering van houding ten aanzien van wiskunde van een 'passief-uitvoerende' in een 'actief-onderzoekende'.

Of dit ideaal bereikt wordt, hangt af van veel factoren. Zo wordt bijvoorbeeld in het ene schoolboek veel meer expliciete inmenging van de GR gevraagd dan in het andere. Dat de schoolboeken merk-neutraal zijn is uiteraard begrijpelijk; jammer is het dat zij daardoor moeilijk kunnen inspelen op specifieke eigenschappen van een bepaalde machine. De leraar kan veel doen om dit gemis op te vangen, maar de vraag is dan weer of het studiehuis hiertoe ruimte biedt. Wat dat betreft zou het naar de derde klas halen van de GR een verbetering kunnen inluiden; de leerling raakt dan vertrouwd met het idee om experimenteel aan wiskunde te werken, te reflecteren op zijn uitkomsten en ten slotte het verifiëren ervan met behulp van algebra. In die zin zou de GR juist een enorme versterking van het algebra-onderwijs kunnen betekenen, in plaats van afbreuk te doen aan algebraïsch inzicht.

Een voorbeeld van didactisch gebruik van de GR is wat wel eens 'grafiekenalgebra' wordt genoemd. Vermenigvuldiging van twee lineaire functies levert grafisch gezien een parabool op. Een mooie vraag is dan bijvoorbeeld of iedere paraboolgrafiek op deze manier gemaakt kan worden. Verwant hiermee is het ontbinden in lineaire factoren bij polynoomfuncties. Op basis van de grafiek (van bijvoorbeeld een derde-graadsfunctie) op het scherm, worden nulpunten 'gezien'. Uitdeling van de bijpassende lineaire factor levert een polynoom van lagere graad op, hetgeen weer grafisch te 'zien' is. Als die een nulpunt heeft, kan opnieuw worden uitgedeeld en zo kan een algebraïsche wet (de zogeheten factorstelling) experimenteel worden ontdekt.

Een sterk punt van de GR is dat transformaties van grafieken snel kunnen worden uitgevoerd, waarbij de leerling de juiste algebraïsche instructie moet geven. De machine geeft direct feed-back en missers kunnen gemakkelijk worden gecorrigeerd. Zo ontdekten leerlingen van een klas 4 havo via de GR dat omkering van het grondtal a in $y = a^x$ spiegeling van de grafiek in de y-as tot gevolg heeft. Op de vraag van de leraar om nu bijvoorbeeld ook de grafiek van $y = \sin x + 1$ te spiegelen in de y-as werd zoals te verwachten door sommige leerlingen eerst $1/y$ geprobeerd. Na deze 'error'-ervaring volgde nog wat 'trial', ook met andere functies, totdat vastgesteld werd dat de vervanging van x door $-x$ steeds het beoogde effect heeft. Terugkoppeling naar het eerste voorbeeld leverde vervolgens de identiteit $(½)^x = 2^{-x}$ op, waarvoor toen een nadere algebraïsche verklaring werd gezocht.

In het algemeen kan worden gezegd dat enerzijds het grafisch constateren c.q. verifiëren van algebraïsche equivalenties en anderzijds het gebruiken van geschikte formules om gewenste grafische effecten te bereiken, een krachtige bijdrage kunnen leveren tot het ontwikkelen van algebraïsch inzicht in de middenbouw van havo/vwo.

Binnen niet al te lange tijd zal ook de symbolische rekenmachine (SR) zijn intrede doen. Die maakt dat de leerlingen herleidingen, zeker van meer gecompliceerde vormen, niet meer zelf hoeven uit te voeren.

Er zal op zijn minst moeten worden onderzocht welke vaardigheden vereist zijn om de SR met succes te kunnen gebruiken. Het is ondenkbaar dat een leerling zonder basisvaardigheden in algebra een SR kan hanteren, net zo als het ondenkbaar is dat iemand die zelf nooit heeft gerekend op zinvolle wijze met een gewone rekenmachine kan omgaan. Er zal bijvoorbeeld een soort symbolisch taalgevoel moeten worden ontwikkeld en daarbij zijn praktische oefeningen nodig. En zoals bij de rekendidactiek in de loop der jaren de aandacht verschoven is van gecompliceerd cijferwerk naar 'eenvoudig hoofdrekenen en 'schattend rekenen', zo zou men kunnen verwachten dat het leren van vaardigheden betreffende 'eenvoudige hoofdalgebra' en 'schattend algebra' belangrijke aspecten van algebraonderwijs zullen worden. Het denken daarover en het onderzoek daarnaar begint nu op gang te komen.

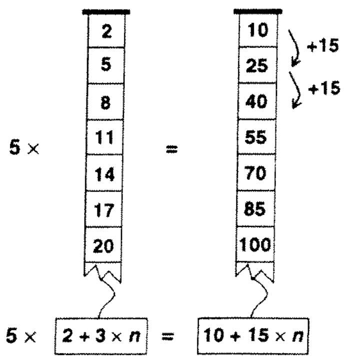
Het is duidelijk dat het gebruik van de GR en eventueel in een later stadium de SR in het voortgezet onderwijs ingrijpende gevolgen voor het algebraonderwijs zal hebben. Het 'naar de knoppen' hoeft in dit geval, bij zorgvuldige didactische afweging en bij het ten nutte maken van de rijke mogelijkheden die de techniek ons biedt, beslist geen negatieve kwalificatie te zijn.

2.7. Start algebra met natuurlijke getallen

Laten we ons weer richten op het aanvankelijk algebraonderwijs. In het eerste jaar van het voortgezet onderwijs kan, zeker als al gedifferentieerd is naar havo/vwo, nog wel eerder dan nu het geval is een aanvang met voorzichtig letterrekenen worden gemaakt. Daartoe leent de wereld van de natuurlijke getallen zich waarschijnlijk het beste. Dit gebied is voor de leerling concreet, misschien wel concreter dan sommige van de verhaaltjes die nu in de schoolboeken figureren.

Een paar eenvoudige voorbeelden ter toelichting. In een klas kan aan de leerlingen gevraagd worden twee getallen te bedenken die samen 20 zijn en daarna het produkt van het gekozen tweetal uit te rekenen. Vervolgens zal inventarisatie plaatsvinden van de resultaten gevolgd door natuurlijke vragen als: wat is de laagst- en wat is de hoogst-mogelijke uitkomst. Na systematisch opschrijven van de rij van alle mogelijke uitkomsten, kan dan een patroon van regelmaat worden ontdekt, enz. Op eenvoudige wijze en aansluitend bij het elementaire rekenen, treedt hier het concept van 'variabele uitkomst' naar voren. Bovendien leidt het op natuurlijke wijze tot een klassieke probleemsituatie, namelijk een optimaliseringsprobleem. Je kunt dit probleem ook 'continu' stellen (en dat moet ook zeker gebeuren), bijvoorbeeld door te vragen naar de rechthoek met de grootste oppervlakte die je met een gegeven stuk touw kunt afperken. Het voordeel van aanvangen met de discrete versie is dat snel een patroon zichtbaar wordt en dat er, althans bij beperking tot de natuurlijke getallen, slechts eindig veel mogelijkheden zijn. Het probleem is ook rijker dan men misschien op het eerste gezicht zou denken; de volledige theorie van de tweede-graadsvergelijking kan heel goed hieraan worden opgehangen (Brokamp, 1995).

Een ander eenvoudig voorbeeld is de lineaire vorm. Werkend in het domein van de natuurlijke getallen roept een uitdrukking als $2 + 3 \times n$ gemakkelijk een getallenpatroon op, namelijk de rekenkundige rij 2, 5, 8, ... Als zo'n rij met een vast getal wordt vermenigvuldigd of als twee zulke rijen worden opgeteld, komt er weer een rekenkundige rij, want de sprong tussen opvolgende getallen blijft constant. Op die wijze kan eenvoudig worden ingezien dat $5 \times (2 + 3 \times n)$ en $10 + 15 \times n$ gelijkwaardig zijn en ook dat $(3 + 4 \times n) + 1 + 5 \times n) = (4 + 9 \times n)$. Natuurlijk moet hier nog wel wat aan voorafgaan en veel hangt ook af van de presentatie. In het MIC-materiaal en het oorspronkelijke W 12-16 materiaal is gekozen voor getalstroken om rijen getallen voor te stellen. In de schoolboeken is dit idee helaas niet overgenomen. Inmiddels wordt er op het Freudenthal Instituut gewerkt aan de ontwikkeling van een Java-applet ('stroken-algebra') waarmee de leerling interactief op de computer aan het werk kan; de eerste ervaringen hiermee zijn veelbelovend.Zo kunnen in een vroeg stadium eenvoudige algebraberekeningen worden uitgevoerd, waarbij de leerling naar believen kan terugvallen op de zichtbare regelmaat in de getalstrook of de rij.



Een lineaire vorm, waarbij de variabele beperkt wordt tot natuurlijke (of desgewenst tot gehele getallen), krijgt op deze wijze als het ware een aritmetisch gezicht! Bij een lineaire vorm in twee variabelen is een getallentableau nodig - er komt immers een dimensie bij - en ook deze voorstelling heeft aantrekkelijke kanten; zie (Kindt, 2001).

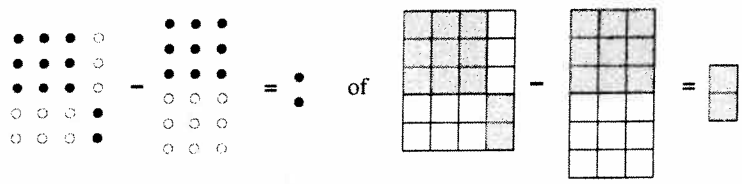
Een lineaire vorm in één reële variabele krijgt een (meetkundig) gezicht als de grafiek behandeld is, en dan kunnen bovengenoemde bewerkingen uitstekend grafisch worden geïnterpreteerd en begrepen. Bij een vorm in twee variabelen gaat het voor jonge leerlingen (waarschijnlijk) te ver om naar de grafische voorstelling te kijken.

In dit verband willen we ook een aardig voorbeeld noemen, ontleend aan het werk van (Sawyer, 1969). Bekijk het rijtje sommen:

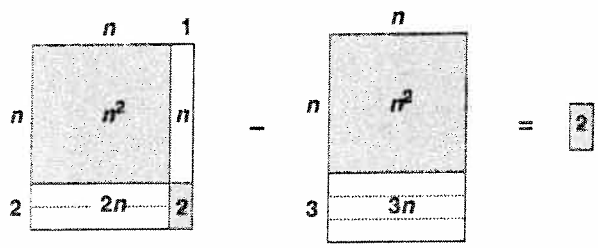
$$2 \times 3 - 1 \times 4 = 2$$
$$3 \times 4 - 2 \times 5 = 2$$
$$4 \times 5 - 3 \times 6 = 2$$
$$5 \times 6 - 4 \times 7 = 2$$

De leerling wordt dan gevraagd dit rijtje voort te zetten. Kan hij er op rekenen dat er 2 uit blijft komen? En zo ja, dan vraagt dit om een 'bewijs'.

