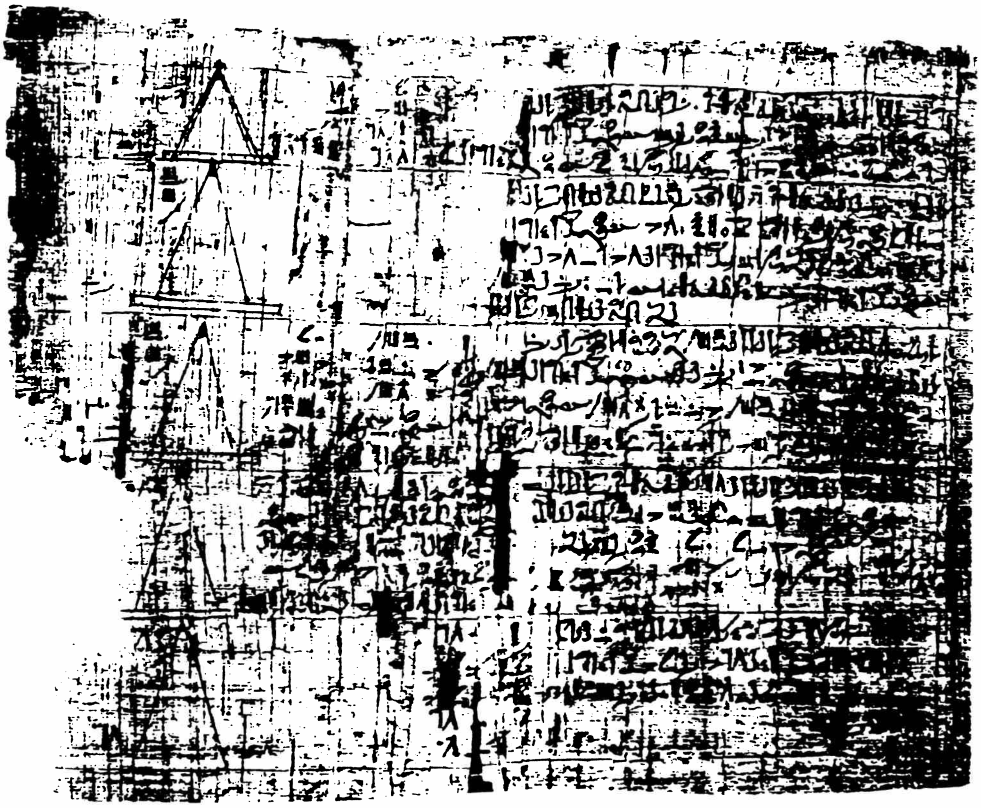
OPPERVLAKTEBEREKENING

met behulp van

RECHTHOEKEN



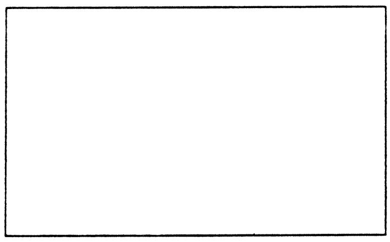
Josien Langeland

Joop Huisjes

1 Egyptenaren en landmeten

In Egypte stroomt de rivier de Nijl. Als deze rivier overstroomt dan gaan er stukken land verloren. De landeigenaren willen natuurlijk hun eigen stuk land terug zodra de Nijl weer droogvalt. Daarom moeten ze de oppervlakte van een stuk land kunnen uitrekenen. Tegenwoordig kunnen mensen van veel vormen de oppervlakte bepalen, bijvoorbeeld van cirkels of rare hoekige vormen, maar vroeger wisten de mensen nog niet goed hoe dat moest.
De Egyptenaren die tweeduizend jaar voor Christus leefden hadden dus problemen om de oppervlakte van een stuk land te bepalen.
Toch hebben ze dit probleem opgelost doordat ze wel wisten hoe ze de oppervlakte van een rechthoekig stuk land moesten berekenen.
Weten jullie dat ook?

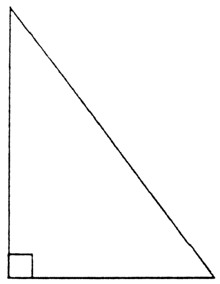
Opgave 1 Meet de zijden van deze rechthoek.



De oppervlakte van deze rechthoek is ... cm^2

2 Driehoeken

Met behulp van deze kennis gingen de Egyptenaren aan de slag. Allereerst probeerden ze de oppervlakte van een rechthoekige driehoek te bepalen.



Een rechthoekige driehoek bevat één rechte hoek, dus één hoek van 90°

Opgave 2

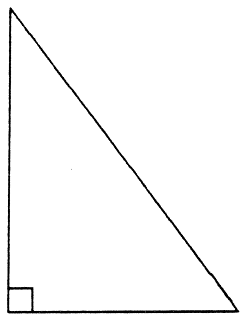
(a) Teken een rechthoek ABCD.

(b) Teken de diagonaal AC in de rechthoek.

(c) Welke driehoek is groter △ABC of △ACD?.

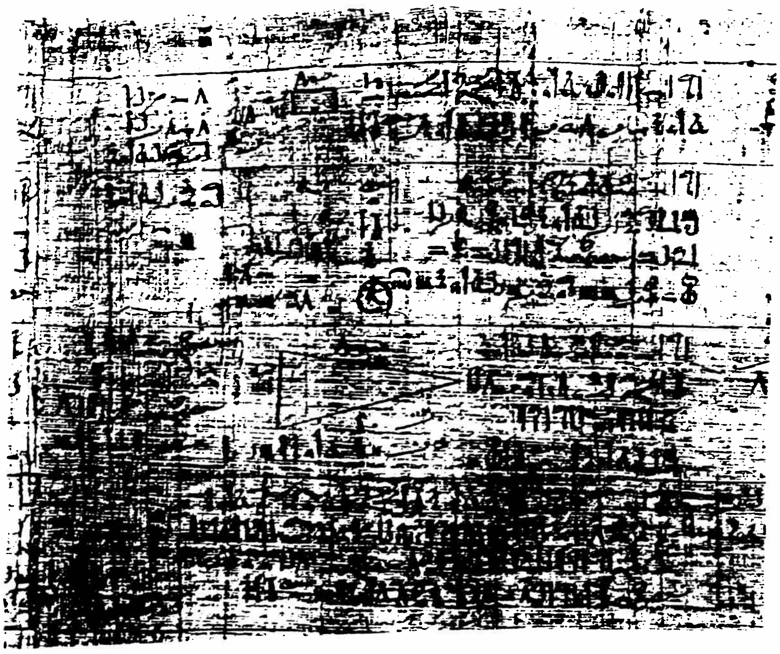
(d) Wat is nu de oppervlakte van één van deze rechthoekige driehoeken?

Opgave 3 Je hebt nu gezien hoe je de oppervlakte van een rechthoekige driehoek kunt uitrekenen.
Probeer voor onderstaande driehoek de oppervlakte op te meten. Om de oppervlakte te berekenen mag je er eerst een rechthoek van maken.



De oppervlakte van de driehoek is ... cm^2.

