# Examen VWO

# 2015

tijdvak 1
woensdag 13 mei
13.30 - 16.30 uur

## wiskunde C (pilot)

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Achter het correctievoorschrift is een aanvulling op het correctievoorschrift opgenomen.

Dit examen bestaat uit 21 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 76 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

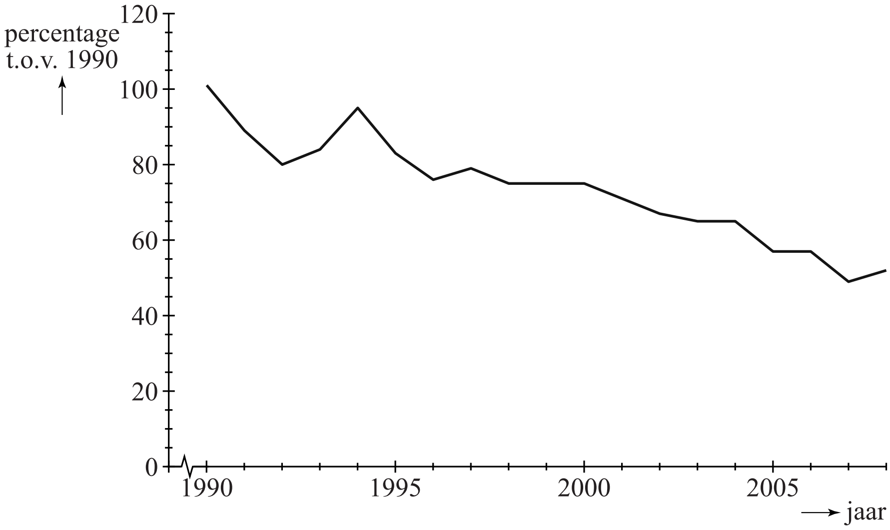
Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

## Succesvogels en pechvogels

In 2010 heeft Chris van Turnhout onderzoek gedaan naar de ontwikkeling van de aantallen broedvogels in Nederland gedurende de periode 1990 − 2005. Hij onderzocht welke eigenschappen bepalen of een vogelsoort in aantal toeneemt (‘succesvogels’) of afneemt (‘pechvogels’).

**figuur 1**

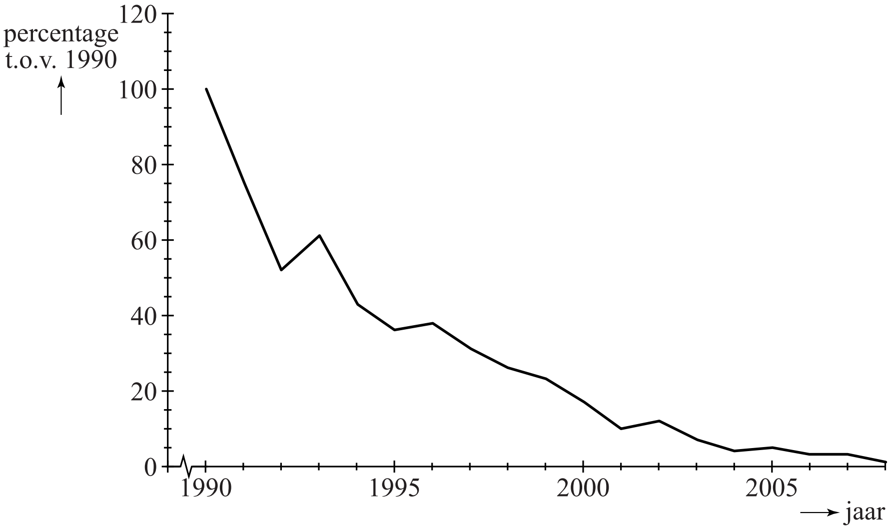



Figuur 1 gaat over een ‘pechvogel’: de grutto. Langs de verticale as staan de aantallen als percentage van het aantal grutto’s dat er in 1990 was. Figuur 1 staat ook vergroot op de uitwerkbijlage.
In 2004 waren er 60 000 grutto’s. Met behulp van dit gegeven en gegevens uit figuur 1 kun je nu het aantal grutto’s in 1994 berekenen.

