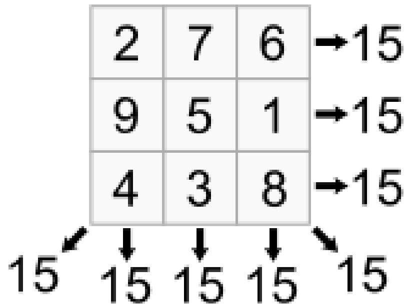
Magisch Vierkant

Inleiding

Wat is een magisch vierkant? Het is een vierkant van drie bij drie of van vier bij vier of …., waarbij de som van de getallen in de rijen, de kolommen en de diagonalen gelijk zijn. Hieronder zie je wat voorbeelden:

Een drie bij drie magisch vierkant:



En hier een voorbeeld van een vier bij vier magisch vierkant:

Met dank aan de kunstenaar Jack Vreeke voor het mooie plaatje.

Allerlei vragen

- Waarom is de som bij zo'n drie bij drie vierkant 15? Kun je dat begrijpen? En waarom kan de 9 niet in één van de hoeken staan?
- Waarom is de som bij een vier-bij-vierkant 34? Kun je dat begrijpen? En waarom kan 16 wel in één van de hoeken?

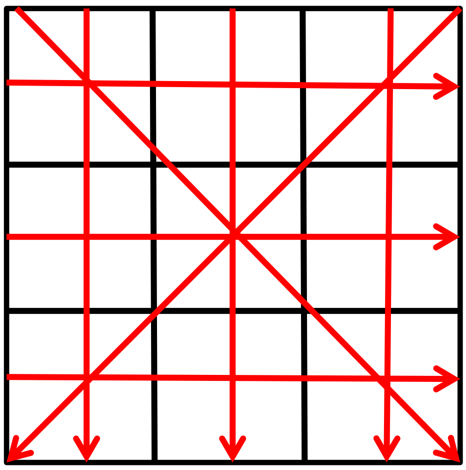
Samenvatting van de voorbereiding

Ik wil graag een les geven over het drie-bij-drie magische vierkant. De magische vierkanten van hogere orde (4 bij 4, 5 bij 5, enzovoort)blijven hier buiten beschouwing. Ondanks het mooie plaatje.

Ik wil de les zo inrichten dat de leerlingen alles zelf moeten doen. De belangrijke vragen zijn hierbij:

- Waarom moet de 5 in het midden?
- Waarom is de som van rijen, kolommen en diagonalen 15?
- Waarom kan de 9 niet in één van de hoeken?

In een drie-bij-drie magisch vierkant staat het middelste vakje in maar liefst vier rijen: één horizontaal, één verticaal en twee diagonaal.



Op elke rode lijn samen evenveel

Als je in dat middelste vakje een 5 invult zijn er precies vier paren om de vijftien vol te maken: 1 – 9, 2 – 8, 3 – 7 en 4 – 6. Kies je een ander getal in het midden dan zijn die vier paren er niet. Probeer maar 4 in het midden: 9 – 2, 8 – 3 en 6 – 5. Ook bij elke andere keus dan 5 in het midden gaat het mis.

Waarom is de som vijftien?

Dat is eigenlijk nog niet zo makkelijk te begrijpen. Maar je komt in de buurt als je naar het middelste getal kijkt in het rijtje 1 t/m 9. De 5 staat daar in het midden en is ook het gemiddelde. Als je de getallen 1 t/m 9 optelt kom je tot 45. En dat gedeeld door 9 is 5. Dus er ontstaat misschien een vermoeden dat de som van elke rij, kolom en diagonaal 3 x 5 = 15 zou moeten zijn.

Kijk je naar op hoeveel manieren je met de getallen 1 t/m 9 in rijtjes van drie samen 15 kan maken, dan krijg je het volgende:

1 + 5 + 9
1 + 6 + 8
2 + 4 + 9
2 + 5 + 8
2 + 6 + 7
3 + 4 + 8
3 + 5 + 7
4 + 5 + 6

Dat zijn acht mogelijkheden. En dat is precies het aantal rijen, kolommen en diagonalen dat je nodig hebt. Als je kijkt naar hoe vaak de getallen 1 t/m 9 in dat rijtje voorkomen dan zie je:

1 = 2x

2 = 3x
3 = 2x
4 = 3x
5 = 4x
6 = 3x
7 = 2x
8 = 3x
9 = 2x

De 5 komt vier keer voor, de 2, 4, 6 en 8 drie keer en de 1, 3, 7 en 9 twee keer. Dan is eigenlijk het tovervierkant wel opgelost. Vijf in het midden, 2, 4, 6, en 8 in de hoeken en de resterende 1, 3, 7, en 9 in de middens. En de 6 en de 8 niet in het rijtje of de kolom waarin de 9 staat.
Probeer je samen 16 te maken dan krijg je het volgende rijtje:

9 + 1 + 6
9 + 2 + 5
9 + 3 + 4
8 + 1 + 7
8 + 2 + 6
8 + 3 + 5
7 + 3 + 6

En dat is het dan. Slechts zeven mogelijkheden om samen 16 te maken . Samen 14 geeft weliswaar ook acht mogelijkheden:

9 + 1 + 4
9 + 2 + 3
8 + 1 + 5
8 + 2 + 4
7 + 1 + 6
7 + 2 + 5
7 + 3 + 4
6 + 3 + 5

Maar elk getal komt hier hoogstens drie keer voor. Er is dus geen kandidaat voor het middelste vakje.

Bij samen 13 of 17 zijn er ook nog zeven mogelijkheden. Bij 12 en 18 wordt het minder. Dus het moet wel samen 15 zijn.

En hoeveel goede oplossingen zijn er dan? Eigenlijk maar één. Alle anderen zijn draaiingen of spiegelingen van de oplossing. Bij magische vierkanten van hogere orde zijn er meer goede oplossingen.

Ik wil proberen zo weinig mogelijk weg te geven. Samen op zoek naar het getal in het midden. En dan uitzoeken waar de 9 moet komen.

De leerlingen krijgen een werkblad vol met drie-bij-drie vierkanten. Proberen en invullen. Niet krassen of gummen. Gewoon opnieuw proberen . Wat ook kan is alle leerlingen getalkaartjes geven met daarop de getallen 1 tot en met 9. Dat maakt het proberen wat makkelijker. We kiezen toch voor een werkblad omdat ik dan beter kan zien wat kinderen doen en gedaan hebben.

Verslag van de les

We beginnen de les met het eerste plaatje van de powerpoint.

We vragen wat het woord magisch betekent. Leerlingen zeggen: toverdrank, “magic”, iets met goochelen. Ja, het is ook geheimzinnig. We kijken nog even naar hoe dit tovervierkant is gemaakt en leerlingen zien dat er kentekenplaten zijn gebruikt.

En nu goed kijken. Wat is er geheimzinnig aan dit vierkant?
Er komen de volgende opmerkingen:

- De getallen 1 tot en met 16 staan erop.
- Twee witte en veertien gele.
- In de middelste twee rijen steeds 4 verschil (5-9, 10-6, 11-7, 8-12)
- In de middelste twee kolommen steeds 1 verschil (3-2, 10-11, 6-7, 15-14)

- In de buitenste kolommen steeds 3 verschil (16-13, 5-8, 9-12, 4-1)
- Oh ja, ook een verschil van 12 in de bovenste en onderste rij.

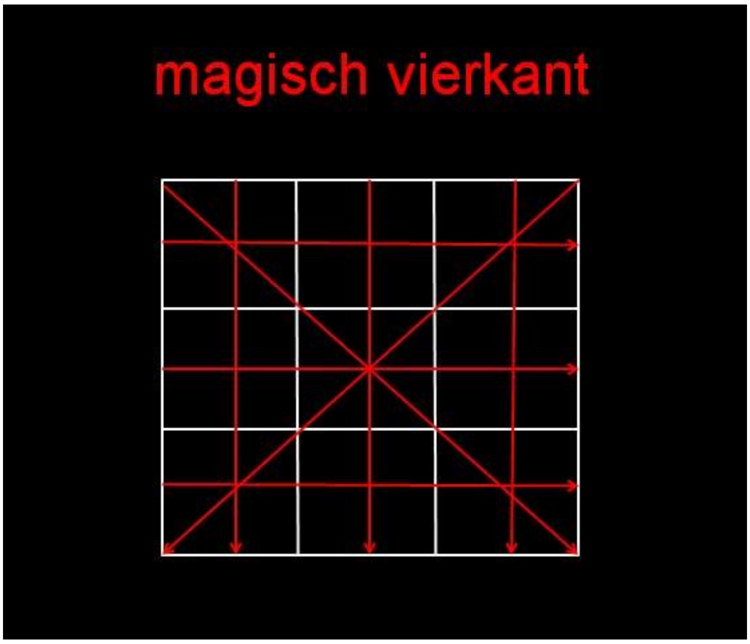
Maar geen van de leerlingen kijkt naar de som van de getallen in een rij of kolom. We vragen ze de getallen uit de laatste kolom eens op te tellen. 34. En zien jullie nog meer 34’s?

