Boekbesprekingen

Book Reviews

Eindredactie: Hans Cuypers en Hans Sterk
Redactieadres: Review Editors NAW - HG 9.93
Dept. of Math. and Computer Science
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513, 5600 MB Eindhoven
Webpagina: www.win.tue.nl/wgreview
e-mail: wgreview.win@tue.nl

Paul Drijvers (red.)

Wat a is, dat kun je niet weten: Een pleidooi voor betekenisvolle algebra op school

Utrecht : Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht, 2006
199 p., prijs €15,00
ISBN 90-70786-00-1

De titel van dit boek *Wat a is, dat kun je niet weten* , een verzameling artikelen onder redactie van Paul Drijvers, lijkt de lezer te willen verleiden een formule op te lossen en hierdoor algebra te bedrijven. Op de achterflap staat te lezen dat dit boek gaat over betekenisvolle algebra op school, waarmee bedoeld wordt dat algebraïsche vaardigheden in contexten hun betekenis krijgen. De betekenis van algebra als zijnde nuttig en zinvol voor de vorming van abstractie in wiskundige context, is niet het pleidooi dat Drijvers wil ontlokken — hoewel hiervoor voldoende aanknopingspunten in het boek te vinden zijn.

De opbouw van het boek is van 'laag naar hoog'. Dat wil zeggen dat het boek begint met rekenen in het primair onderwijs — via algebra in het vmbo, de onderbouw en de tweede fase van havo en vwo, het profiel natuur en techniek — en eindigt in een visie op schoolalgebra als onderdeel van de schoolwiskunde. Alle auteurs werken op het *Freudenthal Instituut*, dat zich vanaf zijn oprichting gespecialiseerd heeft in de ontwikkeling van realistisch wiskundeonderwijs. In het Nederlandse primair onderwijs is deze realistische benadering inmiddels in brede zin geaccepteerd. In de bovenbouw van het voortgezet onderwijs daarentegen, stapelen de problemen zich op. Het hoger onderwijs constateert een ernstig tekort aan algebraïsche vaardigheden. Deze publicatie speelt daarop in door een discussie op gang te willen brengen over betekenisvolle schoolalgebra. In hoofdstuk 4, dat algebra in de onderbouw van havo en vwo beschrijft, vergelijkt Paul Drijvers voorbeelden uit veel gebruikte schoolmethodes van 1955, 1969 en 2003. Opvallend is, dat hij verdedigt waarom het algebraonderwijs anno 2003 is wat het is. Hij ondersteunt dat met een voorbeeld uit Getal en ruimte 1 havo/vwo (2003). Het gaat over mevrouw Slim die in haar tuin een diepe put (het water is onder in de put warmer dan boven in de put) wil, zodat ze onderin water kan koken. "Meneer Slim is tot vele dingen bereid. Toch wil hij zo'n put niet voor zijn vrouw graven. Waarom denk je?" (p. 56). De vraag is of het hier wel om een betekenisvolle context gaat. Het hoofdstuk vervolgt met patronen en structuren, formules en variabelen, generaliseren en bewijzen, en mondt uit in een gedifferentieerd model voor de toekomst. Er zijn voldoende aanzetten tot de conceptvorming in dit hoofdstuk te vinden.

Het stippenpatroon bijvoorbeeld (figuur 4 op p. 59): rijen stippen in de vorm van een vierkante matrix, 1 zwarte stip in de eerste kolom aangevuld met grijze stippen en de laatste rij alleen zwarte stippen (dus in geval van een vierkante matrix van 9 stippen: 1 zwarte stip gevolgd door 4 grijze stippen in de eerste 4 rijen en 5 zwarte stippen in de laatste rij), ontwikkelt zich tot de algebraïsche structuur $N^2 = (2N-1) + (N-1)^2$.

Dit patroon wordt niet verder uitgewerkt naar formules, variabelen, generaliseren en bewijzen, of naar het geïntroduceerde model. Het hoofdstuk zou aan overtuigingskracht winnen als volgens dit model: (1) het stippenpatroon (context) zich zou ontwikkelen tot de structuur

$$N^2 = (2N - 1) + (N - 1)^2 \quad \text{(representatie);}$$

(2) er een verband gelegd wordt met

$$N^2 - (N - 1)^2 = 2N - 1 \quad \text{(procedure);}$$

en (3) zich verder ontwikkelt via

$$N^2 - (N - M)^2 = 2NM - M^2$$

en

$$(N - M)^2 = N^2 - 2NM + M^2 \quad \text{(generaliseren)}$$

tot merkwaardige producten (concept). In het hoofdstuk daarna gaat Drijvers verder in op algebraïsche vaardigheden als basisvaardigheden en als symbol sense. Terecht legt hij de nadruk op de ontwikkeling van symbol sense. In de uitwerking daarvan grijpt hij terug naar contexten. Het gaat dan om twee gemeenten A en B die aan dezelfde kant van een spoorlijn, respectievelijk op 5 en 10 km afstand van die lijn liggen. “De afstand van A tot B is (hemelsbreed) 13 km .... De busmaatschappij wil dat de totale afstand $AS + SB$ zo klein mogelijk is. Wat is de beste plaats voor het (trein)station?”. De illustratie bestaat uit punten en lijnen. Kan deze context als betekenisvol gekarakteriseerd worden? Verderop illustreert figuur 9 (p. 79) een opgave die algebraïsch redeneren over even en oneven functies beoogt uit te lokken.

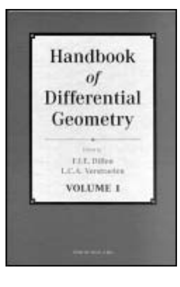
Vraag “Wat valt je op in de grafieken van f, g, en h?” als $f(x) = x^4 - x^2 + 2$, $g(x) = \sqrt{1 + x^2}$, en $h(x) = 3^* \cos x$.

Vermoedelijk wordt hier toch enige bemoeienis van de docent verwacht. In dit hoofdstuk legt Drijvers verder geen verbanden met het eerder geïntroduceerde model in hoofdstuk 4.

Henk van der Kooij en Aad Goddijn komen in hoofdstuk 6 met een geslaagde aanzet tot integratie van algebra in andere schoolvakken. Zo is er een rijke variatie te vinden in de ontwikkelgang van context naar representatie. De stap daarna, van representatie naar conceptontwikkeling komt niet aan de orde, daardoor blijft het bij een serie aanzetten tot de vorming van symbol sense. In hoofdstuk 7 spitst Martin Kindt zich toe op de vorming van basiskennis met het oog op conceptontwikkeling (abstractie). Terecht legt hij de vinger op de zwakke plek, te weinig oefening om als automatisme te worden opgeslagen in het geheugen. Basiskennis is noodzakelijk voor de opbouw van wendbare kennis. Cursief en vet gedrukt is de volgende zin te lezen “Goede vaardigheid in rekenen en algebra schept ruimte om productief wiskunde te bedrijven” (p. 108). Menigeen zal deze uitspraak van harte bevestigen. Kindt komt vervolgens met allerlei voorbeelden om technieken te oefenen zoals omkeervragen ‘Bedenk een vergelijking waarvan 9 en -10 de enige oplossingen zijn’, en ‘Zoek een functie y van x zodat $y^2 = 2y'$ (p. 115). Ook de rijtjes, slierten en patronen uit de Rekenkalender (1979) om slim te leren rekenen zijn aanbevelingswaardig. Gelukkig merkt Kindt op “het kwadraatafsplitsen en het ontbinden in factoren in eerste instantie als dé aangewezen oplossingstechnieken te beschouwen bij vierkantsvergelijkingen” (p. 126). Daarnaast geeft hij voldoende uitdagende voorbeelden om oefenen leuk te kunnen vinden, de verbazing van eenzelfde uitkomst van een hele rij opgaven bijvoorbeeld (uit Sawyer, 1969). De tien aanbevelingen om productief te oefenen zijn zeker de moeite van het lezen waard.

Paul Drijvers en Martin van Reeuwijk gaan in hoofdstuk 8 in op de relatie tussen ICT-gebruik en algebra. Onder het kopje ‘recente ontwikkelingen’ halen zij een voorbeeld uit Moderne wiskunde A1(B1) deel 1, p. 127 aan. Het voorbeeld gaat over onderzoek naar de grafiek van $y = \sin(x - c)$. De vraag is of juist in deze context de pc zo noodzakelijk is. Vermoedelijk is een onderwijsleergesprek minstens zo effectief. Gaat het bij ICT-gebruik juist niet om activiteiten die zónder die hulpmiddelen niet mogelijk zijn? ICT-gebruik in het onderwijs is tenslotte een middel en geen doel. Dit doel wordt verduidelijkt met een illustratie van een applet Geometrische Algebra over $2x^2 + 2y^2 + 5xy$ (figuur 3). De meerwaarde van de meetkundige representatie in deze algebraïsche context is niet direct duidelijk, maar die zal zeker te vinden zijn (p. 141). Drijvers en Van Reeuwijk vinden overigens ook dat de rol van de docent cruciaal is. Bij ‘het vermenigvuldigen van lijnen’ bijvoorbeeld staat een illustratie (figuur 4, p. 142) met de afbeelding van het scherm van een grafische rekenmachine: grafieken van twee lijnen die allebei de x-as snijden en de grafiek van een tweedegraads functie die uiteraard door dezelfde snijpunten gaat. Wellicht origineel, maar ze geven geen relaties aan met dal- en bergparabolen, kwadratische of lineaire vergelijkingen. De voorbeelden in dit hoofdstuk zijn stuk voor stuk de moeite waard, maar een theoretisch raamwerk ontbreekt. In het laatste hoofdstuk, van de hand van Aad Goddijn, komt de oorsprong van algebra en de betekenis daarvan in de geschiedenis op fraaie wijze tot uiting. Misschien had dit wel het eerste hoofdstuk moeten zijn. Ongetwijfeld is het zo dat dit boek de lezer op ideeën brengt en daarom voldoet aan de oorspronkelijke bedoeling, een brede discussie over betekenisvolle algebra op school. Een ‘volbloedwiskundige’ zal zich wellicht verbazen over de niet-klassieke opzet en uitwerking. Voor lerarenopleidingen is dit echter een aanrader omdat er voldoende aanzetten te vinden zijn tot reflectie op de plaats die algebra toekomt in het voortgezet onderwijs. Trouwe *Nieuwe Wiskrant* lezers zullen de intenties van de schrijver(s) herkennen. Wie wil weten wat a betekent en zijn algebraonderwijs wil introduceren met elementen uit de geschiedenis of wil integreren met meetkunde, analyse of statistiek moet dit boek zeker aanschaffen.

N. Verhoef



F.J.E. Dillen, L.C.A. Verstraelen (eds.)

Handbook of Differential Geometry (vol. 1)

Amsterdam: North-Holland, 2000

1054 p., prijs \$ 187,–

ISBN 0-444-82240-2

The editors of this handbook have taken on a massive task. Their aim is to give a ‘rather complete survey of differential geometry’. Wisely enough they make no predictions as to how many handbooks it will take to complete their undertaking. The editors avow their intention to publish chapters covering significant areas of differential geometry as they are sent in by the contributors to these volumes, rather than trying to build the house of differential geometry from its foundations. This may be the only feasible approach, although the resulting somewhat jumbled collection may leave not only this reader slightly dissatisfied.