In onderstaande figuur zie je een gedeelte uit de Papyrus Rhind, een heel oud document van de Egyptenaren. Hierin staat hoe de Egyptenaren de oppervlakte van een driehoek bepaalden. Het is een beetje moeilijk leesbaar, daarom heeft iemand het later nog eens voor je nageschreven. Het bovenste gedeelte is op dezelfde manier geschreven als in de Papyrus, het onderste gedeelte is opgeschreven in het Egyptisch schrift wat de mensen veel beter konden lezen.



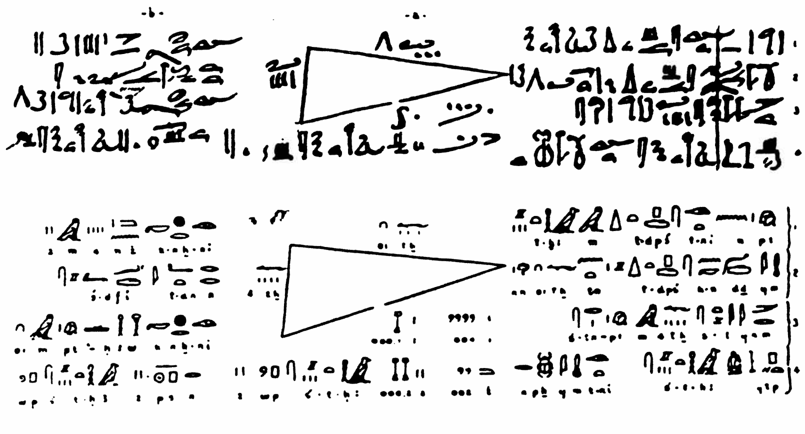
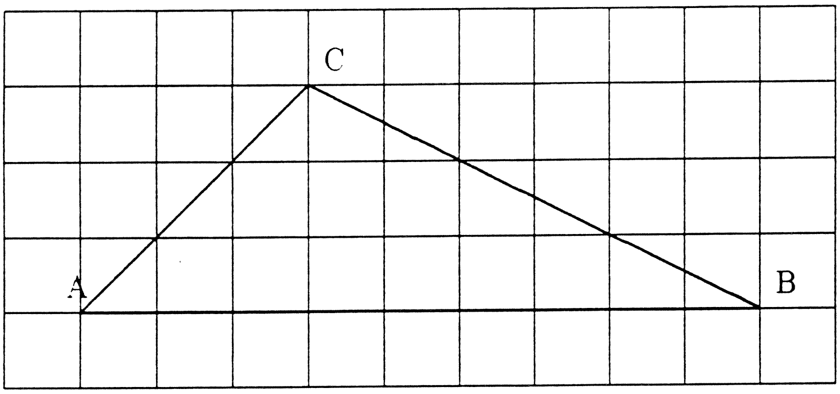


Fig. 1. Rhind 51: Area of a triangle
From A. B. Chace, The Rhind Mathematical Papyrus II.

Opgave 4 Naast de zijden van de driehoek op de vorige bladzijde staat iets geschreven. Wat zou daar staan?

We gaan proberen de oppervlakte te bepalen van een driehoek zonder rechte hoek.



Het probleem was nu dat er niet meteen een rechthoek van gemaakt kon worden. Wat de Egyptenaren deden was het volgende:

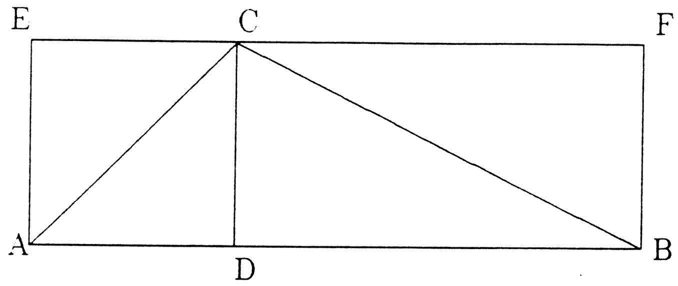
Opgave 5

(a) Teken vanuit hoek C een lijn naar zijde AB zodat dat er een rechte hoek tussen beide lijnen ontstaat.
Zo'n lijn noemen we een *hoogtelijn*.

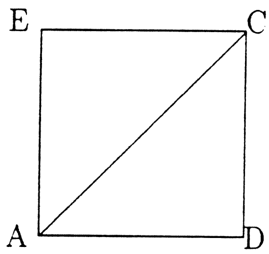
(b) Je hebt de driehoek nu verdeeld in twee rechthoekige driehoeken. Je weet hoe je de oppervlakte van elk van deze driehoeken moet uitrekenen. Bereken de oppervlakte van beide rechthoekige driehoeken.

(c) Bereken de oppervlakte van de totale driehoek.

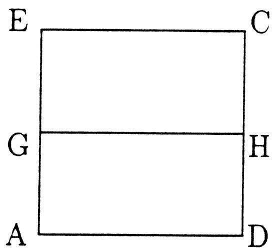
Opgave 6 We kijken nog eens naar dezelfde driehoek ABC.



Van de twee driehoeken ADC en DBC zijn rechthoeken gemaakt. △ ADC was de helft van de vierkant ADCE. Kun je vierkant ADCE nog op andere manieren in twee gelijke stukken verdelen? Zo ja, teken deze lijnen dan in onderstaande vierkant ADCE.

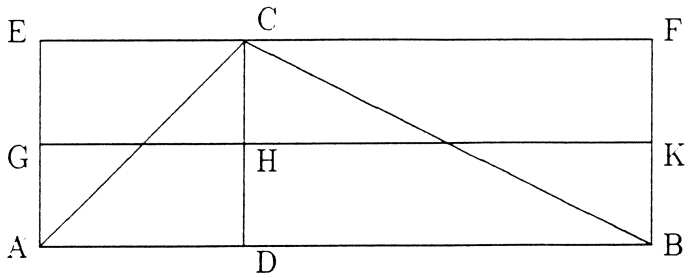


Eén van de manieren die je misschien in opgave 6 hebt gevonden was de volgende:



Opgave 7 Wat kun je zeggen over de oppervlakte van de rechthoek ADHG als je deze vergelijkt met de △ ADC?

Opgave 8 ADHG heeft dezelfde oppervlakte als $\triangle$ ADC.



(a) Welke figuur heeft dezelfde oppervlakte als rechthoek DBKH?

(b) Weet je nu ook welke figuur dezelfde oppervlakte heeft als rechthoek ABKG?

(c) De oppervlakte van ABKG is gelijk aan de oppervlakte van $\triangle$ ABC.
Oppervlakte ABKG = zijde.... $\times$ zijde.....
Dit is gelijk aan: AB $\times$ HD. Waarom?
Van welke zijde is HD de helft? Dus de oppervlakte van rechthoek ABKG = ... $\times$ ... .