3p 1 Bereken het aantal grutto’s in 1994.

In de periode 1990 − 2005 nam het aantal kuifleeuweriken dramatisch af, zoals in figuur 2 goed te zien is.

**figuur 2**




In 2005 was er nog slechts 5% over van het aantal in 1990. Ga ervan uit dat het aantal exponentieel afnam in deze periode.

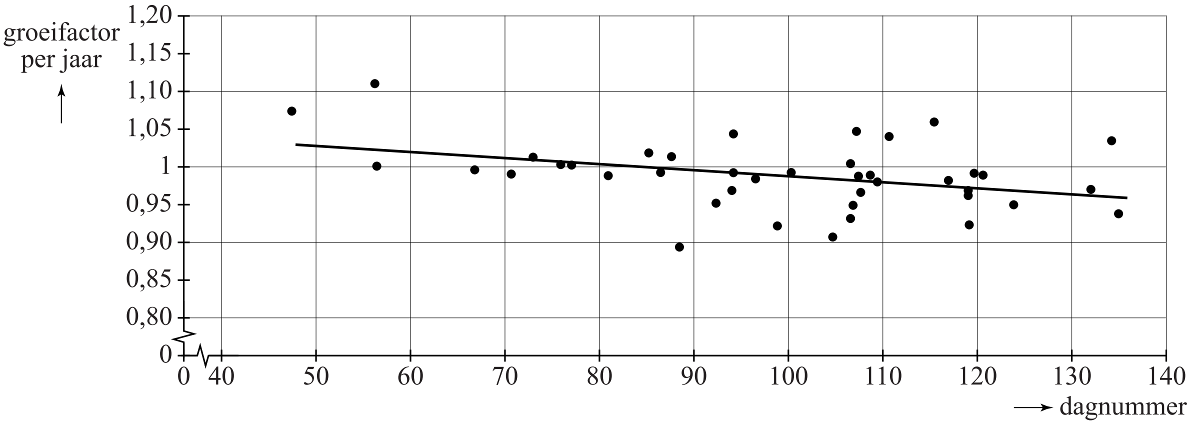
4p **2** Bereken de groeifactor per jaar voor de kuifleeuwerik. Ga uit van de gegevens van 1990 en 2005.

Uit het onderzoek is gebleken dat de plaats van het nest belangrijk is voor de mate van succes van een vogelsoort. Een soort A die zijn nest in struiken maakt, groeit exponentieel met groeifactor 1,042 per jaar. En een soort B die in bomen nestelt, groeit exponentieel met groeifactor 1,016 per jaar.
Neem aan dat de aantallen van deze twee broedvogelsoorten op een bepaald moment gelijk zijn.

4p **3** Bereken na hoeveel gehele jaren het aantal vogels van soort A voor het eerst meer dan twee keer zo groot is als dat van soort B.

Een eigenschap die belangrijk is voor het succes van trekvogels is de datum van aankomst in Nederland.
In figuur 3 zie je het verband tussen de groeifactor per jaar en de dag van aankomst in Nederland. Deze dag is aangegeven met een dagnummer: dag 33 is 2 februari, dag 34 is 3 februari, enzovoort.
De 41 onderzochte vogelsoorten zijn met punten aangegeven. In figuur 3 is de best passende lijn bij deze 41 punten getekend. Deze lijn geeft aan dat in het algemeen geldt: hoe later een soort aankomt in Nederland, hoe kleiner de groeifactor van die soort.

**figuur 3**




Vergelijk drie denkbeeldige soorten die precies op de lijn van figuur 3 liggen. Soort X komt op dag 120 aan, soort Y op dag 130 en soort Z op dag 140. Omdat ze steeds met 10 dagen verschil aankomen, is het verschil in groeifactor ook constant: ze liggen immers op een rechte lijn. Aankomen op dag 120 levert, zo is vast te stellen, een groeifactor van 0,975. En aankomen op dag 130 levert een groeifactor van 0,965.

