

“Niet blij in de rij”



voorrunde-opdracht van de 29^e Olympiade - 17 november 2017

Colofon

De Wiskunde Olympiade is een initiatief van het Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht. De Olympiadecommissie is verantwoordelijk voor de organisatie van de Olympiade en het vervaardigen van de opdracht.

De commissie bestaat uit:

Eric van Dijk
Lorentz Casimir Lyceum Eindhoven

Tom Goris
Fontys Lerarenopleiding, Tilburg

Dédé de Haan
Freudenthal Instituut, Utrecht & NHL Hogeschool, Leeuwarden

Senta Haas
Städtisches Gymnasium Hennef, Hennef, Duitsland

Jacques Jansen
Strabrecht College, Geldrop

Kim Kaspers
Murmellius Gymnasium, Alkmaar

Johan van de Leur,
Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht

Ruud Stolwijk
CITO, Arnhem & Vrijeschool Zutphen VO

Monica Wijers
Freudenthal Instituut, Utrecht

Secretariaat:
Liesbeth Walther en Mariozee Wintermans
Freudenthal Instituut, Utrecht

De Olympiade wordt mede mogelijk gemaakt door subsidies van:
Ministerie van Onderwijs, Cultuur en Wetenschap
CASIO, Amstelveen
Texas Instruments, Utrecht

Werkwijzer bij de voorronde opdracht van de Wiskunde Olympiade 2017/2018

Deze Wiskunde-Olympiade-opdracht bestaat uit drie delen: de instap (deel 1a en deel 1b, met zeven instapopdrachten), deel 2 grafische weergave (met vier opdrachten) en deel 3: Toepassing (met een opdracht en een eindopdracht). De (instap)opdrachten uit deel 1 en 2 vormen een aanloop naar deel 3: alle verworven kennis en inzichten uit deze opdrachten is nodig om de eindopdracht succesvol te kunnen uitvoeren!

Algemene adviezen bij het werken aan deze opdracht:

- Lees eerst de volledige tekst van de opdracht door zodat je weet wat jullie allemaal te doen staat.
- Bewaak de tijd die jullie besteden aan de (instap)opdrachten; neem ruim de tijd voor deel 3 zeker wel 3 uur. Als je taken hebt verdeeld, bespreek dan na iedere opdracht de resultaten met elkaar.
- Zorg dat duidelijk is wanneer je aannames doet en verantwoord deze ook.
- Bij veel van de opdrachten kan het verstandig zijn om eerst eens een getallen- of rekenvoorbeeld door te werken om beter zicht te krijgen op het de opdracht.
- Als je tijdens het werken aan de opdrachten bepaalde aanpakken, methodes of procedures aanpast, beschrijf in je verslag dan deze aanpassingen en geef aan waarom je ze hebt aangebracht.
- Het kan handig zijn om Excel of een ander rekenprogramma te gebruiken bij deze opdracht.

Inleveren:

- De eindopdracht
- De (instap)opdrachten 1 t/m 11 plus de analyseer-opdracht als bijlage(n)

De jury krijgt een digitale kopie van jullie werk. Als er bijlagen bij het werkstuk horen, lever dan alles aan in een gezippt mapje. Vermeld de naam van de school én jullie eigen namen in de bestandsnaam.

Beoordeling:

Bij de beoordeling kan onder andere gelet worden op:

- de leesbaarheid en de duidelijkheid van de eindopdracht;
- de volledigheid van het werk;
- het gebruik van wiskunde;
- de gebruikte argumentatie en de verantwoording van gemaakte keuzes;
- de diepgang waarmee een en ander is gedaan;
- de manier van presenteren: o.a. de vorm, leesbaarheid, structuur, gebruik en functie van bijlagen;
- De (wiskundige) creativiteit in de uitwerkingen van de opdrachten.

Veel plezier en succes!