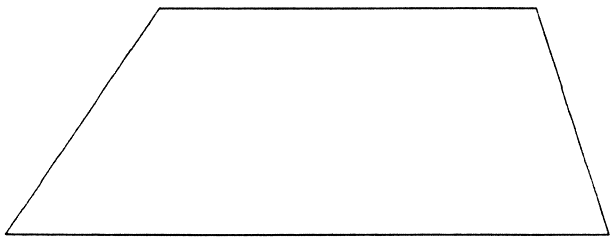
Je weet al dat we CD een hoogtelijn noemen. De lijn waar de hoogtelijn op staat noemen we de *basis*.

Oppervlakte van een driehoek =
$\frac{1}{2}$ $\times$ hoogte $\times$ basis

De Egyptenaren konden zo ook de oppervlakte van een willekeurige driehoek bepalen.

3 Het trapezium

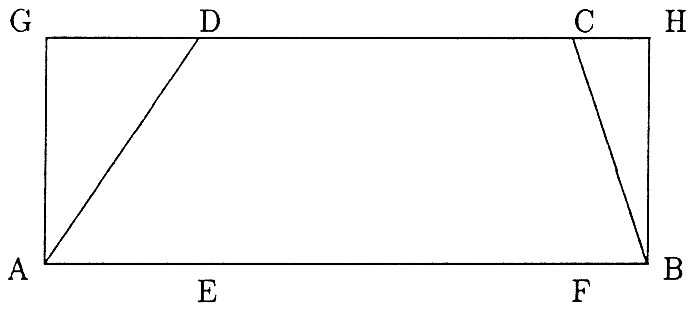
Een vierhoek leverde meer problemen op.
Allereerst kijken we naar een speciaal soort vierhoek; het trapezium.



Een trapezium is een vierhoek waarbij twee overstaande zijden evenwijdig lopen

Opgave 9 Probeer het trapezium te verdelen in twee rechthoekige driehoeken en één rechthoek.

Opgave 10 Er is nu een rechthoek om het trapezium aangebracht. Teken zelf de verdeling die je in opgave 9 hebt gemaakt in deze tekening.



Opgave 11

(a) Bekijk $\triangle$AED in het trapezium.
Meet de oppervlakte van deze driehoek?

(b) Doe hetzelfde als in opgave 11a met $\triangle$CFB.

(c) Wat is nu volgens jou de oppervlakte van het trapezium?

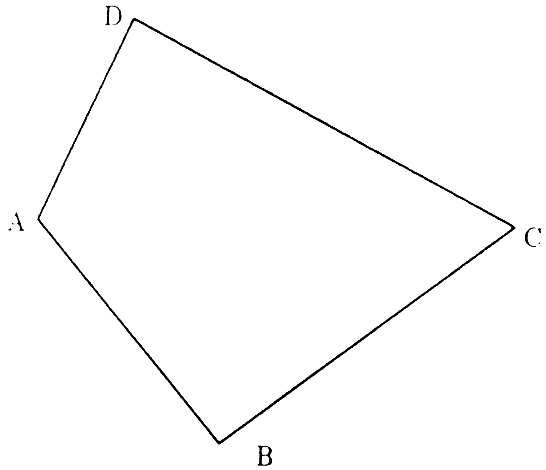
Opgave 12 $\triangle$AED is de helft van rechthoek AEDG
$\triangle$CBH is de helft van rechthoek FBHC
Kun je nu rechthoek AEDG en rechthoek FBHC zó in twee stukken verdelen dat er samen met rechthoek EFCD één grote rechthoek ontstaat?

We hebben nu dus het trapezium verdeeld in drie stukken waarvan we de oppervlakte konden berekenen door er rechthoeken van te maken.
In opgave 12 heb je een rechthoek getekend met lengte $\frac{1}{2}$ (AB+DC) en breedte ED. Je hebt dus het gemiddelde genomen van beide lengtes en vermenigvuldigd met de hoogte.

Oppervlakte van een trapezium =
gemiddelde lengte van de twee evenwijdige zijden × hoogte

4 Een willekeurige vierhoek

De Egyptenaren hadden een speciale manier om de oppervlakte van een willekeurige vierhoek te bepalen. Vierhoek ABCD is zo'n vierhoek:



De Egyptenaren deden net alsof het een rechthoek was en namen voor de lengte en breedte het gemiddelde van de overstaande zijden.

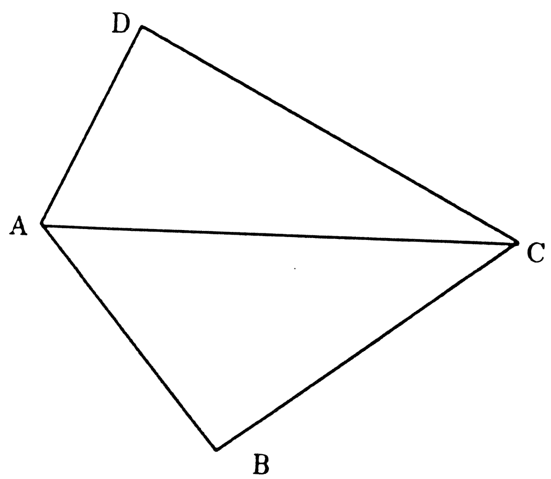
Opgave 13

(a) Meet en bereken de lengte van bovenstaande vierhoek, zoals de Egyptenaren dat waarschijnlijk zouden doen. Overleg eventueel met je buurman of je buurvrouw.

(b) Meet en bereken op dezelfde manier ook de breedte.

(c) Wat was volgens de Egyptenaren nu de oppervlakte van de vierhoek?

We gaan controleren of de Egyptenaren gelijk hadden met hun oplossing. Vierhoek ABCD is verdeeld in twee driehoeken ABC en ACD.



Opgave 14

(a) Bekijk $\triangle$ ABC.
Meet en bereken de oppervlakte van deze driehoek.

(b) Doe hetzelfde als in onderdeel a, met $\triangle$ ACD

(c) Wat is volgens jou de oppervlakte van de vierhoek ABCD?

Opgave 15 Vergelijk jouw oplossing van opgave 14 met de oplossing van de Egyptenaren in opgave 13. Hoeveel zaten de Egyptenaren ernaast? Hoeveel procent is dat van de totale oppervlakte?

Opgave 16 De formule die de Egyptenaren gebruikten was dus niet helemaal goed. Als de Egyptenaren het stuk land gingen opmeten, dan namen ze een stuk touw mee en gingen met dat stuk touw om het land heen lopen. Met het stuk touw maten ze dan de lengtes van de zijden van het stuk land.
Stel dat jij toen een Egyptenaar was en je zou een vierhoekig stuk land moeten opmeten. Je hebt alleen een stuk touw en geen geodriehoek om hoeken te meten.

(a) Zou je dan een hoogtelijn kunnen maken in dat stuk land? Zet in je antwoord waarom wel of waarom niet.

(b) Konden de Egyptenaren dus ook op onze manier zoals in opgave 14 de oppervlakte van vierhoek ABCD berekenen?

(c) Wanneer is de benadering van de Egyptenaren wel een goede benadering?

Ze hebben geprobeerd om met de kennis die ze hadden een zo goed mogelijke manier te bedenken om deze oppervlakte uit te rekenen.
De Egyptenaren waren niet de enigen die deze onnauwkeurige benadering hadden. Ook de Babyloniërs in Mesopotamië gebruikten dezelfde methode om de oppervlakte van de vierhoek te bepalen.

