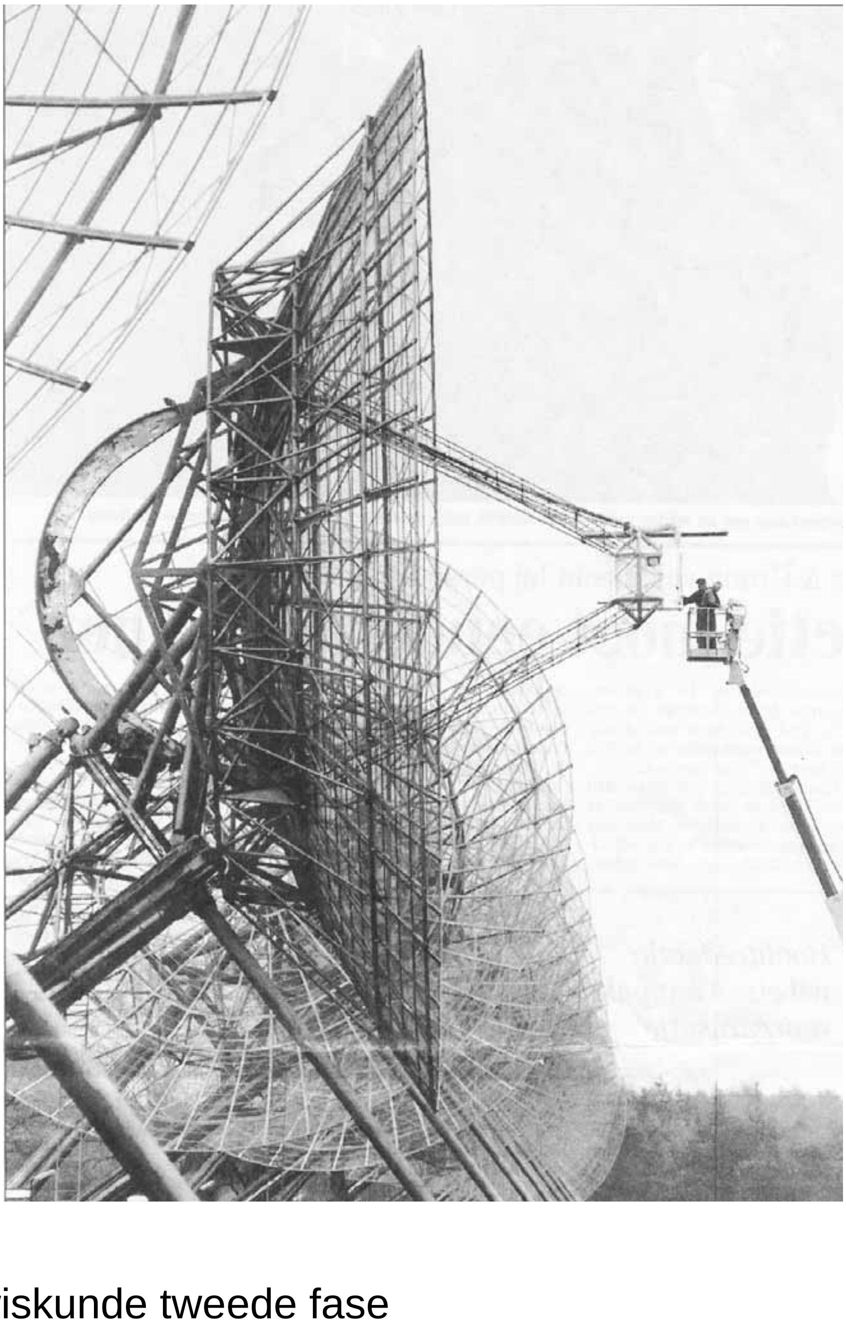
Conflictlijnen en Spiegels

Voortgezette meetkunde deel 3



Nieuwe wiskunde tweede fase
Profiel N&T
Freudenthal instituut

Conflictlijnen en Spiegels; voortgezette meetkunde, deel 3

Project: Wiskunde voor de tweede fase
Profiel: Natuur en Techniek
Klas: VWO 6
Staat: Herziene, uitgebreidere versie
Ontwerp: Wolfgang Reuter, Martin Kindt, Aad Goddijn

