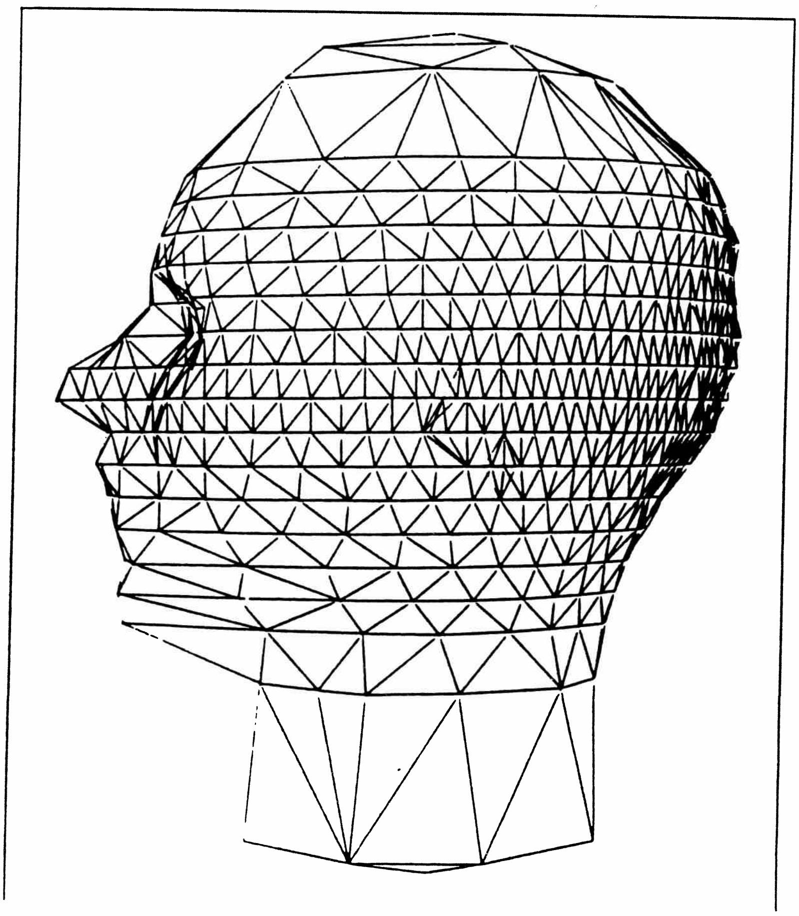
november 1990

experimentele versie

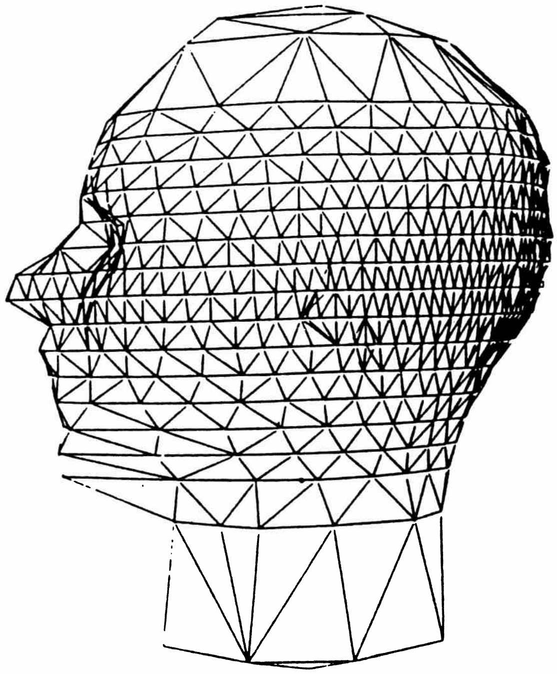
Freudenthal instituut
Oerarchief

Driehoekje leggen

Leerlingentekst



universiteitsblad twente



De Werktekening

Rubriek voor werktekeningen en ander technisch illustratiemateriaal.
De gedachte achter 'de werktekening' is dat juist binnen een technische universiteit honderden en misschien wel duizenden technische illustraties en concepten circuleren, die mooi om te zien zijn, verbazingwekkend, en die daarnaast ook nog leiden tot de een of andere interessante creatie. Of dat nu een reuzentaart is of een motor.

Het driehoeks belegde hoofd
Ontwerp: Ir. Hans Meijs en Marie van der Mooren
Dit nieuwe en tevens unieke hoofdmodel is van belang voor de interpretatie van het electro-encephalogram (EEG) en het magneto-encephalogram (MEG) die ontstaan ten gevolge van hersenactiviteit. Met behulp van dit realistisch gevormde model van het hoofd kan berekend worden hoe groot de invloed van de hoofdvorm is op de EEG's en de MEG's. Hierbij is het hoofd van een volwassen proefpersoon bekeken met behulp van Magnetic Resonance Imaging (MRI) technieken. De op deze wijze verkregen doorsneden door het hoofd zijn in een driehoeksmodel voorgesteld. Het gehele model van het hoofd bevat de vier weefselstructuren: huid, schedel, hersenvloeistof en hersenweefsel; in deze figuur is alleen de begrenzing van de huid te zien.
Voordeel van een driehoeksmodel boven het traditionele 'bolschillen model' (een model opgebouwd uit een aantal in elkaar gelegen concentrische bollen) is dat de vorm realistischer is, en de bron van met name EEG's nauwkeuriger gelocaliseerd kan worden.
De berekeningen met een driehoeksbelegd model zijn echter omslachtiger: waar de berekening met behulp van een bolschilmodel in een 'zucht' uit de computer rolt, duurt de numerieke berekening met het driehoeksbelegde hoofd een stuk langer.

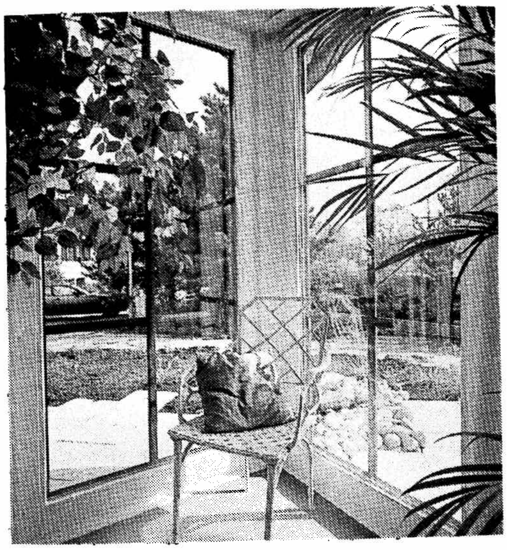
Ontleend aan: universiteitsblad Twente.

Publikatie van het team W12-16
onder verantwoordelijkheid van de
Commissie Ontwikkeling Wiskundeonderwijs

Ontwerp: Anton Roodhardt e.a.

