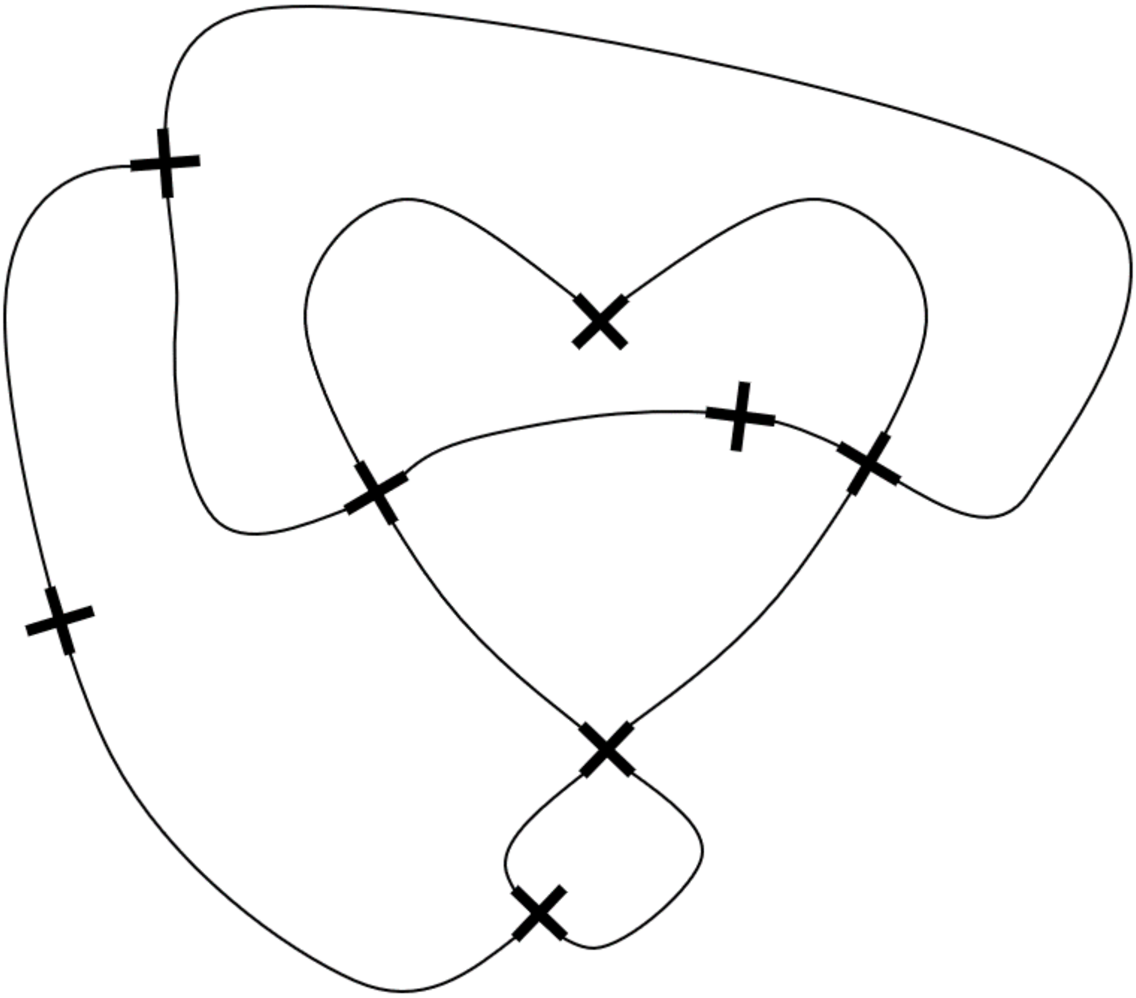
Verbind en heers



Wiskunde B-dag 2019

Universiteit Utrecht

Wiskunde voor teams

Freudenthal Institute

Inleiding

Over de opdracht

Deze wiskunde B-opdracht gaat over iets wat we allemaal graag doen: spelletjes winnen. Soms berust dat op geluk, maar bij het spel dat jullie vandaag gaan spelen ligt dat anders…

Werken in teams

Het bijzondere aan de wiskunde B-dag is dat je wiskunde doet in teamverband, zoals bijvoorbeeld voetbal. Misschien is het een idee een planning en een taakverdeling te maken. Laat ieder doen waar die goed in is. Geef ieder de ruimte bij te dragen met ideeën en uitwerkingen.

Structuur van de dag

De Wiskunde B-dag-opdracht bestaat uit inleidende opgaven en eindopgaven. Probeer tenminste de helft van de dag aan de eindopgaven te besteden.

Benodigdheden

Jullie hebben vandaag nodig: een pen; voldoende (klad)papier; een schaar; lijm, plakband, een nietmachine of paperclips om stukken papier aan elkaar vast te maken; en een computer of laptop om je verslag op te maken. Gebruik van internet is toegestaan (noem duidelijk je bron-url in het verslag), maar moedigen we niet aan, omdat we vooral geïnteresseerd zijn in jullie eigen werk.

Wat lever je in?

Jullie werken gedurende de dag aan een digitaal verslag. Begin daar niet te laat mee, want om 16:00 lever je het in.

In het verslag beschrijven jullie je resultaten en redeneringen – ook als deze niet helemaal volledig zijn. Het gaat in het bijzonder om het onderzoek uit de eindopgave.