This first volume contains chapters on differential geometry of webs, spaces of metrics and curvature functionals, Riemannian submanifolds, Einstein metrics in dimension four, the Atiyah-Singer index theorem, isospectral manifolds, submanifolds with parallel fundamental form, sphere theorems, affine differential geometry, isoparametric hypersurfaces, and curves. Each is written by a leading expert in the respective area. The few that I have browsed contain expository writing of the highest quality.

The prospective readership varies from chapter to chapter. For instance, the brief survey by P. Gilkey on the Atiyah-Singer index theorem strikes me as one of the most useful introductions to this topic that I have seen and provides a quick guide to the central ideas in this landmark theorem. Equally valuable are C. Gordon's survey on isospectral manifolds and G. Thorbergsson's on isoparametric hypersurfaces, the latter containing an immensely valuable historical sketch, as well as K. Shiohama's review of sphere theorems.

It will be a very different reader who has the stamina to plough through close to three hundred pages on Einstein metrics in dimension four, written by A. Derdzinski. This is really a monograph written for the reader with serious ambitions. The same holds for the chapters on differential geometry of webs, by M. Akivis and V. Goldberg, and Riemannian submanifolds, by B.-Y. Chen, which are of similar dimensions.

A look at the bibliographies of the individual chapters reveals other striking differences in the author's intentions. Derdzinski's chapter, for example, has a very brief bibliography, suggesting that it can be read almost like a textbook. Gilkey's survey, appropriately enough, has an equally brief bibliography and refers those who want to learn more to some standard monographs. Chen's bibliography, by contrast, covers 44 pages, and other authors aim at similar encyclopaedic surveys of the literature.

All in all, I find some of the longer chapters – well written and interesting as they may be – a little at odds with the spirit of a handbook. If one were to measure a subject's importance by the number of pages allocated to it in this handbook, one might get a downright skewed view of differential geometry. But for the price of a couple of textbooks one gets a handful of very useful surveys plus three monographs thrown in for good measure. The individual reader may want to decide from the actual choice of topics whether this or any forthcoming handbook really is a bargain, but I would certainly wish to find them in a not too dusty corner of my local library.

H. Geiges

Richard Crandall, Carl Pomerance
Prime Numbers: A Computational Perspective
New York: Springer Verlag, 2005 (2nd ed.)
597 p., prijs €58,80
ISBN 0-387-25282-7

Prime numbers, the building blocks of the numbers by which we count, have fascinated calculators since antiquity. On a scientific level, this has given rise to the mathematical research domain called number theory. The computer era has provided this with a cheap, fast and reliable slave which can do all the tedious computing work at a rate which is only limited by the speed of light. This slave has much stimulated the development of algorithms for treating questions on prime — and composite — numbers. Some of these algorithms would probably never have been found without the presence of fast computers, simply because they are too complicated to be tested and applied *without* them. As a consequence, a new scientific discipline called *computational number theory* has arisen on the interface between mathematics and computer science.

This book is a very successful attempt of the authors to describe the current state-of-the-art of computational number theory, with focus on prime number questions. It starts with an introductory chapter on what we know about primes and on celebrated prime conjectures like the twin primes conjecture, the Goldbach conjecture, and the Riemann hypothesis, and a chapter on basic algorithms which play a key role in computational number theory, like Euclid's algorithm for computing the greatest common divisor and the modular inverse. The core of the book (Chapters 3–7) concentrates on the following three questions: A. how to find out quickly whether or not a given large number is prime; B. how to *prove* large numbers to be prime; C. how to find the prime factors of large numbers, which are known to be composed of two or more primes. Space does not allow us to even only mention here all the algorithms which are discussed in this book, to help answer these three questions. Therefore we restrict ourselves here to the best (class of) algorithms which are known for each of the three questions.

To answer question A, so-called pseudoprime tests are the best to use. The simplest one is Fermat's little theorem: *If n is a prime, then for any integer a we have* $a^n \equiv a \bmod n$. Unfortunately, there are also composite numbers satisfying this theorem but these are quite rare, and with several refinements to (practically) exclude these composites, Fermat's little theorem is the best known approach to tackle question A. The fastest known algorithm to prove primality of large numbers (question B.) is based on the theory of elliptic curves. An implementation of this by Atkin and Morain has been used to prove primality of (general) numbers of several thousands of digits. Its complexity is not known, but heuristic estimates say that it is polynomial, i.e., in practice $O(\log^{4+\epsilon} n)$ operations are needed to prove primality of n. The second edition of this book also describes the recent AKS primality test of Agrawal, Kayal and Saxena and newer variants of it which are proved to have polynomial time complexity (but have not yet beated the best known practical primality proving algorithms). The best known algorithm for factoring large numbers n (question C.) is the so-called Number Field Sieve. It tries to find integers x and y such that $x^2 \equiv y^2 \bmod n$ and next computes $\gcd(x-y, n)$. If $x \not\equiv \pm y \bmod n$, then $1 < \gcd(x-y, n) < n$ so this gcd is a proper divisor of n. Such a pair x, y is constructed (basically) by finding and combining many pairs $\theta, \phi(\theta)$, where θ lies in a particular algebraic number ring, and ϕ is a homomorphism from that ring to Z_n. The largest (general) number factored sofar with the Number Field Sieve has 200 decimal digits.

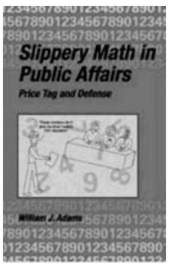
Chapter 8, *The ubiquity of prime numbers*, describes many disparate domains *outside* number theory where prime numbers play a role. Chapter 9 treats fast algorithms for large-integer arithmetic. This is indispensable for computational number theory because modern factoring and primality testing algorithms are dealing with numbers which are far too large to be stored in single machine words.

One of the many attractive features of this book is the rich and beautiful set of exercises and research problems at the end of each chapter in which the authors generously offer the reader many good ideas for further study and research. For example, Chapter 1 closes with twenty-three pages of exercises and eight pages of research problems, while the whole chapter covers 76 pages!

Another attractive feature is that the algorithms are presented in a C language style pseudocode which makes them easily understandable and convertible in C or some other programming language. The website www.perfsci.com gives implementation code in *Mathematica* form of all the algorithms presented in this book.

The reviewer knows one of the authors as an excellent teacher. This is reflected throughout the book: the authors have managed to lay down their broad and deep insight in primes into this book in a very lucid and vivid way. For the reviewer, while reading parts of the book, it was as if he was following blackboard talks of Carl Pomerance. The book provides excellent material for graduate and undergraduate courses on computational number theory.

Warmly recommended to researchers and students interested in the fascinating world of prime numbers! *H.J.J. te Riele*



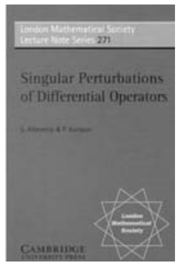
W.J. Adams

Slippery Math in Public Affairs: Price Tag and Defense

New York: Marcel Dekker, 2002
247 p., prijs $ 139,95
ISBN 0-8247-0790-7

Dit boekje gaat niet over wiskunde, maar over het gebruik en vooral misbruik van getallen in de publieke sector en de politiek. In de loop van het boekje wordt overtuigend aangetoond aan de hand van ettelijke voorbeelden uit de Amerikaanse praktijk dat cijfers een vaak onterechte suggestie van autoriteit en exactheid geven. Gesjoemel met getallen, onterechte interpretaties, het getalsmatig 'oplossen' van complexe vergelijkingen, slecht onderbouwde voorspellingen, het komt allemaal uitbundig aan de orde. Maar om eerlijk te zijn, halverwege het boekje heb je de boodschap wel door. En tegen die tijd heb je ook wel genoeg van de flauwe tekeningen van de dochter van de auteur die vrijwel elke pagina larderen. Gelukkig voelde ik me echter verplicht tot het einde toe door te lezen. Het laatste hoofdstuk gaat namelijk over de vraag: Hoe kunnen we kinderen onderwijzen zodat ze kritisch tegenover het gebruik van getallen staan? Helaas komt de auteur niet veel verder dan een lijst referenties over het kritisch gebruik van getallen en de constatering dat het geen politiek belang dient burgers mondig te maken. Ook maakt hij duidelijk dat hij voor het onderwijzen van de grenzen van de mogelijkheden van een wiskundige aanpak is, maar hoe dit in het wiskundeprogramma vorm moet krijgen komt niet aan bod. Wat wel aan bod komt is kritiek op het huidige programma, dat slechts op economisch en politiek gewin uit zou zijn. Een magere conclusie.

De waarde van dit boekje moet vooral worden gezocht in de vele voorbeelden van misbruik van getallen bij het nemen van beslissingen. Het zal er voor zorgen dat ik de krant morgen wat kritischer dan gewoonlijk zal lezen. *G. Koole*



S. Albeverio, P. Kurasov

Singular Perturbations of Differential Operators: Solvable Schrödinger-type Operators

London Mathematical Society Lecture Note Series, 271
Cambridge: Cambridge University Press, 2000, 429 p., prijs £ 38.00
ISBN 0-521-77912-X

The interest in the singular perturbation problems treated in this book probably started with the four page paper by F.A. Berezin and L.D. Faddeev published in 1961. In it they studied the delta potential interaction $L_\alpha = -\Delta + \alpha\delta(x)$, $\alpha \in \mathbf{R}$, of the Laplace operator $-\Delta$ in the Hilbert space $L^2(\mathbf{R}^3)$. The problem was to model this expression by a selfadjoint operator with the same spectral properties. The key to their solution is to identify L_α with one of the selfadjoint extensions of the restriction $L^0 = \Delta\,|_{C_0^\infty(\mathbf{R}^3\setminus\{0\})}$ of $-\Delta$, whose closure in $L^2(\mathbf{R}^3)$ is a symmetric operator with defect indices $(1,1)$. Similar modelling problems appear in, for example, quantum theory, fluid mechanics, optics, superconductivity, and high energy physics. The appendix in the book (25 pp.) on the history and background of singular perturbations refers to these applications in these and many other fields, and the bibliography contains just below a thousand items.

Mathematically these problems can be formulated as follows: Associate a suitable selfadjoint operator A_α, sometimes called the realization or model, with the formal expression $A + \alpha\langle\varphi,\cdot\rangle\varphi$, where A is a given selfadjoint operator in a Hilbert space H and φ is some singular element. To define the latter, one uses the scale of Hilbert spaces associated with A: $H_2(A) \subset H_1(A) \subset H \subset H_{-1}(A) \subset H_{-2}(A)$. The two sets on the left are the Hilbert spaces dom $|A|$ and dom $\sqrt{|A|}$ equipped with the norms $\|f\|_j = \|(|A|+1)^{j/2}f\|$, $j = 2,1$, respectively. They contain the A-smooth elements. The two sets on the right are their duals: $H_{-j}(A) = H_j(A)^*$. They contain the A-singular elements. By the duality, the inner product $\langle f,g\rangle$ on H can be extended or restricted so that it makes sense for $f \in H_j(A)$ and $g \in H_{-j}(A)$ and the other way around.