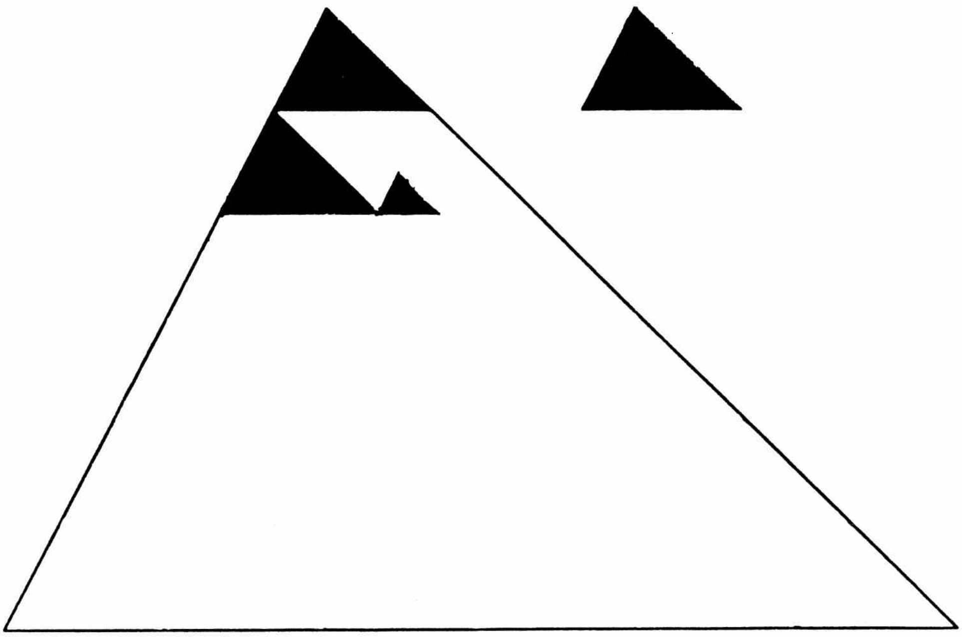
Deze publikatie is te bestellen bij
Instituut voor Leerplanontwikkeling (SLO), Enschede (053-840840)
onder vermelding van AN-nummer 3.315.6448

§ 1 De maat nemen



In een grote kamer moet een tegelvloer worden gelegd. Het vervelende is dat die kamer een driehoekige uitbouw heeft. Als je daar gewone vierkante tegels in legt, kun je lelijke randen krijgen.
Misschien bieden driehoekige tegels uitkomst. Dat gaan we eens uitzoeken.

Dit is een plattegrond van die uitbouw met daarnaast een tegel op dezelfde schaal:



De tegels zijn er in twee uitvoeringen: wit en zwart. Beide worden gebruikt, maar in de plattegrond leggen we *alleen de zwarte tegels*. Allemaal in dezelfde stand. Er zijn al twee tegels gelegd en de derde is onderweg. Voor de witte tegels blijven dan de gaten in het patroon over.

1 De vorm van de tegel is afgekeken van de vorm van de vloer.
Wat betekent dat voor de hoeken van de 'kleine' en de 'grote' driehoek?
Hoe kun je dat testen?

2 Leg de derde tegel in de plattegrond.
Weet je zeker dat die precies past?

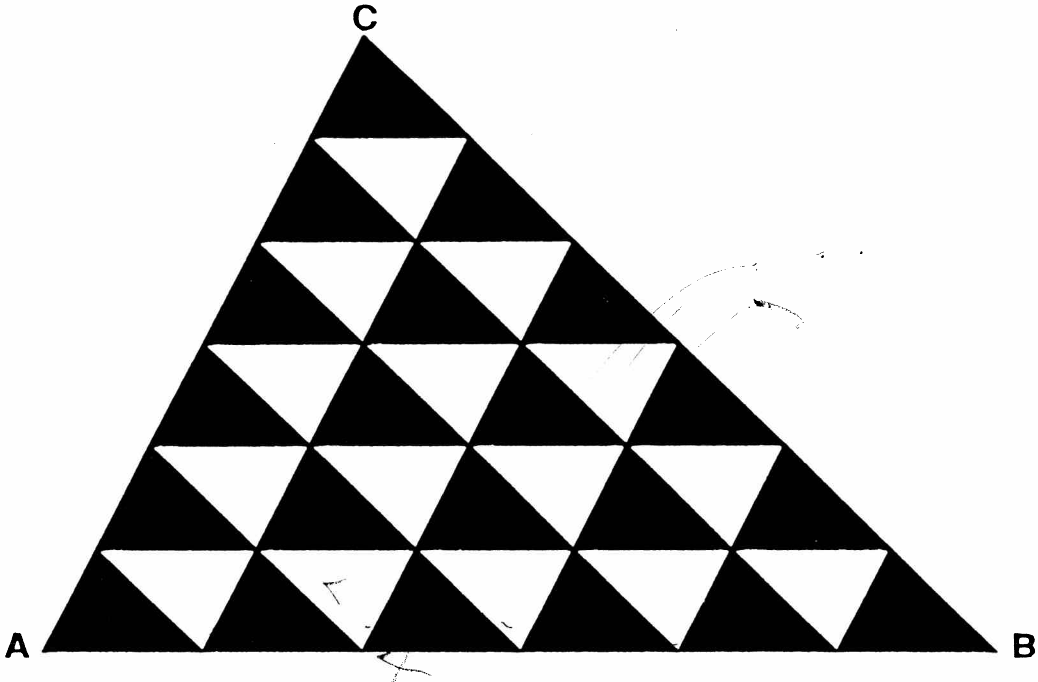
3 Teken ook nog de derde en de vierde rij tegels.
Komt het goed met de witte tegels?

4 Om de echte vloer te bedekken moet je tegeltje voor tegeltje leggen. In de plattegrond zou dat neerkomen op het tekenen van een groot aantal kleine driehoekjes.
Zie je al een systeem in de ligging van de tegels, waardoor je veel sneller de plattegrond kunt opvullen?

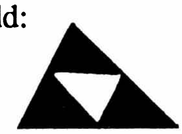
5 De driehoekige vloer is ergens op de grond getekend, zodat je de tegels echt kunt leggen.
Langs de linkerrand kunnen er zes liggen. Dat past dus.
Stel je eens voor dat je de overige tegels uiteindelijk niet passend op de driehoekige vloer kunt krijgen.
Als je begint met leggen, merk je van een kleine afwijking nog niets. Maar het eindresultaat kan een grote teleurstelling worden.
Teken enkele manieren waarop het zou kunnen mis gaan.

6 Na opgave 4 ben je er waarschijnlijk wel van overtuigd dat het allemaal goed komt.
En terecht.
Maar nu zegt iemand: 'Je hebt wel heel slim een aantal lijntjes getekend waardoor de grote driehoek in mooie driehoekige vakjes is verdeeld, maar ik geloof niet dat de kleine driehoekjes daar precies in passen.'
Hoe zou je zo iemand van de waarheid kunnen overtuigen?

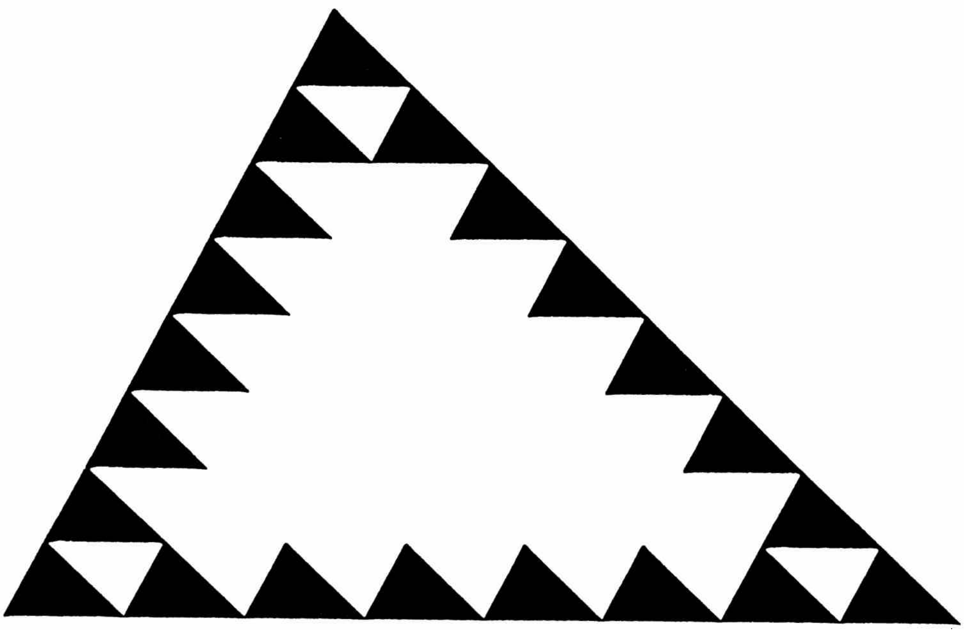
Het resultaat van het driehoekje leggen:



Langs elke zijde van de grote driehoek ABC liggen *evenveel* kleine driehoeken. In dit geval zijn dat er zes. Maar bij andere aantallen klopt het ook. Je kunt dat controleren met driehoeken die in de grote driehoek zijn verstopt. Bijvoorbeeld:



En het kan ook met een ander formaat tegel, zoals hieronder (aantal telkens acht):



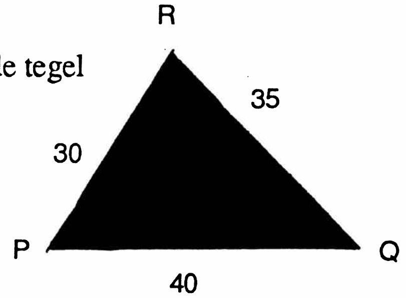
Dit is de winst die we gemaakt hebben:

Passen de kleine driehoekjes langs één zijde, dan passen ze in dezelfde aantallen ook langs de andere zijden. Daarbij moeten de kleine driehoekjes en de grote wel *'gelijkvormig'* zijn.

Nog eenvoudiger:

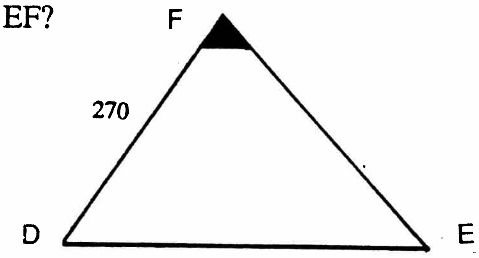
Als je weet hoeveel tegels langs één zijde liggen, dan weet je ook het antwoord voor de andere zijden.

7 Dit zijn de maten in cm van de tegel uit het begin van het verhaal:



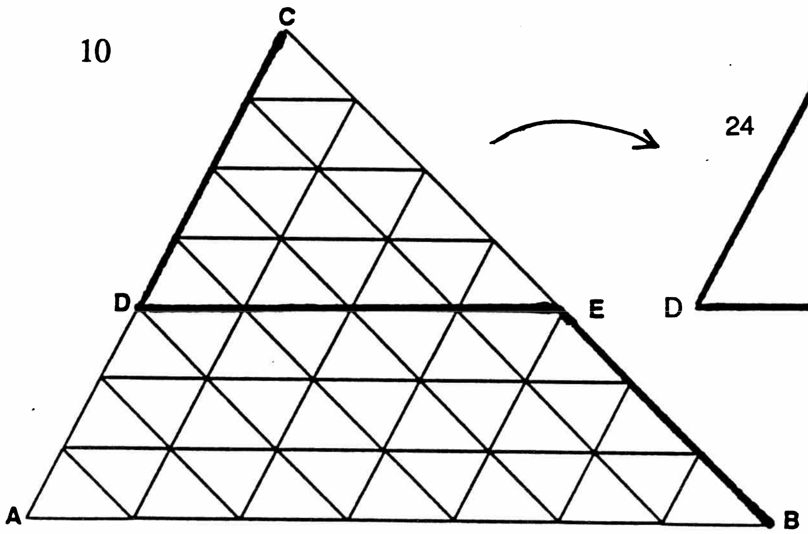
Bereken de afmetingen van het driehoekig deel van de vloer, dus van AB, BC en AC.

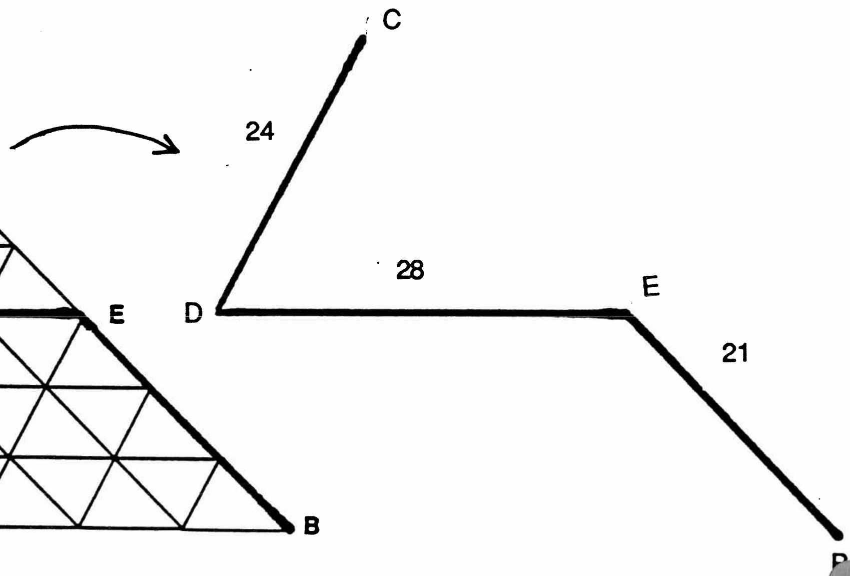
8 Met dezelfde tegels kan deze driehoek DEF worden opgevuld (DF = 270 cm).
Hoe lang zijn DE en EF?



9 De vloer (zie pag.4) kan ook met de kleinere tegels van pag.4 onderaan worden opgevuld.
Wat zijn de maten van zo'n kleine tegel?

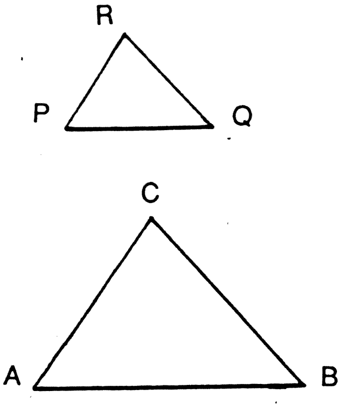
10





Bereken de lengten van AD, EC en AB.

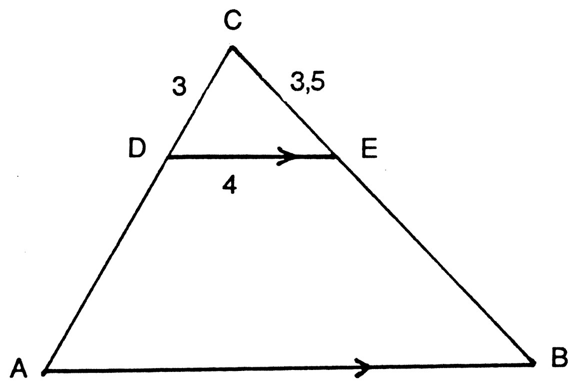
De berekening van opgave 7 kan in een schema worden gezet:



	40	...	...
	PQ	QR	RP
[doe]	6x ↓	...x ↓	...x ↓
	AB	BC	CA
	240	...	...