Vertel jullie eigen, duidelijke en overtuigende verhaal. Wij waarderen goed geschreven, heldere, precieze, volledige, zorgvuldig geformuleerde, en zeker ook originele, creatieve en lyrische verslagen. Zowel de wiskundige inhoud van het verslag als de manier waarop het is opgeschreven telt mee in de beoordeling!

Tips bij het schrijven en vormgeven van het verslag:

- Het kan nuttig zijn om al in de ochtend te beginnen met het uitschrijven van de uitwerkingen van de inleidende opgaven.
- *Wees begrijpelijk*: zorg dat jullie werk voor iemand die niet aan de Wiskunde B-dag heeft meegedaan (maar wel voldoende wiskunde beheerst) leesbaar is.
- Als jullie onderbouwing, uitleg of verklaringen geven (en dat is belangrijk), doe dat dan zo veel mogelijk *met wiskundige argumenten*.
- Gebruik *eigen figuren* om ideeën te illustreren. Gebruik hiervoor bijvoorbeeld kopieën van door jullie gemaakte plaatjes (screen-captures of foto's van figuren op papier).

Basisopgaven

Jullie gaan vandaag aan de slag met het spel *Verbind-en-heers*. Verschillende varianten van dat spel komen langs, dus houd altijd goed in de gaten over welke variant de opgave gaat. De eerste versie van het spel begint met twee +-tekens (zie Figuur 1).

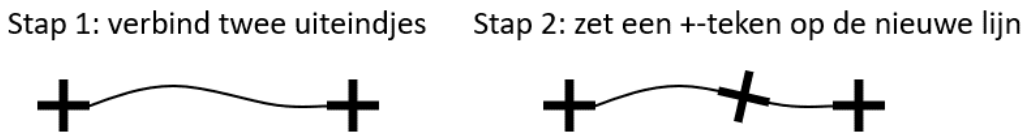
Figuur 1. Een beginfiguur van het spel.

Elk +-teken kun je zien als een punt met vier stekels. We noemen dat een 4-knoop. Dus in totaal zijn er in de beginsituatie in Figuur 1 acht stekels.

Spelregels

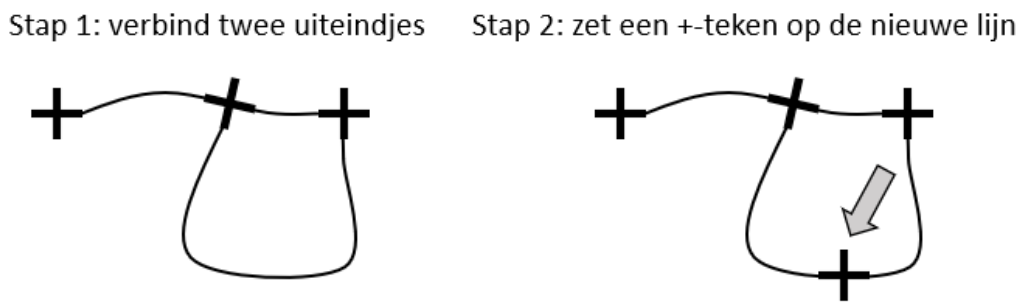
Twee spelers doen om de beurt een zet. Een *zet* bestaat uit het verbinden van twee verschillende stekels (van dezelfde knoop of van twee verschillende knopen) waarbij je op die verbindingslijn (getekend zonder je pen van papier te halen) weer een +-tekentje plaatst, oftewel aan iedere kant één nieuwe stekel en de andere twee stekels precies op de verbindingslijn.

Je krijgt dan bijvoorbeeld:



Figuur 2. Een voorbeeld eerste zet in *Verbind-en-heers*

Bij een volgende zet worden weer twee ongebruikte stekels verbonden en wordt er op de verbindingslijn weer een +-teken gezet; we krijgen dan bijvoorbeeld



Figuur 3. Een voorbeeld tweede zet in *Verbind-en-heers*

Zo mogen telkens twee ongebruikte stekels worden verbonden door middel van een verbindingslijn – waarbij het van belang is dat **die verbindingslijn een eerder getekende lijn, knoop of stekel niet mag snijden**. De stekel aangewezen door  in Figuur 3 zal dus nooit meer kunnen worden verbonden met een andere stekel. Controleer dat!

De eerste speler die geen zet meer kan doen, omdat er geen twee stekels te verbinden meer zijn zonder een eerder getekende lijn te doorsnijden, heeft verloren.

De knopen in het begin kunnen variëren in het aantallen stekels, zie hieronder. Op nieuwe verbindingslijntjes zet je echter altijd een enkel loodrecht streepje, zodat een +-teken ontstaat.

Verkenning. Speel het spel een paar keer met verschillende beginfiguren hieronder. De resultaten van deze (en latere) verkenningen hoeven jullie niet in het verslag te zetten.