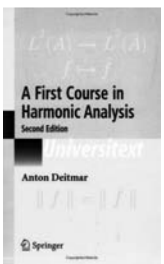
The operator $(|A|+1)^{-j/2}$ can now be defined on the elements of $H_{-j}(A)$ and $\|f\|_{-j} = \|(|A|+1)^{-j/2}f\|$ defines a norm on $H_{-j}(A)$ which turns it into a Hilbert space, $j = 1,2$. The inclusion mappings are injections with dense range. The models A_α of the rank one perturbation of A by φ depends on the singularity of φ and carry different names. If $\varphi \in H$ then A_α is called a bounded perturbation of A; in this case A_α simply coincides with the selfadjoint operator $A + \alpha\langle\varphi,\cdot\rangle\varphi$ in H defined on dom A. If $\varphi \in H_{-1}(A) \setminus H$ then A_α is called a bounded form perturbation, and if $\varphi \in H_{-2}(A) \setminus H_{-1}(A)$ it is called a singular perturbation.

These perturbations can be characterized in various ways, for example, via forms or smooth approximations, but one characterization they all have in common: they are selfadjoint extensions of the restriction $A^0 = A|_{\{f\in \operatorname{dom} A \,|\, \langle f,\varphi\rangle = 0\}}$ of A. So extension theory comes into play with a central role for M.G. Krein's formula. This formula parametrizes the resolvents of all selfadjoint extensions of A^0 in terms of one selfadjoint extension of A^0 and its so called Q-function. It can be used to calculate the wave operators and the scattering matrix associated with two selfadjoint extensions of A^0.

The book assumes knowledge of the theory of linear operators on Hilbert spaces such as in the books by N.I. Achiezer and I.M. Glazman and by M. Reed and B. Simon, and it starts at a slow pace with the rank one perturbation just explained. Then it goes on at a quicker pace to generalized perturbations with selfadjoint extensions of A^0 in spaces larger than the original Hilbert space, to finite rank perturbations and related wave operators and scattering matrices, to infinite rank perturbations and finally to two- and few-body problems with finite rank perturbations of operators defined on tensor products of Hilbert spaces. The authors have done a good job in making the theory accessible for researchers in analysis and mathematical physics.

The only comment I have concerns the use or rather non-use of linear relations. Sometimes the restricted operator A^0 is nondensely defined and so its adjoint is a 'multivalued operator' or linear relation which is easily described and among its selfadjoint extensions there are those which which are not an operator and they are also easily described. For example, in the case of a bounded perturbation the selfadjoint relation extension is unique and corresponds to the case $\alpha = \infty$ as can be deduced via Krein's formula. The authors recognize this phenomenon, but nevertheless do not consider these extensions. In fact, they completely avoid the use of linear relations. That is a pity, the theory would have been more complete when these cases were included. From a spectral point of view they are sometimes rather interesting. In some recent papers (by Yu.G. Shondin, J.F. van Diejen and A. Tip, and others) singular perturbations are studied where $\varphi \in H_{-m}(A)$ with $m > 2$. This higher singularity seems to warrant the use of indefinite metric spaces (in this case Pontryagin spaces) and selfadjoint linear relations provide a handy tool in the construction of the models.

A. Dijksma



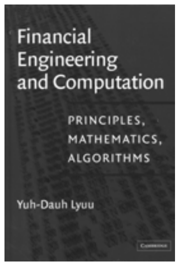
A. Deitmar
A first course in harmonic analysis
Universitext
Berlijn: Springer Verlag, 2002
151 p., prijs $ 48,10
ISBN 0-387-95375-2

This a well thought through introduction to harmonic analysis in *Aikido* style: efficient, swift, elegant, and concentrated. In 135 pages (including nineteen pages of exercises) it presents the central concepts of the theory up to and including the Plancherel theorem in its various guises. First for Fourier series, then for the Fourier transform, then for locally compact abelian groups and finally for noncommutative groups (the Peter-Weyl theorem). Of course, the latter completeness results (and, for example, the dominated and monotone convergence theorems and the Pontryagin duality theorem) are not proved in full generality, but illustrated by proofs of simple special cases; almost everything else is proved. The book includes two appendices (11 pages together), one on the Riemann zeta function and one on the Haar integral.

It makes for an excellent text book, an instructor's delight and a pleasure for students because of the precise formulation and the concise proofs in a little over one hundred pages. Prerequisites are the proper and improper Riemann integral, uniform convergence, and an elementary course in algebra. Although metric spaces are introduced and explained in so far as needed in about eight pages, the book is probably better appreciated after having completed a course in this area also. The Lebesgue integral and measure theory are avoided to streamline the presentation; completion of metric spaces is used instead.

A gem of a first course in harmonic analysis, heartily recommended.

A. Dijksma

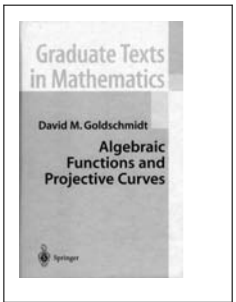


Yuh-Dauh Lyuu
Financial Engineering and Computation: Principles, Mathematics, Algorithms
Cambridge : Cambridge University Press, 2002
648 p., prijs £50.00
ISBN 0-521-78171-X

Since 1973, when Black and Scholes published their path-breaking paper on the pricing of an European call, there has been a lot of activity in modelling and understanding financial markets. Besides option pricing theory, among others a theory of interest rates and a portfolio theory have emerged. Recently, in the last decade, the field of finance has received a lot of attention in mathematics and has developed into one of the most active branches of applied mathematics. In the same time many books appeared on derivatives, interest rate theory, financial engineering and numerical methods. The book under consideration can also be placed in this direction. Following a computational approach, it aims to present the main ideas of the financial theory. It is written for technically oriented MBA students and students in engineering and natural sciences who want to learn about quantitative finance, assuming no background in finance but some basic knowledge of probability, optimization and calculus.

The book is organized in 33 chapters and a bibliography, where each chapter ends with hints for further reading. The needed mathematics is treated on the way and numerical implementations of the main algorithms are provided in pseudo code. The first six chapters introduce basic concepts of static financial models, statistics and algorithmic analysis. The next six chapters are about option pricing in discrete and continuous time, covering among others the binomial tree and the Black-Scholes formula. Brownian motion, Ito calculus, martingales and partial differential equations are concisely treated in the Chapters 13 till 16 in the context of continuous time financial models and hedging. Then the author probes deeper into specific methods for implementation such as numerical methods for solving partial differential equations, Monte Carlo simulation, least squares and splines. The rest of the book (Chapters 21 through 31) treats interest rate theory and discusses theory, such as the Capital Asset Pricing Model (CAPM) and Value at Risk (VaR), and practice of portfolio management. Throughout the text one finds a lot of exercises with (partial) solutions given at the end of the book. Also, there are numerous programming assignments. Chapter 32 contains information about the web software developed for the book.

To sum up, the book offers a self-contained and accessible treatment of the classical theory with an emphasis on algorithms and their implementation. However, recent developments (e.g. stochastic volatility, discontinuous price processes, incomplete markets) are not covered. By the set-up, the book seems useful for a quantitative (computational) finance course and also lends itself for independent study. *M.R. Pistorius*



D.M. Goldschmidt

Algebraic Functions and Projective Curves

Graduate Texts in Mathematics, 215

Berlijn : Springer Verlag, 2002

179 p., prijs €42,75

ISBN 0-387-95432-5

Het boek van D.M. Goldschmidt heeft als doelstelling de lezer de theorie van algebraïsche krommen bij te brengen. De schrijver heeft ervoor gekozen deze theorie zo elementair mogelijk uit te leggen. Een benadering die hiervoor geschikt is, is algebraïsche krommen te beschrijven door hun functielichamen en inderdaad hebben andere auteurs voorheen deze benadering om dezelfde reden gekozen. Het boek ter bespreking heeft het voordeel dat de geometrische benadering niet uit het oog verloren wordt. In het bijzonder worden er ook geometrische eigenschappen van de theorie belicht.

Het boek heeft vijf hoofdstukken en een appendix over elementaire lichaamstheorie. Na elk hoofdstuk volgt een aantal opgaven waarin de besproken theorie verduidelijkt wordt. In totaal zijn er 51 opgaven in het boek. In hoofdstuk 1 worden enkele begrippen ingevoerd die later nodig zijn. Hieronder zijn valuaties, completeringen, differentiaalvormen (inclusief een beschrijving van Hasse afgeleiden) en residuen (zoals behandeld door Tate). In hoofdstuk 2 worden vervolgens functielichamen ingevoerd en wordt een aantal basiseigenschappen bewezen waaronder de cruciale stelling van Riemann-Roch. In het derde hoofdstuk staan eindige uitbreidingen van functielichamen centraal met speciale aandacht voor Galoisuitbreidingen en hyperelliptische functielichamen. Het voorlaatste hoofdstuk besteedt aandacht aan een aantal geometrische aspecten van de theorie waaronder afbeeldingen en inbeddingen van algebraïsche krommen in projectieve ruimten, Weierstrass-punten (Stöhr-Volochtheorie) en vlakke projectieve krommen. Tenslotte wordt in het laatste hoofdstuk de zeta-functie van een algebraïsche kromme gedefinieerd over een eindig lichaam onderzocht. In het bijzonder wordt de Riemannhypothese voor zulke zetafuncties bewezen. Hierbij wordt de aanpak van Bombieri gevolgd en wordt gebruik gemaakt van een bovengrens voor het aantal punten op een kromme die in het vorige hoofdstuk met behulp van Stöhr-Volochtheorie verkregen is.