11 Ga eerst uitzoeken hoe dit schema in elkaar zit en vul daarna de passende getallen op de stippeltjes in.

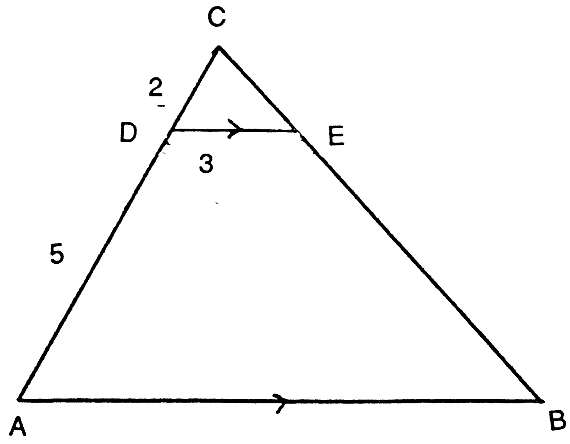
12



Het kleine driehoekje (CDE) is al in de grote driehoek (ABC) gelegd.
Bekend: DE // AB; CD = 3; DE = 4; CE = 3,5; CD = 1/3 CA.

a Bereken met de tegelmethode de lengten van AC, AB, BC.
b Kun je ook tegels met andere afmetingen gebruiken? Geef eens een voorbeeld.
c Maak vraag a nu eens met een schema. Kijk goed uit welke lijnstukken gebruikt mogen worden en welke bij elkaar horen.

13



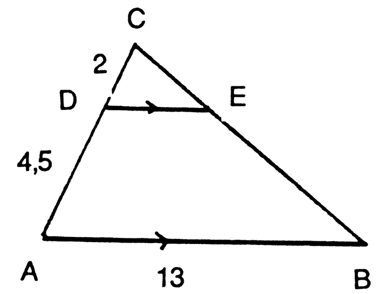
Bekend: DE // AB; DE = 3; AD = 5; CD = 2.

Driehoek CDE is hier niet zo geschikt als 'meetdriehoekje', maar ... daar kun je wel iets op vinden.

a Bereken de lengte van AB.

b Als BE = 10, hoe groot is dan CE?

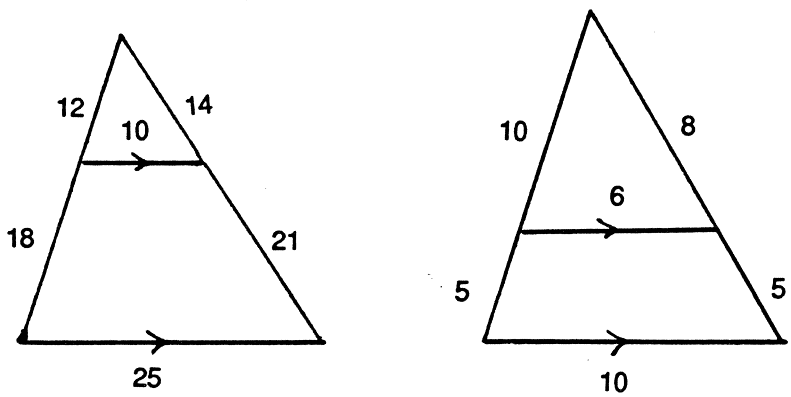
14



Bekend: DE // AB; AB = 13; AD = 4,5; CD = 2.

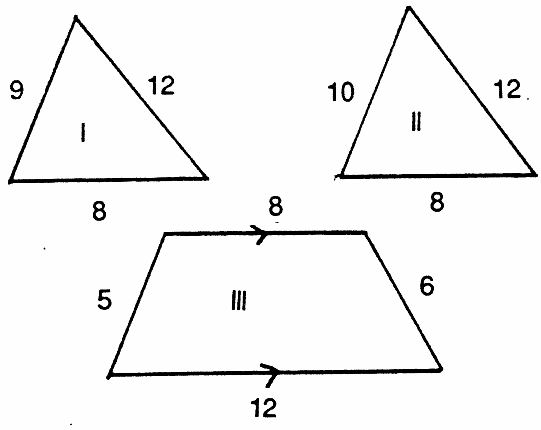
Bereken DE.

15

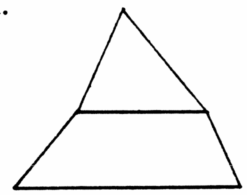


Deze tekeningen zijn niet op schaal! Controleer of de bijgeschreven getallen juist kunnen zijn.

16

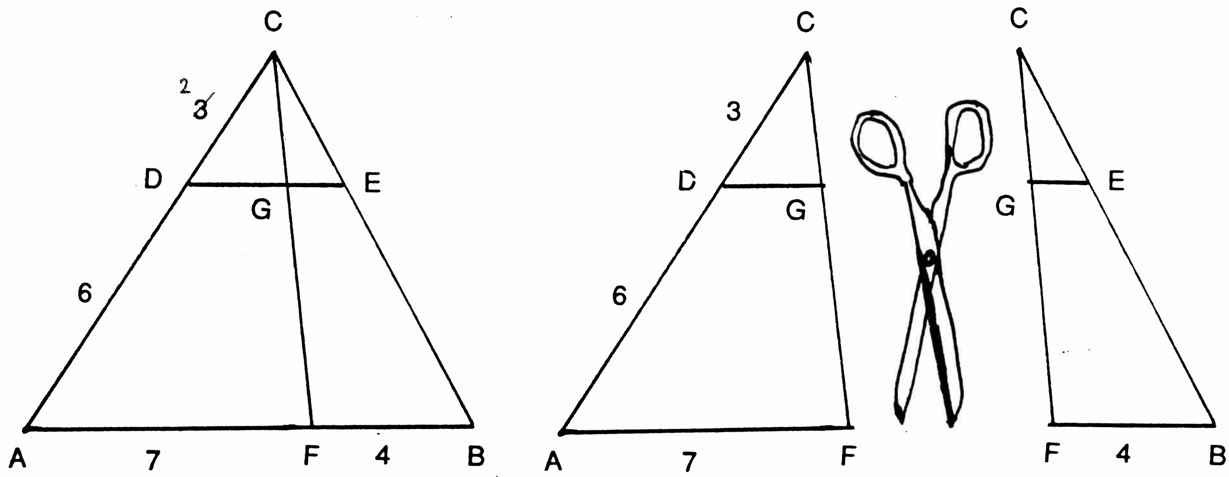


Figuur III is een trapezium (twee zijden parallel). Daarop kun je driehoek I of driehoek II plaatsen. De figuur die dan ontstaat kan een driehoek zijn, maar dat hoeft niet. Er kunnen immers knikken inzitten.



Hoe zit dat in deze twee gevallen?

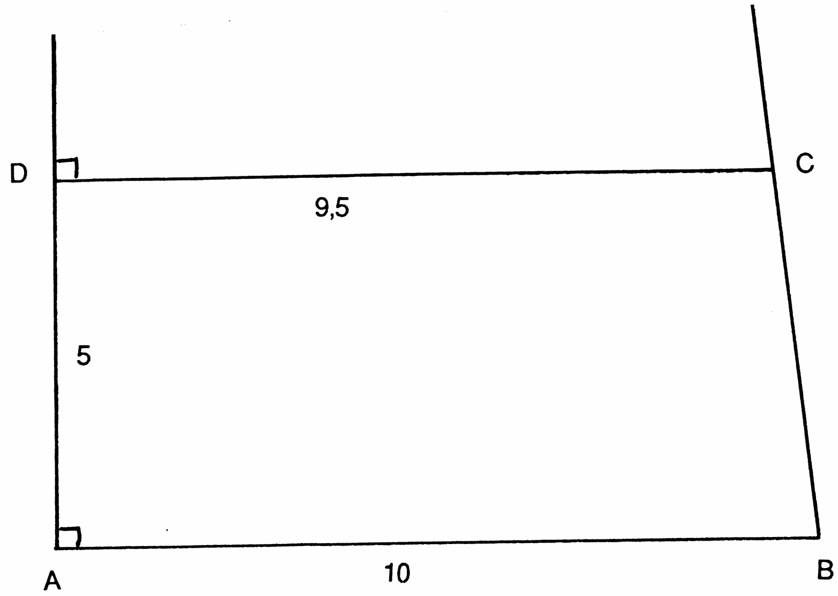
17



a CA is driemaal zo lang als CD. Met het tegeltjesverhaal is eenvoudig vast te stellen dat CB dan ook driemaal zo lang is als CE. Ga dat nog eens na.