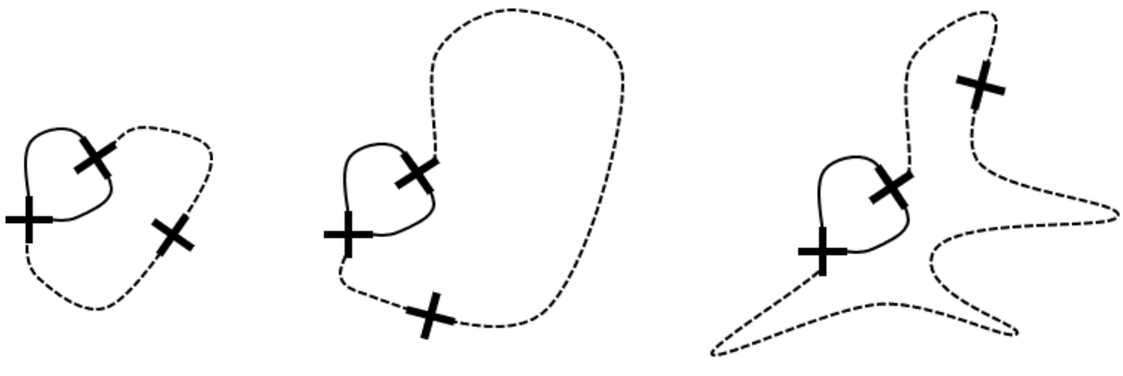
Twee 4-knopen | Eén 8-knoop | Een 3-knoop en een 4-knoop

Het lijkt zo te zijn dat het spel altijd vanzelf stopt en dat hoe je ook speelt, je bij iedere beginfiguur altijd even lang moet spelen. De uitdaging voor jullie is veel over dit spel te weten komen door proberen en redeneren.

Eerst maar eens een eenvoudige situatie onderzoeken: een beginsituatie met één 4-knoop beginnen. Er zijn dan niet veel mogelijkheden voor het spelverloop.

Opgave 1 (overzicht). Geef een weldoordacht overzicht van alle manieren waarop het spel met één 4-knoop in de beginsituatie kan verlopen.

Het overzicht dat je bij opgave 1 maakt wordt niet oneindig groot, omdat je geen onderscheid maakt tussen bijvoorbeeld de zetten hieronder aangegeven met stippellijnen.

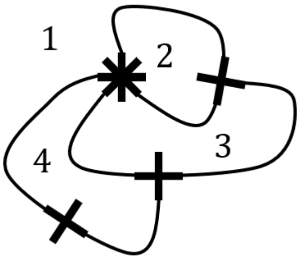


Hoe de lijnen *precies* lopen en waar de nieuwe knoop met stekels *precies* terechtkomen lijkt voor het spelverloop niet uit te maken.

Opgave 2 (schuiven met lijnen en knopen). Onderzoek of het voor het spelverloop iets uitmaakt als je een lijn of knoop (die eerder in het spel getekend is) verschuift zonder andere lijnen en knopen te snijden en beargumenteer je bevindingen.

We richten ons nu op beginsituaties met slechts één knoop. In plaats van met één 4-knoop of 8-knoop, kunnen we ook in het algemeen nadenken over een spel dat begint met een d-knoop: een knoop met d stekels. Kun je voor elke waarde van d vooraf bepalen wie er gaat winnen? De uitdaging voor nu is deze vraag te beantwoorden en natuurlijk het antwoord te begrijpen.

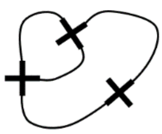
Daartoe blijkt het handig te kijken naar *gebieden* in het spel. In het begin van het spel bestaat je plaatje uit één *gebied*: het hele vlak waarop je het spel speelt. In Figuur 4 zie je een spelmoment met vier gebieden.



Figuur 4. Een spelmoment met vier gebieden, en acht ongebruikte stekels

Op ieder moment in het spel zijn er *gebruikte* en *ongebruikte* stekels. De ongebruikte stekels zijn de stekels waaruit geen lijntje vertrekt.

Opgave 3 (onderzoek met tabel). Onderzoek met behulp van een tabel als hieronder wat er gebeurt met het aantal ongebruikte stekels en met het aantal gebieden tijdens spellen met één d-knoop in het begin en verklaar wat je ziet.

Spelsituatie	Zetnummer z	Aantal ongebruikte stekels d	Aantal gebieden g
	0	4	1
	1	…	2
	2	…	…
…	…	…	…

Het aantal ongebruikte stekels d is een zogeheten *invariant*: dit aantal verandert niet. Het zetnummer z min het aantal gebieden g, oftewel $z - g$ is ook een invariant.

Als je aan het eind van ieder spel het zetnummer z, het aantal gebieden g en het aantal ongebruikte stekels d in ogenschouw neemt, dan zie je dat de situatie eigenlijk telkens vergelijkbaar is.

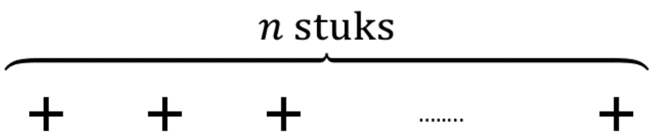
Opgave 4 (een formule voor het aantal zetten).

a. Geef een formule voor het aantal zetten van een spel dat begint met één knoop uitgedrukt in d en gebruik die om uit te leggen wie er wint, de eerste speler of de tweede speler.

b. Leg uit waarom je formule waar is. Als onderdeel daarvan leg je uit waarom het spel stopt na zoveel zetten en waarom er tot die tijd altijd tenminste één zet mogelijk is.

Eerste missie volbracht! Maar we zijn nog niet klaar. Dit was alleen voor spellen die beginnen met maar één knoop. Hoe zou het zitten met spellen die beginnen met meer knopen?