5 Nog eens de oppervlakte van een driehoek

De Griekse wiskundige **Heron** die omstreeks het jaar 60 leefde, gebruikte voor de oppervlakte van een driehoek de volgende formule:

$$\textit{oppervlakte van een driehoek} = \sqrt{s \times (s-a) \times (s-b) \times (s-c)}$$

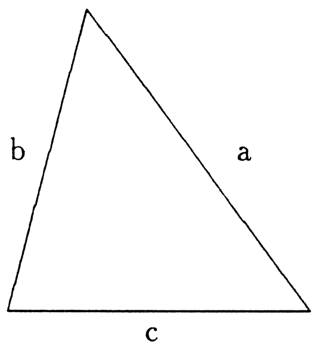
waarbij s de halve omtrek is met de volgende formule:

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

en a, b en c de lengten van de drie zijden.

Opgave 17

(a) Bekijk de volgende driehoek:



Meet a,b en c.
a=
b=
c=

(b) Hoe groot is s?

(c) Vul de waarden van s,a,b en c in de formule

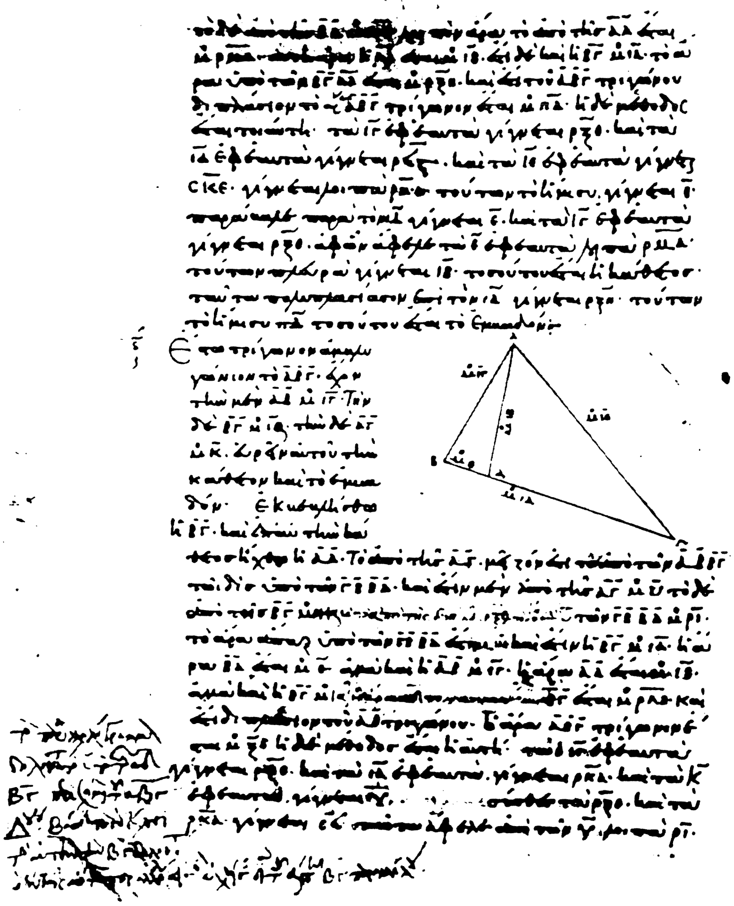
$$\textit{oppervlakte van een driehoek} = \sqrt{s \times (s-a) \times (s-b) \times (s-c)}$$

in. Wat is de oppervlakte van de driehoek?

(d) Klopt dat met de formule $\frac{1}{2} \times$ basis $\times$ hoogte?

Deze formule is bij landmeten ook erg praktisch, want je hoeft geen hoogtelijn te weten, alleen de drie driehoekszijden.

In het boek van Heron, *Metrica*, laat hij zien hoe hij met de formule rekent, en hij legt uit waarom de formule klopt.



Vertaling van de berekening van de oppervlakte van bovenstaande driehoek:

Je kunt de oppervlakte van een driehoek als volgt bepalen. Laat bijvoorbeeld één zijde van de driehoek de lengte 13 hebben, een andere zijde 14 en de derde zijde 15. Om de oppervlakte te vinden, doe als volgt. Tel 13, 14 en 15 bij elkaar op; het resultaat is 42. Vermenigvuldig dit met $\frac{1}{2}$*; dit geeft 21. Trek hier de zijden vanaf, 13 aftrekken levert 8, 14 aftrekken levert 7; en 15 aftrekken levert 6. Vermenigvuldig nu 21 met 8, dit geeft 168, dit met 7, dit geeft 1176, en dit met 6 geeft 7056. De zijde van het vierkant (met deze oppervlakte) is 84. Dit getal is de oppervlakte van de driehoek.*

Opgave 18

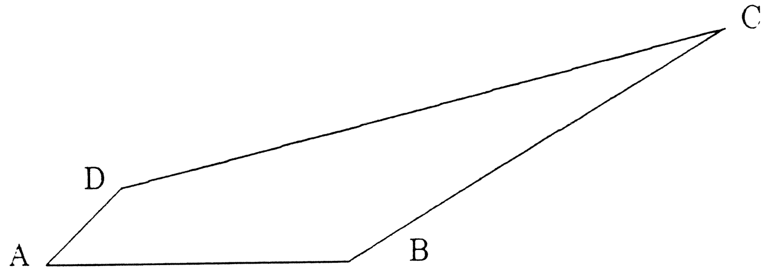
(a) Heron beschrijft in bovenstaand verhaaltje een driehoek.
Wat zijn de lengtes van de zijden a, b en c van deze driehoek?

(b) Wat is de halve omtrek s? Haal je antwoord uit het verhaaltje.

(c) Wat is volgens Heron de oppervlakte van deze driehoek? Haal ook hier het antwoord uit het verhaaltje.

Later bleek dat de beroemde wiskundige **Archimedes** (287-212 voor Chr.) al op de hoogte was van deze formule.

Landmeters willen natuurlijk graag dat hun berekeningen zo nauwkeurig mogelijk zijn. Als we nu eens kijken naar een vierhoek dan zullen we zien dat we op twee manieren de oppervlakte op kunnen meten.

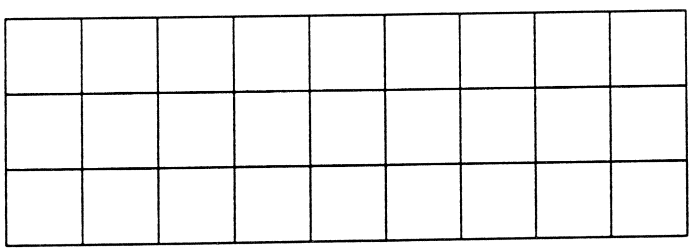


Opgave 19

(a) Teken de diagonaal AC en reken de oppervlakte uit van vierhoek ABCD door de hoogtelijnen te tekenen vanuit B en D op AC.

(b) Teken nu de andere diagonaal BD en reken weer de oppervlakte van vierhoek ABCD uit door de andere hoogtelijnen te tekenen.