Inhoud

Vooraf

grens en conflict

Meningsverschillen over het exacte verloop van een grens hebben in de geschiedenis vaak geleid tot conflicten en soms tot heuse oorlogen. In de eerste twee paragrafen van hoofdstuk 1 bekijken we enkele verdelings- en grensproblemen:

- van wie is de olie en het gas dat onder de bodem van de Noordzee gevonden wordt?
- hoe kun je ‘nieuw land’ onder oude buren verdelen?
- hoe bepaal je ‘het midden’ van een grensrivier, als precies daar de grens moet lopen?

parabool ellips hyperbool

Een systematisch onderzoek van grenslijnen (die we in het vervolg conflictlijnen zullen noemen) brengt ons bij klassieke krommen, namelijk *parabolen, ellipsen* en *hyperbolen*. Bij dit onderzoek maken we weer gebruik van CABRI op de computer.
Van de bijzondere eigenschappen van deze krommen wordt in veel toepassingen gebruikgemaakt. Daarover gaat hoofdstuk 2. Deze kennis is net als veel van de andere meetkunde die je in de afgelopen tijd hebt geleerd, afkomstig uit de Griekse oudheid. Aan het werk van Apollonius van Perga (200 v. Chr.) zijn de moderne termen parabool, ellips en hyperbool ontleend en ook het woord *asymptoot*. Asymptoten spelen hier een rol bij hyperbolen.