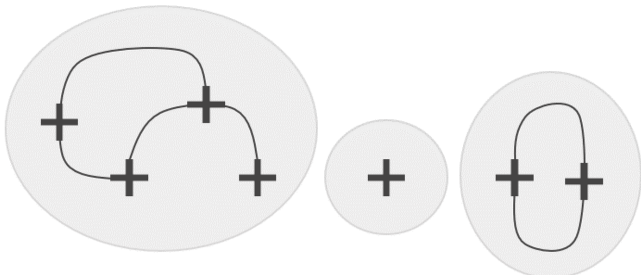
Vanaf nu kijken we een tijdje naar spelen die beginnen met alleen maar 4-knopen. Het aantal 4-knopen in de beginsituatie noteren we met n.



Figuur 5. De nieuwe beginsituatie met n 4-knopen

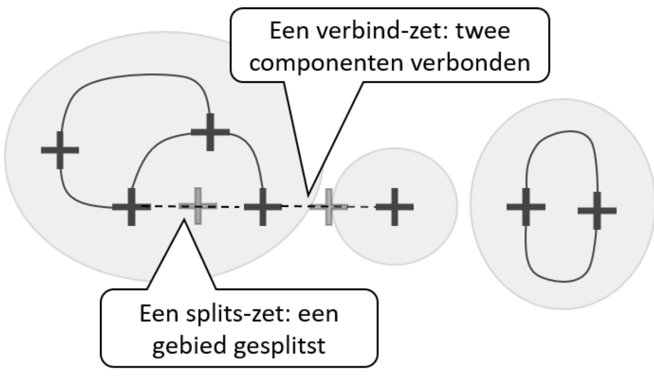
Verkenning. Speel het spel voor $n = 3$, oftewel met in het begin drie 4-knopen. Geldt je formule van Opgave 4a nog? Kun je voor deze beginsituatie voorspellen wie er wint?

Als je met meer knopen begint, zie je tijdens het spelen dat knopen verbonden zijn in verschillende groepjes. We noemen dat *componenten* (zie Figuur 6) en noteren het aantal componenten met c.



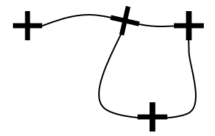
Figuur 6. Voorbeeld: drie componenten (tijdens een spel dan begon met vier 4-knopen)

Tijdens het spel verbinden we bij elke zet twee ongebruikte stekels. Als die twee stekels tot twee verschillende componenten behoren, dan neemt het aantal componenten met één af. We noemen dit een *verbind-zet*. Als die twee stekels tot dezelfde component behoren, dan wordt een gebied in tweeën gesplitst en noemen we dit een *splits-zet*.



Figuur 7. Een voorbeeld van een verbind- en een splits-zet

Opgave 5 (onderzoek met tabel II). Vul onderstaande tabel in tot en met de laatste zet voor een spel met twee 4-knopen en voor een spel met drie 4-knopen. Ga gerust uit van een eigen potje, in plaats van wat er al staat.

Spelsituatie	Zetnummer z	Splits/ Verbind zet	Aantal ongebruikte stekels d	Aantal componenten c	Aantal gebieden g
	0		8	2	1
	1	V	8	1	1
	2	S		…	…
…	…	…		…	…

Het lijkt erop dat ook bij een beginsituatie met meer 4-knopen het aantal zetten van het spel vastligt.

Opgave 6 (een formule voor het aantal zetten II).

a. Geef een formule voor het aantal zetten bij een spel met n 4-knopen en gebruik die om uit te leggen wie er wint.

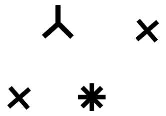
b. Leg uit hoe je aan je antwoord bij **a** komt. Je kunt daarbij onder andere gebruikmaken van observaties over
- het aantal verbind-zetten en het aantal splits-zetten
- wanneer het spel nog doorgaat en wanneer het spel stopt (let op het aantal stekels en het aantal gebieden)

Opgave 7 (redeneren met een invariant)

Leg uit waarom $z + c - g$ een invariant is (dat wil zeggen: de formule heeft bij elke zet dezelfde uitkomst, varieert niet). Bekijk daarvoor afzonderlijk wat er gebeurt bij een splits-zet en bij een verbind-zet. Leg de formule uit Opgave 6 onderdeel (a) uit met behulp van deze invariant.

Verkenning. Speel/onderzoek nu eens enkele spellen met een beginsituatie met verschillende typen knopen bij elkaar, bijvoorbeeld zoals in Figuur 8. Kun je het aantal zetten voorspellen op basis van alleen het totaal aantal stekels d en het aantal knopen n?

Opgave 8 (n knopen). Onderzoek wie het spel wint als je begint met n knopen die mogelijk verschillende aantallen stekels hebben, zeg $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$. Zie een voorbeeld in Figuur 8. Leg duidelijk uit hoe jullie aan de resultaten komen.



Figuur 8. Een beginsituatie met $d_1 = 4$, $d_2 = 3$, $d_3 = 8$ en $d_4 = 4$. Wie wint?

Eindopgaven

Na voorgaande basisopgaven volgen nu drie mogelijke eindopgaven. Bekijk ze eerst alle drie globaal, en maak dan met je groepje een keuze voor tenminste één van de drie. Maar je mag dus ook meer dan een eindopgave doen.