Al met al is dit op zichzelf staande boek een goede aanvulling op de bestaande literatuur over functielichamen en bovendien goed geschikt als leerboek voor diegene die de basistheorie van algebraïsche krommen wil leren zonder zich eerst het algemene taalgebruik van de moderne algebraïsche meetkunde eigen te maken. *P.H.T. Beelen*

A. Achterberg

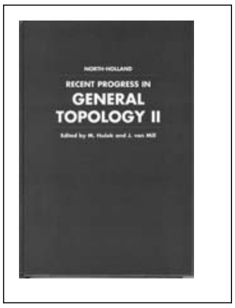
Kosmologie: Van oerknal via niets tot straling en stof

Utrecht: Epsilon, Tweede druk, 2002

554 p., prijs €38,–

ISBN 90-5041-070-7

Kosmologie is in de mode. Wie in de sterrenkunde werkt, krijgt steevast van vriendelijke voorbijgangers de vraag: "Wat was er voor de Oerknal?" Kosmologie is ook een bijzonder levendig onderzoeksterrein. Beide omstandigheden maken dat er een grote vraag is naar boeken over dit onderwerp en dus is er ook een groot aanbod. In mijn privéverzameling heb ik er al vier dozijn staan, en dat is waarschijnlijk nog niet de helft van wat er op de markt is. Deze toestand is relevant, omdat de vraag over een kosmologie-boek nu niet is: "Is het een goed boek, dat recht doet aan het vak?" maar "Is het merkbaar beter dan de rest?" Voor een schrijver is dit lastig, want het is nu niet meer voldoende om een werk te schrijven waar alle relevante onderwerpen redelijk naar voren komen en waarin geen ernstige fouten staan. Het boek moet zich echt onderscheiden, en helaas doet Achterbergs *Kosmologie* dat niet. Met de eerste druk was dat beter: het was half zo dik, het was bijtijds op de markt toen er nog weinig andere waren, en bevatte een verstandige keuze van onderwerpen. Nu echter ligt hier een pil van 554 bladzijden die op mij nogal braaf en weinig kritisch overkomt, waarin wel alle canonieke kosmologische punten aan de orde worden gesteld, maar waar geen wetenschappelijke of didactische visie uit blijkt. Het slechte nieuws is dus dat dit werk zich niet bijzonder onderscheidt, behalve dan doordat het goedkoop is en in het Nederlands is geschreven, en dus door een astronomische consumentengids niet zou worden aangemerkt als 'beste koop'. Het goede nieuws is dat Achterbergs boek zorgvuldig en degelijk is, en daarmee van mij het predikaat 'voordelige keus' krijgt. *V. Icke*



M. Husek, J. van Mill (eds.)

Recent progress in general topology II

Amsterdam: Elsevier, 2002

652 p., prijs €150,–

ISBN 0-444-50980-1

Dit boek is een waardige opvolger van *Recent progress in general topology I* dat in 1992 verscheen onder dezelfde redactie en bij dezelfde uitgever (ISBN 0-444-89674-0). Eens per vijf jaar vindt in Praag het congres Toposym plaats, over topologie en haar relaties tot de moderne analyse en algebra. Dit congres wordt gezien als het belangrijkste topologie congres. Om een goed beeld te geven van de stand van zaken van de topologie werd tijdens het congres in 1991 besloten tot de uitgave van *Recent progress in general* *topology I*, de voorganger van het onderhavige werk. De opzet van het nieuwe deel II is in grote lijnen hetzelfde als die van deel I: in negentien overzichtsartikelen wordt een beeld geschetst van de ontwikkeling van de topologie met speciale aandacht voor de resultaten van de laatste tien jaar. Nieuw in dit deel zijn de essays, waarin de coryfeeën R.D. Anderson, W.W. Comfort, M. Henriksen, S. Mardišić, J. Nagata, M.E. Rudin, J.M. Smirnov en L. Vietoris hun persoonlijke visie geven over facetten van de topologie. Verder zijn er nu naast een uitgebreid zakenregister ook een nuttig personenregister en een verzamellijst van de problemen en vragen uit de artikelen in het boek. In het boek zijn de artikelen lexicografisch geordend op achternaam van de eerste auteur. Geordend volgens het classificatieschema van de AMS, volgt hier een lijst van de bijdragen, aangegeven met trefwoorden en auteurs: Hyperruimten door Holáen Pelant; Banachruimten van continue functies door Godefroy; Functieruimten door Marciszewski; Oneindigdimensionale topologie door Dijkstra en Van Mill; Continue selecties door Repovšen Semenov; Uitbreidingen van ruimten door Baker, Kunen en Dow; Quasi-uniforme ruimten door Künzi; Metrische ruimten door Gruenhage; Geordende ruimten door Bennett en Lutzer; Gegeneraliseerde variëteiten door Kawamura; Dimensietheorie door Pol en Toruńczyk; Beschrijvende verzamelingenleer door Solecki; Topologische groepen door Arhangel'skii, Shakmatov en Tkachenko; Topologische halfgroepen door Hindman en Strauss; Topologische dynamica door Glasner; en Domeintheorie door Martin, Mislove en Reed. *J.M. Aarts*

F. Hausdorff
Gesammelte Werke Band II: Grundzüge der Mengenlehre
Berlijn: Springer Verlag, 2002
883 p., prijs €99,95
ISBN 3-540-42224-2

In 1914 verscheen in Leipzig het inmiddels bekende en invloedrijke boek *Grundzüge der Mengenlehre* van Felix Hausdorff. In dit boek stroomlijnde Hausdorff de Cantoriaanse verzamelingenleer tot een imposante theorie. Maar dat is niet alles. Hij breidde die theorie op verschillende plaatsen uit, besteedde veel aandacht aan beschrijvende verzamelingenleer, gaf de algemene topologie een zet in de goede richting en behandelde en verbeterde de maat- en integratietheorie uit het proefschrift van Lebesgue. Al met al is het nog steeds een leerzaam en boeiend geheel. De verzamelingenleer werd door de Grundzüge als zelfstandige discipline op de wiskundige kaart gezet en heeft inmiddels bewezen zeer fundamentele en moeilijke problemen tot een oplossing te kunnen brengen. Het boek heeft lang dienst gedaan zoals blijkt uit het herdrukken ervan door Chelsea Publishing Company in 1949, 1965 en 1978.

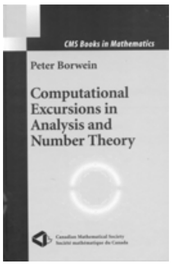
Het te bespreken boek is een herdruk uit 2002 van de Grundzüge met een indrukwekkend aantal kanttekeningen en aanvullingen. Een uitgebreid team van wiskundigen heeft meegewerkt aan de totstandkoming van deze uitgave. Het totale boek beslaat 883 pagina's, waarvan 486 voor de eigenlijke Grundzüge. Het boek begint met een uitgebreide historische inleiding door Purkert. Allereerst wordt de weg die Hausdorff aflegde naar de Grundzüge beschreven. Daarna volgt een bespreking en opsomming van eerder gepubliceerde boeken en monografieeën op het gebied van de verzamelingenleer. Tenslotte wordt beschreven hoe de Grundzüge werd ontvangen door de toenmalige wetenschappelijke wereld. Een interessant detail is dat het boek werd gepubliceerd in april 1914 aan de vooravond van de eerste wereldoorlog. Een groot aantal wiskundigen kon daardoor pas na de oorlog van het boek kennisnemen. Een uitgebreide en relevante literatuurlijst besluit het artikel van Purkert. De afgedrukte tekst van de Grundzüge is vrijwel identiek aan die van de originele uitgave uit 1914. De redacteuren hebben 102 opmerkingen toegevoegd met specifiek commentaar. Daarna volgen elf essays door specialisten over onder meer topologische noties, beschrijvende verzamelingenleer en maat- en integratietheorie. Het boek besluit met zes korte artikelen uit de nalatenschap van Hausdorff en negen recensies van de Grundzüge (waaronder een zelfrecensie en een zeer lovende recensie van H. Blumberg).

Het heruitgeven van een klassieker zoals de Grundzüge der Mengenlehre vereist moed. Het team van redacteuren heeft bijna vierhonderd pagina's commentaar van uiteenlopende aard toegevoegd. Al lezend onstaat hierdoor een uitstekend beeld van de centrale plaats die de *Grundzüge der Mengenlehre* inneemt in de wiskundige literatuur. *J. van Mill*

R.P. Agarwal, M. Meehan and D. O'Regan
Fixed Point Theory and Applications
Cambridge Tracts in Mathematics, 141
Cambridge : Cambridge University Press, 2001
170 p., prijs £45.00
ISBN 0-521-80250-4

This is a careful presentation of some main streams in fixed point theory. Starting from the Banach fixed point theorem, fixed points for nonexpansive maps in Hilbert spaces are approached (exercises deal with the usual extension to uniformly convex Banach spaces). This is followed by a discussion of continuation methods for contractive and nonexpansive mappings. Next, fixed point results are studied in finite and infinite-dimensional normed spaces (Brouwer, Schauder, Mönch – Brouwer's result is proven by means of the method introduced in the textbook by Goebel and Kirk). This is followed by a presentation of variants of those results for nonself mappings. Also this development is continued by a study of continuation principles, of which the main three approaches in the literature are discusssed (essential map approach, 0-epi map approach, degree theory). This leads to a number of important fixed point results (e.g., Krasnoselskii's results on compression and expansion of a cone, Furi-Pera type results, etc.).

After an interlude with fixed point results in Hausdorff locally convex spaces (e.g., Schauder-Tychonov, Furi-Pera), the 0-epi property is discussed in a Fréchet space setting. Extensions of several of the previously mentioned fixed point results to multivalued mappings (e.g., Nader, Furi-Pera, Kakutani, Fan) are also presented. Several well-chosen examples (e.g., applications to boundary value problems or abstract economies), complement the presentation. Each of the twelve chapters contains a number of exercises. The bibliography lists almost two hundred references. In the reviewer's opinion this book is a fine text for specialized seminars at the graduate level. It can also be of use to non-specialists who desire to learn more about fixed point results belonging to the fairly wide range that is covered by the book. *E.J. Balder*



P. Borwein
Computational Excursions in Analysis and Number Theory
CMS Books in Mathematics
New York : Springer-Verlag, 2002,
220 p., prijs €58,80
ISBN 0-387-95444-9

This extraordinary book brings together a variety of old problems — old, but very much alive — about polynomials with integer coefficients. Typically, these problems are concerned with the size of the polynomial, often restricted by conditions on the height or the degree. The tools are of an analytic nature with probabilistic and Diophantine elements, and have a strong computational component. The seventeen problems chosen by the author have been the subject of intensive research by outstanding mathematicians, they are still (partially) open and most have resisted complete solutions for fifty years or more. The author gives an overview of the progress made on these problems in recent years, and he explains the main ideas on which the results are based. The necessary background is also presented, which makes the book self-contained to a degree.

As the book is very rich in content, I can only present a small selection of the main problems. Let $n \in \mathbf{N}$. The principal classes of polynomials that the book considers are

$$Z_n := \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i z^i : a_i \in \mathbf{Z} \right\};$$

$$F_n := \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i z^i : a_i \in \{-1,0,1\} \right\};$$

$$L_n := \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i z^i : a_i \in \{-1,1\} \right\}.$$

Further, the *height* of a polynomial is the magnitude of its largest coefficient, and the *length* of a polynomial is the sum of the absolute values of its coefficients. Finally, the *supremum norm* of a polynomial p on a set A is defined by

$$\|p\|_A := \sup_{z \in A} |p(z)|,$$

and the *Mahler measure* of p is defined as

$$M(p) := \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|p(e^{i\theta})|\, d\theta \right).$$

What follows is a personal selection from the seventeen problems on which the book focuses.

The Integer Chebyshev Problem. Find a nonzero polynomial in Z_n that has the smallest possible supremum norm on the unit interval. Analyze the asymptotic behavior as n tends to infinity.

The Prouhet-Tarry-Escott Problem. Find a polynomial with integer coefficients that is divisible by $(z-1)^n$ and has smallest possible length.

Littlewood's Problem in L_∞. Find a polynomial in L_n that has smallest possible supremum norm on the unit disk. Show that there exist positive constants c_1 and c_2 such that for any n it is possible to find $p_n \in L_n$ with

$$c_1\sqrt{n+1} \le |p_n(z)| \le c_2\sqrt{n+1}$$

for all complex z with $|z| = 1$.

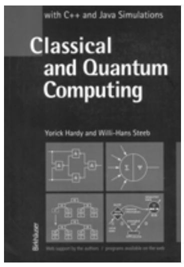
Mahler's Problem. For each n, find the polynomials in L_n that have largest possible Mahler measure. Analyze the asymptotic behavior as n tends to infinity.