analytische meetkunde

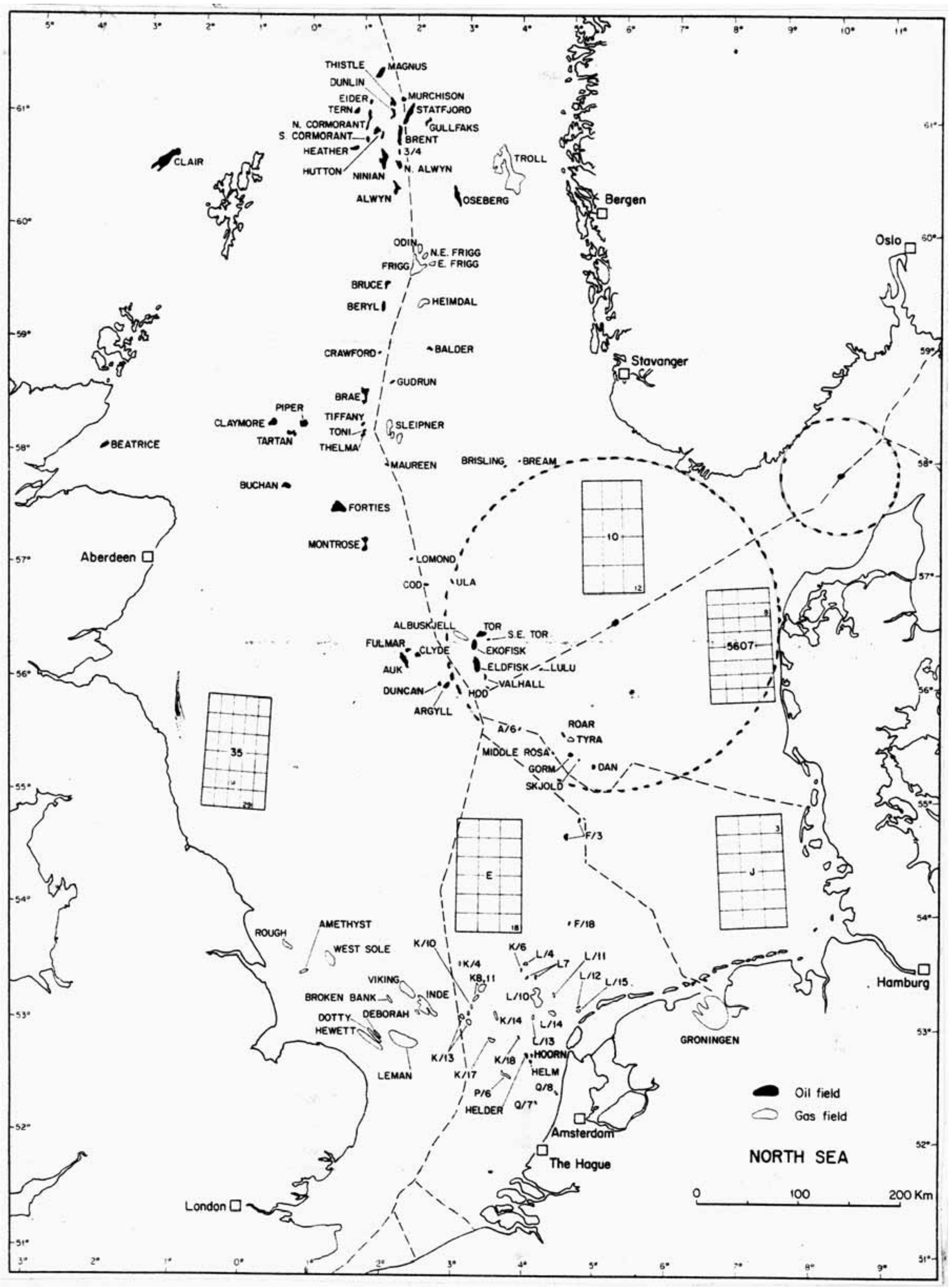
In hoofdstuk 3 wordt een verband gelegd tussen meetkunde en algebra. De eigenschappen van cirkel, parabool, ellips en hyperbool kunnen worden vertaald in formules en vergelijkingen. Men spreekt wel van de analytische meetkunde. Deze methode is nieuw in vergelijking met de Griekse wiskunde, want zij stamt net als de differentiaal- en integraalrekening uit de zeventiende eeuw. De pioniers van de analytische meetkunde waren Descartes (1596-1650) en Fermat (1601-1665).
De analytische methode heeft het voordeel boven de klassieke wijze van meetkunde beoefenen, dat zij minder vindingrijkheid vraagt en een krachtig instrument levert voor een grote klasse van problemen. Het is vergelijkbaar met het gebruik van de differentiaalrekening bij allerlei optimaliseringsvraagstukken. Je hebt in het boekje ‘Optimaliseren’ gezien dat de ‘zuivere’ meetkundige werkwijze elegant kan zijn en soms van verrassende eenvoud. Wordt de situatie ingewikkelder, dan is de analyse een vrijwel onmisbaar hulpmiddel. Vaak vullen de beide methoden elkaar aan: de analytische methode geeft resultaat, de meetkundige methode geeft inzicht.

twee methoden naast elkaar

In hoofdstuk 4 worden beide methoden, de ‘zuiver’ meetkundige en de analytische afwisselend ingezet om nog meer bijzonderheden van de in hoofdstuk 2 beschreven figuren te onderzoeken. Er wordt ook weer gebruikgemaakt van het computerprogramma CABRI om situaties te verkennen. Je kunt daar ook zelf kiezen welke methode je verkiest.

Hoofdstuk 1
Grens en conflict

Actievoerders van Greenpeace bij het olieplatform Brent Spar, 1995


THISTLE
MAGNUS
DUNLIN
EIDER
MURCHISON
TERN
STATFJORD
N. CORMORANT
S. CORMORANT
GULLFAKS
BRENT
HEATHER
3/4
HUTTON
NINIAN
N. ALWYN
CLAIR
TROLL
ALWYN
OSEBERG
Bergen
ODIN
N.E. FRIGG
FRIGG
E. FRIGG
Oslo
BRUCE
BERYL
HEIMDAL
CRAWFORD
BALDER
Stavanger
GUDRUN
BRAE
PIPER
TIFFANY
CLAYMORE
SLEIPNER
TONI
TARTAN
BEATRICE
THELMA
MAUREEN
BRISLING
BREAM
BUCHAN
FORTIES
10
MONTROSE
Aberdeen
LOMOND
COD
ULA
5607
ALBUSKJELL
TOR
S.E. TOR
FULMAR
CLYDE
EKOFISK
AUK
ELDFISK
LULU
VALHALL
DUNCAN
HOD
ARGYLL
35
A/6
ROAR
TYRA
MIDDLE ROSA
GORM
DAN
SKJOLD
F/3
E
J
F/18
ROUGH
AMETHYST
K/10
WEST SOLE
K/6
L/4
L/11
K/4
L7
Hamburg
VIKING
K8,11
L/12
L/15
INDE
BROKEN BANK
L/10
DOTTY
DEBORAH
K/14
L/14
HEWETT
L/13
GRONINGEN
K/13
K/18
HOORN
LEMAN
K/17
HELM
P/6
Q/8
Oil field
Gas field
HELDER
Q/7
Amsterdam
The Hague
NORTH SEA
0
100
200 Km
London