Een eerste idee is om de produkten voor te stellen door een stippenpatroon (zoals Pythagoras die al gebruikt schijnt te hebben) of een vierkantjespatroon en via een slimme kleuring het verschil zichtbaar te maken. Bijvoorbeeld:



Nog een paar voorbeelden en het inzicht waarom het altijd klopt, zal groeien. De generalisatie wordt vertolkt door dit plaatje:



Men moet hierbij niet de problemen onderschatten die leerlingen met die laatste voorstelling kunnen hebben. De n in het plaatje wordt vaak als één vaste lengte geïnterpreteerd, terwijl zij juist een variabele moet representeren! Computeranimatie kan hier uitkomst binden. Een voorstelling waarbij n naar believen kan worden opgerekt of ingekrompen, zonder dat de essentie van het plaatje verandert, is veel suggestiever en kan het generalisatieaspect oproepen. Ook hiertoe is een Java-applet in ontwikkeling. Ten slotte kan er naar de formule worden toegewerkt.

$$(n + 1) \times (n + 2) - n \times (n + 3) = 2$$

Voor wat oudere leerlingen zou hiervan ook een wat volwassener versie kunnen worden gekozen.

Kies vier opvolgende natuurlijke getallen; neem het produkt van de binnenste twee en dat van de buitenste twee en let op het verschil in uitkomst. Onderzoek of dat verschil verandert als je een ander rijtje van vier opvolgende getallen neemt. Geef een verklaring voor wat je ontdekt.

De leerling zal dan zelf op het idee moeten komen om de vier getallen voor te stellen door bijvoorbeeld n, n + 1, n + 2, n + 3 en met elementaire algebra zijn weg verder vinden.

Een derde mogelijkheid is om het vraagstuk te presenteren via getalstroken. De vertaling naar voorgaande formule gaat dan bijna automatisch goed. De strokenmethode kan ook een verklaring van het type:

$$(n + 1)\,(n + 2) - n\,(n + 3) = n\,(n + 2) + (n + 2) - n\,(n + 2) - n = 2$$

oproepen. Dit soort activiteiten, waarbij de leerling de 'kracht' van de algebra bij het doorzien van arithmetische wetmatigheden zal ervaren, komen helaas te zelden voor in de schoolboeken.

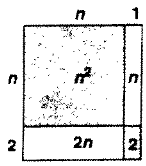
Een andere activiteit die nauwelijks in de methoden wordt gestimuleerd is het maken van zogenaamde 'eigen produkties', waarbij leerlingen zelf voorbeelden c.q. opgaven construeren. Bovenstaand voorbeeld biedt een ideale mogelijkheid hiertoe. Vraag bijvoorbeeld of de leerling zelf een rijtje van analoge rekensommen ontwerpt die alle dezelfde uitkomst hebben. Uiteraard moet hij dan ook de verklaring erbij leveren.

De wereld van de natuurlijke getallen geeft prachtige mogelijkheden tot probleemgeöriënteerd algebraonderwijs. Zeker als begrippen als deelbaarheid en priemgetal behandeld zouden worden. Helaas zijn deze zaken in een zekere democratiseringsdrift geschrapt uit het wiskundeprogramma; wat ons betreft zou dat met gezwinde spoed moeten worden teruggedraaid. In '*33550336: Een volmaakte voltreffer*' (Brokamp, 1995) beschrijft de leraar N. Brokamp een werkelijk schitterende ervaring in een vwo-b klas met een onderzoek naar wat al in de Oudheid *volmaakte getallen* werd genoemd, namelijk getallen, zoals 6 en 28, die gelijk zijn aan de som van hun 'echte' delers (inclusief 1). Ogenschijnlijk een nutteloos onderwerp en een typisch staaltje van recreatieve wiskunde. Dit onderwerp heeft een rijke historie en het grappige is, dat de klas in zekere zin de geschiedenis in versneld tempo doorliep. Overigens leidt de oplossing naar zogenaamde Mersenne-getallen, ofwel priemgetallen van de vorm $2^p - 1$ (p is zelf priem anders is het getal zeker deelbaar); dat zijn juist de grote priemgetallen waar zo af en toe in de krant melding van wordt gemaakt bij het verbreken van een record. Ze spelen een uiterst belangrijke rol in de cryptografie. Getaltheorie, jarenlang het speeltje van zuivere wiskundigen, heeft in deze tijd ook maatschappelijk betekenis. Dat leerlingen door getaltheoretische problemen en de magie die daar soms van uit gaat, kunnen worden gegrepen, blijkt overduidelijk uit Brokamp's verslag, maar bijvoorbeeld ook uit de verkoopcijfers van het boek de Telduivel (Enzensberger, 1998).

2.8. Negatieve getallen en geometrische algebra

In een van de voorgaande voorbeelden, werd al gebruik gemaakt van het zogenaamde 'rechthoeksmodel' bij het vermenigvuldigen van vormen. In alle schoolboeken komen deze rechthoeksmodellen voor. Wat dan opvalt is dat na een korte introductie dit model weer gauw wordt verlaten. Het gevolg is dat er zeer weinig leerlingen zullen zijn, voor wie het rechthoeksmodel een concrete oriënteringsbasis wordt. Waar in de methoden voortdurend wordt geanticipeerd op andere zaken, wordt hier die fase juist in ijltempo doorlopen. Nu is dat niet geheel onbegrijpelijk, als je aan de moeilijkheden met negatieve getallen denkt bij dit model. Juist die negatieve getallen maken dat er zoveel mis kan gaan bij de herleiding van algebraïsche vormen. Bij observaties gedurende dit schooljaar in klas 3 vwo werden we voortdurend gesterkt in die mening. De vraag rijst of het niet verstandiger zou zijn om eerst maar eens een poos algebra met positieve getallen te bedrijven. In toepassingen spelen negatieve getallen nauwelijks een rol, dus erg veel last kan men daar niet van hebben. Met name de regels voor het vermenigvuldigen van negatieve en positieve getallen, die nu al in klas 1 worden behandeld, zouden heel goed kunnen worden uitgesteld tot bijvoorbeeld klas 3. Het mes zou dan aan ten minste twee kanten snijden. Het algebraïsche werk zou dan in een soort tweede ronde op een abstracter niveau worden gerepeteerd (principe van telescoped reteaching) en het oppervlaktemodel zou een tijdlang kunnen worden gebruikt, waarbij de leerling zelf het moment kan bepalen waarop hij dit langzaam maar zeker los wil laten (principe van progressieve schematisering).

Een tussenstap daarbij, ooit door de al eerder genoemde W.W.Sawyer bedacht, is de vermenigvuldigings-tabel die wel overdraagbaar is naar de negatieve wereld.



$\times$	n	1
n	n^2	n
2	$2n$	2

$$(n+1)\times(n+2) = n^2 + 3n + 2$$

Het idee van de tabel is in sommige schoolboeken goed opgepakt en wordt ook gebruikt bij de omgekeerde bewerking, het ontbinden in factoren. Het is echter duidelijk abstracter dan het rechthoeksmodel en omdat het te snel wordt ingevoerd en bovendien opgelegd, zullen de meeste leerlingen dit reproduktief hanteren en de basis ervan vergeten. En dan is het niet meer dan een handig schema voor vermenigvuldigen dat je even goed kan vervangen door het onder elkaar plaatsen, zoals dat vroeger wel gebeurde. In feite is dit laatste schema nog wat handiger, want er

$$\begin{array}{rl} n+2 & \\ n+1 & \\ \hline n+2 & \times \\ n^2+2n & \\ \hline n^2+3n+2 & + \end{array}$$

kan direct worden doorgeschakeld naar een produkt van drie of meer factoren en dat gaat bij het tabelschema minder rechtstreeks.

2.9. Produktief oefenen en structuren

In de eerder genoemde methode Getal & Ruimte staat de volgende opdracht in een paragraaf waarin vrijwel alle opdrachten beginnen met de gebiedende wijs 'herleid'.

Bij een toets moet een klas tien herleidingen maken. Elke herleiding heeft als uitkomst 12ab. Bedenk tien opgaven die als uitkomst 12ab hebben. Laat een andere leerling de opgaven controleren.

Dit is een voorbeeld van wat wel 'eigen produkties' worden genoemd. Het leereffect van dergelijke opdrachten kan bijzonder groot zijn. Helaas komt dit type opdrachten te sporadisch voor in de methoden. Een wat verdergaand voorbeeld van 'produktief oefenen' past bij een thema dat we de 'prijs van de algebra' hebben genoemd.

Algebra kost tijd, en dus geld. Hier volgt een gedetailleerde prijslijst.

Prijslijst:	
bewerkingen +, −, ×, :, /	1 punt per keer
kwadrateren	2 punten per keer
3-de macht nemen	3 punten per keer
4-de macht nemen	4 punten per keer
enz.	enz.
variabelen aanroepen	1 punt per keer
haakjes en gewone getallen	gratis

Voorbeeld 1: wat kost $3n + m$?

3	**gewoon getal**	**gratis**
n	**aanroep variabele**	**1 punt**
$3 \times n$	**vermenigvuldiging**	**1 punt**
m	**aanroep**	**1 punt**
$3{\times}n + m$	**optellen**	**1 punt**
	totaalprijs	**4 punten**

Er kan bijvoorbeeld worden vastgesteld dat $(3n + m)^2$ een prijs van 6 punten heeft; we letten er immers op dat de onuitgeschreven vermenigvuldiging ook 1 punt kost. De gelijkwaardige drieterm $9n^2 + 6mn + m^2$ kost maar liefst 12 punten. Na de prijs van diverse vormen te hebben vastgesteld (een soort oefening in algebraïsche zinsontleding) kan worden vastgesteld dat equivalente expressies niet dezelfde waarde hoeven te hebben en kan bij gegeven expressies de goedkoopste vorm worden gezocht. Een aardig spel, waarbij flexibel gedrag wordt gestimuleerd en de leerling al doende zichzelf heel veel oefeningen in het herleiden oplegt.

Overigens is dit spel niet zonder praktische waarde, want de 'punten' kunnen als een maat voor 'rekentijd' worden opgevat. Bij computerprogramma's die zeer vaak dezelfde complexe berekeningen moeten uitvoeren, kan het van belang zijn, welke vormen er voor de berekeningen worden gekozen. Het economisch rekenen is al door niemand minder dan Newton in practijk gebracht (Knuth, 1969). Hij ontdekte bijvoorbeeld dat het berekenen van waarden van het polynoom

$$y^4 - 4y^3 + 5y^4 - 12y + 17$$

bij substitutitie in deze vorm veel meer tijd kost, dan bij substitutie in de gelijkwaardige vorm:

$$y\,(y\,(y\,(y - 4) + 5) - 12) + 17$$

of even goed

$$(((y - 4)\,y + 5)\,y - 12)\,y + 17$$

In Newton's notatie:

$$\overline{\overline{\overline{y-4} \times y + 5} \times y - 12} \times y + 17$$

In ons puntenspel krijgt de klassieke polynoomvorm 20 punten, terwijl de tweede vorm (thans Horner-vorm genoemd) slechts 11 punten toebedeeld krijgt.
Terzijde: het zou niet zo'n slecht idee zijn de leerlingen voor de aardigheid eens met de schrijfwijze van Newton te confronteren. Ten eerste is er het historisch aspect en ten tweede relativeert het onze conventies een beetje.
De meest pregnante vorm om de structuur van een samengestelde algebraïsche expressie duidelijk te is misschien het gebruik van 'kringen' (Abels, 1992)

$$y - 4 \times y + 5 \times y - 12 \times y + 17$$

In het licht van later gebruik van grafische of symbolische rekenmachines is het bijzonder belangrijk dat dit soort schema's kunnen worden gehanteerd. Andere vormen om zulke structuren te ontleden zijn 'operatiebomen' en 'pijlenkettingen', maar daar gaan we hier niet verder op in (Abels, 1992).