Multiplicity of Zeros of Height One Polynomials. What is the maximum multiplicity of the vanishing at 1 of a polynomial in F_n?

The Schur–Siegel–Smyth Trace Problem. Fix $\varepsilon > 0$. Suppose $p_n(z) := z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0 \in Z_n$ has all real, positive roots and is irreducible. Show that, independently of n, except for finitely many explicitly computable exceptions, $|a_{n-1}| \ge (2-\varepsilon)n$.

The book comprises sixteen short chapters and four appendices, the final one (Appendix D) gives eight pages of research problems copied from each chapter. Besides the section on research problems, each chapter contains sections on Introductory Exercises, Computational Problems, and Selected References. Finally, Appendix A gives a compendium of inequalities, Appendix B is a self contained account of lattice basis reduction, and Appendix C gives some explicit formules for the L_4 norm of polynomials closely related to Fekete polynomials.

In conclusion, this book is suitable for advanced students of analysis and analytic number theory. It is very well written, rather concise and to the point. The references given in the individual chapters are gathered at the end of the book to fill fourteen full pages. Strongly recommended for specialists in computational analysis and number theory. *R. Stroeker*



Y. Hardy, W.H. Steeb
Classical and Quantum Computing: With C++ and Java Simulations
Basel : Birkhäuser, 2002
585 p., prijs €58,85
ISBN 3-7643-6610-9

This is a remarkable book about algorithms and computation. To give an impression of the book it probably suffices to mention the title of each chapter, of which there are 24. However, we restrict ourselves to only a few of them. Topics included are: Algorithms, boolean algebra, number representation, logic gates, latches and registers, error correcting codes, cryptography, finite state machines, computability and Turing machines, neural networks, genetic algorithms, quantum mechanics, quantum computing, quantum hardware. Indeed a monumental work in 585 pages. My impression is that virtually every aspect of computing which is directly related to algorithms and computing devices is included in the book. So mathematical methods to speed up computations are not considered. This excludes for example numerical mathematics. The notion of Fast Fourier Transform is not mentioned in the book, but the technique is used implicitly in the treatment of the quantum Fourier transform. In the chapter about recursion we find some remarks about the recursive evaluation of Bessel functions and elliptic integrals, but they are mathematically very superficial.

But even with the restriction of mathematical shallowness, the subject material is still vast. One feature that I found remarkable was that on page 120 we still find ourselves looking at circuits that one would ordinarily see in books on digital electronics. However, very soon we turn to more exciting subjects such as neural networks, genetic algorithms and quantum computing. Since large numbers of books are published on each of these subjects, it is clear that the present book can only contain brief introductions. This is the way I view the book. It is an encyclopedic work on algorithms and computing which one can use to refresh ones memory about each of the subjects. Although the authors claim that this is a good textbook for self-study I tend not to agree with them. The explanations are very terse and once one is lost there is no recovery. Also I do not see the educational advantage of putting long C++-sources in the text. However, I am very impressed by the ambitions of the authors.

F. Beukers

É. Cartan

Riemannian Geometry in an Orthogonal Frame

London : World Scientific Publishing, 2001
259 p., prijs £22,–
ISBN 981-02-4747-8

In 1928 verscheen Élie Cartans boek *Leçons sur la Géométrie des Espaces de Riemann*, met een gemoderniseerde en sterk uitgebreide tweede editie in 1948. Dit boek was gebaseerd op Cartans college uit 1925–26 aan de Sorbonne. Het was een uitstekende inleiding in Cartans differentiaalmeetkundige methoden, in het bijzonder zijn differentiaalvormen en zijn *repères mobiles = moving frames*. In 1926–27 gaf Cartan een tweede college over differentiaalvormen en bewegende raamwerken, met toepassingen op problemen in Riemannse variëteiten, waarvan de inhoud niet in de *Leçons* is opgenomen. Het hier besproken boek is een vertaling door Vladislav V. Goldberg van dit tweede college en van nog een aantal secties van het college uit 1925–26.

Het boek is aantrekkelijk uitgevoerd, met een mooi plaatje op het kaft van bewegende raamwerken boven een kalm rimpelende zee en met een prettige, duidelijke typografie. Een ander aantrekkelijk aspect van het boek is dat ieder nieuw stukje theorie telkens toegepast wordt op concrete differentiaalmeetkundige problemen, hetgeen de student meteen de gelegenheid geeft om de verworven kennis te oefenen.

Toch vind ik het boek minder geschikt als leerboek voor de huidige generaties van studenten, vanwege het totaal gedateerde karakter van de presentatie.

Het is om heel goede redenen dat men de differentiaalmeetkunde heel expliciet is gaan opbouwen op het begrip van de raakvectoren aan de variëteit in een gegeven punt van de variëteit. Deze vormen samen een lineaire ruimte, de raakruimte aan de variëteit in het gegeven punt, van dezelfde dimensie als de dimensie van de variëteit. Een differentiaalvorm van de graad p is een functie die aan ieder punt x van de variëteit een antisymmetrische p-lineaire vorm op de raakruimte in x toevoegt. Een bewegend raamwerk is een functie die aan ieder punt x een basis van de raakruimte in het punt x toevoegt. Deze basis hoeft niet de standaardbasis in een lokaal coördinatensysteem te zijn, het is deze grotere vrijheid in de keuze van de bases in de raakruimten die de bewegende raamwerken tot zo'n handig hulpmiddel in de differentiaalmeetkunde maken. Toegegeven, voor deze definities moet men eerst de raakruimten introduceren en dat vergt enige tijd en moeite, maar daarna zijn alle verdere begrippen volkomen expliciet en helder in termen van lineaire algebra in de raakruimten.

In het hier besproken boek begint de theorie van differentiaalvormen met: "Suppose that a Pfaffian form $\omega = \sum a_i\, dx^i$ is given. Usually the differentials dx^j of the independent variables x^j are considered as new independent variables. However, we can also take them to be given functions of the independent variables, $dx^i = \xi^i(x^1, \ldots, x^n)$, a directed displacement with a definite symbol of differentiation. Consider two symbols of differentiation d and δ and two series of differentials $d\delta x^i$ and $\delta d x^i$, which in general are distinct...". Geen van de hier genoemde termen wordt nader uitgelegd en zo gaat het in het hele boek door. Misschien was deze taal voor iedereen duidelijk in 1926–27 (al heb ik daar ook enige twijfel over), maar ik kan me niet voorstellen dat een tegenwoordige student begrijpt wat hier bedoeld wordt. Iemand die al differentiaalmeetkunde kent herkent dat ω een differentiaalvorm van de graad 1 is, dus een lineaire vorm op iedere raakruimte. De 'symbols of differentiation' zouden wel eens vectorvelden kunnen zijn, maar om daar zeker van te kunnen zijn zou ik eerst de rest van het verhaal moeten lezen om te kijken wat ermee wordt gedaan.

Hoewel het boek mij ongeschikt lijkt als leerboek, bevat het voor een docent differentiaalmeetkunde veel interessante toepassingen. Die moeten echter wel eerst nog vertaald worden naar de huidige terminologie (helaas heeft Goldberg dat niet gedaan), voordat ze op onze studenten losgelaten kunnen worden.

J.J. Duistermaat

P. Hilton, D. Holton, J. Pedersen

Mathematical vistas: From a room with many windows

Undergraduate texts in mathematics
Berlijn : Springer Verlag, 2002
335 p., prijs €74,85
ISBN 0-387-95064-8

Laat ik direct in de eerste zin van deze boekbespreking ondubbelzinnig duidelijk maken dat *Mathematical Vistas*, net als zijn voorloper *Mathematical Reflections*, een absolute aanrader is voor iedereen die op een serieus niveau van wiskunde wil en kan genieten. Dit geldt zowel voor de geïnteresseerde en begaafde scholier die voor het eerst in aanraking komt met wiskunde, als ook voor de ervaren onderzoeker die al het nodige 'achter de kiezen' heeft.

Het onderwerp van het boek is niet eenduidig. Het is niet zozeer een boek uit één stuk, als wel een bundeling van negen werken over uiteenlopende onderwerpen. Voor een groot deel kunnen de negen hoofdstukken onafhankelijk van elkaar gelezen worden. Is het ene hoofdstuk misschien te lastig, of spreekt het gewoon niet aan, dan zijn er nog acht andere hoofdstukken die klaar liggen om gelezen en vooral genoten te worden.

De titels van de negen hoofdstukken geven duidelijk aan wat voor moois er in dit werk te vinden is: Paradoxes in Mathematics; Not the Last of Fermat; Fibonacci and Lucas Numbers: Their Connections and Divisibility Properties; Paper-Folding, Polyhedra-Building, and Number Theory; Are Four Colors Really Enough?; From Binomial to Trinomial Coefficients and Beyond; Catalan Numbers; Symmetry; Parties.

De schrijvers beogen niet de onderwerpen uitputtend te behandelen. Dat kan natuurlijk ook niet met zoveel onderwerpen in één boek. Nee, de schrijvers willen de lezer uitdagen en uitnodigen kennis te maken met bijzonder mooie wiskundige onderwerpen en de ideeën er achter. Een rode draad in het boek is dat wiskunde niet zozeer iets is dat je moet *leren* als wel iets waar je over moet *nadenken* en waar je vooral ook van kunt *genieten*.

Wat het niveau van het boek betreft zijn de schrijvers er in geslaagd zowel de valkuil van de oppervlakkigheid als ook die van de ontoegankelijkheid te vermijden. Ieder hoofdstuk begint heel toegankelijk en gaandeweg wordt het niveau opgeschroefd tot het aan het eind voor menig lezer nèt te moeilijk zal zijn. En dit is heel goed! Dit prikkelt een hoofdstuk vaker door te nemen, na te denken over de inhoud om aan het eind telkens net iets verder te komen met inzicht en begrip.

De didactische opbouw van ieder hoofdstuk is zonder meer goed te noemen. Het begint telkens met een introductie waarna de schrijvers steeds dieper op het onderwerp ingaan. Een royale hoeveelheid 'breaks' stelt de lezer in staat de informatie op een rijtje te zetten en te verwerken. De lay-out van de tekst en het veelvuldig gebruik van heldere afbeeldingen maakt een frisse en uitnodigende indruk.

Het boek is niet alleen geschikt om zelfstandig door te nemen voor eigen plezier. Ieder hoofdstuk zou in de bovenbouw van het vwo de voedingsbodem kunnen zijn voor een schitterend profielwerkstuk. Daarnaast zijn er onderwerpen genoeg in te vinden voor mooie voordrachten die niet al te specialistisch moeten zijn, maar wel interessant voor een wiskundig publiek.