Inleiding

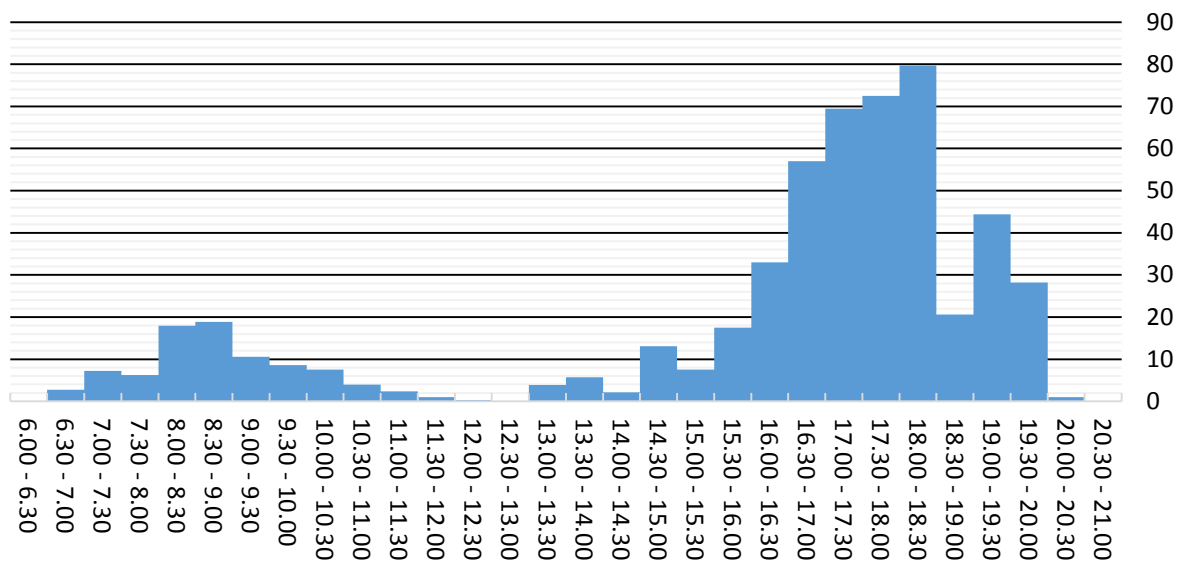
Files op de autosnelweg. Ze behoren inmiddels tot het dagelijks leed, met name rond de grote steden. Hoewel niemand erin wil staan, kiezen de meeste mensen er toch steeds voor om dat wèl te doen. Dat leidt tot de bekende meldingen op de radio zoals *“Er staan op dit moment 12 files met een totale lengte van 44 kilometer. Bij het knooppunt Ambergroen is er sprake van langzaam rijdend en stilstaand verkeer over een lengte van 2 kilometer.”*

In deze Olympiadeopdracht ga je met behulp van een aantal ‘vakbegrippen’ het verschijnsel file onderzoeken. In een aantal instapopdrachten leer je met deze begrippen omgaan. Uiteindelijk moet je in de eindopdracht deze begrippen gebruiken.