Eindopgave keuze 1: Verbind-en-heers met joker-zet

Vanmorgen hebben jullie gezien dat bij Verbind-en-heers in het begin al vastligt welke speler wint – of die speler dat nou leuk vindt of niet. In deze eindopgave onderzoeken jullie een variant op Verbind-en-heers waarbij de zetten van de spelers er wél toe doen en het dus meer een echt spelletje wordt.

De regels zijn hetzelfde als bij gewoon Verbind-en-heers, behalve dat er een joker-zet in het spel is: op één moment mag één van de spelers een zet doen waarbij géén +-teken op het nieuwe lijntje getekend wordt. De spelers mogen zelf kiezen of en wanneer ze deze joker inzetten, maar als de joker-zet eenmaal gespeeld is kunnen beide spelers alleen nog maar gewone zetten doen.

Opdracht 1 (keuzes doen ertoe). Laat zien dat de keuzes van de spelers in dit spelletje daadwerkelijk invloed hebben op wie er wint door

(a) een voorbeeld te geven van een spelverloop waarbij speler 1 wint en
(b) een voorbeeld van een spelverloop met dezelfde beginsituatie waarin speler 2 wint.

Opdracht 2 (wie wint?). Onderzoek voor zoveel mogelijk verschillende beginsituaties wie dit spelletje wint als beide spelers zo goed mogelijk spelen. Geef je redeneringen!

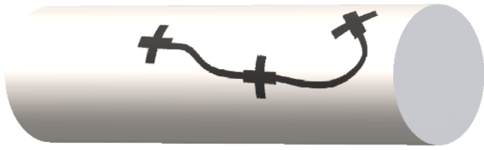
Een nog interessanter spelletje ontstaat als beide spelers een keer een joker-zet mogen doen. (Of één speler twee joker-zetten, als de andere speler niet tussendoor zijn kans grijpt om ook een joker-zet te doen.)

Opdracht 3 (twee joker-zetten). Onderzoek ook voor deze variant bij zo veel mogelijk verschillende beginsituaties wie dit spelletje wint als beide spelers zo goed mogelijk spelen. Geef je redeneringen!

Eindopgave keuze 2: Oppervlakken

In deze eindopgave gaan jullie nog even verder met het spel dat jullie eerder speelden, maar met een typisch wiskundige draai.

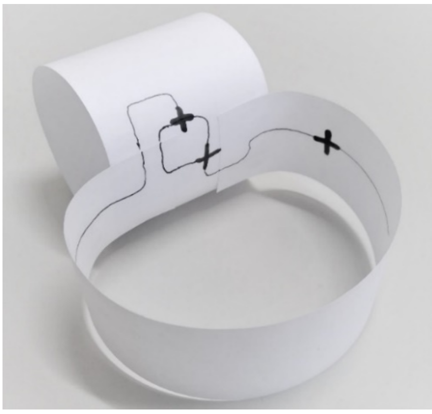
Rol een vel papier op tot een cilinder en zet vast (met lijm, plakband, nietjes of paperclips), zie Figuur 9.



Figuur 9. Speel het spel op een cilinder

Verkenning. Speel het spel op de buitenkant van de cilinder met beginsituaties naar keuze. Je mag *niet* via de rand van het papier naar de andere kant van het vel gaan. Onderzoek of het spel op de cilinder anders verloopt dan hoe het verloopt op een vlak stuk papier, zoals tot nu toe.

Maak vervolgens twee ongeveer even grote cilinders. Plak de cilinders op elkaar zoals in Figuur 10.



Figuur 10. Verbind-en-heers op twee aan elkaar geplakte cilinders.

Verkenning: Speel het spel een paar keer met één 4-knoop op de verbonden cilinders. Ligt de winnaar van tevoren vast?

Op de geplakte cilinders kun je soms een zet doen die noch een verbind-zet noch een splits-zet is. Zo'n zet noemen we het een *top-zet* (dat is kort voor *topologische* zet). Door de top-zetten is $z + g - c$ geen invariant meer (zoals bij Verbind-en-heers op een plat vlak). Het lijkt erop dat je nauwkeuriger moet kijken naar of er nog top-zetten mogelijk zijn in een gebied. Schrijf g_0 voor het aantal de gebieden waarin geen top-zetten (meer) mogelijk zijn; g_1 voor het aantal de gebieden waarin één top-zetten (meer) mogelijk is; g_2 voor het aantal de gebieden waarin twee top-zetten (meer) mogelijk zijn, etc.

Opgave 2. (Winnen op de dubbele cilinder)

- **a.** Onderzoek wie wint op de dubbele cilinder, als je begint met één 4-knoop.
- **b.** Onderzoek ook wie wint bij een spel met n knopen met verschillende aantallen stekels er omheen hebben, zeg $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$, voor zoveel mogelijk combinaties.

Maar nu is het hek van de dam. Hoe verloopt het spel als het oppervlak wordt uitgebreid met nog een lus (zie Figuur 11)?

Figuur 11. Verdeel-en-heers op drie verbonden geluste stroken.