Mijn mening over *Mathematical Vistas* is uitermate positief. Het is een schitterend boek voor iedere wiskundige (beginner en gevorderd) op ieder niveau en het mag zeker niet in uw boekenkast of bibliotheek ontbreken! *H. Finkelnberg*

B.A. Magurn

An Algebraic Introduction to *K*-Theory

Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 87
Cambridge : Cambridge University Press, 2002
676 p., prijs £80.00
ISBN 0-521-80078-1

An Algebraic Introduction to K-Theory is, zoals de titel suggereert, een introductie. De toon is gezet als in het eerste hoofdstuk matrixvermenigvuldiging wordt uitgelegd: er wordt weinig algebraïsche voorkennis verondersteld. Wie snel op de hoogte wil worden gebracht van *cutting edge* K-theoretisch onderzoek komt er bekaaid vanaf. Voor de beginnende student kon dit boek nog wel eens zeer geschikt zijn.

Het gevaar met het behandelen van een geavanceerd onderwerp, uitgaande van weinig voorkennis, is, dat de stapgrootte nog wel eens exponentieel toeneemt. Het ene moment word je dan in slaap gesust met matrixvermenigvuldigingen en het volgende moment wordt er van je verwacht dat je weet wat spectraalrijen zijn. Dit boek heeft daar geen last van. De keerzijde is dat we het hier hebben over een boek van meer dan 650 pagina's en dat de eerste K_2 pas op pagina 401 wordt gedefinieerd. In de tussentijd zijn modulen, projectieve modulen, Grothendieck groepen, dimensies van ringen, een basis in getaltheorie en representatietheorie behandeld.

Gedurende het hele boek is geprobeerd om de lezer houvast te geven door de bewijzen vrij ver uit te spellen en nogal eens te rekenen. Wie een goede algebraïsche opvoeding heeft genoten, maakt zich nu wellicht zorgen. Er wordt echter voldoende de nadruk gelegd op eigenschappen en exacte rijen. De basis is hiermee gelegd om een echt boek over K-theorie open te slaan.

Het imposant ogende boek licht slechts een tipje van de sluier op als het om K-theorie gaat. Het gaat om de weg er naar toe. Het is een goed studieboek dat vraagt om meer. *R. Groenewegen*

G.M. Hek (editor)

Proceedings of the forty-second European study group with industry

Amsterdam : CWI, 2002
120 p., prijs €15,85
ISBN 90-6196-516-0

Study Groups with Industry are meetings of practitioners and academic mathematicians. These meetings build on a long tradition. The first one took place in the sixties in Oxford. In the Netherlands the study groups have been organized every year since 1998, with the support of the research program *Wiskunde Toegepast*, a joint activity of the *Technology Foundation STW* and the section *Exact Sciences* of the *Netherlands Organization for Scientific Research* (NWO). Before the start of the present meeting industries and other organizations were invited to suggest interesting problems that might be solved with mathematical techniques. Six topics were selected: The Artis Zoo (Amsterdam): Cooling Overheated Fish, Philips Research Laboratories: Compression of Audio-signals, Science Magazine Natuur en Techniek: Diffusion of Euro Coins over Europe, Phytocare: Better Advice to Rose Cultivators, Magma Design Automation: Component Placement on Chips, NIOZ : Reconstruction of Sea-surface Temperatures Using Fossil Marine Plankton.

During the meeting about seventy people discussed these problems and came up with solutions. These solutions are described in this book. They represent a wide variety of mathematical techniques stemming from diverse branches of applied mathematics. The emphasis is on the modelling aspects.

The Artis aquarium has difficulty in maintaining a reasonable temperature in the mammoth sea water tanks during the peak of the summer. The water gets too hot as a result of the heat produced by the lamps which are necessary to make the fish visible. The problem is to reduce the temperature at minimal cost. A description of the energy balance of the various sources of energy and loss of energy leads to a simple model. The analysis of this model leads to a simple solution.

At Philips Research Laboratories a new way for the digital representation of high quality audio signals has been introduced as an alternative to the 16-bit recording format used for CD signals. The new method produces 1-bit audio streams. Philips is interested in better methods for the lossless compression of these streams. The study group comes to the conclusion that the existing compression algorithms are not very far from optimal.

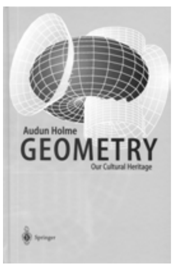
The diffusion of the different national Euro coins is studied using Markov chains and it is estimated how long it will take until half of the coins in our wallets will be foreign. The result is that this will take roughly one year. By now we all know that this result is wrong.

The problem is considered how rose production in a greenhouse can be optimized. Very simplified models are developed: a local model for the photosynthetic rate per area of leaf and a global model of the greenhouse, that transforms the photosynthesis of the leaves into an increase in mass of the rose crop.

The optimal placement of components on a chip, which can be considered as a rectangular area, is a well-known problem. The problem becomes more difficult if large parts of this area are excluded. The authors reduce the problem to a Quadratic Assignment Problem on which a lot of literature exists.

The reconstruction of sea-surface temperatures using fossil marine plankton is of great interest for global climate models. The authors develop some simple models to study this problem and carry out some calculations.

I can recommend this book to anyone interested in mathematical modelling in different fields of application. From a mathematical point of view most of the models are very simple, but developing these models is certainly not trivial. *J.H.A. de Smit*



A. Holme
Geometry: Our cultural heritage
Berlijn : Springer Verlag, 2002
378 p., prijs €42,75
ISBN 3-540-41949-7

Wiskundigen beschikken over een rijke schat aan verhalen. Een prachtig voorbeeld hiervan is het verhaal van de Pythagoreeër Hippasus van Metapontium die, in tegenstelling tot zijn oligarchische broeders, democratisch was ingesteld en uiteindelijk door de anderen op een boot werd gezet waar hij verhongerd zou zijn. Zij deden dat omdat hij per se het brisante feit dat er incommensurabele afstanden in een pentagon zitten aan het gewone volk dacht door te moeten vertellen. Bijna elke wiskundige kent dit verhaal en eeuwenlang heeft het invloed uitgeoefend op de perceptie van de geschiedenis van de wiskunde. Voor Holme hoort het verhaal bij de culturele erfenis van de meetkunde. En volgens goede traditie gebruikt hij het verhaal om uit te leggen dat de afstanden in een pentagon nu daadwerkelijk incommensurabel zijn en waarom dit academische feit zo'n sociale lading kan hebben.

Holme heeft voor de lerarenopleiding een wiskundeboek met bewijzen en stellingen geschreven dat recht doet aan cultuurhistorische contexten. In delen herinnert de stijl aan de vlotte maar historisch zeer vereenvoudigende stijl van 'historische romans' van bijvoorbeeld Stefan Zweig of Lion Feuchtwanger. Er wordt zelfs verwezen naar Zweig's *Sternstunden der Menschheit*, maar helaas noemt Holme hem Stephan Schweig – één voorbeeld van een aantal kleinere slordigheden. Holme kan vlot vertellen, zoals bijvoorbeeld over Babylon, the Gate of The Gods, the Bab-Ili, een stad "with exquisite restaurants and a most sinful and hedonistic nightlife". Holme vertelt niet alleen leuke verhaaltjes, maar laat ook zien hoe wiskundigen in turbulenties en conflicten terechtkwamen — in de oude en de moderne tijd. Hij slaagt erin de valkuil te vermijden van een apolitieke beschrijving van de wiskundige geschiedenis. Bij vervolging en tirannie schuwt hij geen vereenvoudigende vergelijking zoals die tussen de situatie in het nationaal-socialistische Duitsland (geïllustreerd door de uitspraak van David Hilbert die — op de vraag van nationaalsocialisten hoe zijn instituut in Göttingen zonder joden ervoor zou staan — gezegd zou hebben, dat zijn instituut dan gewoon niet meer bestond) en de situatie in Alexandria na de vernieling van de bibliotheek en de moord op Hypatia. En tussen al deze verhalen altijd weer wiskunde — de klassieke problemen, de schuifoplossingen van de Grieken: conchoïde van Nicomedes, de kwadratrix van Hippias, Archimedes' constructie van de heptagon. De bijdragen van Ptolomeus, Menelaus, Pythagoras, Archytas, Apollonius, Erathostenes, Euclides en Gauss, Klein, Hilbert, Hausdorff, Thom, Zeeman en vele anderen passeren de revue.

Dit alles gebeurt in het eerste deel, *A Cultural Heritage*. In het tweede gedeelte, *Introduction to Geometry*, komen enkele onderwerpen op een modernere manier terug zonder kennis van lineaire algebra te veronderstellen. Dit maakt het soms moeizaam en voegt niet zoveel toe aan wat in — soms betere — inleidende wiskundeboeken staat. Het eerste deel alleen al maakt dit tot een prachtig en goed leesbaar boek — zelfs voor gevorderden. *R. Kaenders*

F.W. Lawvere, R. Rosebrugh
Sets for Mathematics
Cambridge : Cambridge University Press, 2003
261 p., prijs £22.99
ISBN 0-521-01060-8

This is an interesting book, it combines the foundational work of Dedekind and Cantor in set theory with that of Eilenberg and MacLane in category theory. It introduces sets and mappings between them axiomatically, by formulating the axioms in the language of category theory. For instance, non-degeneracy becomes: the initial (empty) set 0 is not isomorphic to the terminal (one-element) set 1. The Axiom of Choice becomes: every epimorphism (surjection) has a section. In this manner the authors introduce at the same time the language of categories and various (defining) properties of sets. This culminates, halfway the book, in a chapter listing eight axioms for set theory. The second half of the book proceeds to investigate further properties of sets and functions — for instance about exponentiation or powersets — on the basis of this axiomatisation.

A characteristic point of this book is thus that it uses the language of category theory to capture and work in the well-known universe of sets. But using category theory one can talk about many other universes, such as topological spaces or vector spaces. This extra generality is not emphasised right in the beginning, but creeps in as the book proceeds. This may cause some confusion, because it is not always very explicit in which universe the authors are working. While they introduce the (categorical) properties of sets, they try to convey an awareness for the speciality of certain of these properties. For instance, in the category of sets and functions it is the case that each monomorphism with non-empty domain is a section. This property does not hold in all other universes and categories. In general, the wide-ranging perspectives and examples constitute the most valuable parts of the book.

The first of two authors, Lawvere, is one of the founding fathers of category theory. He is also known for his original language, which also shows up in this book. For instance, in the appendix on logic, different possible presentations of algebraic structures are discussed, with the advise: "In the long run it is best to try to bring the form of the subjective presentation paradigm as much as possible into harmony with the objective content of the objects to be presented; with the help of the categorical method we will be able to approach that goal."

The book explains the fundamental structures underlying mathematics and forms a rich source of examples showing connections and similarities. The book is intended for advanced undergraduate or beginning graduate students. A good introduction should be both inspiring and very clear. The high level that is achieved for the first point is not always reached for the second one. *B. Jacobs*

L.L. Avramov, M. Chardin, M. Morales and C. Polini (eds.)

Commutative Algebra: Interactions with Algebraic Geometry

Providence : American Mathematical Society, 2003
360 p., prijs $ 89
ISBN 0-8218-3233-6

Dit boek is het verslag van niet een maar twee conferenties, met bijna gelijkluidende titels: *Algèbre commutatative. Interactions avec la géometrie algébrique*, in Grénoble, en *Commutative Algebra and its Interactions with Algebraic Geometry*, een special session van de gezamenlijke bijeenkomst van de AMS en de SMF in Lyon. Een gecoördineerde voorbereiding heeft geresulteerd in een indrukwekkende lijst van voordrachten. Voor de meeste daarvan is een verwijzing opgenomen naar een gepubliceerd artikel. Deze bundel bevat 21 bijdragen van nogal verschillend karakter.