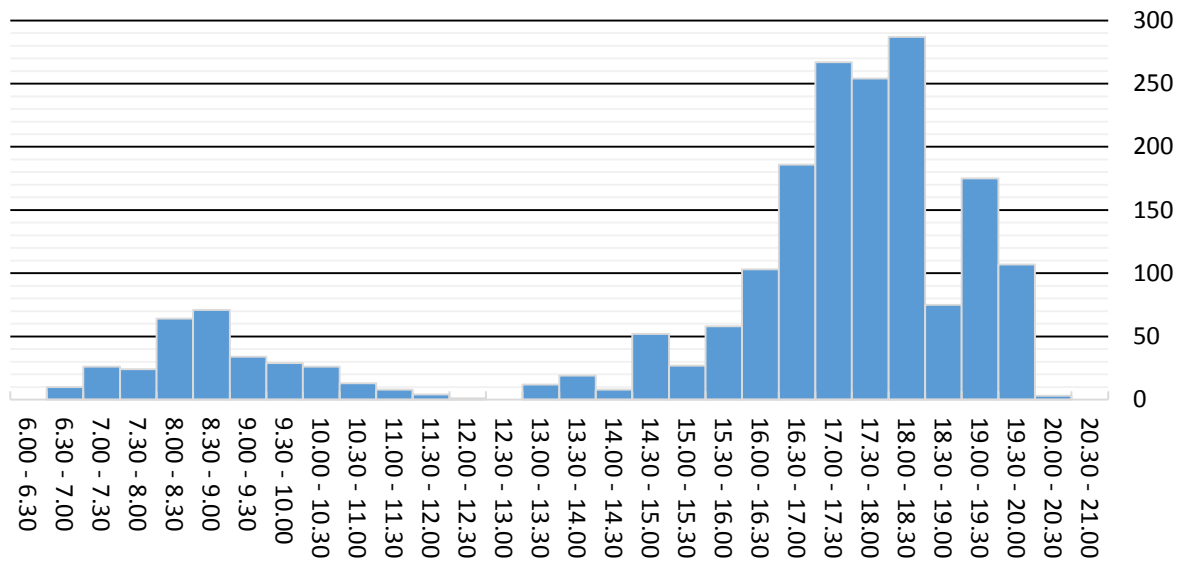
Deel 1a: Instap - filezwaarte

Op de website van de verkeersinformatiedienst van Amberhavn worden gegevens over filevorming bijgehouden. Hieronder zie je grafieken van het aantal files en de totale filelengte in Amberhavn op 5 oktober jongstleden.

Aantal files



Totale filelengte



1. Wat was de gemiddelde lengte van een file tussen 17 en 19 uur in Amberhavn op 5 oktober jongstleden?

De ene file is de andere niet. Een file van 3 km lang waarin je 2 uren staat, ervaar je anders dan een file van 6 km waarin je 20 minuten staat. De lengte van de file in km, vermenigvuldigd met de tijdsduur in minuten wordt de **filezwaarte** genoemd.

Er geldt: lengte file (km) × tijdsduur file (min) = filezwaarte

Hoewel je in de grafieken niet af kunt lezen hoe lang een bepaalde persoon in de file van een bepaalde lengte staat, kun je wel aflezen dat er bijvoorbeeld van 14.30 tot 15.00 uur in totaal ongeveer 50 km file stond (verdeeld over 13 files).

2. Bepaal met behulp van de beide grafieken de totale filezwaarte in Amberhavn tijdens de avondspits op 5 oktober.

Deel 1b: Instap - Wanneer is er eigenlijk sprake van file?

We spreken over **vrije doorstroom** als het verkeer zich zonder vertraging over de weg kan voortbewegen. De Verkeersdienst Amberhavn hanteert de definitie dat file een verzamelbegrip is van drie soorten stagnerend verkeer:

- **langzaam rijdend verkeer:** verkeer dat over ten minste 2 kilometer nergens harder rijdt dan 50 km/uur, maar doorgaans wel sneller dan 25 km/uur;
- **stilstaand verkeer:** verkeer dat over ten minste 2 kilometer vrijwel overal minder dan 25 km/uur rijdt;
- **langzaam rijdend tot stilstaand verkeer:** langzaam rijdend verkeer over veelal wat grotere lengte met hierin “groepen” stilstaand verkeer.

Om zelf te kunnen beredeneren met welke grootheden je rekening moet houden bij het ontstaan van files op een weg, nemen we als voorbeeld een weg. 's Nachts is de weg ongeveer leeg en is er geen file. Iedere auto heeft genoeg ruimte om met de maximumsnelheid die toegestaan is, zonder opstopping door te rijden. Komen er meer auto's, dan kan dat vaak nog steeds - maar dat houdt een keer op, namelijk op het moment dat er meer auto's zijn dan de weg "aankan".

Welke grootheden spelen allemaal een rol bij het bepalen wanneer er een file ontstaat? We noemen een aantal factoren waarmee je rekening zou kunnen houden:

- **intensiteit (I):** dit is het aantal motorvoertuigen dat per uur een bepaald punt op de weg passeert. De maximale waarde van de intensiteit noemen we de **capaciteit**;
- **snelheid (v):** hiermee wordt de gemiddelde snelheid van alle motorvoertuigen op een stuk weg bedoeld in kilometers per uur;
- **dichtheid (D):** dit is het aantal motorvoertuigen dat zich per kilometer op een stuk weg bevindt.