2.10. Testen van formules

Polya schrijft in [32] over het belang van het testen van formules door te letten op bijzondere gevallen, en waar mogelijk op dimensies. Als voorbeeld nemen we de klassieke formule die aan Heron wordt toegeschreven, maar die Archimedes al gekend moet hebben. Als een driehoek bijvoorbeeld de zijden 13, 14 en 15 heeft, kan de oppervlakte als volgt worden berekend: bereken eerst de helft van de omtrek, dat is hier dus 21. Trek de drie zijden beurtelings af van de halve omtrek: dat geeft 8, 7 en 6. Vermenigvuldig deze uitkomsten en de halve omtrek met elkaar, dat levert op: 7056. Trek de vierkantswortel uit dit getal en je hebt de oppertvlakte: 84. Men zou de leerling de originele tekst van Heron (Heath, 1981) in vertaling kunnen voorleggen en vragen om zijn beschrijving van dit algoritme om te zetten in een formule. De gedaante zoals die in oude schoolboeken stond, luidt:

$$O = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Hierin stellen dan a, b en c de zijden van de driehoek voor en s de halve omtrek: $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$.
Vervolgens zou de formule op verschillende aspecten kunnen worden getest.

- Wat is er bijvoorbeeld aan de hand als $s - a = 0$?
- Kan de vorm onder het wortelteken negatief zijn?
- Hoe zit het met de 'symmetrie' in de formule?
- Wat is het effect op O als alle zijden bijvoorbeeld met 10 worden vermenigvuldigd?
- Wat levert de formule in het geval $a = b = c$? Klopt dat wel?
- En hoe zit dat voor $a = b \neq c$?
- Bij een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden a en b kan de oppervlakte direct in a en b worden uitgedrukt; is die uitdrukking ook in overeenstemming met Heron's formule.

Zo kan één formule een rijkdom aan zinvolle algebra-oefeningen opleveren. We hebben hier een tamelijk complex voorbeeld gekozen, maar er zijn andere, meer eenvoudige oppervlakte- en inhoudsformules die aanleiding geven tot dergelijke beschouwingen. Ook formules met een natuurkundige inslag zijn vaak heel geschikt voor dit type activiteiten. En voor leerlingen die later computeralgebra zullen hanteren zal het een essentiële vaardigheid zijn om een formule op zijn merites te kunnen beoordelen.

We merken op dat de formule ook na het hier beschreven onderzoek nog lang niet bewezen is. Het zuiver meetkundige bewijs dat Heron geeft is fraai, maar moeilijk. Een demonstratie op basis van de stelling van Pythagoras, waarbij redelijk stevige algebra om de hoek komt kijken, zou wel aan de leerlingen kunnen worden uitgelegd. Op zichzelf is de formule niet echt belangrijk, al staat die nog wel in menig wiskunde-vademecum, maar als bron van onderzoek kan hij interessant zijn.

2.11. Aandachtspunten

Als we naar de schoolboeken kijken, valt er de komende jaren veel te doen om het algebraonderwijs te verbeteren. De activiteiten rondom functies van één variable zijn te eenzijdig en ook vaak nog te microscopisch. Daarbij valt op hoe weinig probleemgeoriënteerd de methoden zijn. Om leerlingen enige vertrouwdheid met symbolisch rekenen bij te brengen zal de opzet veel breder moeten zijn.

Het inzetten van formules om uitdagende problemen op te lossen, dat is het enige dat zin kan geven aan de algebra. Vaardigheden om foutloos ingewikkelde herleidingen te volvoeren lijken met de komst van de electronische hulpmiddelen overbodig te worden. Dat betekent dat de oefeningen in algebratechniek relatief simpel kunnen zijn; het gaat niet om het verwerven van automatismen en routines, maar om het ontwikkelen van inzicht in de structuur van formules en van een zeker algebraïsch zelfvertrouwen.

Wij pleiten uitdrukkelijk voor meer aandacht voor rijen en voor getalproblemen in de havo/vwo-klassen. Niet alleen vanwege de wiskundige schoonheid die daarvan kan uitgaan, maar vooral ook om didactische reden: discrete variabelen zijn concreter dan continue variabelen. Het werken met negatieve getallen is in aanvakelijk algebra-onderwijs vaak een storende factor, waardoor veel fouten ontstaan en leerlingen onzeker worden. Als de invoering daarvan meer geleidelijk gebeurt en niet onmiddellijk een zekere volledigheid wordt nagestreefd (bijvoorbeeld bij het oplossen van eerste-graadsvergelijkingen, waarbij de parameters in alle mogelijk combinaties van negatief en positief moeten worden opgelost), zou al veel gewonnen kunnen worden. Natuurlijk zal er vanwege het algebraïsch-meetkundig permanentieprincipe bij grafieken een moment komen, waarbij het 'manipuleren met minnen' onvermijdelijk is, maar dat zou niet mogen interfereren met de elementaire structuurregels van de algebra.

Het hier volgende rijtje aandachtspunten is naar onze mening van belang voor ontwikkelaars van algebra-onderwijs in havo/vwo:

- ontwikkelen van symbolisch taalgevoel
- doorgronden en testen van formules
- herleidingen verklaren vanuit de betekenis van standaardoperaties
- construeren en generaliseren
- gebruiken van geometrische modellen
- gebruiken van de geschiedenis van de algebra
- flexibel en produktief oefenen
- vertalen in en redeneren met algebra
- didactisch gebruiken van ICT
- weerstand bieden aan de drang naar volledigheid

Men zou leerlingen moeten laten ervaren dat de potentie van de algebra verder reikt dan het concies beschrijven van verbanden tussen variabelen en het oplossen van vergelijkingen. De behoefte aan laatstgenoemde vaardigheid is met de komst van de moderne zakcomputer nauwelijks nog aanwezig. Algebra is ook een middel bij het oplossen van problemen en misschien vooral bij het sluitend krijgen van redeneringen. Dit de leerling te laten ervaren en hem hierin enigszins vaardig te maken lijkt ons de belangrijke uitdaging voor de leerplanontwikkeling op het gebied van de algebra in de komende jaren.

3. Deel II: Meetkunde heeft twee gezichten

3.1. Inleiding

Meetkunde, als schoolvak en als wetenschap, heeft altijd een Januskop gehad. Enerzijds lijkt meetkunde het vak te zijn dat spreekt over ruimte en maat en wat ligt nu meer voor de hand dan dat vak te beoefenen aan de hand van de dingen om ons? Dus in de wereld van de pottenbakker, de timmerman, de architect, de naaister, de bierbrouwer, de astronoom, de (kunst)schilder, de geograaf, de automonteur, de knutselaar thuis, de reiziger op zee, in de lucht, in berggebied en laagland, kortom: in de wereld van iedereen waar de uiteindelijke toets herkenning en bruikbaarheid is. Anderzijds is meetkunde het oudste systematisch beschreven deel van de wiskunde en heeft het model gestaan voor wat de wiskunde als geheel meer en meer is gaan kenmerken: systematiek, nauwkeurige definities, redeneren in de scherp toegesneden vorm van gegeven-te bewijzen-bewijs. Hier is de uiteindelijke toets niet meer in de `werkelijkheid' gelegen, maar wordt gegeven door de controle op de logische correctheid van het opgebouwde verhaal.

Veel controversen over de waarde van bepaalde vormen van meetkunde-onderwijs, keuzen in het curriculum, gevolgde onderwijsmethoden, hangen samen met de zoëven geschetste twee gezichten die het vak kan vertonen en daarom is het goed te weten dat de scheiding der geesten niet van de laatste tijd is, maar al expliciet is aangegeven in de periode waarin de systematisering van het vak zijn aanvang neemt: binnen de Griekse oudheid. We slaan daarom `De Elementen' van (Euclides uit ongeveer 300 voor Christus) maar eens open bij de eerste regels. Daar staan de twee beroemde definities:

1. Een punt is datgene wat geen deel heeft.
2. Een lijn is breedteloze lengte.

De definities zeggen wat een punt en lijn niet zijn: deelbaar of enigszins breed. Ze geven geen enkele eigenschap van de gedefinieerde objecten aan en we kunnen er niet mee toetsen of iets een punt is of niet. Dit is wel eens als een gebrek beschreven, maar men kan ook zeggen: dat is precies de essentie. Euclides zet zich hier in twee regels af tegen waar meetkunde niet overgaat: de lijnen en punten van de aardse werkelijkheid. De opvatting van Plato dat de wereld van de Ideeën de echte is en de gewone werkelijkheid maar een vluchtige schaduw daarvan is, dat is de hier uitgedrukte visie.

Euclides heeft met De Elementen zonder het te weten in hoge mate zijn stempel gedrukt op 2000 jaar meetkunde onderwijs. Afwijkingen van zijn norm zijn betrekkelijke uitzondering. Opmerkelijk is het geval Alexis-Claude Clairaut met zijn Éléments de Géométrie, (Clairaut, 1765). Volgens Clairaut betekent Géométrie letterlijk `mesure de Terrain'. Het realiteitsgehalte van zijn meetkunde is dan ook hoger dan gebruikelijk en de realiteit waar het hem om gaat, is dus geen uiterlijke verschijningsvorm van wat eigenlijk zuivere wiskunde is. Clairaut brengt bijvoorbeeld niet zoiets gecompliceerds als het parallellenaxioma maar geeft wel een recept voor het tekenen van rechthoeken: twee evenlange loodlijnen oprichten op de uiteinden van een lijnstuk. Dat het recept werkt -wij weten nu dat het gelijkwaardig is met het parallellenaxioma- staat niet ter discussie, Clairaut constateert gewoon dat rechthoeken er zijn: huizen, muren, enzovoort. Dit alles staat volkomen haaks op wat Euclides voorstaat, want Clairaut neemt serieus wat we tegenwoordig `meetkundige intuïtie' zouden noemen in de zin van een zekere bekendheid met de reele ruimte, precies datgene wat Euclides buiten sluit.

De geschiedenis van De Elementen, van de herdrukken in vele talen, is uitvoerig vastgelegd in de editie van Heath, (Heath, 1999). Een vertaling, dat is duidelijk, was eeuwenlang de enige concessie die de lerende bij de overmeestering van de meetkundige wetenschap werd toegestaan. In onverdunde vorm werkte de leerling van ondeelbaar punt naar propositie 47 (Pythagoras) aan het eind van boek I en verder tot het einde van boek VI. (Boek VII t/m XIII kwamen in veel edities al niet voor). De leergang meetkunde viel zo praktisch samen met het wetenschappelijk exposé.