Ja, nu roepen ze snel. Ze zien al gauw de 34 in elke rij en in elke kolom. En al gauw ontdekken ze de 34 in de blokjes van twee bij twee.

Nog meer 34? Een meisje noemt dan de diagonalen. Ze noemt ze de schuinen en maakt er het goede gebaar bij. Ze heten dus diagonalen.

We vatten het nog even samen. Het heet magisch vierkant vanwege die 34. Al die andere bijzonderheden, die ze eerder genoemd hebben, hangen daarmee samen.

We gaan nu zelf werken aan een magisch vierkant. We gaan er met elkaar een maken. We laten het volgende plaatje zien:



We zien een leeg 3 bij 3 vierkant met rode pijlen.

Ja, daar moeten getallen in. Welke?

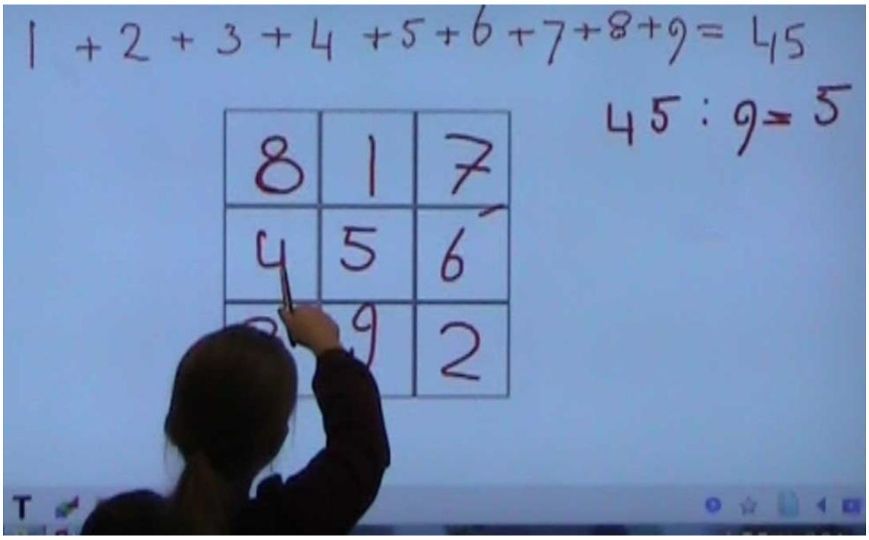
Bij het 4 bij 4 vierkant was het 1 tot en met 16. Dus hier 1 tot en met 9, aldus een leerling. En weer samen 34?, vraagt een ander.
Dat zeg ik niet.

We delen het werkblad uit. We geven de opdracht: Vul de getallen 1 tot en met 9 in, zo dat in elke rij, elke kolom en de diagonalen de som van de getallen hetzelfde is.

Ze gaan aan de slag. Ik zeg nog even: niet gummen, niet krassen. Gewoon opnieuw beginnen. Als je werkblad vol is, haal je een nieuwe. Het wordt stil en ze zoeken koortsachtig naar oplossingen.

Laat de kinderen even doorploeteren. Zie intussen dat nogal wat leerlingen met een 9 in het midden beginnen. Het is natuurlijk ook niet zo simpel als je niet weet waar je beginnen moet en niet weet welk getal het samen moet zijn. Maar er klinkt al gauw een “Ik heb em”. Ga naar Yasemin om te kijken. Het is geen goede oplossing.

We zetten het werkblad met de 9 lege vakjes op het bord en Yasemin komt invullen.