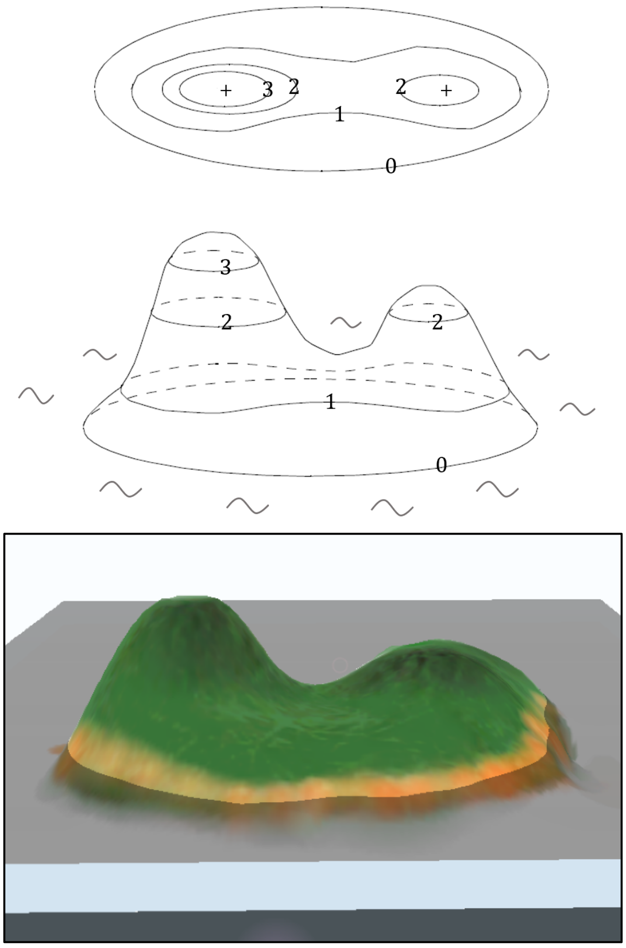
Opgave 3 (Klussen met nog meer lussen). Onderzoek wie er wint bij een spel op een oppervlak met l op deze manier aan elkaar gemaakte lussen met n 4-knopen, of eventueel ook met verschillende aantallen stekels, zeg $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$.

Eindopgave keuze 3: Hoge pieken, diepe dalen

Bij dit keuze-onderdeel introduceren we een nieuw probleem, schijnbaar niet gerelateerd aan het Verbind-en-heers-spel, maar toch is er veel gelijkenis met het soort redeneringen dat je nodig hebt.

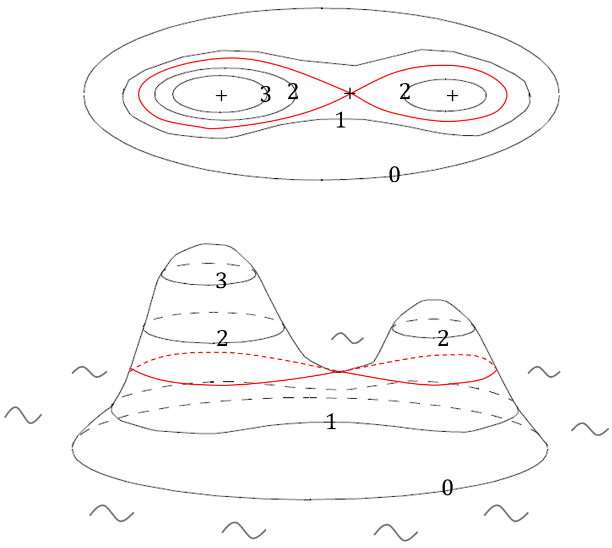
Het doel van dit onderdeel is dat jullie een wiskundig verband ontdekken tussen het aantal pieken, dalen, zadelpunten, meertjes en eilanden in een landschap.

In plaats van met 3-dimensionale plaatjes van landschappen werkt het gemakkelijker met contourplaatjes, oftewel hoogtekaarten.



Figuur 12. Een hoogtekaart, schets en afbeelding van een landschap.

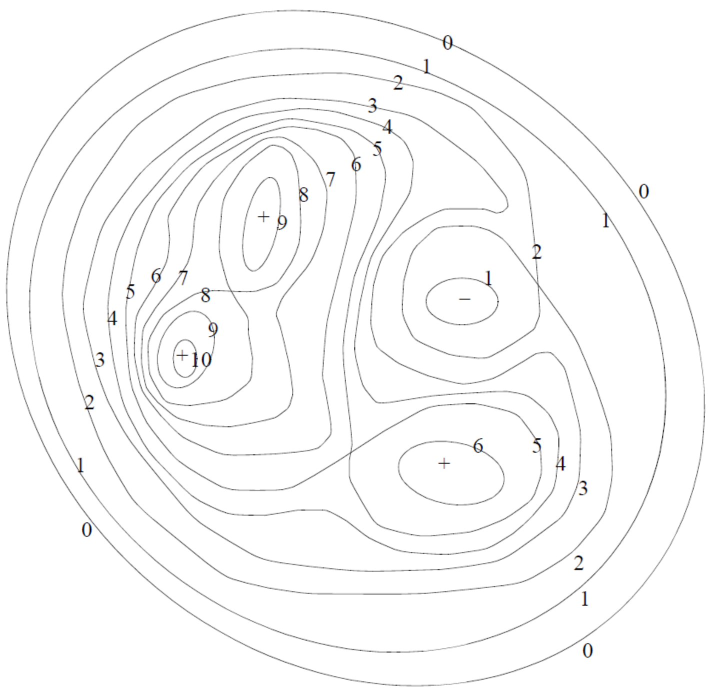
In de hoogtekaart staan twee punten waar het oppervlak horizontaal is gemarkeerd met een plus: de twee toppen. Maar er is nog een punt waar het oppervlak horizontaal is, te vinden ongeveer midden tussen de twee toppen. Hier komen vier lijnen (op de (rode) achtvormen in Figuur 13) van dezelfde hoogte samen en ertussen gaat de berg afwisselend omhoog en omlaag, als je van het punt weg beweegt. Zo'n punt wordt een zadelpunt genoemd, omdat die vorm ook bij zadels gebruikt wordt.