3.2. Ontwikkelingen in Nederland

In Nederland werd, met name in de twintigste eeuw en misschien meer dan elders, een afwijkende weg onderzocht, zij het aanvankelijk door een kleine groep in het onderwijs geïnteresseerden en in het algemeen onder begeleiding van forse kritiek van een iets minder kleine groep van de wiskundige gemeenschap. Het gaat aanvankelijk om het gebruiken van een intuïtieve, dus nog niet axiomatische en logisch deductieve ingang in de meetkunden. W. Reindersma, Mevr. T. Ehrenfest-Afanessjewa, de van Hiele's, Freudenthal, de groep van het IOWO en het latere Freudenthal instituut, dat zijn slechts enkele van de voorstanders van deze richting. De geschiedenis hiervan is uitvoerig vastgelegd door de Moor (Moor, 1999).

Hier is een concreet voorbeeld van enkele opgaven uit de Uebungensammlung zu einer geometrischen Propädeuse (Ehrenfest, 1931).

V. GERADE ALS LICHTSTRAHL

57. Es sollen sich drei Schüler längs einer Geraden vor die Klasse aufstellen — ohne irgend welche Hilfsmittel zu gebrauchen; ein vierter Schüler soll sie, ebenfalls ohne Hilfsmittel kontrollieren. — Worauf beruht die Möglichkeit dieser Aufgabe?

58. In zwei Kartonstücken je eine Öffnung machen und diese Ekrane so vor einander stellen dass man durch die beiden Öffnungen einen bestimmten Punkt in der Klasse sehen kann. Sich überzeugen, dass man vom Punkte aus durch die beiden Öffnungen eine Schnur *gerade* spannen kann.

59. Der Schüler soll seinen Finger so in einiger Entfernung vor dem Auge halten, dass er vor ihm einen bestimmten Punkt verdeckt; andere Schüler sollen sich überzeugen, dass der Finger, das Auge und jener Punkt auf einer Geraden liegen.

De rechte lijn als lichtstraal wordt hier verkend; dat is zeker niet de breedteloze lijn van Euclides' definitie 1. Mevr. Ehrenfest betoogde al in 1924 dat de


Tatjana Ehrenfest Afanassjewa


W. Reindersma


E.J. Dijksterhuis

intuïtieve (misschien beter: experimentgeleide) benadering van de meetkunde in het onderwijs aan de logische opbouw vooraf dient te gaan. Grote tegenstander is Dijksterhuis, die juist betoogt dat het inzicht in de ruimtelijke betrekkingen door de axiomatisch-logisch opbouw van de meetkunde gevormd wordt. Zie het lange betoog van Dijksterhuis in het allereerste nummer van het tijdschrift Euclides (Dijksterhuis, 1924). De indruk dat het tijdschrift Euclides geschapen werd om ketterijen als die van Ehrenfest te bestrijden wordt nog versterkt als we de eerste aflevering verder doorbladeren: een weerwoord van mevrouw Ehrenfest dat door Dijksterhuis wordt neergesabeld, een vernietigende kritiek door formalist bij uitstek Schogt op een leerboek meetkunde van Reindersma. Reindersma wordt overigens in ander kader (over het cultuurhistorisch element in het wiskunde-onderwijs) uitvoerig wegens zijn bijdrage geprezen.

Dijksterhuis geloofde sterk in de vormende waarde van meetkunde-onderwijs, met name de meetkunde in zijn heldere vorm van logisch systeem. Blootstelling van de leerling daaraan onder goede leiding kon niet anders dan goede denkers opleveren, ook op andere terreinen des levens. Ook hierin volgde Dijkterhuis Plato, die in zijn dialoog `De Republiek' al stelde dat meetkunde behoort tot het vormingspakket van de toekomstige staatsman.

Ehrenfest ziet de intuïtieve fase nog als een propaedeuse, een voorloper op de eigenlijke, logisch opgebouwde meetkunde. Later zullen velen zelfs dat standpunt verlaten, dwz. niet erkennen dat de rol van de intuïtieve benadering van de meetkunde in het onderwijs die van voorbereiding op de wetenschappelijke meetkunde is, om de simpele reden dat het merendeel van de leerlingen aan dat laatste in de praktijk niet toekomt en omdat het daarom maar zeer de vraag is of het ethisch acceptabel is alle leerlingen met het moeizame begin van een leerlijn meetkunde op te zadelen, die slechts voor enkelen vervolgd wordt tot de hoogte waarop de systematische benadering zijn werkelijke vruchten afwerpt. De waarde van een leerplan meetkunde is zo geen absoluut gegeven meer, maar wordt bepaald door wat de leerling er mee zal doen.

In de jaren zestig verschoof de discussie in Euclides van het specifiek meetkundige of analytische naar het algemeen systematische. De vraag was nu of men niet toe moest naar wiskunde op professionele moderne grondslag, dus van meet af aan op basis van verzamelingenleer, relaties en groepen, enzovoorts. De mondiale opkomst van de New Math was immers in volle gang. Deze stroming had zijn oorsprong bij een groep wiskundigen die besloten de hele wiskunde op de uniforme grondslagen van verzamelingen en structuren te herinrichten: de groep Bourbaki, onder aanvoering van onder andere Jean Dieudonné (1906-1992). In Nederland liep dit uit op een nieuw leerplan wiskunde voor alle schooltypen, dat tegelijk met de Mammoetwet in 1968 werd ingevoerd.

De nadruk op structurering was zo sterk dat elementen uit zowel de intuïtieve school als de traditioneel Euclidische school nauwelijks meer in het schoolprogramma terug te vinden waren. Meetkundig inzicht werd begraven onder de systematiek van de verzamelingen en hun Venn-diagrammen, de coördinaten, de vectoren en de transformaties.

Het hele leerplan van die dagen was sterk bedacht vanuit de beroepspraktijk van de professionele wiskundige en dat gaf wel eenheid in stijl. Wat de havo van het Gymnasium onderscheidde was de graad van verdunning waarin de feitelijk academische stof werd aangediend. Voor mavo en lbo werden uit het zelfde zakje een dag later nogmaals thee getrokken. Kraak nog smaak bleven over. Een uitvoeriger beschrijving van deze ontwikkeling is te vinden in (Goddijn, 2000).

Maar de strengheid van de New Math bereikte niet haar doel en verwaterde in de Nederlands versie ook snel. Vanuit het jaar 2001 gezien kunnen we stellen dat er van de New Math in het Nederlandse Onderwijs bijzonder weinig is blijven hangen. Het panorama van het jaar 2001 toont zowel intuïtieve als meer systematische meetkunde waarin het leren bewijzen een belangrijk doel is.

Het verschil met vroeger is dat er meer aandacht is voor de behoefte van de leerlingengroep. Meetkunde op het vmbo moet zinvol zijn voor een vmbo leerling en zijn/haar eventuele latere beroep, meetkunde voor vwo-b moet zinvol zijn voor de vwo-b-leerling en diens latere -eventueel academische- ontwikkeling en beroep.

Wat de opbouw van het leerplan betreft zijn er dan wel een paar problemen te noemen die nog niet opgelost zijn. Maar nu eerst het panorama, daarna de problemen en hun mogelijke oplossing.

3.3. Klein panorama meetkunde 2001 in drie beelden

Hoe ziet de meetkunde er op dit moment uit in het voortgezet onderwijs? We kijken hiervoor eens naar enkele examenopgaven, mavo-d en vw0-b2 en een voorbeeld uit het beroepsonderwijs. De mavo-opgaven karakteriseren enigszins 'wiskunde voor iedereen', de vwo-opgaven geven uitzicht op de toppen-van-nu.

Het panorama is uiteraard erg onvolledig. havo-b bevat bijvoorbeeld interessante gebruiksmeetkunde in de ruimte, maar dat laten we hier onbesproken.

Een: mavo-d, 2001

In het wiskunde-examen vbo-mavo-d van maandag 21 mei 2001 kwamen enkele meetkunde-opgaven voor die een redelijk beeld geven wat er op dit niveau aan meetkunde plaatsvindt. Er is een opgave over het gedeeltelijk onderdompelen van een kubus in een verfbad. Daarbij wordt met voor- en zijaanzichten gewerkt en moet op een uitslag van de kubus aangegeven worden welk deel gekleurd uit het bad komt. De opgave vraagt een behoorlijk voorstellingsvermogen, veronderstelt kennis van de gebezigde terminologie maar vereist weinig formele kennis of formeel redeneren en er hoeft niet gerekend te worden.

Een andere opgave gaat over een mobiele hijskraan. Er zijn veel illustraties aanwezig en een tabel met gegevens over te huren hijskranen en hun kosten. Eén hijskraan wordt in detail afgebeeld en het gaat er om hoever de hijskraan een last van gegeven gewicht kan verplaatsen. Daarbij moeten onder andere berekeningen met eenvoudige goniometrie worden uitgevoerd.

Een derde meetkunde-opgave gaat over een kunstwerk dat op een schoolplein staat. Weer is een foto gegeven, maar er moet ook in aanzichten worden gewerkt omdat de oppervlakte van bepaalde stukken van het kunstwerk moeten worden berekend. De berekening wordt overigens gemotiveerd: er worden graffiti op het kunstwerk gezet en een beschermlaag is nodig. Een en ander valt op als we de opgaven goed bekijken:

a. alle opgaven worden gepresenteerd met behulp van foto's van redelijk bekende situaties. Anders gezegd: de wiskundige vragen worden gesteld binnen een herkenbare context;
b. niet alleen foto's worden gebruikt, er is ruim aandacht voor andere vormen van ruimtelijke weergave, zoals uitslagen en aanzichten;
c. doordat concrete situaties worden gebruikt, begint elke opgave vanzelf in de ruimte. Veelal moeten berekeningen dan wel in een geschikt uitgelicht vlak of in een aanzicht worden uitgevoerd;
d. de uiteindelijke rekenactiviteiten zijn betrekkelijk eenvoudig, maar zijn ingebed in een complexe situatie.

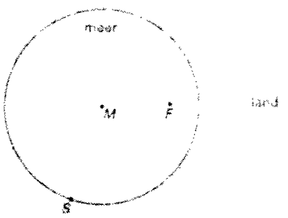
Het ziet er uit als een praktisch gerichte meetkunde voor een brede doelgroep, want de gekozen contexten zijn niet aan een beroepsgebied gebonden.
De belangrijke gebieden van de leerstof komen, maar uiteraard niet in volle omvang, bijna alle aan bod:
a. kijkmeetkunde, dwz. het werken met diverse presentaties van de ruimte en het verklaren van verschijnselen daarmee;
b. rekenen in de meetkunde op allerlei manieren, veelal in de vorm van afstand-, oppervlakte-, inhoud- en hoekberekening met behulp van verhoudingen, Pythagoras en eenvoudige gonio;
c. verkenning van ruimtelijke vormen middels doorsneden, uitslagen, contourlijnen en dergelijke;
d. het gebruik van coördinaten als plaatsaanduiding;
e. verkenning en gebruik van regelmaat en symmetrie.

Opvallende afwezigen in de mavo-d opgaven zijn echter de woorden 'leg uit waarom', 'verklaar', 'beredeneer'. De meetkunde in deze opgaven blijft dicht bij de toepassing zelf en kiest niet voor verdieping in formele of reflectieve richting. Om in termen van de theorie van het realistisch wiskundeonderwijs te spreken: er wordt niet vertikaal gemathematiseerd.