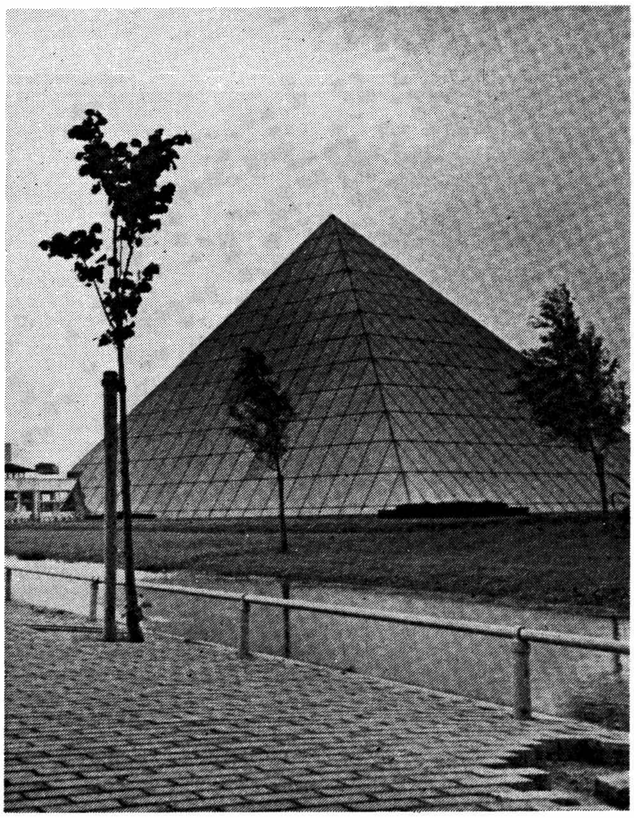
b Van de driehoek ABC wordt een stuk afgeknipt. Is CF nu ook driemaal zo lang als CG?

18

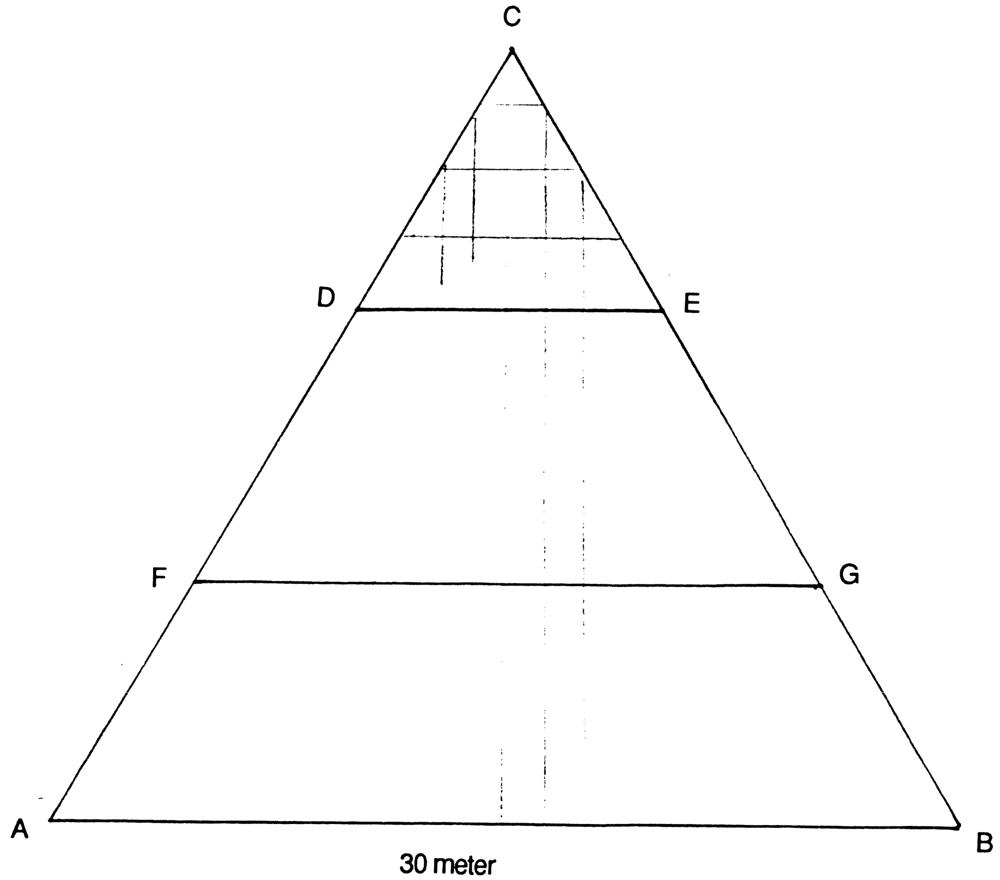


Het snijpunt S van AD en BC ligt een aardig stukje buiten het papier.
Hoe ver ligt het punt van D?

19



Op de zijvlakken van deze meer dan 20 meter hoge Nederlandse piramide kun je weer de bekende figuren van driehoeken met parallelle lijnen zien. Zo'n zijvlak is op de volgende pagina apart getekend met BG = GE = EC.



We nemen aan dat er bij AB, FG en DE vloeren zijn en dat die vloeren vierkant zijn.
De onderste vloer is dus 30 bij 30 meter. We willen de oppervlakten van de andere twee vloeren weten, maar we zijn beperkt in onze mogelijkheden:

- we moeten buiten de piramide blijven;
- bij het vakjes tellen raken we hopeloos in de war;
- de buitenkant van de piramide is spiegelglad.

Los het probleem *met* je hoofd op.

Terugblik

In deze paragraaf heb je kennis kunnen maken met een werkwijze die veel voorkomt in de wiskunde. Je begint met iets eenvoudigs, zoals het tegeltjes leggen. Je vindt bijzonderheden die helemaal niet zo voor de hand liggen. Hier bijvoorbeeld de aantallen met driehoekjes langs de randen van een grote driehoek.
Je gebruikt die bijzonderheden bij andere problemen, zoals de berekening van lijnstukken in een driehoek.
En die laatste kennis kan weer worden toegepast, bijvoorbeeld in berekeningen bij de piramide.
Zulke hoogstaande dingen uit zulke platvloerse tegeltjes!