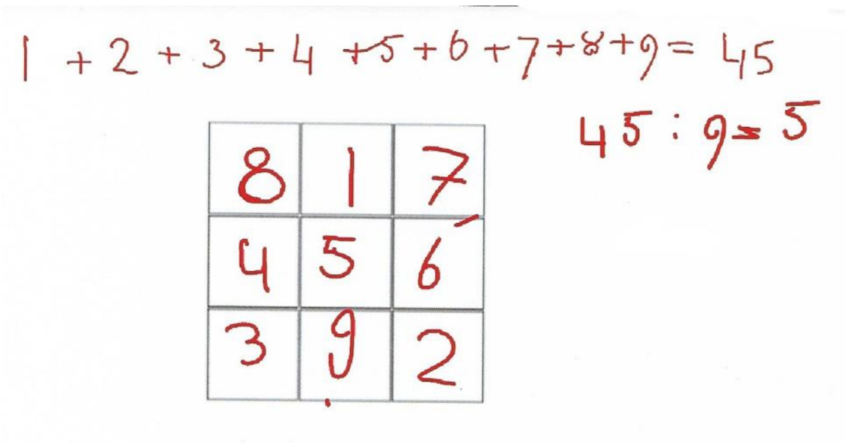


Waarom is het een magisch vierkant, vraag ik haar. Ze legt uit dat de eerste rij samen 14 is en de laatste kolom ook. Dan komen er genoeg reacties uit de klas. “De eerste kolom is maar 12”. “En de middelste kolom is 19”.

Ik besluit om toch een beetje te helpen. Ik maak een nieuw leeg 9-vak op het bord en schrijf erboven:

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 =

Allemaal even nadenken. Ja, 45. En dan? “Dat kun je door 9 delen”. En dan? “Dan komt er 5”.

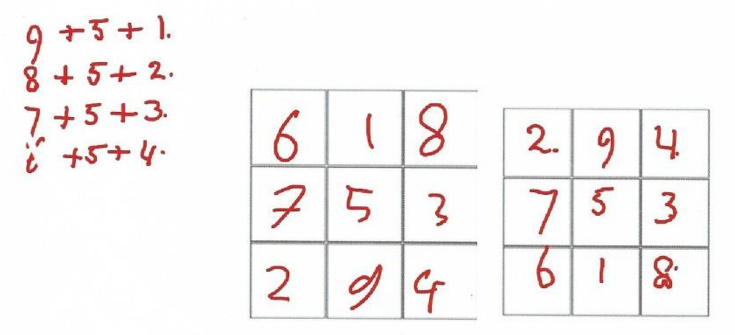


“Die vijf staat in het midden”. Ja het is de middelste van de negen getallen. Kijk maar naar het rijtje. En het is ook het *gemiddelde* van de negen getallen. Een begrip dat de leerlingen nog niet kenden.

En wat zouden we met die 5 moeten of kunnen doen?
“In het midden zetten en dan nog eens proberen”.

Ze gaan opnieuw aan de slag. Veel leerlingen vullen vast vijven in in het midden en proberen een magisch vierkant te vinden.

Het duurt weer even en dan roept Hidde: “ik heb em”. Hij komt naar het bord en vult in.