Twee: vwo-b2, 2001
Het examen vwo-b2 nieuwe stijl 2001 is het eerste examen waarin leerlingen van buiten de kring van de eerste tien experimenteerscholen getoetst worden op hun inzicht in de nieuwe leerstof meetkunde. Er komen twee meetkunde-opgaven in voor. De eerste opgave is in zijn geheel opgenomen.

Boottocht

In een cirkelvormig meer liggen twee eilandjes, M en F. We beschouwen de eilandjes als punten. M ligt precies in het midden van het meer. Zie figuur 1.



S is een punt aan de rand van het meer. Een bootje start in S en vaart in een rechte lijn naar M.

5p **1** Teken in de figuur op de bijlage bij vraag 1 het punt P op de route van het bootje waar het bootje even ver van punt S verwijderd is als van F. Licht je werkwijze toe.

Een ander bootje start in een punt aan de rand van het meer en vaart ook in een rechte lijn naar M. Halverwege is de afstand van het bootje tot het land even groot als de afstand van het bootje tot beide eilandjes.

6p **2** Teken in de figuur op de bijlage bij vraag 2 de punten aan de rand van het meer van waaruit het bootje vertrokken kan zijn. Licht je werkwijze toe.

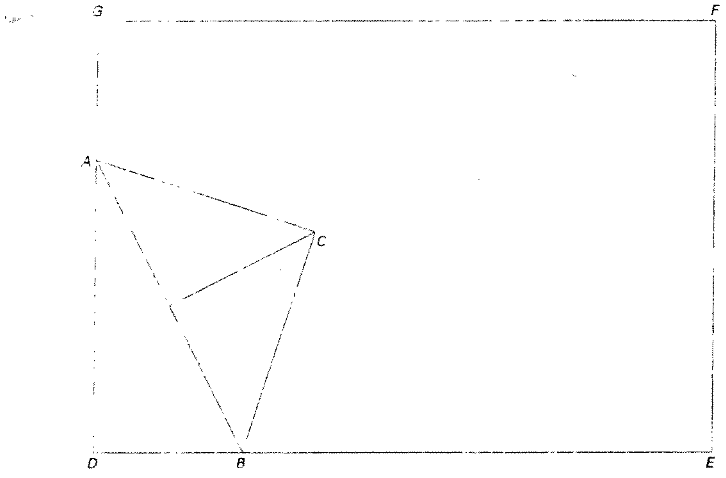
Er is weliswaar sprake van een bootje en een meer, maar het is duidelijk dat die hier slechts dienen om het meetkundige verhaal te vertellen en om de vraag te kunnen stellen naar punten met gelijke afstanden tot bepaalde andere punten of gebieden. De bijhorende meetkunde is de zogenaamd afstandsmeetkunde. Enkele leerlingen maakten gebruik van de ellips die M en *F* als brandpunten heeft en precies de verzameling punten is die op gelijke afstanden van *F* en de randcirkel liggen. De meetkunde van dat soort figuren, kegelsneden, heeft een plaats in de Voorgezette Meetkunde vwo-b2.

Bij deze opgave wordt gevraagd: teken en licht toe. Er kan niet volstaan worden met een vaag verhaal. De toelichting moet expliciet de gevolgde constructie beschrijven en aantonen dat deze tot het gestelde doel leidt. De opgave is niet moeilijk, maar het is dan ook de eerste opgave van het eerste studiehuisexamen.

De tweede opgave, zie hieronder, vraagt `Bewijs' en `Laat zien dat'. Deze opgave is aanmerkelijk lastiger.

Bewegende, gelijkbenige, rechthoekige driehoek

Een gelijkbenige rechthoekige driehoek wordt in de linkeronderhoek van een vel papier gelegd. De eindpunten van de schuine zijde van de driehoek zijn A en B en het derde hoekpunt is C. Punt A ligt op de linkerzijde van het papier en punt B op de onderzijde van het papier. De hoekpunten van het papier noemen we D, E, F en G. Zie figuur 7.
Figuur 7 is op de bijlage afgedrukt.



We laten de driehoek over het papier bewegen waarbij A op de linkerzijde en B op de onderzijde van het papier blijft. In de beginsituatie valt B samen met D. B beweegt over de onderzijde van het papier tot A samenvalt met D. Tijdens de beweging beschrijft C een baan over het papier.

17 Bewijs dat C tijdens deze beweging over de bissectrice van $\angle D$ beweegt. Je kunt hierbij gebruik maken van de figuur op de bijlage bij vraag 17.

Het punt M is het midden van AB. Bij de beweging beschrijft ook M een baan.
18 Laat zien dat deze baan een kwartcirkel is en geef het middelpunt van deze cirkel. Je kunt hierbij gebruik maken van de figuur op de bijlage bij vraag 18.

Voor het bewijs dat C inderdaad over de bissectrice van hoek D beweegt zijn een paar stappen nodig. Dicht bij de leerstof die aan de orde had moeten komen ligt de volgende redenering:

D, *B*, *C* en *A* vormen een koordenvierhoek, want de overstaande hoeken *D* en *C* van vierhoek *DBCA* zijn recht. Dus ligt *DBCA* op een cirkel en is hoek *ADC* gelijk aan *ABC*. Die laatste hoek is 45 graden, dus is hoek *ADC* ook 45 graden en ligt *C* op de deellijn van hoek *GDE*.

Sommige leerlingen vonden andere redeneringen, bijvoorbeeld met gebruikmaking van de loodlijnen uit *C* op *GD* en *ED*. Dan wordt middels congruentie van enkele driehoeken bewezen dat *C* op gelijke afstanden van *GD* en *DE* ligt.

Zulke bewijzen kunnen geheel in de statische terminologie van de klassieke Euclidische Meetkunde verteld worden, maar de opgave is toch in een andere stijl gesteld: die van beweging. Het gebruiken van het element beweging als beschrijvingsvorm is niet nieuw in de meetkunde. Zeventiendeeeuwers als Pascal, Roberval en Fermat doen dit al vaak. Er blijkt snel dat het element beweging in het geval van ons VWO ook op moderne ict-technieken is geïnspireerd, als we kijken naar de overzichtsbeschrijving van de in totaal 120 slu. omvattende Voortgezette Meetkunde vwo-b2, waarvan deze twee opgaven slechts een beperkt beeld geven:

a. afstandsmeetkunde, waaronder gebruik en enige theorie van Voronoi-diagrammen, isoafstandslijnen en conflictlijnen;
b. redeneren en bewijzen in de meetkunde;
c. het onderzoeken van meetkundige plaatsen met name met behulp van dynamisch tekenprogramma's;
d. kegelsneden en hun reflectie-eigenschappen.

Voronoi-diagrammen, conflictlijnen en kegelsneden kennen velerlei toepassingen; de bedoeling is dat die bij de behandeling van de meetkunde ook aan bod komen. In de leerdoelen wordt het gebruik van gespecificeerde ict wel genoemd, maar op het centraal schriftelijk eindexamen nog niet toegestaan.

Het vwo-wiskunde programma als geheel, en dus de meetkunde ook, vertoont overigens de litttekens van krachtige niet-wiskundige ingrepen. Er is behoorlijk in gesneden omdat het programma voor de studiehuissituatie te zwaar (b)leek. Bijvoorbeeld is het onderdeel analytische meetkunde gesneuveld, een onderdeel dat een mooie brug had kunnen slaan tussen de domeinen analyse en meetkunde.

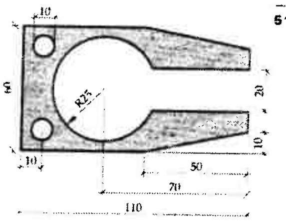
De examenresultaten van deze eerste keer zijn onthullend:

- De Bootjesopgave was zoals voorspeld niet te moeilijk. De gemiddelde score is hoog: 4.59 van de 5 beschikbare punten in vraag 1, en 4.93 van de 6 in vraag 2.
- De Schuivende Geodriehoek was voor heel wat leerlingen te hoog gegrepen; gemiddeld werd bij opgave 17 van de 5 punten er 1.32 gehaald en bij opgave 18 ook slechts 1.6 van de 5 gehaald.

Het verschil tussen de opgaven is aanzienlijk. In het eerste geval moet een concrete actie uitgevoerd worden: het maken van een betrekkelijk eenvoudige tekening. De kritiek (bijvoorbeeld van J. van Lint op Kennisnet) dat tweedeklassers dit toch moeten kunnen is bij dit vraagstuk enigszins begrijpelijk, hoewel nauwelijks getoetst aan de praktijk van het jaar 2001.

De schuivende driehoek vraagt om een beslist niet triviaal bewijs en dat wordt door dezelfde J. van Lint dus wel behoorlijk onderschat. Verschillende stappen moeten zelfstandig genomen worden, terwijl de praktijk in de klas zal zijn geweest dat bij redeneeropgaven als deze de leerlingen sterk profiteren van elkaars associaties en opmerkingen. Bewijsopgaven, indien individueel uitgevoerd, lukken of ze lukken geheel niet; bij een eerder experimenteel examen bleek dat nog helderder, van de beschikbare tien punten werden er ofwel minder dan twee ofwel meer dan acht gehaald. Het kan aan het type opgave liggen, maar een terechte vraag is ook of de individueel schriftelijke eindexamenvorm binnen beperkte tijdsduur recht doet aan de kwaliteiten van de leerling. Een veel gevarieerder beeld van de activiteiten van de leerling blijkt dan ook uit een werkstukbespreking als die van (Gosselink, 1999) of een verslag van de activiteiten in de klas, zoals bijvoorbeeld (Goddijn, 2000) en (Huls, 1998). Daaruit blijkt in het algemeen dat het redeneren vooral via interactie van leerlingen onderling of met de docent geleerd wordt, terwijl toch ook gesteld moet worden dat de fraaie bewijzen waarop gehoopt wordt bepaald niet ieder moment uit de hemel vallen.

Drie: middelbaar beroepsonderwijs, afdeling techniek
De wiskunde in het middelbaar beroepsonderwijs is pas recentelijk meer aangepast aan de specifieke behoeften van dat type onderwijs. Opgaven als onderstaande hebben daarin een heel natuurlijke plaats.



Figuur 6.45

51 Dit onderdeel is gemaakt van aluminium.
De massadichtheid van aluminium is $2{,}7 \cdot 10^3$ kg/m^3. Alle getoonde maten zijn in mm.

a Bereken de oppervlakte van het getoonde bovenvlak.

De hoogte van het onderdeel is 20 mm.

b Bereken de massa.

De vereiste formele meetkunde kennis is weer gering, maar de herkenning kan lastiger zijn.

Typisch voor wiskundeonderwijs in alle afdelingen van het beroepsonderwijs is deze keuze: houd de wiskunde zelf eenvoudig maar zorg dat die wel bruikbaar is in de complexere toepassingen van het betreffende beroep. Dat is een inmiddels breed aanvaarde visie, met name in de beroepsvelden waar het om gaat. (Forman & van der Steen, 2000) betogen bijvoorbeeld dat *'business and industry expect .... problem solving that relies on sophisticated uses of relatively elementary mathematical tools.'*

Nieuw gestarte ontwikkelingen in het vmbo en verschuivingen in het curriculum wijzen in dezelfde richting.