Van de langere artikelen wil ik er hier twee noemen. In een duidelijk overzichtsartikel, *The Frobenius homomorphism and homological dimensions*, bespreekt Claudia Miller de ontwikkelingen met als vertrekpunt het artikel van Kunz uit 1969, waarin hij bewijst dat een lokale ring van positieve karakteristiek regulier is dan en slechts dan als het Frobenius endomorfisme plat is. De titel van Ragnar Buchweitz' bijdrage, *Morita contexts, idempotents, and Hochschild cohomology — with applications to invariant rings*, moge voor zichzelf spreken.

In een beknopt artikel met de intrigerende titel *Cartan involutiveness = Mumford regularity* wijst Bernard Malgrange (de bekende analyticus uit Grenoble) erop dat de homologische interpretatie van de Cartan test in de theorie van uitwendige differentiaalsystemen equivalent is met l-regulariteit in de zin van Mumford, ongeveer tegelijkertijd ontwikkeld, en dat er bijna geen interactie geweest schijnt te zijn tussen algebraisch-meetkundigen en differentiaalmeetkundigen. *J. Stevens*

C. Birkenhake, H. Lange

Complex Abelian varieties

Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 302
Berlijn : Springer Verlag, 2004 (2nd augmented ed.)
637 p., prijs €96,25
ISBN 3-540-20488-1

Dat de namen van de auteurs nu in alfabetische volgorde staan is het eerste wat opvalt bij deze herziene en uitgebreide uitgave van een boek dat ongeveer vijftien jaar eerder uitkwam. Daarnaast springt de toename van het aantal pagina's met zo'n tweehonderd in het oog. De gedachte dat vooruitgang in de wiskunde leidt tot vereenvoudiging, kortere bewijzen en sneller inzicht is hier blijkbaar niet van toepassing. In de eerste twaalf hoofdstukken is weinig veranderd ten opzichte van de eerdere uitgave; er zijn vijf nieuwe hoofdstukken toegevoegd wat de toename van omvang en gewicht verklaart.

Het onderwerp van het boek is abelse variëteiten over het lichaam van de complexe getallen. Een complexe abelse variëteit kan gegeven worden als een complexe torus (vectorruimte V gedeeld door een rooster Λ) die ingebed kan worden in een complex-projectieve ruimte. Deze laatste eigenschap kan worden vertaald in de existentie van een positief-definiete hermitese vorm op V waarvan het imaginaire deel geheeltallige waarden op Λ aanneemt. De vectorruimte V is dan de universele overdekking en de kanonieke afbeelding $V \to X$ kan gezien worden als de exponentiële afbeelding voor een complexe Liegroep. De beschrijving van een complexe abelse variëteit als complexe torus geeft een snelle toegang tot een aantal belangrijke eigenschappen en centrale stellingen. Dit in schril contrast tot de algemene (algebraïsche) theorie van abelse variëteiten waar de analoge inzichten heel wat meer moeite kosten. Dat die moeite dan ook beloond wordt met een dieper inzicht in het onderwerp mag niet onvermeld blijven.

In het onderhavige boek staat de benadering van complexe tori centraal. De eerste twaalf hoofdstukken (het oude boek) geven een nogal encyclopedische inleiding in het onderwerp met een vracht aan opgaven. Daarmee vervult dit boek een nuttige functie.

Voor de rest van de bespreking beperk ik me tot de nieuwe hoofdstukken. Die beginnen met een hoofdstuk over automorfismen. Algemeenheden over automorfismen van variëteiten worden toegepast op abelse variëteiten. De zin van dit hoofdstuk ontgaat me. Daarna komt een hoofdstuk over vectorbundels op abelse variëteiten. Hier wordt de Fourier-Mukaitransformatie behandeld en dit hoofdstuk kan gezien worden als een inleiding in het meest actieve deel van dit gebied. Het volgende hoofdstuk (met een storende drukfout in de titel) bevat een potpourri van resultaten variërend van syzygieën, Seshadri-constanten, minimale lengte van perioden en de singulariteiten van de theta-divisor.

Het voorlaatste hoofdstuk over de Chowgroepen van abelse variëteiten heeft (in aansluiting met de literatuur) een veel algebraïscher karakter dan de rest van het boek. Dan volgt nog een hoofdstuk over het Hodgevermoeden voor 'algemene' abelse variëteiten en 'algemene' Jacobianen.

Als iemand op reis gaat en aarzelt welke editie meegaat in de koffer dan is mijn advies: neem gerust de eerste editie. Het verschil in gewicht laat dan nog genoeg ruimte om Polishchuks boek over complexe abelse variëteiten (met tal van interessante nieuwe inzichten) mee te nemen. *G. van der Geer*

A. Polishchuk

Abelian varieties, theta functions and the Fourier transform

Cambridge tracts in mathematics, 153
Cambridge: Cambridge University Press, 2003
292 p., prijs £50.00
ISBN 0-521-80804-9

De theorie van de abelse variëteiten heeft een lange geschiedenis en vindt haar oorsprong in de theorie van de elliptische integralen van Fagnano en anderen in de 18-de eeuw en is vernoemd naar Abel, die een grote invloed op haar ontwikkeling heeft gehad. Sinds het artikel van Riemann uit 1857 is niet langer de algebraïsche kromme, maar de bijbehorende complexe torus het uitgangspunt. De bijbehorende functietheorie, in het bijzonder de theorie van de thetafuncties, onderging daarna in de tweede helft van de 19-de eeuw een stormachtige ontwikkeling. Het was André Weil die de abelse variëteit zelf tot het uitgangspunt van de theorie maakte. Mumford heeft later deze theorie van Weil herschreven in Grothendiecks taal van de schema's. Abelse variëteiten spelen een fundamentele rol in een aantal van de sleutelresultaten van de 20ste eeuw, zoals de stelling van Hasse-Weil, het bewijs van het Mordellvermoeden door Faltings en Wiles' bewijs van Fermats laatste stelling. Ondanks dat zijn er maar een paar boeken aan dit thema gewijd. Naast een boek van Lang en de klassieker van Mumford uit 1970 zijn er nog een paar boeken over de complexe theorie, zoals een dun boekje van Swinnerton-Dyer, een Lecture Notes van Kempf en een pil van Lange en Birkenhake. Nu is er dan een nieuw boek van Polishchuk. Maar de auteur waarschuwt direct in de inleiding dat we geen verbetering van de bestaande uiteenzettingen van de theorie van abelse variëteiten en thetafuncties mogen verwachten.

Het boek belicht veeleer de bestaande theorie vanuit een nieuw gezichtspunt, waarbij de Fourier-Mukaitransformatie een centrale rol speelt. In de klassieke theorie van abelse variëteiten over de complexe getallen speelt de Fouriertransformatie een deels verborgen rol in de Poisson-sommatieformule voor de Riemann-thetafunctie. In de moderne theorie is de Fouriertransformatie een afbeelding van de Chowring (of cohomologie) van een abelse variëteit naar de Chowring van de duale abelse variëteit die het gewone snijproduct overvoert in het Pontryaginproduct. De Fourier-Mukaitransformatie, ingevoerd door Mukai in 1981, is een functor van de afgeleide categorie van quasi-coherente schoven op een abelse variëteit naar de analoge categorie op de duale abelse variëteit. Het is een krachtig wapen om vectorbundels op een abelse variëteit te begrijpen. Naast de Fourier-Mukaitransformatie is 'categorificatie' een tweede thema in dit boek. Onder categorificatie wordt het vervangen van verzamelingstheoretische begrippen door hun categorie-theoretische analoga verstaan. Zo is de categorie van lijnbundels op een abelse variëteit het analogon van de categorie van kwadratische functies op een abelse groep; het feit dat voor een kwadratische functie op een abelse groep de uitdrukking

$$f(x+y+z) - f(x+y) - f(x+z) - f(y+z) + f(x) + f(y) + f(z)$$

constant is correspondeert met de Stelling van de Kubus voor lijnbundels.

Het onderhavige boek valt uiteen in drie delen. Het begint met een analytisch deel waarin summier de theorie over de complexe getallen wordt verteld. De Heisenberggroep en thetafuncties spelen een belangrijke rol. Ook wordt het verband gelegd met spiegelsymmetrie. De Fourier-Mukaitransformatie kent een soort reëel analogon binnen de spiegelsymmetrie voor tori die tori met een complexe structuur verbindt met tori met een symplectische structuur. Dit verklaart ook een deel van de interesse voor de Fourier-Mukaitransformatie. Het tweede deel van het boek bevat de algebraïsche theorie met de Fourier-Mukaitransformatie als belangrijkste ingrediënt, zoals bijvoorbeeld gebruikt bij de constructie van de duale abelse variëteit. Het laatste deel behandelt Jacobianen. Hier wordt bijvoorbeeld Torelli bewezen met Fourier-Mukai.

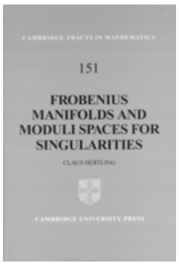
Het nieuwe perspectief maakt dit een interessant en boeiend boek. Soms werkt het nieuwe gezichtspunt een beetje als een keurslijf; zo wordt vaak naar later verwezen voor bewijzen die pas geleverd worden als de Fourier-Mukaitransformatie volledig beschikbaar is. Een aantal paragrafen in het boek blijken doodlopende straatjes te zijn, maar in het geheel genomen is het een verfrissend boek dat iedereen met belangstelling voor abelse variëteiten, of waarom niet, met belangstelling voor echte wiskunde, kan worden aanbevolen. *G. van der Geer*

B.L.J. Braaksma, G.K. Immink, M. van der Put, J. Top (eds.)

Proceedings of the Conference on Differential equations and the Stokes phenomenon: Groningen, the Netherlands, 28-30 May 2001

London: World Scientific Publishing, 2002
329 p., prijs $ 107, ISBN 981-238-172-4

This book contains expanded versions of lectures held during a workshop on differential equations and the Stokes phenomenon, held in Groningen in 2001. There are thirteen contributions scattered over a large variety of subjects. It is futile to give a complete overview of these thirteen chapters, so let me mention a few that caught my interest. A contribution of Y. Andréwith an introduction to the theory of p-adic differential equations, with a possible outlook on p-adic Stokes phenomena. Then there is a contribution of M. Berkenbosch with an attempt to construct a moduli space for systems of first order linear differential equations. In the contribution of Van der Kamp, Sanders and Top we find an introduction to generalised Lie symmetries for algebraists together with an application of number theory to this theory. Of course, mentioning only these results in this review is a very personal choice. Therefore I advise anyone with an interest in this area to have a look and see if there are chapters to his taste in this very interesting collection. *F. Beukers*



C. Hertling

Frobenius manifolds and moduli spaces for singularities

Cambridge Tracts in Mathematics, 151
Cambridge : Cambridge University Press, 2002
270 p., prijs £55,–
ISBN 0-521-81296-8

Dit boek gaat over verbanden tussen twee verschillende theorieën: Frobeniusvariëteiten en Singulariteitentheorie.