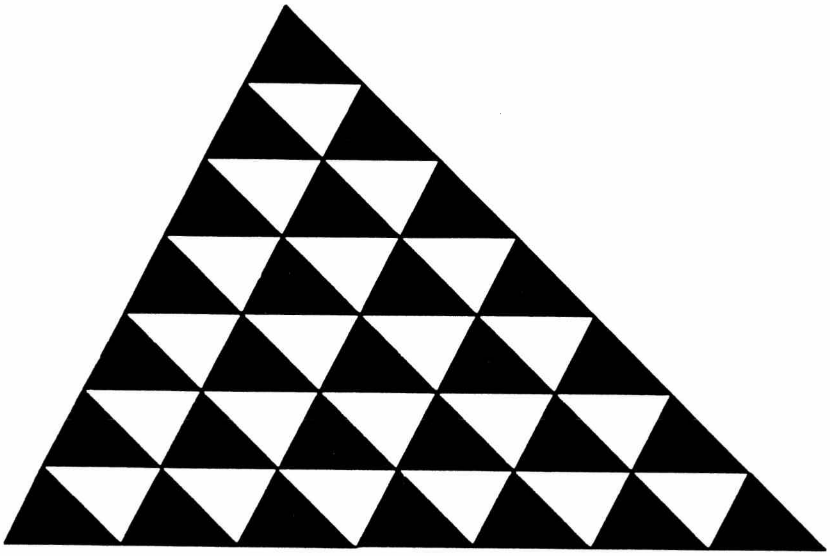
Het vak wiskunde is nog lang niet af. Misschien kun je zelf ook nog problemen bedenken die bij deze paragraaf passen.

En tenslotte de voorplaat die geen tekengrapje is (zie ook de binnenkant van de omslag). Bij het medisch hersenonderzoek maakt men gebruik van het elektro-encephalogram (EEG) en het magneto-encephalogram (MEG) die ontstaan ten gevolge van de hersenactiviteit. De vorm van het hoofd is van invloed op de resultaten van die metingen. Met zulke hoofdmodellen kan dat allemaal berekend worden.

§ 2 Regelmaat en symmetrie ontdekken en benutten

Het probleem van de passende tegels is opgelost. We gaan ons nu bezig houden met de aantallen tegels die besteld of gefabriceerd moeten worden.

1 Hier is nog eens de vloer:



	Z	W	T	S_Z	S_W	S_T
rij 1						
rij 2	2	1	3	3	1	4
rij 3						
rij 4						
rij 5						
rij 6						
rij 7						

Naast de vloer is een tabel getekend die de telresultaten weergeeft. Voor de opschriften van de kolommen zijn deze afkortingen gebruikt:

Z = het aantal zwarte tegels in die rij
W = het aantal witte tegels in die rij
T = het totaal aantal tegels in die rij
S_Z = de <u>som</u> van alle zwarte tegels tot nu toe
S_W = de som van alle witte tegels tot nu toe
S_T = de som van alle tegels tot nu toe

Als voorbeeld is rij nummer 2 ingevuld.

a Vul de andere rijen van de tabel in.

b Voor de volgende rijen (nr 8 en verder) kun je natuurlijk eerst de driehoekjestekening uitbreiden. Maar het kan handiger met het deel van de tabel dat je al hebt. Dat komt doordat er zoveel regelmaat in de tabel zit.
Vul de tabel aan met de rijen 8, 9, 10.

2 Test je inzicht in de tabel !

rij nr	Z	W	T	S_Z	S_W	S_T
15	15	14	29	120	105	225

Rij 15 is verraden. Schrijf in één keer rij 14 op.

3 Iemand heeft met een computer deze rij voor je uitgerekend:

rij nr	Z	W	T	S_Z	S_W	S_T
99	99	98	197	4950	4851	9801

a Bereken nu zelf de volgende rij.

b Dat de eerste drie getallen van de gegeven rij geen pure fantasie zijn is gemakkelijk te zien. Hoe?

c Bij de volgende drie is dat moeilijker. Dat $S_T = S_Z + S_W$ zegt niet zoveel, want S_Z en S_W kunnen al niet kloppen. Toch bestaat er een zeer eenvoudige methode om de waarde van 9801 voor S_T aan de weet te komen, zonder S_Z en S_W te gebruiken. Als je tenminste goed naar de tabellen uit de opgave kijkt.
Hoe werkt die methode ?

d Vier klanten bestellen elk voor een grote driehoekige vloer precies het aantal tegels dat ze nodig hebben, namelijk: 289; 575; 864; 1225.
Welke klanten kunnen niet rekenen?
(Je kunt je rekenmachine gebruiken).

e Nog even een supermoeilijke.
Vul de rij in de tabel in:

rij nr	Z	W	T	S_Z	S_W	S_T
...	...	...	...	...	...	1600

4 Op een tafel ligt een groot driehoekig mozaïek van allemaal even grote driehoekige steentjes. Daarop ligt een krant. Alleen de onderste rij steentjes is nog zichtbaar.

a Hoeveel steentjes liggen er onder de krant ?

b Geef een recept voor de oplossing van dit soort problemen in de stijl van : doe - dit - doe - dat, enzovoort.

5 Als je met n het rangnummer van de rij bedoelt, kun je volgens het hiervoor gaande de kolom S_T de naam n^2 geven. Dat is gedaan met de volgende *verschillentabel.*

verschillentabel	
n^2	verschillen tussen twee opvolgende getallen
1	
	3
4	
	5
9	
	...
16	
25	
36	
49	

a Maak de kolom *verschillen* af.

b Waar vind je deze kolom terug in de tabel van opgave 1?
Is dat nogal logisch?

c Maak bij deze verschillentabel een extra kolom waarin de verschillen van de verschillen staan.
Wat is daar zo bijzonder aan?

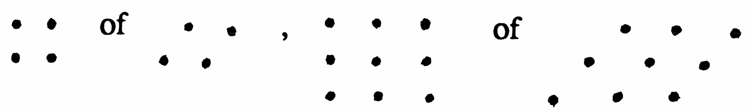
d In deze tabel liep de waarde van n met stapjes van 1 op. We gaan de stapgrootte veranderen en maken een kolom van 1, 9, 25 t/m 169.
Onderzoek met zo'n uitgebreide verschillentabel of het in c gevonden systeem bewaard blijft.

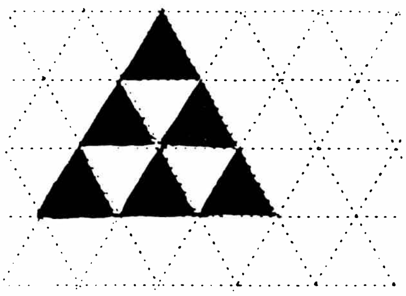
6 We kunnen de telresultaten zo samenvatten:

na 1 rij hebben we 1 driehoekje
na 2 rijen hebben we 2 x 2 of 2^2 driehoekjes
na 3 rijen hebben we 3 x 3 of 3^2 driehoekjes
....
na n rijen hebben we n x n of n^2 driehoekjes.

a Hoeveel rijen zijn er nodig om minstens 1000 driehoekjes te krijgen?

b De kwadratische aantallen 2 x 2 , 3 x 3 enz. zijn het gemakkelijkst te zien bij zulke patronen:





Probeer met een meetkundige ingreep de witte vakjes zo te verplaatsen dat hier ook duidelijk het 3 x 3 patroon te zien is.

7

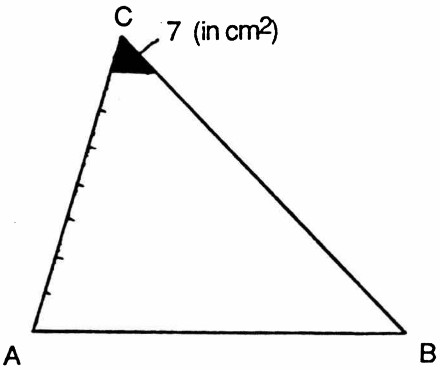
rij	totaal aantal driehoekjes	bijbehorende oppervlakte
1	1	5 x 1 = 5
2	4	5 x 4 = 20
3	9	5 x 9 = 45
...	...	......
...	...	......
n	n^2	$5 \times n^2 = 5n^2$

De laatste kolom is berekend door aan te nemen dat één meetdriehoekje een oppervlakte van 5 cm^2 heeft.