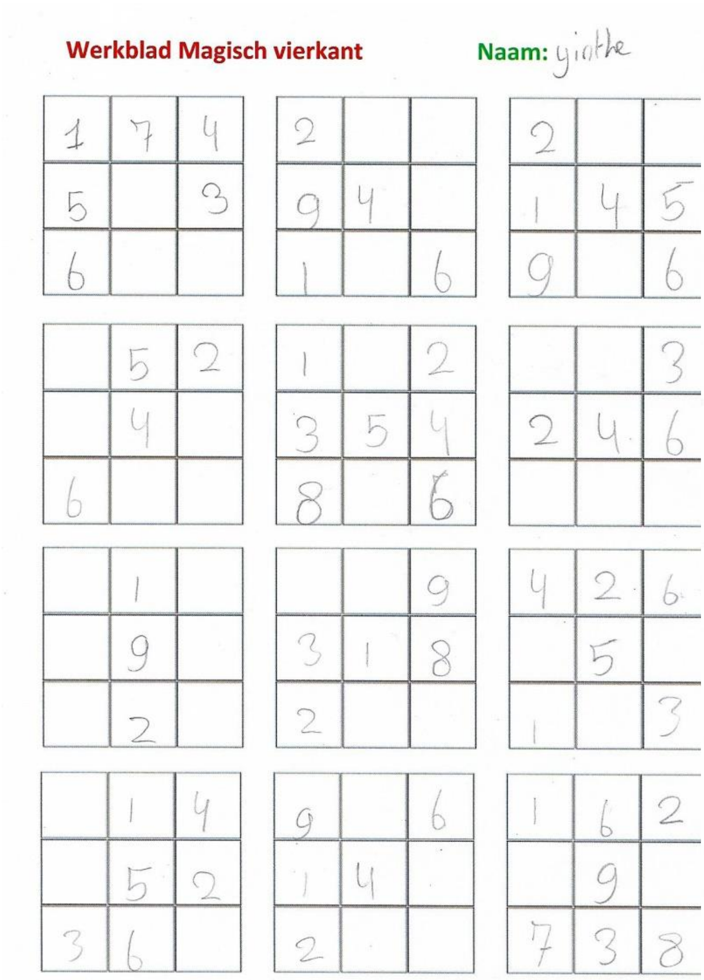


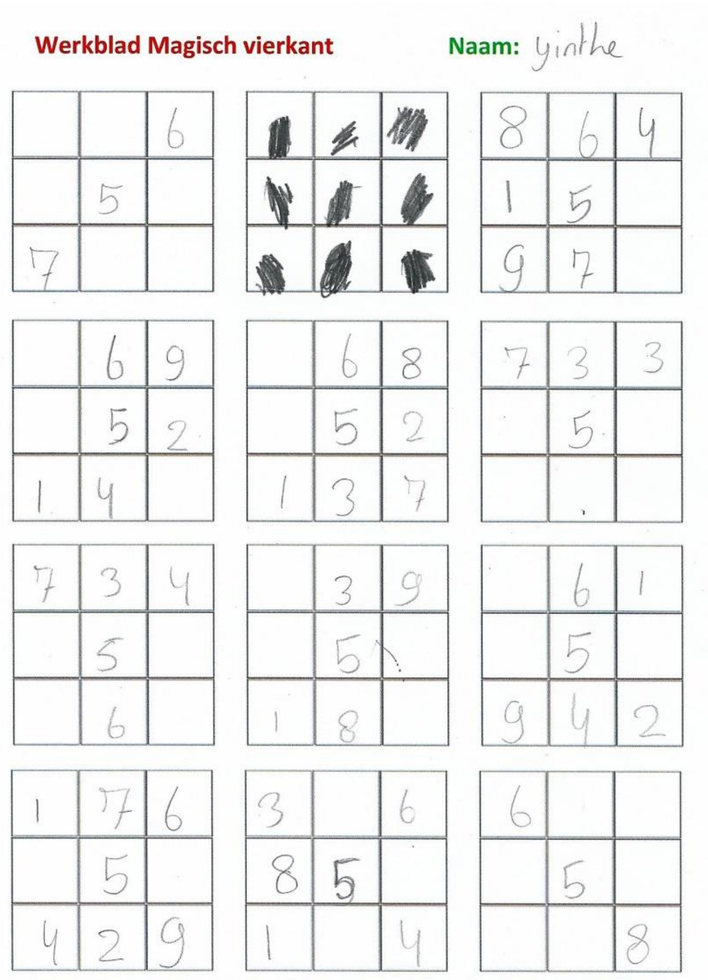
Julia is ook zover , maar heeft het anders. Die zetten we ernaast op het bord. Ze merken al gauw op dat ze eigenlijk hetzelfde zijn. Die van Julia is een *spiegeling* van die van Hidde.

Er zijn nog meer oplossingen. Maar nadat ze aanvankelijk dachten dat er meer oplossingen zouden zijn komen we tot de conclusie dat er maar één oplossing is voor het 3 bij 3 magisch vierkant. Alle andere oplossingen zijn *spiegelingen* of *draaiingen* van DE oplossing.

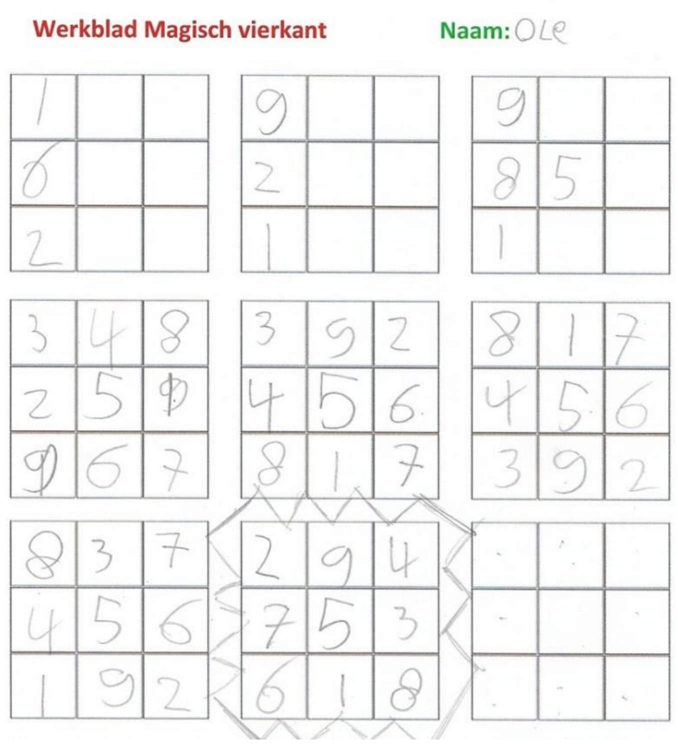
We zijn alweer bijna een uur bezig. Alle leerlingen hebben op hun werkblad een 3 bij 3 magisch vierkant gevonden. Misschien ook wel eens geleend van de buren. Wat mij nog knelt is de vraag waarom de 9 niet in de hoek kan. En waarom er dan maar één oplossing overblijft.