Figuur 13. Tussen de twee toppen ligt een zadelpunt. In dat punt komen vier lijnen van dezelfde hoogte samen.

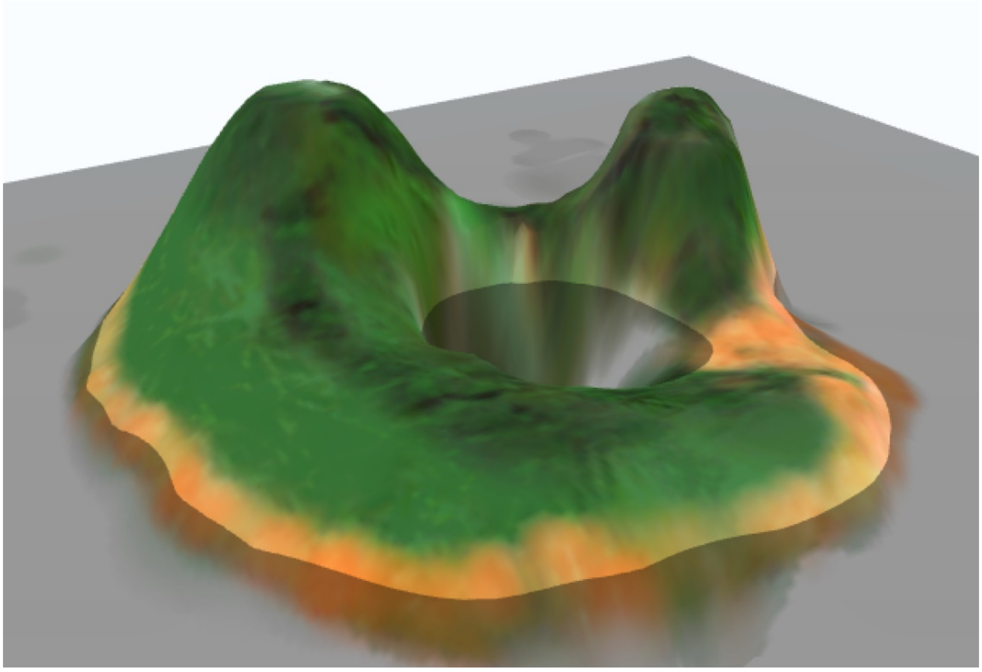
Net als op aarde liggen al de landschappen die we bekijken in een grote oceaan. Voordat we hiermee gaan redeneren volgen eerst twee oefeningen over landschappen en hoogtekaarten. Het resultaat van die oefeningen hoeft niet in het verslag.

Oefening 1. Schets het landschap bij de hoogtekaart in Figuur 14.



Figuur 14. Een hoogtekaart. Het minteken staat voor een dal.

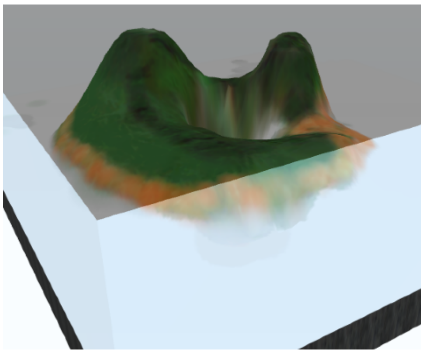
Oefening 2. Schets een hoogtekaart bij het volgende landschap in Figuur 15.



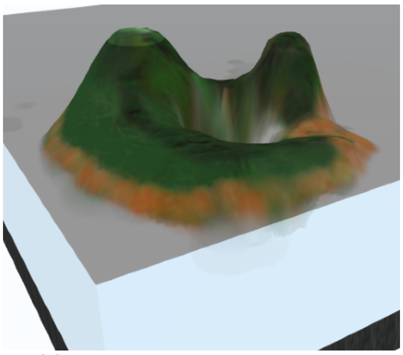
Figuur 15. Een landschap.

Jullie gaan nu onderzoeken wat het verband is tussen het aantal eilanden e, het aantal meren m, het aantal pieken p, het aantal dalen d en het aantal zadelpunten z. Het doel van dit keuze-onderdeel is dat jullie dit verband ontdekken.

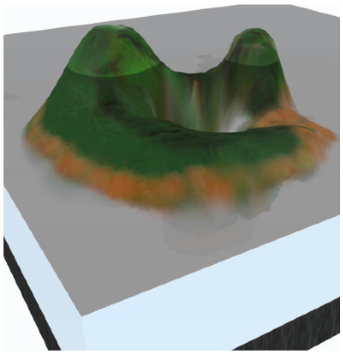
Voor dit onderzoek kunnen jullie gebruikmaken van het idee van een invariant (zoals jullie ook in de basisopgaven zijn tegengekomen). Toen werd iedere keer een zet gedaan, maar bleef een formule toch hetzelfde getal opleveren.