(c) Teken de vierhoek ABCD in het onderstaande rooster:
De coördinaten zijn:
A = (0,0)
B = (4,0)
C = (9,3)
D = (1,1)
Teken ook de volgende punten E = (9,0) en F = (1,0).

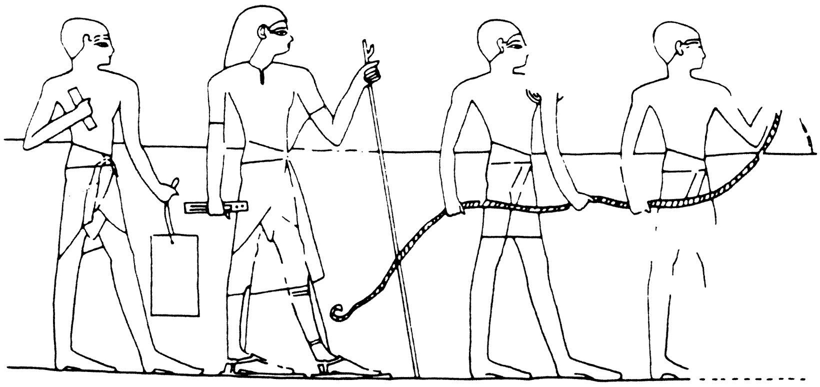


Bereken nu de oppervlakte van vierhoek ABCD door:
oppervlakte van △AFD + oppervlakte van het trapezium DFEC - oppervlakte van △BEC.

(d) Had je nu bij onderdeel a of bij onderdeel b het nauwkeurigst gemeten, als je beide antwoorden vergelijkt met het antwoord uit onderdeel c.

6 Terug naar de Nijl

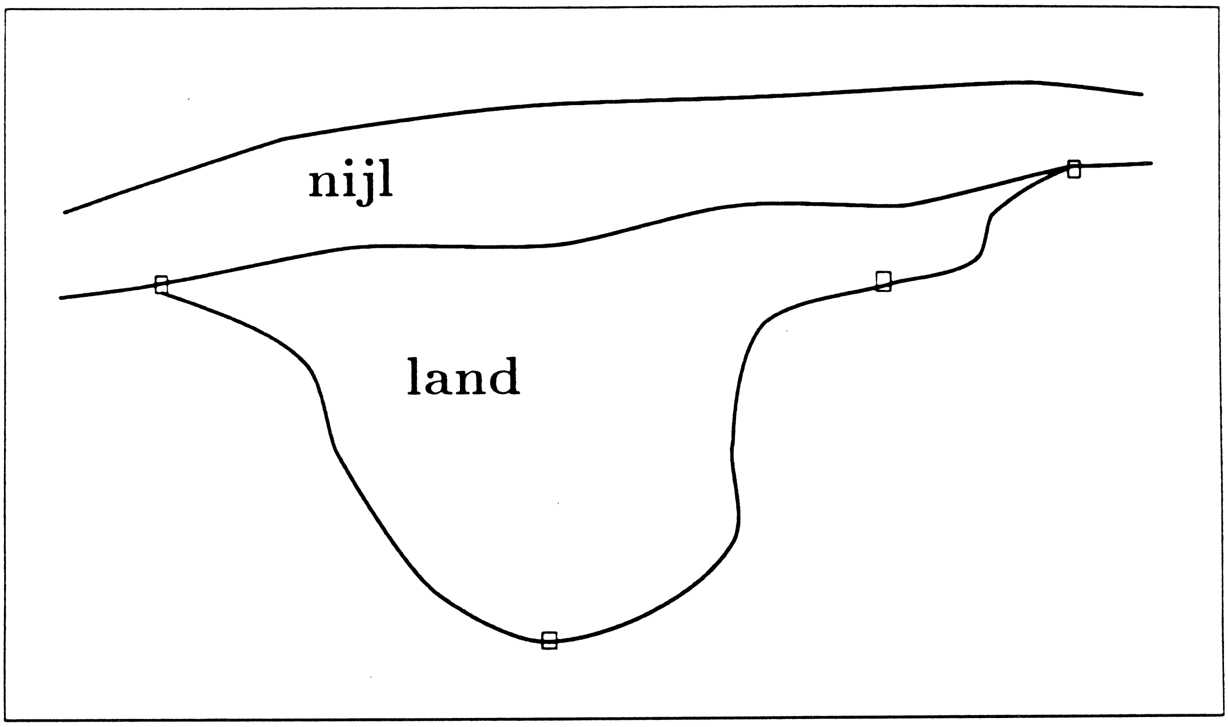
Toen de Egyptenaren wisten hoe je de oppervlakte van driehoeken moest bepalen, konden ze ook de oppervlakte van het stuk land bepalen dat was weggeslagen door de Nijl. Hoe gingen ze te werk?
Het stuk land dat was weggeslagen konden ze natuurlijk niet meer berekenen, maar ze konden wel berekenen wat was overgebleven. Daarvoor waren er de zogenaamde touwspanners nodig. Mannen die met stokken en touwen op pad gingen om het land op te meten.



Het meten van een stuk land met behulp van een stuk touw.

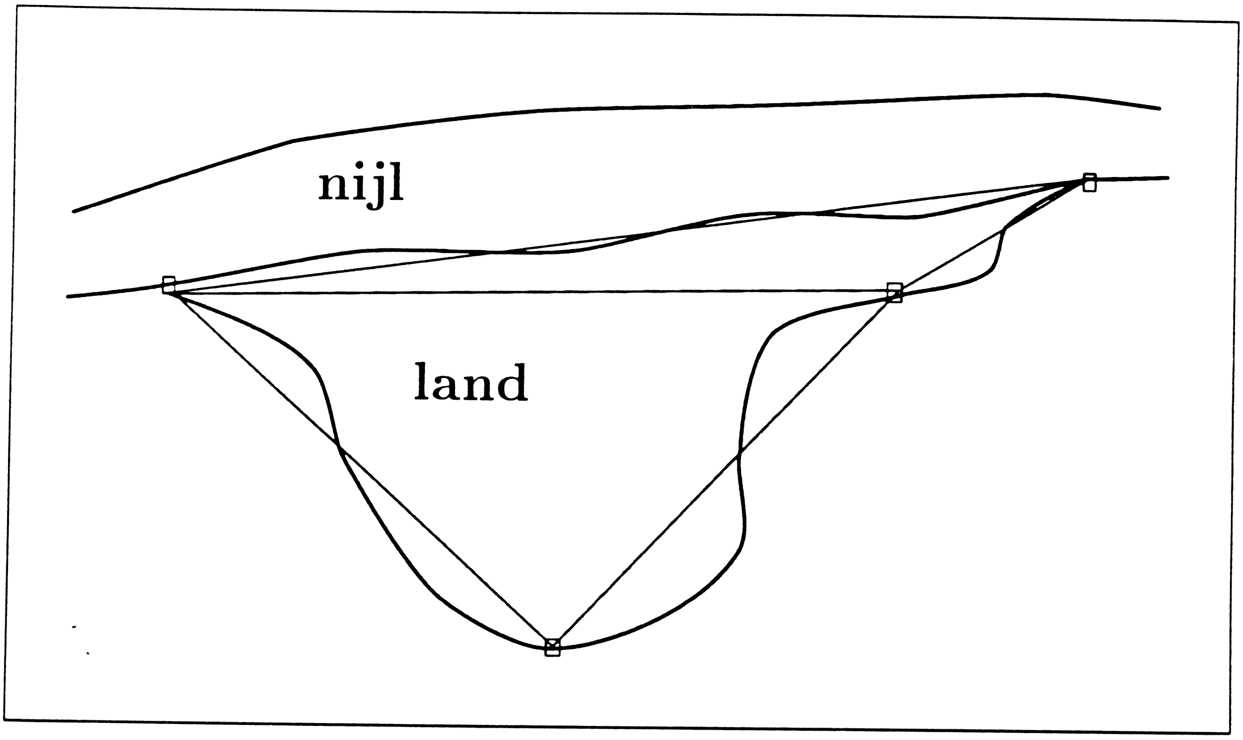
De touwspanners zetten stokken om het stuk land om het gebied af te bakenen en daaromheen spanden ze het touw. Op deze manier konden ze de oppervlakte van het stuk land opmeten.