1: Grenzen onder water

De grens tussen Nederland en Duitsland eindigt niet bij de Dollard, de grens loopt op de zeebodem gewoon door. Op de kaart kun je zien dat Nederland onder water ook aan Groot Brittannië grenst en het scheelt maar weinig en we waren ook nog directe buren van de Noren. Je ziet ook waarom deze grenzen zo belangrijk zijn: de eigendomsrechten voor de olie- en aardgasvelden moeten goed geregeld zijn.
Op de Deens-Noorse grens liggen alle punten die gelijke afstand tot de kust van elk van deze landen hebben. De grens werd in 1945 op deze manier vastgesteld.

1 **a.** Om twee punten op deze grens is een cirkel getekend.
Welke betekenis hebben de getekende cirkels?
b. ***Als*** *P* op de Noors-Deense grens ligt, ***dan***: d(*P*, *Noorwegen*) = d(*P*, *Denemarken*).
Is het omgekeerde ook waar:
als d(*P*, *Noorwegen*) = d(*P*, *Denemarken*), ***dan*** ligt *P* op de Noors-Deense grens?

afstand punt-gebied

In hoofdstuk 5 van het pakketje AFSTANDEN, GRENZEN EN GEBIEDEN hebben we de afstand van een punt tot een gebied als volgt gedefinieerd.

De afstand van een punt *P* tot een gebied *G* is gelijk aan de straal van de kleinste cirkel om *P*, die met de rand van *G* tenminste één gemeenschappelijk punt heeft.

In dit hoofdstuk spelen afstanden weer een grote rol. We halen dus eerst even wat voorkennis op. Misschien heb je alle kennis nog paraat. Raadpleeg anders hoofdstuk 5 van AFSTANDEN, GRENZEN EN GEBIEDEN.