Allereerst Frobenius manifolds. Dit zijn complexe manifolds met extra structuren op de complexe raakbundel, namelijk een vermenigvuldiging en een metriek. De definitie van Frobenius manifolds gaat terug op Dubrovin (1991), die zijn motivatie ontleende aan het werk van Witten, Dijkgraaf, Verlinde en Verlinde over topologische veldentheorie (in de theoretische natuurkunde).

Singulariteitentheorie ontstond als specifiek onderwerp rond 1970 op grond van werk van Whitney, Thom, Arnol'd, Mather, Brieskorn. Het beschrijft verschijnselen, die van parameters afhangen en onderscheidt stabiele situaties van instabiele. In het geval dat verschijnselen beschreven worden door een reële of complexe (potentiaal)functie geeft dit aanleiding tot semi-universele deformaties en diverse algebraïsche, meetkundige en topologische structuren en invarianten. Voor geïsoleerde singulariteiten van functies is de basisruimte van de semi-universele deformatie eindigdimensionaal en glad.

Op deze basisruimte bestaat op een natuurlijke manier een complexe vermenigvuldiging en metriek, die aanleiding geeft tot de structuur van een Frobenius manifold. Dit gaat terug op het werk van K. Saito en M. Saito in de jaren tachtig, en gold als zeer moeilijk te doorgronden.

Anderzijds: uitgaande van een zogenaamd massief F-manifold en de studie van de vermenigvuldiging volgt de definitie van een Lagrange afbeelding met bijbehorende genererende functie en caustiek. Dit levert een direct verband met de theorie van ontvouwingen van singulariteiten.

Het boek van Hertling handelt over de isomorfie van een klasse van Frobenius manifolds en singulariteitentheorie. Meer precies toont hij aan, dat kiemen van massieve F-manifolds met 'glad analytisch spectrum' precies overeenstemmen met de basisruimten van kiemen van complexe holomorfe functies met geïsoleerde singulariteiten. Deze uitspraak generaliseert hij verder tot de klasse van geïsoleerde 'rand singulariteiten'.

In de tweede helft van het boek komt de constructie van K. Saito nader aan de orde met de beschrijving van de Gauss-Maninconnectie, gepolariseerde gemengde Hodgestructuren en de hogere residue paring. Hertling zorgt hier voor gedetailleerde behandeling. Daarnaast geeft hij ook toepassingen, bijvoorbeeld op het μ-constant stratum van singulariteiten.

Het boek is duidelijk en helder geschreven. De schrijver is in staat gebleken om vele zaken, die verspreid en onvolledig in de literatuur stonden, leesbaar op te schrijven en te vereenvoudigen. Verder zijn de talloze verwijzingen van belang.

Het is echter geen eenvoudige kost. Het onderwerp vereist nogal wat voorkennis: basisonderwerpen van complexe analytische meetkunde (met inbegrip van coherente schoven en platheid van connecties), begrippen uit de symplectische meetkunde, kennis van singulariteitentheorie. De auteur geeft in het begin vaak alleen motivatie, definities en stellingen en verwijst verder naar de literatuur. Na de inleidende paragrafen is het boek echter compleet in uitleg en bewijs.

Het is een mooi boek geworden, dat ik zeer aanbeveel. Noemenswaard zijn ook de Nederlandse bijdragen aan de gebieden, zowel van fysische als mathematische aard.

D. Siersma

D.E. Hesseling

Gnomes in the fog: The reception of Brouwer's intuitionism in the 1920s

Science Networks. Historical Studies, 28
Basel: Birkhäuser, 2003
447 p., prijs € 115,56
ISBN 3-7643-6536-6

In het begin van de twintigste eeuw werd een heftig debat gevoerd over de vraag wat wiskunde is. De Nederlandse wiskundige Brouwer, die het wiskundig intuïtionisme ontwikkelde, speelde hierin een belangrijke rol. Brouwer stelde wiskundige principes ter discussie die sedert de Grieken waren geaccepteerd, en hij ontwikkelde een alternatieve wiskunde gebaseerd op nieuwe principes. Volgens Brouwer bestaat wiskunde als mentale constructies in het hoofd van iemand die wiskunde bedrijft. Wiskunde wordt niet ontdekt maar gemaakt. Daarom wijst Brouwer het principe van de uitgesloten derde af. Dit principe maakt namelijk een bewijs uit het ongerijmde mogelijk, waarbij wiskundige objecten moeten worden erkend die niet in een mentale constructie zijn ontstaan. Brouwer had invloed op belangrijke denkers zoals Wittgenstein en Gödel.

Hesseling onderzocht — op het raakvlak van wiskunde en filosofie — wat het intuïtionisme van Brouwer teweegbracht. *Gnomes in the fog* is naar zijn eigen zeggen een verbeterde versie van zijn dissertatie. Elk hoofdstuk is voorzien van een gedegen inleiding, waardoor het boek ook toegankelijk is voor de minder wiskundig geschoolde lezer. Voor deze lezer is tevens een verklarende woordenlijst opgenomen. Het boek is helder geschreven in vloeiend Engels, en geeft interessante achtergrondinformatie over de persoonlijke facetten van Brouwer: over zijn geloofsbelijdenis voor de Remonstrantse kerk waarin hij zijn ontologisch solipsisme onthult: "[..] het eenige ware voor mij is mijn eigen ikheid van het oogenblik [..]", over zijn karakter: "[..] aan de meeste menschen heb ik het land [..]", enz.

In bekende naslagwerken wordt het debat beschreven als een discussie tussen drie stromingen: het formalisme, intuïtionisme en logicisme, waarbij het probleem van de paradoxen van de verzamelingenleer het hoofdthema is. Hesseling herschreef de geschiedenis van het debat op drie punten. Zijn stellingen zijn: Het logicisme speelde slechts een marginale rol, Bertrand Russell — de proponent van het logicisme — nam niet deel aan het debat; De paradoxen stonden niet centraal in het debat, maar de vraag hoe wiskunde bestaat en het principe van de uitgesloten derde; Het intuïtionisme en het formalisme leverden nauwelijks strijd met elkaar.

Het debat werd in gang gezet door een publicatie van Hermann Weyl. Deze plaatste in 1921 het thema over het 'wiskundige bestaan' definitief op de agenda. Weyl werd een van de eerste aanhangers van Brouwers intuïtionisme. Hesseling ging niet over een nacht ijs, hij onderzocht de reacties van honderdtwintig personen die deelnamen aan de discussie, waaronder 'grote namen' zoals Hilbert en Weyl, maar ook minder bekende wiskundigen en filosofen. Daarbij gebruikte hij meer dan tweehonderdvijftig publicaties.

Samenvattend: vernieuwend, gedegen en fraai uitgegeven, kortom een prachtboek!

N. Krijn

J. Ponstein
Nonstandard Analysis

Groningen : SOM Research School School, 2002
147 p., tekst gratis verkrijgbaar op internet
som.rug.nl/bestanden/ponstein.pdf
ISBN 90-367-1672-1

Tot ver in de negentiende eeuw werkten wiskundigen vrijelijk met 'infinitesimaal kleine' en 'oneindig grote' getallen. Een voorbeeld hiervan is de manier waarop Euler de formule

$$\sin z = z \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{k^2 \pi^2})$$

(voor complexe z) afleidde: hij begint met te zeggen dat voor 'oneindig grote' waarden van n,

$$2 \sinh x = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n .$$

Nu staat er rechts een veelterm van de vorm $a^n - b^n$, die ontbonden kan worden als $(a-b)(a-\varepsilon_1 b)\cdots(a-\varepsilon_{n-1} b)$, waar $1, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ de n-de eenheidswortels zijn. Enzovoorts.

Deze manier van werken werd verlaten na de invoering door Weierstrass van rigoureuze argumenten met ε's en δ's, omdat niet altijd duidelijk was, hoe de redeneringen met 'oneindig groot' geïnterpreteerd moesten worden. Cauchy 'bewees' bijvoorbeeld dat de puntsgewijze limiet van een convergente rij continue functies continu is...

Eén van de verrassingen van de twintigste-eeuwse modeltheorie is de ontwikkeling door Abraham Robinson van de 'nietstandaardanalyse', die het mogelijk maakte de oude werkwijze met infinitesimalen en oneindig grote getallen van een correcte interpretatie te voorzien. Ze werden dus gerehabiliteerd. (Ja, ook het bewijs van Cauchy! Alleen moet de conclusie anders worden uitgelegd.)

De theorie gaat uit van een domein van *hyperreële getallen* $^*R$ waarin zich 'niet-standaard' getallen bevinden. $^*R$ is zo geconstrueerd dat elke deelverzameling A van de verzameling van gewone reële getallen R een extensie $^*A \subset {}^*R$ heeft, en dito voor elke verzameling van deelverzamelingen van R, enzovoort.

Hiervoor geldt het *transfer principe*, dat grofweg zegt dat $^*A$ dezelfde eigenschappen heeft met betrekking tot $^*R$, als A met betrekking tot R. Verder heeft elke $r \in {}^*R$ een unieke schrijfwijze als $r = s + x$ waarbij $s \in R$ (s is het 'standaard deel' van r), en x een 'infinitesimaal' is, dat wil zeggen dat $|x| < \frac{1}{n}$ voor elk positief natuurlijk getal n.

We hebben nu het volgende simpele bewijs van de tussenwaarde stelling van de analyse: Stel $f : [a,b] \to R$ continu met $f(a) < 0$ en $f(b) > 0$. We moeten een $x \in (a,b)$ vinden met $f(x) = 0$. Bewijs: kies $m \in {}^*N$ hypergroot (m is groter dan elk standaard natuurlijk getal). Verdeel het interval $[a,b]$ in m sub-intervalletjes van lengte $\frac{b-a}{m}$. Er is nu een kleinste $k \in {}^*N$ waarvoor geldt dat $f(a + k\frac{b-a}{m}) > 0$. Uit de continuïteit van f volgt nu, dat als s het standaard deel van $a + k\frac{b-a}{m}$ is, $f(s) = 0$ geldt. Het beroep dat in dit bewijs gedaan wordt op het 'kleinste element' principe voor $^*N$ is gerechtvaardigd door het transfer principe.

Jaap Ponstein, in leven hoogleraar Operations Research in Groningen, begon zich na zijn emeritaat voor de grondslagen van deze niet-standaard analyse te interesseren. Na uitgebreide literatuurstudie legde hij zijn inzichten neer in een manuscript dat, na zijn plotseling overlijden in 1995, werd uitgetypt en dat nu is uitgegeven door de Research School Systems, Organization and Management.

Het boekje handelt grotendeels (honderd van de honderdveertig bladzijden) over de *grondslagen* van de niet-standaardanalyse: de constructie van $^*R$ en de principes van redeneren erover. Voor een logicus als ondergetekende is deze behandeling een beetje wijdlopig en omslachtig. Maar door de prettige stijl waarin het geschreven is, en de vele voorbeelden (zoals de in deze recensie genoemde), is het heel geschikt om een eerste indruk op te doen van het vak. En een waardig testimonium van een wiskundige met originele interesses.

J. van Oosten