3.4. Intuïtie en strengheid in 2001

In het algemeen vormend onderwijs zijn duidelijk de contouren van een geheel zichtbaar. In het begin is er een informele, zeg intuïtieve fase van de meetkunde. Aan het eind, voor de kleine elitegroep die wiskunde B2 kiest, is er tijd ingeruimd voor systematisch bewijzen in de meetkunde maar de Voortgezette Meetkunde wordt toch nog ingeleid vanuit toepassingen of toepassingen komen onderwijl aan bod. Starten met toepassingen is niet per se nodig, maar de voorgestelde onderwerpen geven die mogelijkheid en in de experimentele fase van het leerplan is een en ander in die volgorde opgezet. Zie bij voorbeeld (Goddijn & Reuter, 1997).

Een specifiek probleem is dat in de vwo-top niet nog eens alles wat in informele vorm in de onderbouw aan bod is geweest, in de gegeven-te bewijzen-bewijs vorm herhaald kan worden. Leerlingen kennen de stelling van Pythagoras, geloven de eigenschappen van het parallellogram als die genoemd worden, maar hebben geen zicht op een systematiek waarin de bouwstenen met de specie van het exact redeneren tot een geheel zijn gemaakt. In het begin van de vijfde klas uit zich dat regelmatig in de vraag: wat mag je nu wel of niet gebruiken in een bewijs. Deze onduidelijkheid kan een voordeel zijn, de leerling die de vraag stelt, stelt zelf ook zelf als het ware de eis van duidelijke afspraken. Het zijn afspraken die gemaakt kunnen worden, die eigenlijk heel natuurlijk zijn: je mag gebruiken wat je zeker weet, maar eventueel kan een ander er wel op doorvragen. Uiteindelijk maak je een paar basisafspraken, en dat hoeven niet de onderste stenen van Euclides' gebouw te zijn. Dit is uiteraard een verwijzing naar het bekende *'Proofs and Refutations'* van (Lakatos, 1976), maar op het centrale eindexamen zou het moeilijkheden kunnen opleveren bij de beoordeling. De noodoplossing is dat er op het examen een lijst van stellingen beschikbaar is waarnaar verwezen mag worden; uiteraard kent de leerling die lijst al en heeft er mee gewerkt. Aldus geregeld omdat problemen verwacht werden, die zich echter in de experimentele situatie (Profi-project) nauwelijks hebben voorgedaan.

Wat wel duidelijk is: deductieve strengheid is er niet van het begin af aan, maar die wordt pas geleidelijk in de bovenbouw vereist. In zowel (Goddijn, 2000) en (Huls, 1998) zijn momenten van dat leerproces te zien. Of het juist is zo laat met formele bewijsstructuren te werken, daarover zijn twijfels goed mogelijk. Juist de a.s. vwo-er in de onderbouw kan vaak goed uit de weg met problemen die binnen bepaalde expliciete spelregels moeten worden opgelost, en veel van de activiteiten van bijvoorbeeld de stichting Vierkant, die duidelijk is in haar standpunt dat deze leerlingen, de toekomstige vwo-ers, op te laag niveau worden aangesproken, gaan in die richting.

3.5. Te weinig uitdaging in de onderbouw

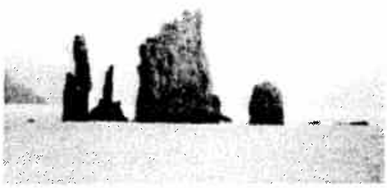
Het nieuwe curriculum waarin het genoemde mavo-examen een plaats heeft, is rond 1990 ontwikkeld door een breed team, het team W12-1 ; dit geschiede onder toezicht van de commissie COW waarin alle belanghebbende groepen zoals docenten en uitgevers vertegenwoordigd waren. Voor het niveau mavo werd eindelijk na de verwatering van de New Math gekozen voor een curriculum dat waardevol is op zich, en niet pas waardevol wordt als de leerling verder door gaat met meer academische wiskunde. De mavo-leerlingen vormen een middensegment, en in het algemeen wordt gevonden dat het programma voor die groep redelijk voldoet.

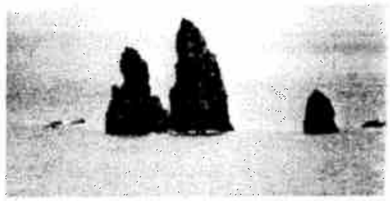
De praktijk was dat de inhouden van het programma werden geïdentificeerd met de basisvorming die verplicht is voor iedereen. Gevolg is dat het programma voor het vmbo vaak te zwaar is en voor de groep die doorstroomt richting vwo niet uitdagend genoeg.

Wat het vmbo betreft zijn nieuwe ontwikkelingen al op gang, wat het vwo betreft in de onderbouw in veel mindere mate.

Opmerkelijk is dat het Team W12-16 wel voorstellen heeft gedaan en uitgeprobeerd die gaan in de richting van verdieping bij het meetkunde leerplan, maar dat deze voorbeelden nauwelijks werden opgepakt door de reguliere methoden. Het gaat wat de meetkunde betreft om voorbeelden waar voor typische vwo-leerlingen meer uitdaging in zit, en om voorbeelden waarbij aan systematisering wordt gewerkt. Uit enkele van de W12-16 produkties nemen we er hier een paar op, ook om te laten zien dat het niet per se nodig is voor verdieping en meer uitdaging voor de a.s. vwo-er te grijpen naar problemen die meteen los staan van het leerplan.

In het kijkmeetkundepakket 'The Drongs' (Goddijn) staat een serie opgaven over een groepje rotsen bij de Shetland eilanden. De rotsgroep is gefotografeerd vanuit twee richtingen en de beelden zijn zeer verschillend.





Op een kaartje is aangegeven vanwaar de foto's genomen zijn. De opgave is een plattegrond te maken waarop de ligging van de drie belangrijkste rotsen duidelijk is, zodat de verschillen tussen de foto's verklaard zijn. In een moeilijker vorm waren er zes foto's gegeven en was wel de kaart gegeven van het betreffende gebied, maar niet de exacte lokatie van de fotograaf; dat was zelfs een uitdaging voor een vijfde klas Gymnasium die nooit eerder aan dergelijke problemen was blootgesteld.

Dit type opgave werd wel aangetroffen in de methoden (voor zowel basisonderwijs als voortgezet onderwijs) en Cito-toetsen; er zijn varianten van stadjes met torens, boorplatforms, lantaarnpalen, tenten op campings, enzovoort. Tot vervelens toe misschien. Ofwel: de opgave heeft traditie gemaakt.

Veel uitdagender was het volgende probleem, dat in een 3-gymnasium klas lastig werd gevonden en het voor veel docenten in bijeenkomsten ook bleek te zijn.

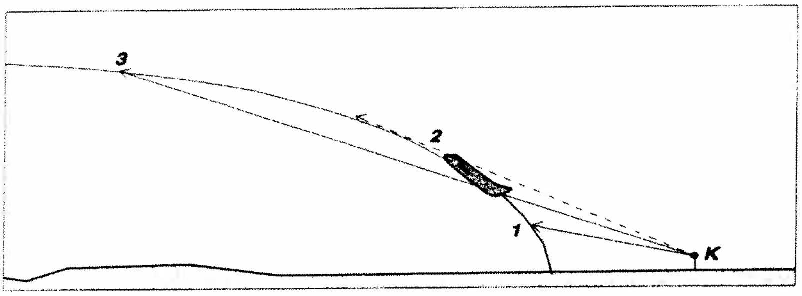
Gegeven is een foto van een opstijgende raket, in de vroege jaren negentig kwamen dergelijke foto's nogal eens in de krant, ook wel omdat het een enkele keer wel eens fataal misging.
Dit is zo'n foto. Er wordt medegedeeld dat het hier niet om een ramp ging. De vraag is dan wel hoe verklaard kan worden dat de baan van de raket, die zichtbaar is gebleven door het spoor van uitlaatgassen, toch naar beneden gaat op de foto.

De vraag is dus: gaat de raket inderdaad omlaag in het laatste stukje baan op de foto, dat op de foto wel dalend lijkt te zijn.

De vraag is niet eenvoudig, al is het verschijnsel dagelijks alom zichtbaar, niet in de vorm van een raketbaan, maar wel in de vorm van het verschil tussen schijnbare bewegingsrichting op de afbeelding (foto, video) en de werkelijkheid.

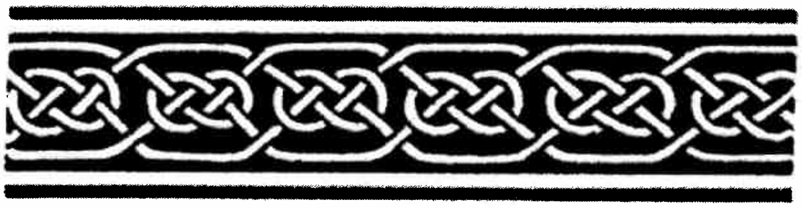
Bij `kijkmeetkunde' gaat het juist om verklaringen met behulp van aanzichten en het trekken van kijklijnen. De opgave was in pure vorm (foto plus vraag alleen) te moeilijk en het spoor `zijaanzicht' werd in een gymnasiumklas aangeboden.

Dat werkte goed en uiteindelijk werd ook het hoogste punt van de baan op de foto geïdentificeerd met het punt van de baan in het zijaanzicht waarbij de betreffende kijklijn raakt aan de baan.



In het plaatje is te zien dat de raket blijft stijgen maar dat de kijkhoek ten opzichte van de horizon eerst stijgt, maar later wel daalt. Opgaven in deze sfeer, waarbij een niet triviale verklaring gegeven moest worden, waren er méér, maar ze werden, misschien vanwege de slechte herhaalbaarheid, niet opgepakt. Voor de jonge vwo-er is de kijkmeetkunde die in de eerste twee klassen wordt gedaan, dan ook vaak veel te plat.Het moet mogelijk zijn een lange leerlijn aan te geven waar dergelijke activiteiten wel in passen, maar dat is nog niet echt gedaan.

Een tweede voorbeeld gaat over randornamenten. Dat zijn versieringspatronen waarbij in één richting herhaling optreedt, zoals in de twee voorbeelden hieronder.



Behalve de herhaalstructuur heeft het eerste voorbeeld nog spiegelassen in de lengte en dwars op het patroon. Het tweede patroon heeft die spiegelassen niet, maar heeft wel draaispiegelingen. andere patronen hebben weer andere samenstellingen van symmetriën en uiteindelijk blijkt dat er maar zeven principieel verschillende symmetriestructuren voor dergelijke patronen mogelijk zijn. Dit is een feit dat allang in de versieringspraktijk bekend is, maar het in kaart brengen en het klassificeren is een fraaie activiteit die ook op elementair niveau (dus zonder formalismen als groepen) goed uitvoerbaar is. In de publicatie `Op de rand' (Verhage & Meeder,) was het in eerste instantie opgenomen. Ook dit is geen activiteit voor alle leerlingen en het onderwerp sneuvelde, net als de raket. Herkennen van symmetrieën komt wel in het leerplan van 2001 voor, enige systematisering zoals de hier genoemde in het geheel niet.

Wat de voorbeelden laten zien, is dat er ook binnen de meetkundestof die voor de basisvorming geschikt wordt geacht voldoende mogelijkheden liggen voor differentiatie, voor uitdaging van de betere leerling.