De vraag is of het verschil in halveringstijd (dat is de tijd die het duurt tot er nog 50% van het aantal over is) bij deze drie soorten ook constant is.

5p **4** Onderzoek door het berekenen van de halveringstijden van de soorten X, Y en Z of de halveringstijd ook met een vast aantal jaren afneemt.

## Een oud-Egyptisch verdeelprobleem

Uit het Egypte uit de tijd van de farao's zijn enkele documenten met een wiskundige inhoud bewaard gebleven. In één van deze documenten, de Rhind papyrus, staat het volgende verdeelprobleem:

> Verdeel 10 hekats gerst zó onder 10 man dat het verschil tussen het deel van elke man en zijn buurman steeds $\frac{1}{8}$ hekat is. Hoe groot is dan ieders deel?

Een hekat is een oud-Egyptische inhoudsmaat voor graan:
1 hekat ≈ 4,8 liter.
In het document wordt vervolgens beschreven hoe men dit uitrekent:
- het 'gemiddelde deel' is $10 : 10 = 1$ hekat
- het aantal verschillen tussen de $10$ delen is $10 - 1 = 9$
- deel het verschil $\frac{1}{8}$ door $2$, het antwoord is $\frac{1}{16}$
- vermenigvuldig nu het aantal verschillen met $\frac{1}{16}$. Je krijgt $9 \times \frac{1}{16} = \frac{9}{16}$
- tel dit op bij het gemiddelde deel: dit geeft het grootste deel
- trek nu steeds $\frac{1}{8}$ hekat eraf voor elke volgende man totdat je bij de laatste komt.

De delen van groot naar klein die de 10 mannen krijgen, vormen een rij die hoort bij een lineair verband.

3p **5** Geef een recursieve formule van deze rij.

Stel je moet € 1800 verdelen onder 8 personen en wel zo dat de acht bedragen een rij vormen met een verschil van € 20 tussen elk tweetal opeenvolgende termen.

4p **6** Bereken op de manier van de oude Egyptenaren hoeveel ieder dan krijgt.

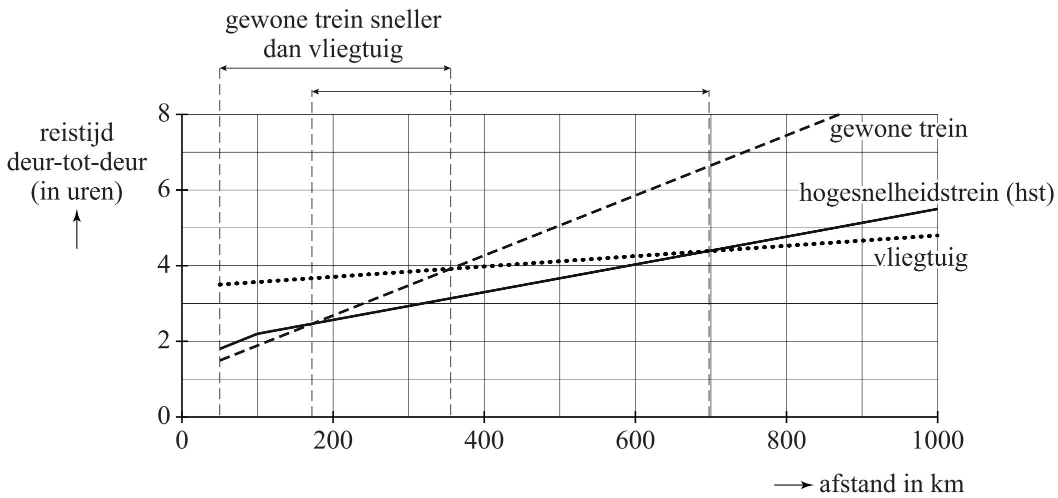
De Egyptenaren beschreven de oplossing van een dergelijk probleem in woorden en aan de hand van een voorbeeld. Men kende toen nog geen formules. Tegenwoordig kan men de oplossing veel korter beschrijven met behulp van formules.
Noem de totale hoeveelheid die verdeeld moet worden $T$, het verschil tussen de opeenvolgende delen $v$ (met $v > 0$) en het aantal personen waarover verdeeld moet worden $n$. In het eerstgenoemde voorbeeld geldt dan $T = 10$ (hekat), $v = \frac{1}{8}$ en $n = 10$ (personen).