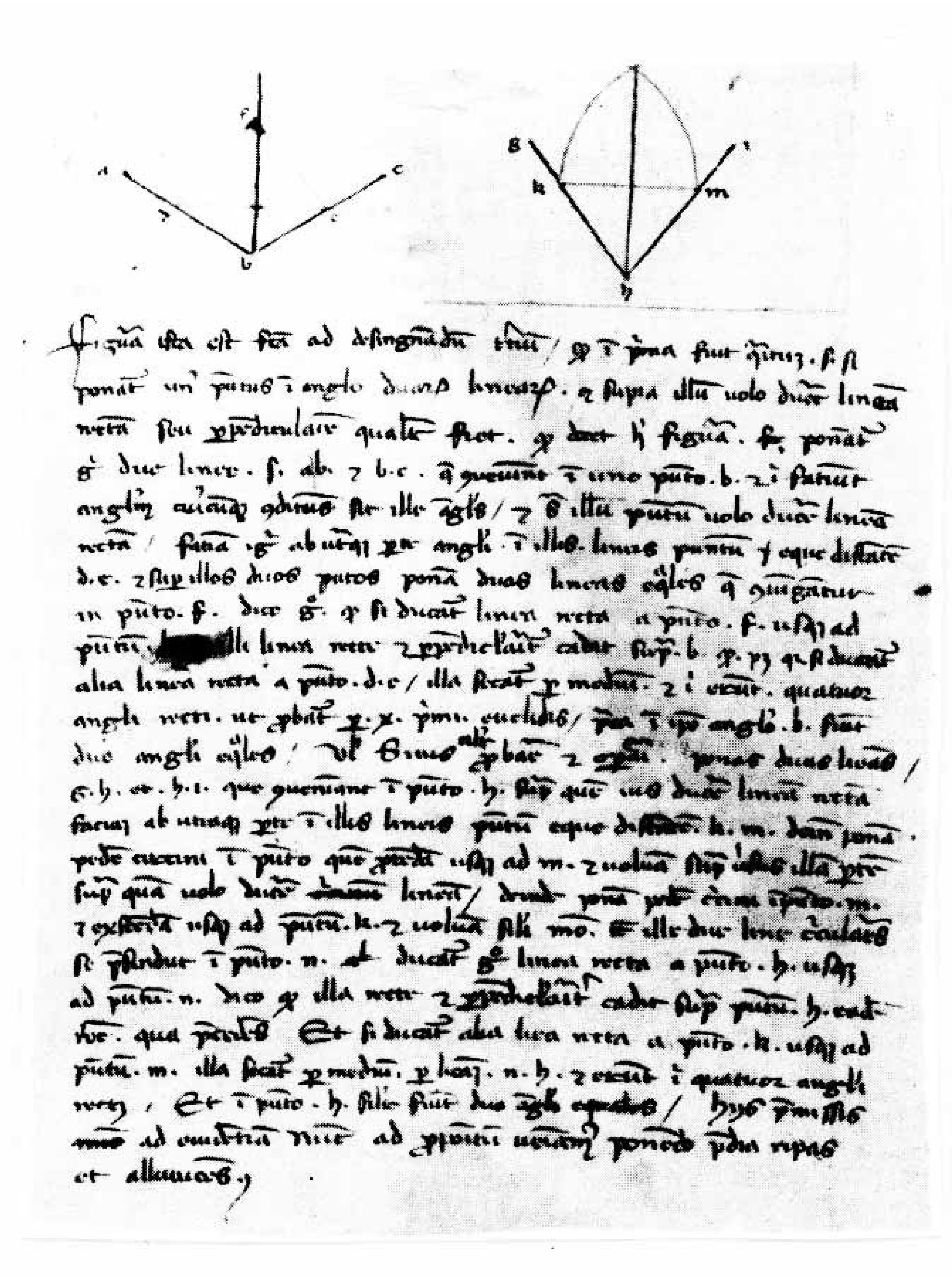
2 **a.** Wat versta je onder een voetpunt?
b. Kunnen er bij één punt verschillende voetpunten op de rand van een gebied zijn?
c. Wat is een iso-afstandslijn?
d. Hoe kun je een iso-afstandslijn bij een ingewikkeld gebied tekenen?

3 De Noors-Deense grens eindigt in een drielandenpunt.
a. Welk land is het derde land in kwestie?
b. Laat zien dat dit punt werkelijk gelijke afstand tot de drie landen heeft.
c. Ten zuiden van dit punt liggen nog twee drielandenpunten. Geef bij elk van deze punten aan om welke drie landen het gaat.

De cirkels van opgave **1a** kun je weer *grootste lege cirkels* noemen, zoals die bij Voronoi-diagrammen ter sprake kwamen.
Als je om de twee punten bedoeld in **3c** de cirkels tekent die aan de kusten van de betrokken landen raken, zul je geen voetpunten op de Duitse kust vinden. Hiervoor bestaat een historische reden. Bij de verdeling in 1945 werd geen rekening gehouden met de Duitse belangen. Toen men later ook Duitsland bij de internationale verdragen wilde betrekken, waren Nederland en Denemarken al met boringen begonnen. Bij de afbakening van de Duitse sector werden dan ook politieke compromissen gesloten.

4 **a.** Schets op de kaart het verloop van de Nederlands-Deense onderwatergrens zoals oorspronkelijk in 1945 vastgesteld.
b. Zoek een grootste lege cirkel die raakt aan Nederland, Duitsland en Denemarken en schets daarna (met een andere kleur) de indeling als in 1945 wel direct met de Duitse belangen rekening was gehouden.