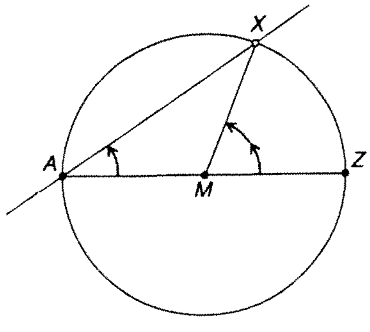
3.6. Aangezet, maar verder uit te bouwen: dynamisch ICT-gebruik

In het bovenbouwprogramma wordt uitdrukkelijk geadviseerd met dynamische meetkunde op de computer te werken. Een daartoe zeer geschikt programma (Cabri) is sinds kort in Nederland alom beschikbaar, omdat het in de kaft geschoven met de grotere methoden mee naar de leerling toe komt. Maar we staan nog slechts aan het begin van een ontwikkeling hier.

Dat er met zulke programma' te exploreren valt is duidelijk. Met Cabri is het gemakkelijk vele liggingen van een figuur te onderzoeken, daardoor vermoedens te ontdekken of te weerleggen. Zie ook (Goddijn & Reuter, 1997) en de al eerder genoemde bespreking (Goddijn, 2000). Maar de meeste voorbeelden behoren tot de traditionele statische meetkunde en de software wordt ter ondersteuning van de gekozen leerstof gebruikt. Er is nog nauwelijks onderzocht welke meetkunde specifiek voordeel bij de dynamische benadering heeft en zeker wordt de presentatievorm van de meetkundige theorie er niet door beinvloed.

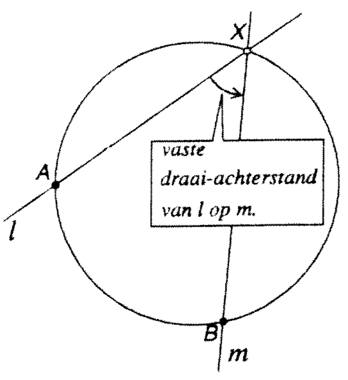
We geven nu een schets van een mogelijkheid dat juist wel te doen, maar alleen kort en informeel beschreven. Zie ook (Goddijn). Het gaat om de zogenaamde stelling van de constante omtrekshoek op een vaste boog die een grote rol speelt in de Voortgezette meetkunde in Wiskunde B2.

fig. 1



Op de cirkel met middelpunt M (zie hiernaast) ligt een vast punt A en een lopend punt X. Als X tegenkloks een hele ronde aflegt, draait de lijn AX om A, maar slechts over een halve ronde. Uiteindelijk ligt de lijn wél weer als geheel op zichzelf. Als X met vaste hoeksnelheid rondgaat, draait AX ook met vaste snelheid, zij het met halve snelheid. Dit alles is direct aan te tonen als we X tegenover A op de cirkel laten beginnen, in Z dus in fig. 1, en hoek $\angle XMZ$ met $\angle XAZ$ vergelijken. Er geldt $\angle XMZ = 2\angle XAZ$, omdat $\angle XMZ$ buitenhoek is van de gelijkbenige driehoek AMB

Waarom geven we in plaats van de traditionele statische beschrijving niet voortaan een dynamische? Bijvoorbeeld zo:
Als A een vast punt op een cirkel is, en X een bewegend punt, dan is de hoeksnelheid van de om A draaiende lijn AX de helft van de hoeksnelheid van de draaiende straal naar X. . *Fig. 2*



De beloning volgt als we het spel met twéé vaste punten A en B en één lopend punt X spelen, zie fig. 2. Nu draaien lijnen *AX* en *BX* beide met dezelfde snelheid om hun vaste punten *A* en *B* - dat volgt immers uit de dynamische beschrijving - en daarom moet de hoek bij *X* constant zijn, als we die hoek maar interpreteren als draaiachterstand van de ene lijn op de andere. Binnen de dynamiek van een computerprogramma als Cabri is dit veel evidenter dan het traditionele vergelijken van de hoeken bij twee punten op de cirkel.

Een exacte onderbouwing is mogelijk, eventueel zelfs op het vwo, en in bewijzen werkt het middel beweging heel prettig als we middels Cabri naar bewijzen op zoek gaan. We zien dan bijvoorbeeld dat de hier beschreven hoek ook constant blijft is als *X* het punt *A* is gepasseerd.

3.7. Aanbevelingen

In dit laatste onderdeel van het meetkundegedeelte van dit artikel doen we een paar voorzichtige suggesties, die er op gericht zijn het meetkundeleerplan aan te passen aan mogelijkheden en werkelijkheden van de toekomst. De eerste voorstellen gaan over herwaardering van de informele meetkunde in de onderbouw, de latere over verder weg liggende mogelijkheden bij de Voortgezette Meetkunde in de bovenbouw.

a: Verschuif elementaire kijkmeetkunde naar basisonderwijs
Veel dingen die nu in het vo gebeuren zijn nieuw voor de leerling, doen een fors beroep op zijn ruimtelijk voorstellingsvermogen, maar de ervaringen van velen is dat veel opdrachten die in de brugklas worden gedaan, ook veel eerder mogelijk zijn. Voorstel: streef ernaar dat de basale ideeën van de kijkmeetkunde, die er op gericht is het voorstellingsvermogen en het mentaal van verschillende kanten kunnen kijken naar één situatie, meer in het basisonderwijs plaats hebben. In (Moor, 1999) wordt aangegeven hoe weinig meetkunde in deze richting er in het algemeen in het basisonderwijs feitelijk wordt gedaan, terwijl het allang de bedoeling is meer te doen. Slechts in enkele methoden is dit adequaat gerealiseerd.

b: Zet een bescheiden systematisering van de informele meetkunde voort
De informele meetkunde in de onderbouw is zoals boven aangegeven wel in bepaalde gebieden in te delen, maar toch zou het goed zijn als de informele, aan de realiteit gebonden meetkunde wat meer systematisch vorm kreeg omdat dit de onderwijsbaarheid ten goede kan komen. Voor de kijkmeetkun-

de is wel een poging gedaan, (Abels, 1992). Daar wordt bijvoorbeeld een overzicht gegeven van de verschillende projectievormen die horen bij verschillende kijksituaties en op natuurlijke wijze ontstane projecties door schaduw. Zo'n min of meer theoretisch overzicht schept een orde die het mogelijk maakt vast te stellen wat in een leergang ontbreekt of onderbelicht blijft, of niet in samenhang is geplaatst.

Een ander voorbeeld is het exploreren van het begrip hoek zoals dat in verschillende praktische situaties functioneert: als hoek van een object, als draai op een route, als richting, als kenmerk van een rotatie. Veel van die situaties zijn als instap in het hoekbegrip mogelijk, maar misschien niet voor alle aspecten ervan.

Een krachtige voorzet voor een dergelijk onderzoek is al gedaan in de `Didactische fenomenologie van wiskundige structuren' van Freudenthal [12]. Freudenthal beschrijft daar `wiskundige begrippen, structuren en denkbeelden in de relatie tot de fenomenen waarvoor ze geschapen zijn en waartoe ze uitgebreid werden in het leerproces van de mensheid.' Freudenthals werk is een didactische fenomenologie omdat het ook wil zijn; `een wegwijzer voor de onderwijsgevende naar de instap van de lerende in het leerproces van de mensheid.'

Wat hier voorgesteld wordt is Freudenthal's benadering voort te zetten in de richting van onderwijspraktijk en curriculumontwikkeling.

c: Zoek uitdagende informele meetkunde op

Het voorbeeldprobleem van de opstijgende raket is behoorlijk moeilijk, zeker in zijn rauwe vorm zonder de verwijzing naar het maken van een zijaanzicht. In zo'n vorm zou het probleem ook in een wedstrijdvorm kunnen functioneren. Dat het probleem verband heeft met de rest van de kijkmeetkunde is duidelijk; het aangeven van mogelijkheden als deze naast de `reguliere stof' tilt de informele meetkunde als geheel boven het niveau van de te grote simpelheid die het voor de betere leerling vaak kenmerkt.

d: Verder met ICT in de middenbouw

De invoering van de Voortgezette meetkunde in de vwo-top versnelde de bekendheid met dynamische meetkunde programma's als Cabri. Van diverse kanten wordt nu terecht gezegd dat deze meetkundesoftware te gebruiken moet zijn in klas 3 en 4. Ook hier moet gezocht worden hoe deze software een rol kan spelen bij de bestaande leerstof, maar ook welke invloed het kan hebben op de conceptvorming, zoals zich dat ook in de bovenbouw lijkt af te gaan aftekenen.

Open experimenteer-omgevingen zoals Cabri en de vernieuwde versie van het ruimtemeetkundeprogramma Doorzien behouden hun waarde op de lange duur; de investering in het leren werken met zulke software betaalt zich op de lange duur juist terug.

e: Dwarsverbanden meetkunde en analyse/algebra

Het huidige wiskundecurriculum kenmerkt zich niet door een rijkdom aan dwarsverbanden tussen onderdelen als analyse en algebra enerzijds en meetkunde anderzijds.

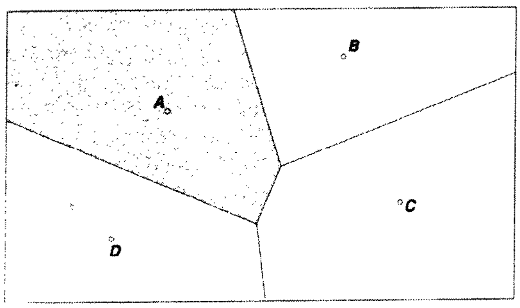
Optimaliseren in zijn algemene vorm kan zo'n dwarsverband zijn; in het experimentele materiaal van het Profi-project voor vwo-b heeft dat vorm gekregen door bij klassieke optimaliserings-problemen zowel naar een meetkundige als een analytische oplossing te zoeken. (Doorman et al., 1997). Een ander dwarsverband zou het begrippenpaar snelheid en beweging kunnen zijn; vanuit de dynamische meetkunde ligt dat voor de hand. In de historische en didactische opzet van de differentiaalrekening speelt het begrip snelheid een grote rol in de conceptvorming, maar minder als te bestuderen onderwerp op zich.

Dat er talloze dwarsverbanden tussen meetkunde en algebra mogelijk zijn, blijkt duidelijk uit het algebra gedeelte van dit artikel. Vanuit de meetkunde zou het de moeite waard zijn ook te onderzoeken of een dergelijke benadering ook een verrijking van de meetkundige structuur zou kunnen zijn. Een mogelijkheid zou kunnen zijn vanuit een algebra-georiënteerde oppervlaktedefinitie, de consequenties te onderzoeken van het gebruik van negatieve waarden voor oppervlakte in de zin van gerichte oppervlakte.