4p **7** Stel, uitgaande van de bovengenoemde procedure van de oude Egyptenaren, een formule op waarin het grootste deel $G$ uitgedrukt wordt in $T$ , $v$ en $n$.

## Reistijden

In 2010 stond in NRC Handelsblad een artikel waarin de prestaties van vliegtuig, hogesnelheidstrein (hst) en gewone trein met elkaar vergeleken werden. Bij het artikel stond onderstaande figuur. In deze figuur staat horizontaal de reisafstand in kilometers en verticaal de totale reistijd van-deur-tot-deur in uren. De reistijd van-deur-tot-deur is de totale tijd die nodig is voor de trein- of vliegreis zelf en voor de verplaatsingen van en naar het station of vliegveld.
Deze figuur staat vergroot op de uitwerkbijlage.

**figuur**




Uit de figuur blijkt dat men voor reizen met een afstand van meer dan 100 km bij elk vervoermiddel uitgaat van een constante snelheid.

3p **8** Bereken deze snelheid voor de hogesnelheidstrein in km/u.

Voor een reis met de auto is er geen reistijd van en naar een station of vliegveld. Neem daarom aan dat we bij autoreizen ook bij afstanden beneden de 50 km uit mogen gaan van een constante snelheid.

3p **9** Teken in de figuur op de uitwerkbijlage de grafiek van het reizen met de auto met een snelheid van 100 km/u en bepaal daarmee tot welke afstand de auto sneller is dan het vliegtuig.

Naar aanleiding van de figuur heeft men de volgende formules opgesteld. Hierbij is $a$ de afstand in km en $r$ de reistijd in uren:

Vliegtuig: $r = 0{,}00137a + 3{,}43$

Gewone trein: $r = 0{,}00793a + 1{,}10$

3p **10** Onderzoek met behulp van deze formules vanaf welke afstand de reistijd met het vliegtuig kleiner is dan de reistijd met de gewone trein.

## De logica van Cruijff

De oud-voetballer en trainer Johan Cruijff staat bekend om zijn onnavolgbare logica. In een interview met Johan Cruijff door Johan Derksen in 2013 zei Cruijff het volgende:

“Als ik jou vraag 'Laat eens zien wat je kan', zal jij laten zien wat je kan. Maar dan weet ik meteen wat je niet kan, want dat zal je niet laten zien.”

In deze opgave gaan we de logica in deze uitspraak van Cruijff nader bekijken. Daarvoor beperken we ons eerst tot één vaardigheid, die we vaardigheid $X$ noemen. Hiervoor onderscheiden we de volgende uitgangspunten:
– $A$: iemand beheerst vaardigheid $X$
– $B$: iemand laat vaardigheid $X$ zien

We maken een model van Cruijffs uitspraak. Het eerste deel kunnen we met logische symbolen opschrijven als $A \Rightarrow B$ . Het tweede deel van Cruijffs uitspraak kunnen we modelleren als: ‘Als iemand vaardigheid $X$ niet laat zien, dan beheerst hij vaardigheid $X$ niet’.

3p **11** Schrijf het tweede deel van het model van Cruijffs uitspraak met behulp van logische symbolen en onderzoek of in het model het tweede deel logisch volgt uit het eerste deel. Licht je antwoord toe.

We gaan terug van het model naar de uitspraak van Cruijff.

2p **12** Leg uit waarom je kritiek kunt hebben op de uitspraak van Cruijff.

Een andere bekende uitspraak van Cruijff is zelfs de titel geworden van een boek over hem: “Je moet schieten, anders kun je niet scoren.”
Om deze uitspraak te ontleden beginnen we met:
– $P$ : iemand schiet op doel
– $Q$ : iemand scoort
De uitspraak van Cruijff kunnen we herformuleren met de volgende logische bewering: ‘Als er gescoord wordt, dan is er op doel geschoten.’