5 Dit type grenslijn wordt ook wel *conflictlijn* genoemd. Een goede naam? Waarom?

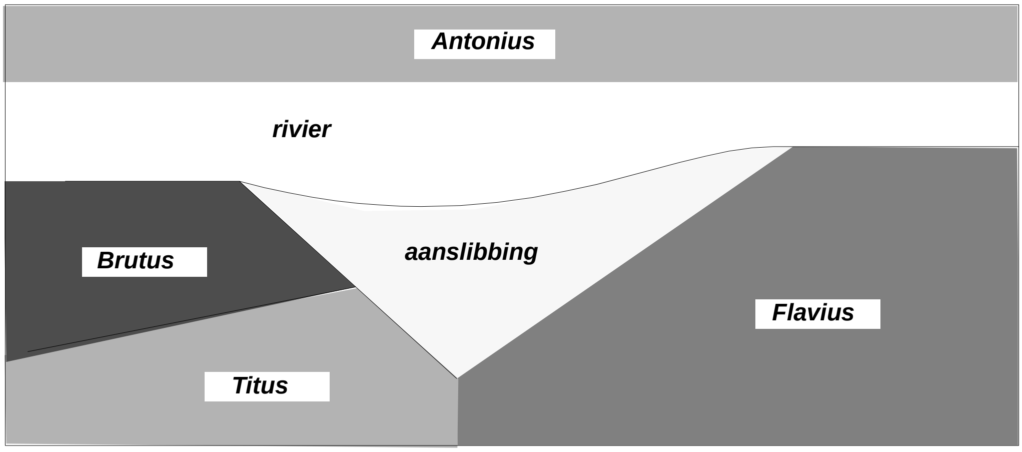


Je ziet hier een pagina uit het boek van de jurist Bartolus waarop de constructie van de bissectrice van een hoek wordt behandeld.

De originele tekst bevindt zich in de Bibliotheek van het Vaticaan.

2: Verdelingsproblemen

In deze paragraaf verplaatsen we ons naar een rivier in het Romeinse Rijk.
Vroeger had de rivier aan de zuidkant een grote inham. In de loop der jaren is deze inham geleidelijk dichtgeslibd. Deze nieuwe grond is erg vruchtbaar en ieder van de buren wil een zo groot mogelijk deel aan zijn grondgebied toevoegen.
Maar volgens welke regels moet het aangeslibde land over de buren Brutus, Titus en Flavius verdeeld worden? En kan de overbuurman Antonius misschien ook aanspraak maken op een deel van dit land?

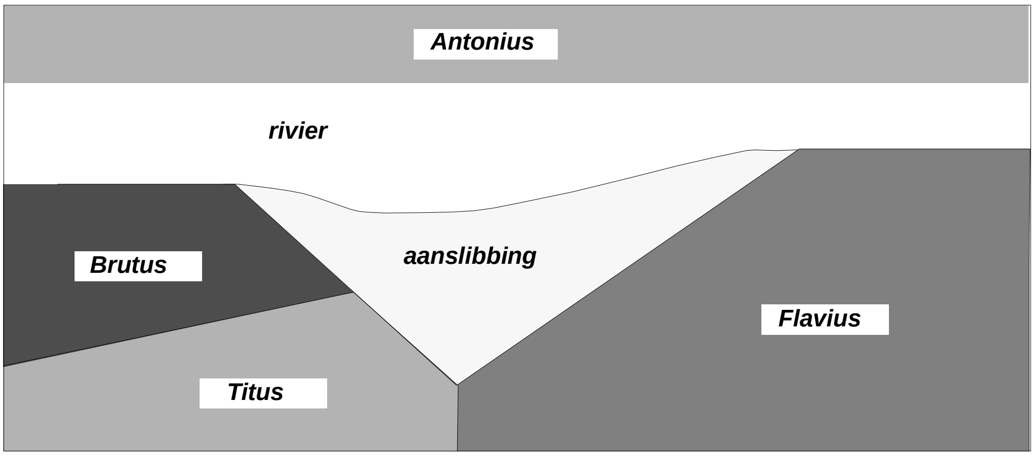


In het Romeinse recht werd aanslibbing beschouwd als *accessio*, aanwas: de aanwas aan iets dat mijn eigendom is, is zelf ook mijn eigendom. Volgens dit principe wordt de eigenaar van een koe ook de eigenaar van de kalveren en de eigenaar van een boom de eigenaar van de vruchten die aan deze boom groeien. Als je het principe letterlijk neemt, moet het land onder Brutus, Titus en Flavius verdeeld worden, want het nieuwe land is aan hun land ‘aangegroeid’. Maar hoe moeten de grenzen precies worden verlengd?