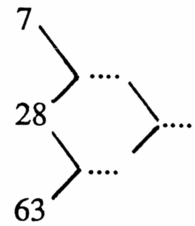
a Hoeveel rijen zijn er minstens nodig om een totale oppervlakte van 1000 cm^2 te krijgen?

b En hoeveel om 1 m^2 te kunnen bedekken?

8 a Hoe groot is de oppervlakte van Δ ABC ?



b Maak een verschillentabel met de extra kolom, voor de totale oppervlakte na elke rij (8 rijen).



We wisten al dat de getallenserie die bij n^2 hoort in de verschillentabel na twee kolommen op gelijke getallen eindigt.

Kwadratische verbanden

Die bijzonderheid blijkt volgens opgave 8 ook op te treden bij de serie van $7.\ n^2$. Of anders gezegd bij de formule *oppervlakte* $= 7.\ n^2$.

Die mooie regelmaat blijkt nog veel meer voor te komen. Kijk in de tabel van opgave 1 maar bij de waarden van S_z en bij de laatste kolom in opgave 7.

Dat is allemaal al eens uitgezocht. Men heeft gevonden dat dat altijd gebeurt bij formules zoals:

uitkomst $= 3.n^2 - 7n + 5$

U $= 2\frac{1}{2}\, n^2 + 4$

U $= n^2 + 2n$

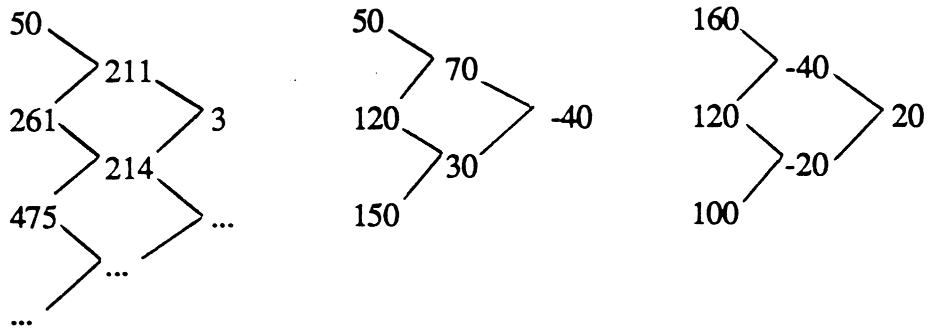
Algemeen: U $= \square\ .\ n^2 + \square\ n + \square$.

In het eerste hokje mag elk getal staan, behalve 0. In de andere hokjes mag elk getal staan.
Het verband tussen U en n noemt men *kwadratisch.* Omgekeerd hoort bij elke verschillentabel met die bijzonderheid een kwadratisch verband, en dus ook zo'n formule.

9 Controleer dat in opgave 1 voor de kolom S_z geldt:

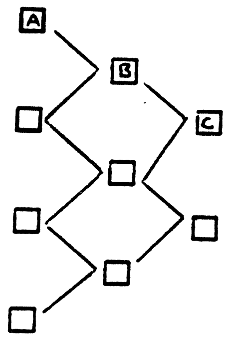
$$S_z = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

10

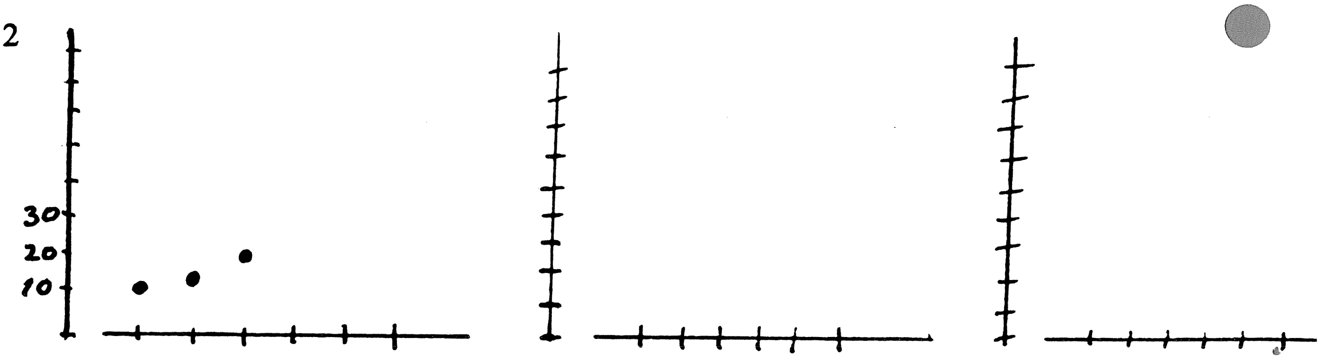


Bereken voor deze tabellen het vierde en vijfde getal van de eerste kolom door er nog twee toertjes aan te breien.

11 Uit opgave 10 blijkt dat je een kwadratisch verband kunt maken door de eerste drie getallen van de eerste kolom te kiezen. Het kan ook door de getalswaarden voor A,B en C in dit schema te kiezen.
Hoe moet je die kiezen om een kolom te krijgen die bij elke stap meer in waarde daalt dan bij de vorige stap?



12



10	8	0
12	48	18
20	72	32
...		

Vul deze 'kwadratische' kolommen nog met drie getallen aan en teken ze in de figuren. Er is al een begin gemaakt.

Lichaamsgewicht

13 Het hebben van het juiste lichaamsgewicht is een belangrijke voorwaarde voor het gezond zijn en blijven.

Over wat het juiste gewicht is bij een bepaalde lengte lopen de meningen nogal uiteen. Voor de leek zijn er allerlei tabellen, grafieken en formules waarmee hij of zij gemakkelijk het eigen gewicht kan controleren. Die zijn soms zo eenvoudig dat je aan de waarde ervan kunt twijfelen.

Hier is een deel van zo'n tabel :

lengte in cm	gewicht in kg
140	49
150	56,25
160	64
170	72,25
180	81
190	90,25

a Waarschijnlijk is er bij het maken van de tabel gebruik gemaakt van een kwadratisch verband tussen lengte en gewicht. Controleer dat met een verschillentabel.

b In de tabel gaat de lengte telkens evenveel omhoog, maar bij het gewicht is dat niet zo. Probeer daar een verklaring voor te vinden, door je een groeiend mens voor te stellen.