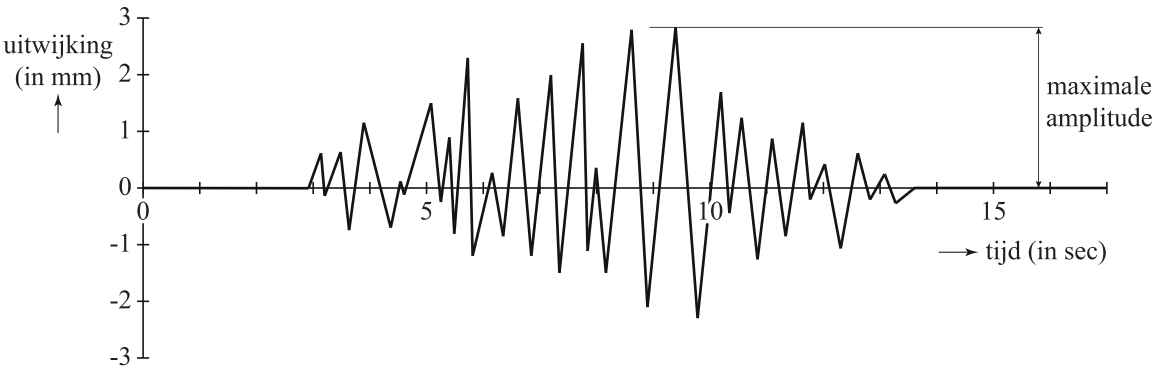
In een bepaalde wedstrijd wordt niet gescoord.

3p **13** Schrijf eerst de bewering ‘Als er gescoord wordt, dan is er op doel geschoten.’ met logische symbolen op en onderzoek vervolgens daarmee wat je volgens zijn logica kunt zeggen over het schieten op doel in deze wedstrijd.

## Bevingen in Japan

De laatste jaren waren de zeebevingen in de buurt van Japan regelmatig in het nieuws. De zeebeving van Sendai in 2011 en de aardbeving van 2004 die een enorme tsunami in de Indische Oceaan veroorzaakte, zijn allebei bevingen met een kracht van 9,0 of meer op de schaal van Richter.
De Amerikaan Charles Richter gebruikte seismogrammen om de **magnitude** (kracht) van een beving te kunnen bepalen. In de figuur zie je een voorbeeld van een seismogram. In dit seismogram zie je de gemeten trillingen van de aarde als uitwijkingen in mm. De grootste uitwijking in het seismogram heet de **maximale amplitude**.

**figuur**




Om de magnitude van een beving te bepalen, gebruikt men de formule van Richter. Hieronder staat een vereenvoudigde versie daarvan:

$$M = \log(A) + 3$$

In deze formule is $M$ de magnitude en $A$ de maximale amplitude in mm.

Met deze formule kan $M$ berekend worden als $A$ bekend is. Men kan echter ook $A$ berekenen als $M$ bekend is. Dat kan met de formule $A = 0{,}001 \cdot 10^M$.
Deze laatste formule is af te leiden uit de formule $M = \log(A) + 3$.

3p **14** Toon dit aan.

Een van de naschokken van de beving van 2004 had een magnitude van 5,3 op de schaal van Richter. En bij de beving van 2011 was er een naschok met een magnitude van 5,0. In een wetenschappelijk tijdschrift stond dat de maximale amplitude op het seismogram bij de naschok van 2011 gelijk was aan $10^{2,0}$. De maximale amplitude tijdens de naschok van 2004 was groter dan die van 2011.

3p **15** Bereken hoeveel keer zo groot.

De zeebeving van 11 maart 2011 met de daaropvolgende tsunami zorgde voor grote problemen bij de kerncentrale Fukushima I. Om de reactoren te koelen, werd zeewater in de reactoren gepompt. Dit water lekte, radioactief geworden, weer terug in zee. Hierdoor raakte vis besmet met radioactief jodium en moest de visvangst tijdelijk worden stopgezet.