6 Brutus stelt voor de grenzen gewoon door te trekken.
- **a.** Maak op die manier een mogelijke verdeling van het aangeslibde land.
- **b.** Titus gaat niet akkoord met deze verdeling. Welke argumenten zou hij kunnen aanvoeren?

De Romeinse jurist Gaius (tweede eeuw na Christus) ging in zijn *Institutiones* al uitgebreid op deze problematiek in. Maar de Italiaanse jurist Bartolus de Saxoferrato (1313 - 1357) was de eerste die zich realiseerde dat het probleem van de aanslibbing in eerste instantie een wiskundig probleem is. Aangezet door een conflict dat hij tijdens een vakantie aan de Tiber meemaakte, schreef hij een verhandeling onder de titel *Tractatus de fluminibus* (*flumen* is het Latijnse woord voor rivier) over de aanslibbingsproblematiek. In dit werk bepaalde hij met meetkundige middelen de ‘conflictlijnen’ voor een groot aantal situaties. Hij gebruikte daarbij hetzelfde criterium als wij in dit hoofdstuk, namelijk: *de kleinste afstand tot de oude kusten bepaalt wie eigenaar wordt*.

7 Verdeel volgens dat principe het aangeslibde land onder de buren Brutus, Titus en Flavius.



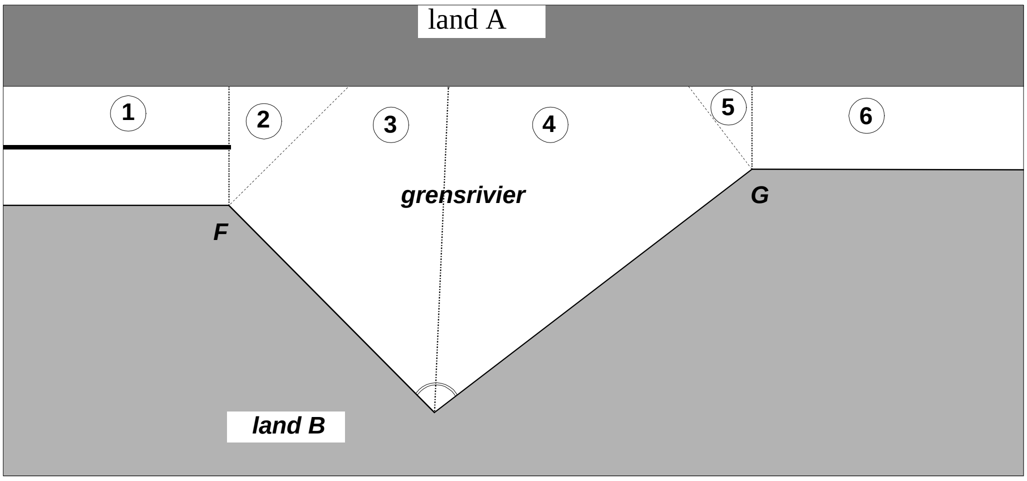
Antonius wil niet accepteren dat voor hem geen rol bij de verdeling weggelegd is. Hij neemt een deskundige in de arm en vecht voor de rechtbank de verdeling aan. Volgens de deskundige heeft ook Antonius aanspraak op een klein deel van het aangeslibde land. Omdat hij dit land moeilijk zelf kan bebouwen, is hij echter wel bereid zijn rechten aan een van de overburen te verkopen.

8 Zoek uit of Antonius volgens de *Tractatus de fluminibus* inderdaad recht heeft op een deel van het aangeslibde land.

bissectrice

Bij de oplossing van het verdeelprobleem spelen bissectrices (van een al of niet gestrekte hoek) een belangrijke rol.
Dat geldt ook voor het volgende probleem.