3. Beredeneer dat geldt: $\frac{I}{D} = v$

Gebruik eerst een of meer rekenvoorbeelden om een idee te krijgen!

Om een beetje thuis te raken in deze begrippen, gaan we er eerst maar eens wat mee rekenen. We gebruiken daarbij als voorbeeld een weg van 20 km van A naar B met één rijstrook in beide richtingen. Deze weg heeft een capaciteit van 2200 auto's per uur: dat betekent dat er maximaal 2200 auto's per uur van A naar B kunnen rijden zonder dat het verkeer vastloopt. Over deze weg van A naar B gaan de volgende vragen.

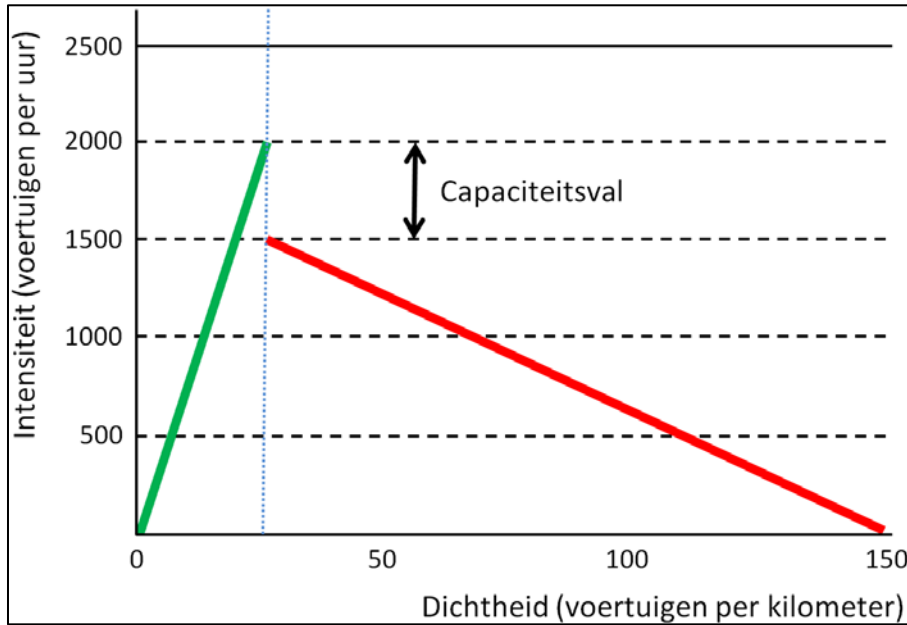
4. Ga uit van een gemiddelde snelheid van 120 km/uur. Als er 2000 auto's per uur van A naar B rijden (dus $I = 2000$), bereken hoeveel ruimte elke auto dan gemiddeld ter beschikking heeft.
5. Hoeveel ruimte is er per auto beschikbaar als de capaciteit (2200 auto's per uur) op de weg van A naar B bereikt wordt?
6. Als er een file is waarbij alle auto's vrijwel stilstaan, kunnen de auto's "bumper-aan-bumper" staan. Doe een realistische aanname voor de lengte van een (gemiddelde) auto en bereken daarmee de gemiddelde snelheid bij een file waarbij de auto's "bumper-aan-bumper" staan.
7. Geef een voorbeeld van een op de weg van A naar B onmogelijke intensiteit plus de bijbehorende (onmogelijke) snelheid.

Deel 2: Grafische weergave

Er is een verschil tussen de capaciteit van een weg bij “vrije doorstroom” en de capaciteit van een weg bij file. In de grafiek hieronder is een lineaire benadering van het verband weergegeven tussen de dichtheid en de intensiteit.

De **linker tak** van de grafiek geeft het verband als er sprake is van “vrije doorstroom”. De snelheid is dan constant en van links naar rechts nemen de dichtheid en intensiteit toe.

De **rechter tak** geeft het verband als er sprake is van filevorming en vertraging, waarbij van links naar rechts de dichtheid toeneemt en de snelheid afneemt.