Radioactief jodium verdwijnt volgens een exponentieel proces. De halveringstijd van radioactief jodium is 8 dagen. Op 6 april 2011 gaven metingen aan dat er 4800 keer de maximaal toegestane hoeveelheid radioactief jodium in het zeewater aanwezig was. De maximaal toegestane hoeveelheid radioactief jodium is 5 becquerel/liter.
Op het moment dat de maximaal toegestane hoeveelheid werd bereikt, mocht er weer gevist worden. We gaan ervan uit dat er na 6 april 2011 geen nieuw radioactief jodium meer in zee lekte.

5p **16** Bereken na hoeveel dagen er weer gevist mocht worden.

## Kubuskalender

Op foto 1 zie je een kalender die gemaakt is van hout. Met behulp van de twee kubussen kun je de dag aangeven; de maand wordt eronder vermeld.
Op elk zijvlak van de beide kubussen staat een cijfer. Door de kubussen te draaien en/of de linker- en de rechterkubus te verwisselen, kun je alle getallen van 1 tot en met 31 maken. Hierbij wordt 1 voorgesteld als 01, 2 als 02, enzovoort.

**foto 1**


Om de getallen 11 en 22 te maken is het in elk geval nodig dat op beide kubussen een 1 en een 2 staat. Je zou nu de cijfers als volgt kunnen verdelen: op de ene kubus een 0, 1, 2, 3, 4 en 5 en op de andere kubus een 1, 2, 6, 7, 8 en 9. Het blijkt dan echter niet mogelijk te zijn om alle getallen van 1 tot en met 31 te maken.

2p **17** Leg uit waarom er ook op de andere kubus een 0 nodig is.

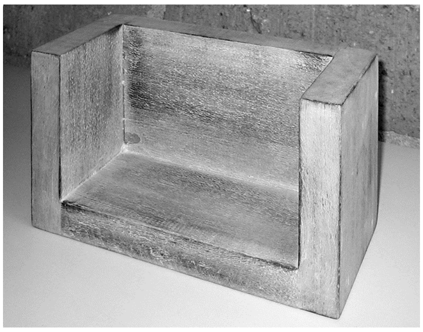
Omdat er op een kubus maar zes cijfers kunnen staan, heeft men op de andere kubus de 9 vervangen door een 0. De 6 kan ook als 9 gebruikt worden door de kubus ondersteboven te draaien. Met 0, 1, 2, 3, 4, 5 op de ene en 0, 1, 2, 6, 7, en 8 op de andere kubus is het nu mogelijk alle getallen van 01 tot en met 31 te maken.

Met deze twee kubussen kunnen meer getallen gemaakt worden dan alleen de getallen van 01 tot en met 31. Het is bijvoorbeeld ook mogelijk het getal 49 te maken, of 46, of 94, of 00.

5p **18** Onderzoek hoeveel verschillende getallen je in totaal met de twee kubussen kunt maken.

De ribbe van de kubussen is 6 cm. Onder de kubussen bevinden zich drie losse balkjes van 12 bij 2 bij 2 cm met daarop de namen van de maanden. Door de balkjes te verwisselen en te draaien kan de goede maand getoond worden. Om de kubussen en balkjes zit een houder. Zie foto 2. De zijkanten, bodem en achterkant zijn alle 2 cm dik. We nemen aan dat de kubussen en de balkjes precies in de houder passen.

**foto 2**



5p **19** Bereken de totale hoeveelheid hout die nodig is voor de houder in $cm^3$.

Op de uitwerkbijlage zie je nogmaals foto 1 van de kubuskalender.

4p **20** Onderzoek op welke hoogte, gemeten vanaf de ondergrond waar de kalender op staat, de foto genomen is.

Op de uitwerkbijlage zie je het begin van een perspectieftekening van de kubuskalender, van voren gezien.

5p **21** Maak deze tekening op de uitwerkbijlage af. Geef in de tekening ook op de bovenzijde de kubussen aan. De onzichtbare delen hoeven niet te worden getekend.