Stel dat ze van het volgende stuk land de oppervlakte wilden weten:



Opgave 20 Overleg met je buurman of buurvrouw, hoe je de oppervlakte van dat stuk land zou berekenen.

Je ziet dat het touw ongeveer dezelfde oppervlakte omspant als het stuk land groot is. De touwspanners verdeelden het stuk land vervolgens in driehoeken en gingen van paaltje tot paaltje meten hoe lang het touw was wat er tussen lag.

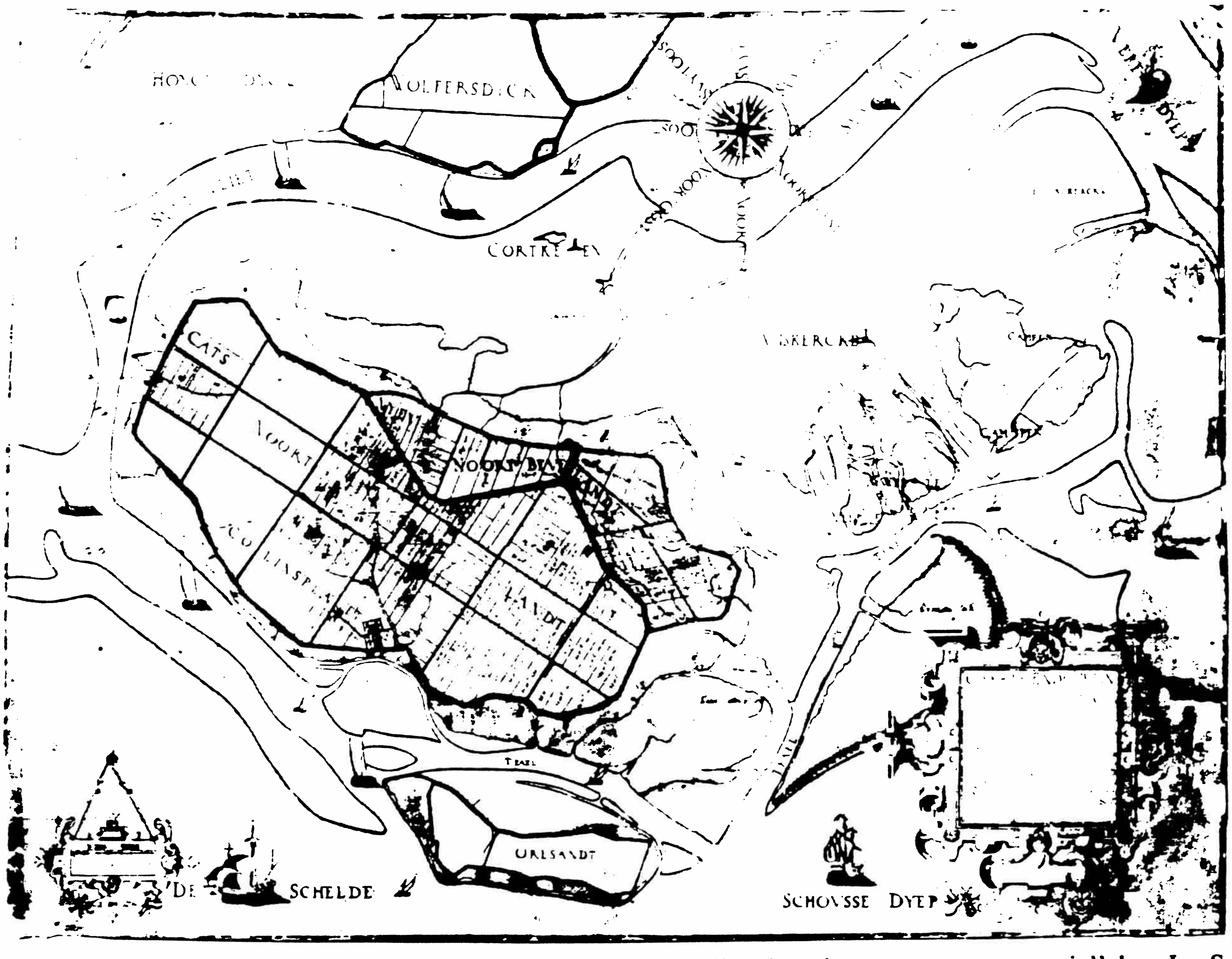


Opgave 21 Meet zelf op hoelang het touw tussen de twee paaltjes was.
Denk erom: 1cm is in werkelijkheid 1km.

Opgave 22 De oppervlakte van het stuk land is nu natuurlijk de som van alle driehoeken.
Bereken de oppervlakte van het stuk land. Gebruik de formule van Heron.

7 Nog een stukje landmeten

Ook later in de 16^e en 17^e eeuw deelden de landmeters de gebieden in met rechte lijnen.
In onderstaande afbeelding kun je zien hoe Noord-Beveland in Zeeland is opgedeeld in rechthoeken, driehoeken en trapezia.



Landmeterskaart, vergelijkbaar met een notariële akte, opgemaakt "na de rechte conste van geometria" door Jan Symonsz. Indervelde en Frans Symonsz. Indervelde ten behoeve van het beheer der domeinen van de Prins van Oranje, gelegen op Noord-Beveland binnen- en buitendijks. (Alg. Rijksarchief VTH 2806).

Opgave 23 Hoe groot schat jij de oppervlakte van Noord-Beveland? de schaalverdeling is: 1:650000
Teken desnoods zelf hulplijntjes om gebiedjes te krijgen waar jij de oppervlakte van kunt bepalen.