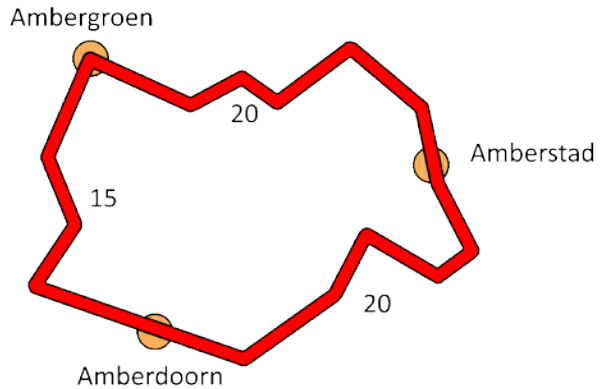
In de grafiek is te zien dat bij veel waarden voor de intensiteit twee verschillende waarden voor de dichtheid horen: eentje die hoort bij “vrije doorstroom”, en eentje die hoort bij “file”. Bij elk van die dichtheden hoort dan ook een (verschillende) snelheid. Je kunt op basis van het verband tussen snelheid, dichtheid en intensiteit uit opgave 4 deze grafiek omzetten in grafieken die de andere onderlinge verbanden weergeven, bijvoorbeeld die tussen de dichtheid en de snelheid.

8. In de grafiek zie je dat bij een dichtheid van 25 voertuigen per kilometer de intensiteit terugvalt. Bereken de bijbehorende snelheden en beschrijf zo helder mogelijk wat in dit geval de capaciteitsval inhoudt.
9. Zet de gegeven grafiek om in een grafiek die het verband geeft tussen dichtheid en snelheid.
10. Zet de gegeven grafiek om in een grafiek die het verband geeft tussen snelheid en intensiteit.
11. Geef zo helder mogelijk aan op welke wijze je de capaciteit van een weg kunt berekenen op basis van I , v en D .

Deel 3 Toepassing

Hiernaast zie je een wegenplan in de regio Amberg-havn met de afstand tussen de steden Ambergroen, Amberstad en Amberdoorn in kilometer.

Hieronder zie je de aantallen auto's die op een doordeweekse dag in de ochtendspits en de avondspits tussen deze drie steden rijden. We gaan er hierbij van uit dat er één rijbaan is per rijrichting met een maximum snelheid van 80 km/uur.



Ochtendspits

| Van\naar | Ambergroen | Amberstad | Amberdoorn |
|------------|------------|-----------|------------|
| Ambergroen | | 2000 | 3000 |
| Amberstad | 1500 | | 1500 |
| Amberdoorn | 4000 | 1200 | |

Avondspits

| Van\naar | Ambergroen | Amberstad | Amberdoorn |
|------------|------------|-----------|------------|
| Ambergroen | | 5000 | 6000 |
| Amberstad | 4000 | | 1500 |
| Amberdoorn | 1000 | 1800 | |

Opdracht: Analyseer de knelpunten in dit wegennetwerk.

Onderzoek waar en op welke momenten er in dit wegennetwerk de grootste kans op stilstand en vertraging is en hoe je de verkeersstroom kunt verbeteren. Je mag hierbij tot 30 km aan extra rijbaan aanleggen. Maak hierbij gebruik van de grafieken uit de instapopdrachten om een schatting te maken van het aantal auto's dat in een bepaald tijdsinterval een bepaald punt passeert. Beredeneer wat de intensiteit en dichtheid van de (huidige) wegen dan is. En bekijk of er dan sprake is van filevorming. Gebruik deze analyse mede als basis voor de eindopdracht.

Eindopdracht: Krantenartikel

Schrijf een krantenartikel waarin de fileproblemen in dit wegennetwerk centraal staan. Je gebruikt de grafieken uit het onderdeel "Grafische weergave", waar je een zodanige uitleg bij geeft dat de lezer begrijpt wat hij/zij uit de grafiek kan aflezen. Ook gebruik je in ieder geval het begrip filezwaarte. Daarnaast lever je minstens één mogelijke oplossing aan voor de fileproblemen in het wegennetwerk (met behulp van het aanleggen van extra asfalt). Je onderbouwt de oplossing(en).