Maar er zijn ongetwijfeld meer mogelijkheden op dit raakvlak. Bijvoorbeeld het gebruik van oppervlaktetheorie in bewijzen, zoals dat al door Euclides gedaan werd; hier ligt een mogelijkheid van lokale deductie op het niveau van 3 vwo.

f: Geavanceerde grootschalige toepassingen

De voortgezette meetkunde zoals voorgesteld in het Profi-project opent met het verkennen van Voronoi-diagrammen. Deze diagrammen geven een gebiedsindeling volgens het naaste-buur-principe bij een gegeven ligging van (eindig veel) punten in het vlak. In de voorbeeldfiguur hieronder zijn de vier punten *A*, *B*, *C* en *D* gegeven en bestaat het grijze gebied precies uit de punten waarvoor *A* het dichtstbijzijnde punt van het viertal *A, B, C, D* is. Het volledige diagram, is hier getekend, ook de bij *B, C* en *D* horende gebieden zijn te zien. Dat is dus het Voronoi-diagram van de vier punten.



De toepasbaarheid van dergelijke diagrammen blijkt groot te zijn in allerlei disciplines en is vaak afhankelijk van het snel kunnen berekenen van de diagrammen bij grote aantallen gegeven punten. Het is daarmee typisch een onderwerp dat behoort tot de *computational geometry.*

Grootschalige rekentoepassingen van eenvoudige meetkunde zijn er meer en spelen zich af op `aansprekende' gebieden als:

- het maken van animatiefilms en daarin bijvoorbeeld specifiek het animeren van gelaatsuitdrukkingen;

- het voorspellen van en lichaamsveranderingen veranderingen bij chrirurgische ingrepen (medisch noodzakelijk of puur esthetisch).

Traditionele meetkunde, niet of matig computerondersteund, kan ontaarden in het bestuderen van elementaire situaties alleen, zonder dat complexere moderne toepassingen in beeld komen. Juist bij zulke complexe toepassingen als hier genoemd is het interessant nu al te overwegen hoe dit een plaats in het vwo meetkunde-onderwijs kan krijgen.

Meetkunde toont haar twee gezichten

Mevr. Ehrenfest zag de informele meetkunde die stoelde op ervaring en intuitie over de dagelijkse leefruimte als een voorstadium op de formeel-systematische meetkunde. De onderwijsontwikkeling in de twintigste eeuw laat zien dat dit ideaal voor een beperkte groep van de VO-leerlingen werkelijkheid kan worden, maar op zich ook weer voor een deel. Naar een echte axiomatisch-deductief opgebouwde meetkunde wordt in de 120 slu Voortgezette Meetkunde van het studiehuis ook niet gestreefd.

In het bovenstaande, dat blijkt vooral ook uit de aanbevelingen, worden de accenten ook iets anders gelegd. Realiteitsbetrokken meetkunde wordt nu ook zinvol gevonden als niet doorgestoten wordt naar een hoger formeel niveau. Maar ook als wel naar zo'n niveau wordt toegewerkt, behouden de toepassingen van de meetkunde - en dan liefst ook eigentijdsere en complexere dan een schuin tegen de muur staande ladder - hun waarde, mede omdat ze aanleiding geven tot reflectie en theorievorming.

Kon het in 1925 nog gebeuren dat voorstanders van de informele benadering van de meetkunde aan de schandpaal werden genageld, nu in 2001 kan de meetkunde zonder schaamte haar beide gezichten vrijuit tonen. Moge dat zo blijven.

4. Slotwoord

Voor de generatie van 'voor de Mammoet' was meetkunde het vak waarin 'je dingen moest bewijzen' en algebra het vak 'waarin je moest rekenen met letters'. Met de intrede van de Mammoetwet kwam de 'nieuwe wiskunde' mee en veranderde het gezicht van beide vakken. Bij de meetkunde verdween de bewijscultuur nagenoeg geheel; er is nog even geprobeerd om de vlakke meetkunde deductief op te bouwen met behulp van transformaties (in het bijzonder lijnspiegelingen), maar dit mislukte. Ter compensatie zou bij algebra de aandacht worden verlegd van manipuleren naar deduceren, waarbij de associatieve, commutatieve en distributieve wetten als de axioma's zouden fungeren. Deze structuralistische benadering van het vak verwaterde echter langzaam maar zeker en algebra kreeg weer zijn vroegere gezicht terug, zij het wat bleker.

De uitwerking van de realistische filosofie op het huidige onderwijs in algebra en meetkunde zijn in het voorgaande ruimschoots ter sprake gekomen. De in de basisvorming gerealiseerde meetkunde is het concrete vak geworden van' ruimte en maat', waarvan sprake was in de inleiding op deel II van dit artikel. Zonder deze ontwikkeling te kort te doen kan worden gesteld dat voor de havo-vwo stroom er, al was het maar bij wijze van voorbereiding voor de wiskunde in de natuurprofielen, waarschijnlijk wat meer mogelijk is in de richting van redeneren en bescheiden deduceren.

De algebra oogt duidelijk weerbarstiger in die zin dat de stap van concreet naar abstract weliswaar wordt uitgesteld in vergelijking met vroeger, maar dat dit uitstel niet leidt tot een soepele sprong in het formalistische duister. In deel I van dit artikel zijn een aantal suggesties gedaan om dit proces te verbeteren en om op een betekenisvolle wijze te werken aan de ontwikkeling van algebraïsche vaardigheden.

In beide delen is van meet af aan bedoeld dat 'wiskunde doen' niet staat voor het braaf afwerken van een serie voorgeschreven opdrachten, zoals in de vigerende praktijk helaas maar al te vaak het geval is, maar dat het reflectief omgaan met wiskundige problemen essentieel is voor het vak.

Zowel bij het ontwikkelen van op begrip steunende vaardigheden bij de algebra als bij het geleidelijk groeien naar het kunnen leveren van sluitende redeneringen in de meetkunde, is zelfstandig werken in de vorm, die het thans vaak in het studiehuis krijgt, verre van voldoende. De docent zal altijd onmisbaar zijn bij wiskundige leerprocessen. Hij of zij is behalve organisator van het onderwijsgebeuren ook katalysator, mede-oplosser en inbrenger van problemen die de discussie op de juiste momenten (!) stimuleert. De leraar moet het kritisch klankbord zijn, moet doorvragen op halfwassen reken- en redeneerstappen en moet de gelegenheid nemen om delen van de stof te resumeren en in een groter kader te plaatsen en om nieuwe concepten aan te kaarten. Dat die taken onder druk van een snelle invoering van het studiehuis in de knel komen, dat er speciaal bij wiskunde gevaar dreigt dat er te weinig contacturen zijn om de stof samen discussierend te doorleven, het wordt de laatste tijd allemaal vaak gezegd. Het idee van de 'terugtredende wiskundeleraar' is een waanidee. De Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren heeft hier een duidelijk standpunt ingenomen Kollenveld, 2001)], maar ook vanuit andere vakken klinkt die roep tot herwaardering van de eigen taak van de docent; recentelijk liet historicus/docent Jan Drentje nog een hartekreet in deze richting verschijnen in de het NRC-Handelsblad (Drentje, 2001). Dit is dan ook onze laatste aanbeveling:

> *Laat, gesteund door werkelijke verbetering van de schoolstructuur, de docent zijn eigen werk weer doen.*

Literatuur

Abels, M. e.a. (1992). *Achtergronden van het nieuwe leerplan wiskunde 12-16, deel 1, 2.* Freudenthal Instituut.

Alexis-Claude Clairaut, *Éléments de Géométrie*, Paris, 1765.

Brokamp, N. 33550336. (1995). *Een volmaakte voltreffer,* Nieuwe Wiskrant 14(3).

Doorman, M., Drijvers, P. & Kindt, M. (1994). *De Grafische Rekenmachine in het Wiskundeonderwijs*, CDβ Press, Utrecht.

Doorman, M., Drijvers, P. & Kindt, M. (1997). *Optimaliseren.* Differentiaal en integraalrekening, deel 3. Freudenthal Instituut..

Drentje, J. *Onderwijs heeft behoefte aan vitale leraren.* NRC-Handelsblad, 9 mei 2001.

Dijksterhuis, E. J. (1924). *Moet het meetkundeonderwijs gewijzigd worden?* Bijvoegsel van het Nieuw tijdschrift voor wiskunde gewijd aan onderwijsbelangen (later: Euclides), eerste jaargang, no. 1.

Enzensberger, H.M. (1998). *De telduivel*, De Bezige Bij, Amsterdam.

Ehrenfest-Afanessjewa, T. (1931). *Uebungensammlung zu einer geometrischen Propädeuse*, Martinus Nijhoff, Den Haag.
Euclides: *De Elementen*. Alexandrie, ongeveer 300 voor Christus.
Forman, S.L & Steen, L. A: van der (2000). *Making authentic mathematics work for all Students*. In: Education for Mathematics in the Workplace, ed. Bessot en Ridgeway, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical structures*. Reidel Publishing.
Goddijn, A.. (2000). *Lengte wordt breedte*. In Honderd jaar wiskundeonderwijs, ed. Goffree, van Hoorn en Zwaneveld. Nederlandse Vereninging van Wiskundeleraren.
Goddijn, A.. *The Drongs*; experimenteel meetkundepaket voor het project W12-1, niet meer verkrijgbaar.
Goddijn, A., Reuter, W. (1997). *Afstanden, grenzen en gebieden*. Nieuwe meetkunde voor VWO profiel N&T. Freudenthal instituut.
Goddijn, A., Reuter, W. (1997). *Denken in cirkels en lijnen*. Nieuwe meetkunde voor VWO profiel N&T. Freudenthal instituut.
Goddijn, A. . (2000). *Gegeven: cirkel met vlinder*. Nieuwe Wiskrant. Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs, 20(2), 19-26.
Goddijn, A. *Oude meetkunde krijgt nieuwe jeugd*. In: Syllabus Vakantiecursus CWI, 2001. (Nog te verschijnen).
Gosselink, I. (1999). *Praktische opdrachten Voortgezette Meetkunde*. Nieuwe Wiskrant. Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs, 18, 4 – 9.
Heath, T. L. (1956).*The Thirteen Books of Euclid's Elements*; oorspronkelijk 1908, nu: Dover Publications
Heath, T.L. (1981). *The History of Greek Mathematics*. Dover Publications.
Huls, G. (1998). *Voronoi-diagrammen en bewijzen in de klas*. Nieuwe Wiskrant. Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs. 17(4).
Keune, F. (1997). *Wiskunde naar de knoppen*. Nijmegen. Ook: http://www.sci.kun.nl/math/~keune/oratie/oratie.html.
Kindt, M. (2001). *Discrete algebra*. Nieuwe Wiskrant 19(4).
Kindt, M. (1991). *Stoffige Algebra*. Nieuwe Wiskrant 10(4).
Knuth, D.D. (1969). *The art of computer programming* vol. 2, Addison Welseley,
Kollenveld, M. (2001). *Van de bestuurstafel*. Euclides, orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, 76(6).
Lakatos, I. (1976). .*Proofs and Refutations*. Cambridge University Press.
Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Vieweg
Moor, E. W. A. de (1999). *Van Vormleer naar Realistische meetkunde*. Centrum voor Didaktiek van Wiskunde en Natuurwetenschappen,.
National Center for Research in Mathematical Science Education and Freudenthal Institute, eds. (1997). *Mathematics in Context*, Chicago.
Polya, G. (1967). *Mathematical Discovery* vol 1., Wiley & Sons.
Sawyer, W.W. (1969). Aanschouwelijk Algebra, Het Spectrum.
Verhage, H. en Meeder, M.: *Op de rand*; experimenteel meetkundepaket voor het project W12-1, niet meer verkrijgbaar.