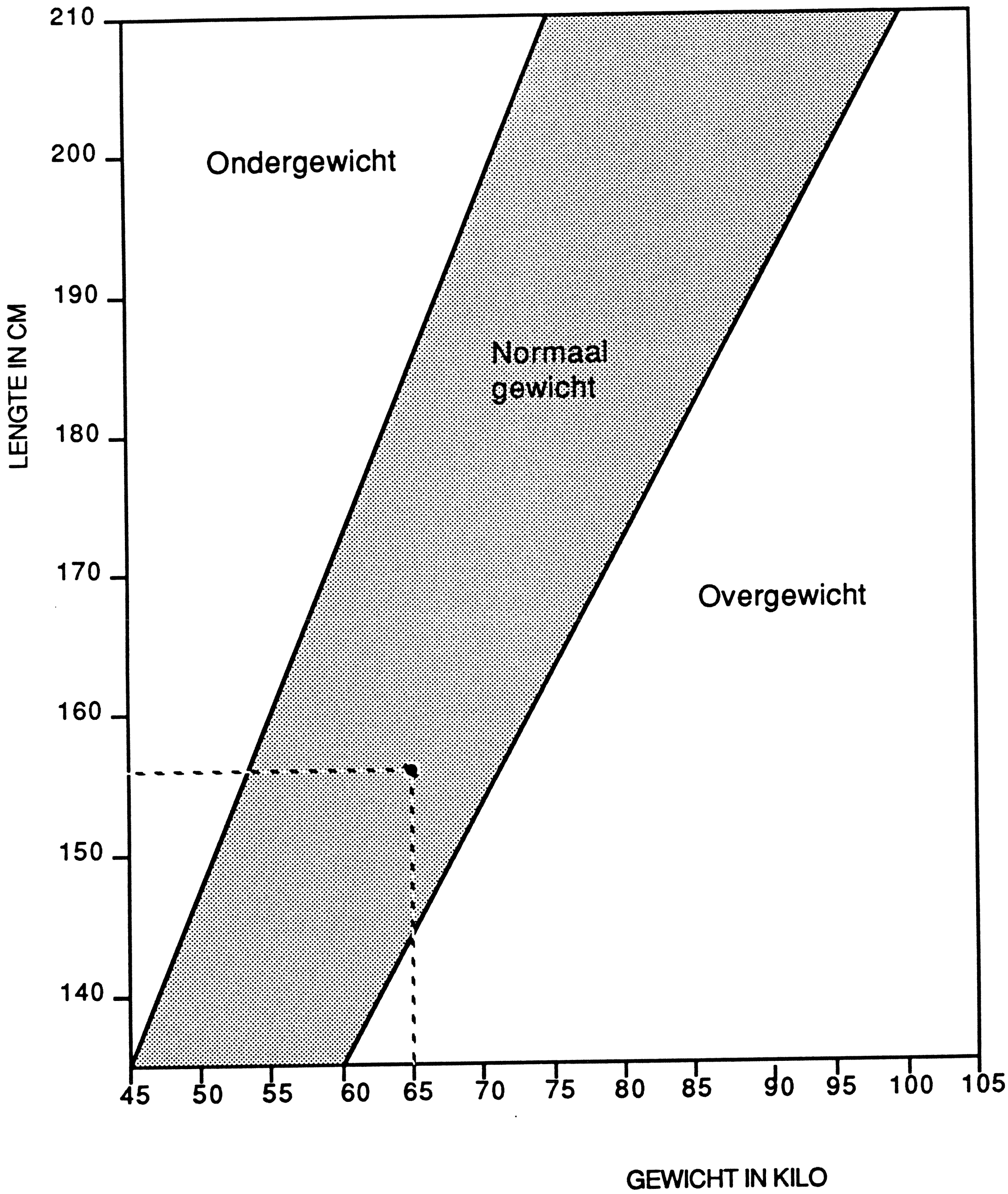
c Welk gewicht hoort bij een lengte van 200 cm?

d Misschien is de gebruikte formule te achterhalen.
Die formule zou er zo uit kunnen zien:

$$G = \boxed{?} \,.\, L^2$$

Welk getal moet in het hokje staan?

Een tweede manier om te bepalen of je een 'normaal' gewicht hebt, gaat met deze grafiek:



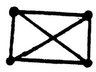
Voorbeeld: Iemand weegt 65 kg en heeft een lengte van 1,56 m.
Daarbij hoort een punt dat in het gebied van het normale gewicht ligt.

e Past de tabel bij het normale gebied?

f De grafiek is 'geruststellender' dan de tabel en de formule.
Lijkt je dat terecht?

Tafeltenniscompetitie

Er wordt een tafeltenniscompetitie georganiseerd waarbij iedere deelnemer tegen elk van de andere deelnemers speelt. Het aantal te spelen wedstrijden is natuurlijk afhankelijk van het aantal deelnemers. Het organisatiecomité wil daar graag wat meer inzicht in hebben. Bij een klein aantal is de zaak wel te overzien, maar bij grote aantallen wordt het wat lastig.
Hier een poging:

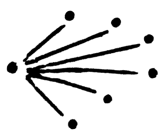
aantal deelnemers		aantal wedstrijden
2		1
3		3
4		6

a Vul de tabel en de tekeningen aan voor de deelnemersaantallen 5 en 6.

b Zoek systeem in het resultaat, voorspel daarmee het aantal wedstrijden voor 7 en 8 deelnemers en controleer je antwoorden.

c Er kunnen hoogstens 50 wedstrijden gespeeld worden.
Hoeveel deelnemers kan men toelaten?

Een berekening voor 80 deelnemers zou op bovenstaande manier erg bewerkelijk zijn. Daarom is er naar een manier van tellen gezocht waarbij die tussenstappen niet nodig zijn.
Eerst een voorbeeld:
1 deelnemer moet 6 wedstrijden spelen: $6 = 7 - 1$,
7 deelnemers: 7×6 wedstrijden,
maar dan heb je alle wedstrijden tweemaal gerekend,
het worden er dus: $\frac{1}{2} \times 7 \times (7 - 1) = 21$.

7 deelnemers 

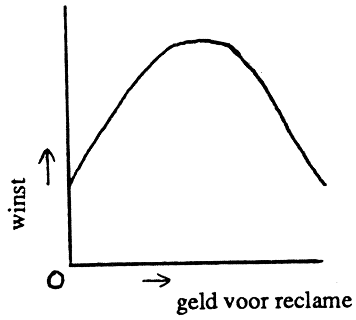
d Bereken op deze manier het aantal wedstrijden voor 80 deelnemers.

e Probeer deze formule te ontraadselen:
aantal wedstrijden = $\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-1)$, waarbij n het aantal deelnemers is.

Reclame

15 Meer geld besteden aan reclame kan een bedrijf meer winst opleveren. Maar de regel 'meer reclame meer winst' gaat niet altijd op.

Het werkelijke verband tussen die twee ziet er eerder zo uit:



a Probeer de vorm van deze grafiek aannemelijk te maken.

De vorm van de grafiek doet aan een kwadratisch verband denken. De directie van een bedrijf gaat er van uit dat dat zo is. De ervaringen tot nu toe staan in deze tabel:

reclame geld (x f 100.000)	winst (x f 100.000)
0	4
1	11
2	16

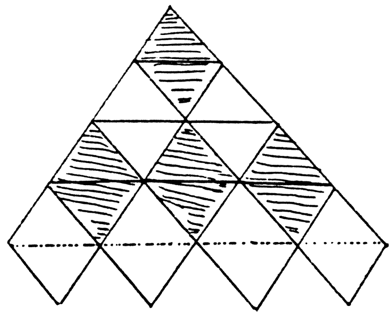
b Het probleem is nu: is het verstandig nog meer geld in reclame te steken, en zo ja, wat moet dan het totale bedrag voor reclame zijn ?

Terug naar de tegeltjes

16 We gaan weer terug naar het tegeltjes leggen.

Een fabrikant of een handelaar moet ongeveer weten in welke verhouding zwarte en witte tegels gevraagd worden. Het oude patroon blijkt zeer onevenwichtig te zijn.

a Controleer dat.



Er wordt een nieuw patroon vastgesteld waarbij elke kleur van de ene rij aan dezelfde kleur van de andere rij grenst.

b Maak hierbij voor de eerste zeven rijen een tabel, zoals op pag. 12:

rij nr	Z	W	S_Z	S_W

c Heeft de fabrikant of handelaar het nu gemakkelijker?

d Zijn de kolommen S_Z en S_W nu ook kwadratisch?

e Voeg nog twee rijen aan de tabel toe.

f Probeer nu zelf eens een patroon te vinden waar iedereen blij mee is; de klant omdat het er mooi uitziet en de fabrikant omdat er niet van de ene kleur veel meer nodig is dan van de andere.

AN 3.315.6448