DOCENTENHANDLEIDING
bij het pakket
Oppervlakteberekening door middel van
rechthoeken

Uitproberen in de klas

Het pakket is uitgeprobeerd in een tweede klas op een LBO-school in Groningen. De klas bestond uit 17 leerlingen waaronder slechts 2 meisjes. Deze klas was niet gewend om met dergelijke pakketjes te werken. De docent vond het leuk om eens een keer iets anders te doen.
In eerste instantie wisten we niet zeker of het pakket ook te moeilijk zou zijn, maar het bleek dat het erg meeviel. De leerlingen wisten al wel enkele formules van oppervlaktes, maar hadden er nog nooit op deze manier mee gewerkt.
Tijdens de lessen zijn er altijd een aantal dingen die anders worden begrepen dan dat ze zijn bedoeld. Deze onduidelijkheden zijn er na die tijd uitgehaald en veranderd. Soms zijn de stappen te groot en was het nodig om opgaven tussen te voegen.
Uiteindelijk is het pakket nu geschikt om in de klas te gebruiken.

Doelen

* De leerlingen leren omgaan met oppervlakten.
* Leerlingen laten inzien dat verschillende vormen gelijke oppervlakte kunnen hebben.
* Leerlingen zelf formules voor oppervlakte van een driehoek en een trapezium laten bepalen.
* Leerlingen laten zien dat men vroeger door de beperkte middelen ook niet altijd op de juiste wijze een oppervlakte kon bepalen.
* Leerlingen bewust maken van het feit dat je op verschillende manieren dezelfde oppervlakte kunt bepalen.
* Door middel van praktijkproblemen de leerlingen zelf een oppervlakte laten bepalen van een stuk land.

Beginniveau van de leerlingen

Het pakket is bedoeld voor 2^e klas LBO leerlingen.

* De oppervlakte van een rechthoek wordt bekend verondersteld.
* Leerlingen kunnen omgaan met het aantal graden van een hoek, met name de rechte hoek.
* Leerlingen kennen het begrippen als gemiddelde en evenwijdig.
* Leerlingen kunnen met coördinaten omgaan.

Tijdsduur

Het pakketje zal ongeveer 4 lesuren in beslag gaan nemen.

Benodigdheden

* rekenmachientje
* geodriehoek

Lesindeling

Les 1

* Inleiding van het pakketje door de docent met behulp van het verhaaltje op pagina 1. Tevens geeft de docent de grote lijnen van het pakket weer.
  10 minuten.

* De leerlingen beginnen met opgave 1. De opgaven kunnen individueel gemaakt worden. Tot en met opgave 3 kan worden gemaakt.
  10 minuten.

* Samen met de docent wordt er gekeken naar het plaatje uit de Papyrus Rind.
  5 minuten.

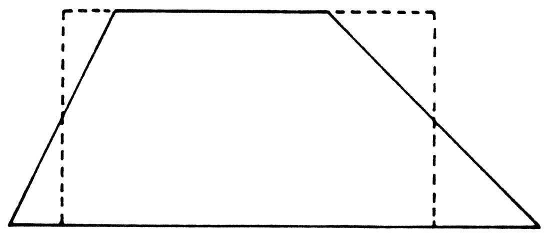
* De leerlingen maken §2 af.
  15 minuten.

* Aan het einde van de les kan de docent door middel van het nakijken van de opgaven een kleine samenvatting geven. Belangrijk hierbij is dat er vermeld wordt dat verschillende vormen een gelijke oppervlakte kunnen hebben. Door opgave 8 goed te bespreken kan dit duidelijk gemaakt worden.
  10 minuten.

Les 2

* De leerlingen kunnen zelfstandig beginnen met §3.
  15 minuten.

* Als de leerlingen §3 af hebben, zou het raadzaam zijn om even opgave 12 extra aandacht te geven. Dat je van een trapezium een rechthoek kunt maken is misschien nog niet voor alle leerlingen duidelijk.



Daarna volgt dan de formule.
10 minuten.

* De leerlingen beginnen zelfstandig aan §4.
  15 minuten.

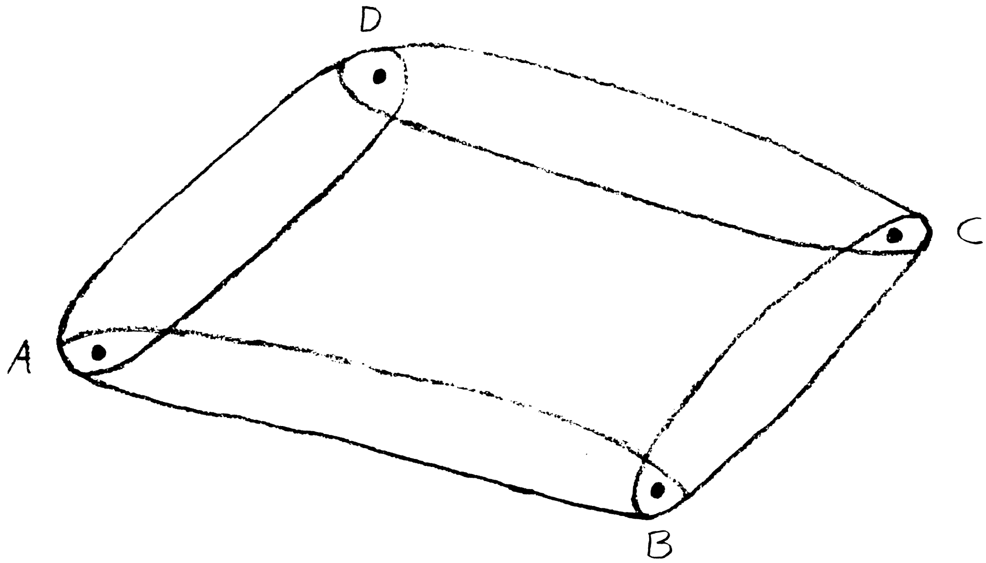
* Als samenvatting van deze paragraaf zou door middel van een onderwijsleergesprek nog eens duidelijk gemaakt kunnen worden wat nou het probleem was van de Egyptenaren. Tegelijkertijd worden dan de opgaven besproken.
  10 minuten.

Les 3

* De docent herhaalt nog even de foute formule van de Egyptenaren voor het berekenen van de oppervlakte van een vierhoek, als inleiding op de goede formule van Heron om de oppervlakte van een driehoek te bepalen.
  5 minuten.

* De leerlingen gaan aan de slag met §5 tot en met opgave 18.
  15 minuten.

* De opgaven 17 en 18 worden besproken. De antwoorden van opgave 17 kunnen uit het verhaaltje gehaald worden. De docent kan laten zien dat de formule van de vierhoek niet klopt door middel van een vierhoek die scharnieren in de hoekpunten heeft:



  Scharniert men nu zijde AD naar zijde AB en zijde DC in het verlengde van AB dan is de oppervlakte nul terwijl de zijden gelijke lengte blijven houden. De oppervlakte zou dan volgens de Egyptenaren ook gelijk moeten blijven. Dit is niet zo dus kunnen de leerlingen al aanvoelen dat de formule niet kan kloppen.
  Maakt men een driehoek met scharnieren in de hoekpunten, dan zit dat vast. Er is geen beweging in te krijgen. Als de lengte van de zijden in een driehoek vast liggen dan ligt de oppervlakte ook vast.
  15 minuten.

* De leerlingen gaan verder op bladzijde 14 en maken opgave 19.
  10 minuten.