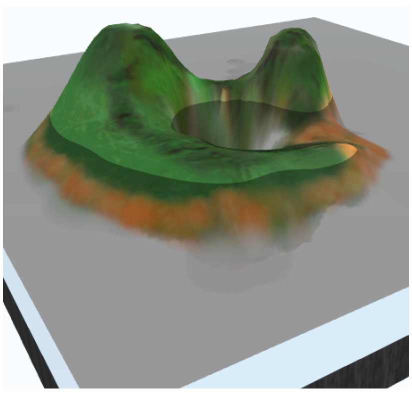
1. Helemaal onder water



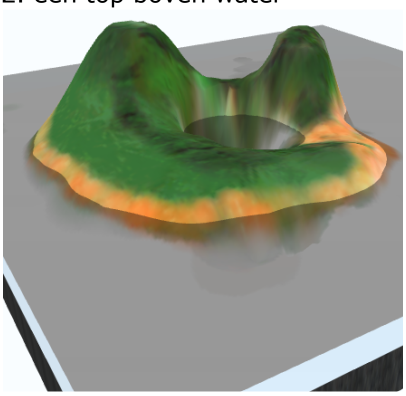
2. één top boven water



3. twee toppen boven water

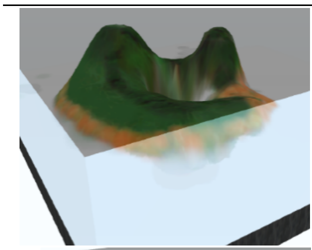
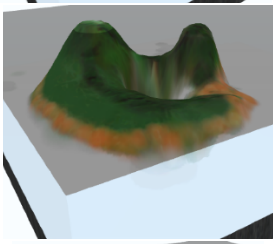
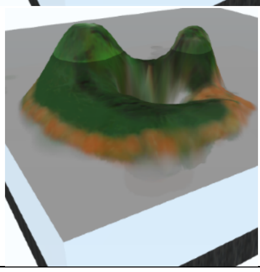


4. Toppen verbonden



5. Helemaal boven water

Nu doen we geen “zetten” maar laten we het waterpeil langzaam zakken. Houdt bij voor iedere overgang in waterniveau bij hoe het aantal eilanden e, het aantal meren m, het aantal pieken p, het aantal dalen d en het aantal zadelpunten z – voor zover boven water – verandert.

Spelsituatie	Aantal eilanden e	Aantal meren m	Aantal pieken p	Aantal dalen d	Aantal zadels z
	0	0	0	0	0
	1	0	1	0	0
	…	…	…	…	…

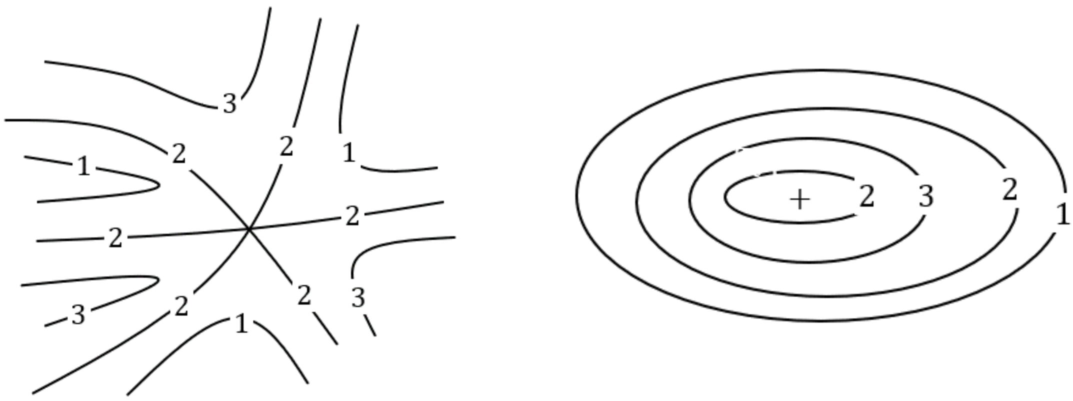
Doe dit voor zoveel landschappen als je nodig hebt. Werk met hoogtekaarten om het eenvoudig te houden. Je zou een aantal in de echte wereld onwaarschijnlijke verschijnselen kunnen tekenen, zoals een exact horizontale kraterrand of plateau, of drie bergruggen die op precies gelijke hoogte samenkomen (een zogeheten apenzadel, zie Figuur 16), maar tot Opgave 3 dien je dien die situaties te vermijden.

Opgave 1. Onderzoek of er een verband is tussen het aantal eilanden e, het aantal meren m, het aantal pieken p, het aantal dalen d en het aantal zadelpunten z, dat voor ieder landschap (boven water) geldt.

Opgave 2. Beargumenteer dat je verband klopt. Hint: gebruik invariantie bij ieder type overgang dat kan optreden als het waterpeil zakt.

Bij een normaal zadel is er ruimte voor twee benen om omlaag te gaan; en daartussen vormt het zadel zich omhoog naar de rug van het paard. Bij een apenzadel is er nog een derde geul, voor de staart van de aap.

Opgave 3. Breid je verband uit opgave 1 uit, zodat ook apenzadels kunnen voorkomen. Is dat gelukt, doe dan hetzelfde voor “multi”-apenzadels: zadelpunten waar meer dan drie bergruggen op exact dezelfde hoogte samenkomen – voor apen met meer dan één staart.



Figuur 16. Hoogtekaart bij een apenzadel (links) en bij een exact horizontale kraterrand.