Kijken we nog even naar de werkbladen van de leerlingen dan zie je dat Yinthe wel durft. Ze probeert van alles en begint steeds opnieuw:

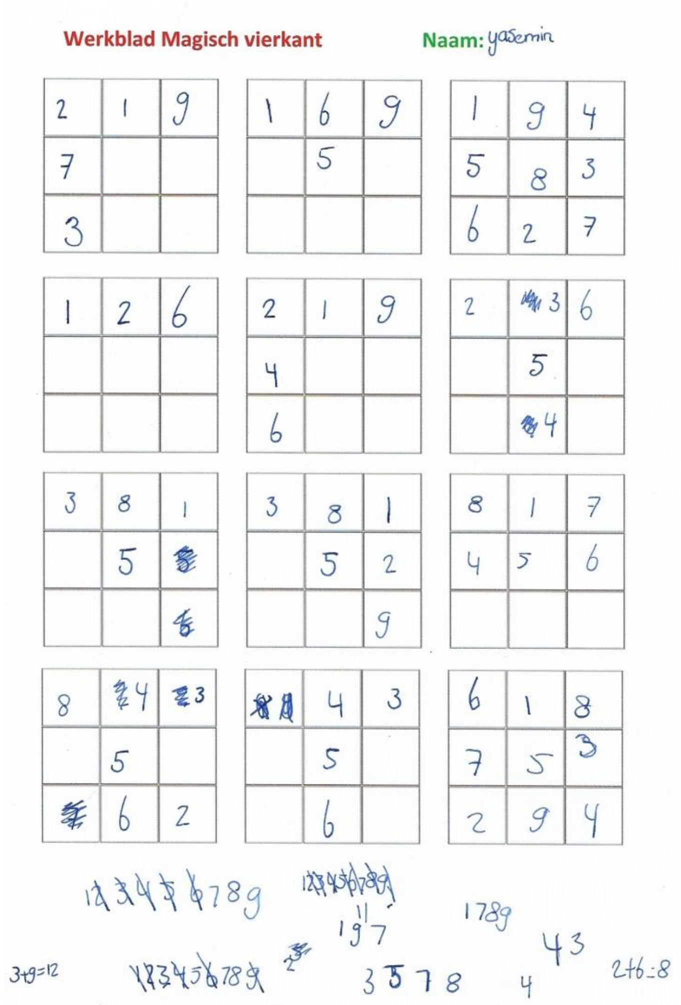




Ole gaat heel wat voorzichtiger te werk. Die wil geen fouten maken.



Yasemin is ook voorzichtig en houdt bij wat ze gebruikt heeft en wat nog moet.



Achteraf

Er zou nog een tweede les moeten volgen om te laten zien dat je met redeneren en nadenken tot een oplossing komt. Natuurlijk is het proberen een goed begin. Maar het redeneren helpt je het probleem te doorgronden. En daar gaat het in de wiskunde altijd om. Jammer dat ik in de eerste les niet toegekomen ben aan het probleem dat 9 niet in de hoek kan. Dat zou in de tweede les moeten volgen. Zie ook de voorbereiding: de 9 en de 1 komen maar twee keer voor in het rijtje optellingen die tot 15 leiden.

Ook kan in zo’n tweede les een aanzet gegeven worden tot het beginnen aan een 4 bij 4 magisch vierkant. Nog niet zo’n eenvoudig karwei.

Met dank aan de leerlingen en leerkrachten van groep 7 van de Jan Campertschool in Driehuis.

Willem Uittenbogaard

Email: w.uittenbogaard@uu.nl
Huispagina: http://www.staff.science.uu.nl/~uitte104/
Redactie en foto’s: Sylvia Eerhart.