* Opgave 19 wordt besproken.
  5 minuten.

Les 4

* De leerlingen lezen de tekst op pagina 15 en gaan verder met opgave 20, 21 en 22.
  15 minuten.

* Als de docent dze opgaven bespreekt kan hij nog benadrukken dat, zoals in het plaatje te zien is, er ongeveer evenveel land door het touw afgaat dan dat er bij komt. Voor leerlingen wordt dan duidelijk dat de twee driehoeken inderdaad de oppervlakte van het stuk land benaderen.
  15 minuten.

* De leerlingen maken opgave 23.
  15 minuten.

* De docent sluit de les en tevens het pakketje af met het bespreken van opgave 23. De docent kan in een onderwijsleergesprek nog even de belangrijkste aspecten uit het pakket naar voren halen.

Antwoorden van de opgaven

opgave 1 De oppervlakte is $5 \times 3 = 15\text{cm}^2$

opgave 2 $\triangle$ABC is evengroot als $\triangle$ACD.
De oppervlakte van één zo'n rechthoekige driehoek is dan de helft van de oppervlakte van de verkregen rechthoek.

opgave 3 De oppervlakte is $\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6\text{cm}^2$.

opgave 4 Naast de zijden staan de lengten van de zijden genoemd.

opgave 5

(a) Er wordt een hoogtelijn getekend.

(b) De oppervlakte van de linker driehoek is $4\frac{1}{2}\text{cm}^2$. De oppervlakte van de rechter driehoek is 9cm^2.

(c) De totale oppervlakte van $\triangle$ABC is $13\frac{1}{2}\text{cm}^2$.

opgave 6 Er kunnen op 4 verschillende manieren lijnen getekend worden, zodat de vierkant in twee gelijke stukken verdeeld wordt.

1. lijn AC
2. lijn ED
3. midden van EA naar midden van CD
4. midden van EC naar midden van AD.

opgave 7 De oppervlakte van rechthoek ADHG is gelijk aan de oppervlakte van $\triangle$ADC.

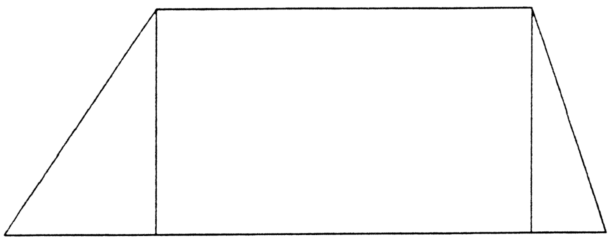
opgave 8

(a) $\triangle$CDB.

(b) $\triangle$ABC.

(c) Oppervlakte ABKG = zijde AB $\times$ zijde BK.
Dit is gelijk aan: AB $\times$ HD.
Dit is omdat BK = HD. HD is de helft van zijde CD. Dus de oppervlakte van rechthoek ABKG = $\frac{1}{2}$CD $\times$ AB.

opgave 9 De twee gevraagde lijnen zijn:



opgave 10 Zie opgave 9.

opgave 11

(a) De oppervlakte van $\triangle$AED is 3cm^2.

(b) De oppervlakte van $\triangle$CFB is $1\frac{1}{2}$cm^2.

(c) De oppervlakte van het trapezium is $3 + 1\frac{1}{2}$ + oppervlakte van rechthoek EFCD = $19\frac{1}{2}$cm^2.

opgave 12 Stel dat lijnstuk IJ van midden GD naar midden AE loopt en lijnstuk KL van midden CH naar het midden van FB, dan is rechthoek IJKL evengroot als het trapezium ABCD.

opgave 13

(a) De lengte die de Egyptenaren namen was $\frac{1}{2} \times (3+5) = 4$cm.

(b) De breedte die ze namen was $\frac{1}{2} \times (4+6) = 5$cm.

(c) De oppervlakte van de vierhoek ABCD was $4 \times 5 = 20$cm^2.

opgave 14

(a) De oppervlakte van $\triangle$ABC is $\frac{1}{2} \times 6{,}3 \times 2{,}9 = 9{,}1$cm^2.

(b) De oppervlakte van $\triangle$ACD is $\frac{1}{2} \times 6{,}3 \times 2{,}7 = 8{,}5$cm^2.

(c) De totale oppervlakte van vierhoek ABCD is $9{,}1 + 8{,}5 = 17{,}6$cm^2.

opgave 15 De Egyptenaren zaten er ongeveer 2,4cm^2 naast. Dit is 13,6% van het totaal.

opgave 16

(a) Het is lastig, zoniet onmogelijk, om alleen met een stuk touw een hoogtelijn te maken in een stuk land, want ze konden geen hoeken opmeten.

(b) Nee de Egyptenaren konden niet op onze manier de oppervlakte van een vierhoek berekenen.

(c) Wanneer het stuk land bijna een rechthoek is, dan klopt de formule van de Egyptenaren wel.

opgave 17

(a) a = 5cm
b = 4,1cm
c = 4cm

(b) s= 6,6cm

(c) $\sqrt{6,6(6,6-5)(6,6-4,1)(6,6-4)}$

De oppervlakte is $8{,}28\text{cm}^2$.

(d) $\frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8\text{cm}^2$. Dit klopt, het verschil ligt aan de afronding.

opgave 18

(a) a, b, c zijn respectievelijk 13, 14 en 15cm.

(b) De halve omtrek s = 21cm.

(c) De oppervlakte is 84cm^2.

opgave 19

(a) De hoogtelijnen liggen binnen de driehoek.

(b) De hoogtelijnen liggen nu buiten de driehoek.

(c) De oppervlakte van $\triangle AFD = \frac{1}{2}\text{cm}^2$,
de oppervlakte van het trapezium DFEC = 16cm^2,
de oppervlakte van $\triangle BEC$ is $7\frac{1}{2}\text{cm}^2$.
De totale oppervlakte van vierhoek ABCD is 9cm^2.

(d) het zal blijken dat de meeste leerlingen bij onderdeel a het nauwkeurigst gemeten hebben, omdat daar de hoogtelijnen geheel binnen de vierhoek liggen. Het is gebleken dat als je lijnen moet verlengen om hoogtelijnen te tekenen, dat er meetfouten ontstaan.

opgave 20 Hier zullen verschillende antwoorden komen van de leerlingen.

opgave 21 De zijden in de bovenste driehoek zijn: 9,8km, 12,3km en 3km. De zijden in de onderste driehoek zijn: 6,6km, 9,8km en 7km.

opgave 22 De oppervlakte van de bovenste driehoek is:

$$\sqrt{12,55(12,55-9,8)(12,55-12,3)(12,55-3)} = 9{,}08\text{cm}^2.$$

De oppervlakte van de onderste driehoek is:

$$\sqrt{11,7(11,7-6,6)(11,7-9,8)(11,7-7)} = 23{,}08\text{cm}^2.$$

De totale oppervlakte is nu $9{,}08 + 23{,}08 = 32{,}16\text{cm}^2$.

opgave 23 De totale oppervlakte is ongeveer 18cm^2. Dit is dus $18 \times 650000^2 = 760\text{km}^2$.