9 De grens tussen de landen *A* en *B* moet precies langs 'het midden' van de grensrivier lopen. Om deze grens te vinden, is de rivier in zes sectoren verdeeld door middel van vier loodlijnen en één bissectrice (in de figuur zijn die vijf lijnen gestippeld).



midden-parallel

a. In sector 1 is de grenslijn van *A* en *B* al getrokken. De lijn is daar de middenparallel van de twee evenwijdige oevers.
In welke andere sector is de grenslijn ook een middenparallel?

b. In twee sectoren ligt de grens op een bissectrice.
Teken deze stukken van de grenslijn.

c. In de twee resterende sectoren is de grenslijn gebogen. Probeer die grenzen zo goed mogelijk te schetsen.

d. Waarom zijn deze gebogen lijnen *geen* cirkelbogen?
e. Welke rol spelen de punten F en G voor de 'rand' van land B?
(Denk aan problemen rond iso-afstandslijnen.)

conflictlijn, conflictpunt

Bij alle drie de problemen (de Noordzeeverdeling en de twee aanslibverdelingen) ging het om een verzameling van punten P met de eigenschap:

$$\mathbf{d}(P, \text{gebied } X) = \mathbf{d}(P, \text{gebied } Y).$$

In het vervolg zullen we zo'n punt een *conflictpunt* bij de gebieden X en Y noemen.
De verzameling van alle conflictpunten heet *conflictlijn*.
Samengevat:

De conflictlijn van twee gebieden G_1 en G_2 is de verzameling van alle punten P waarvoor geldt: d(P, G_1) = d(P, G_2).

Voorbeelden:
- als de randen van de gebieden twee evenwijdige lijnen zijn, dan liggen de conflictpunten op de middenparallel van deze lijnen;
- als de randen van de gebieden niet-evenwijdige lijnen zijn, dan liggen de conflictpunten op de bissectrice van de hoek die (eventueel na verlenging van de randen) ingesloten wordt door deze lijnen.

Als de randen van de gebieden een grillige vorm hebben, dan kan de conflictlijn nog redelijk recht lopen, zoals de Noors-Deense grens op de bodem van de Noordzee.
Een conflictlijn kan ook gebogen zijn; dat was bijvoorbeeld het geval bij opgave **9d**.
De eis aan de conflictpunten was daar van de vorm: d(*punt*, *punt*) = d(*punt*, *rechte lijn*).
Dit laatste geval en andere soortgelijke gevallen gaan we in de volgende paragrafen nader bekijken.

3: Constructie van conflictpunten

In deze paragraaf maken we een begin met een systematisch onderzoek naar de conflictlijnen tussen twee eenvoudige gebieden. Dit onderzoek wordt in paragraaf 4 voortgezet met een computerpracticum en in het volgende hoofdstuk afgerond.
We onderzoeken alle gevallen uit de volgende tabel.

conflictlijn tussen ... en ...	**punt**	**rechte lijn**	**cirkel**
punt	**middelloodlijn**		
rechte lijn		**bissectricepaar, middenparallel**	
cirkel			

Twee hokjes zie je al ingevuld. Merk op: in de tabel zijn de (rechte) lijnen en cirkels niet bedoeld als kustlijnen van gebieden, maar ze zijn zelf de (abstracte) gebieden. Daarom is in het middelste vak bissectrice*paar* vermeld. Ook een punt wordt beschouwd als gebied. De bekende stelling over de middelloodlijn van twee punten sluit mooi aan bij de definitie van een conflictlijn.

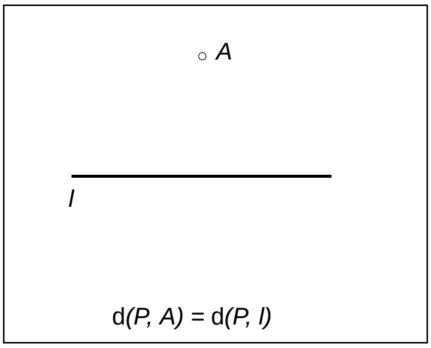
middelloodlijn

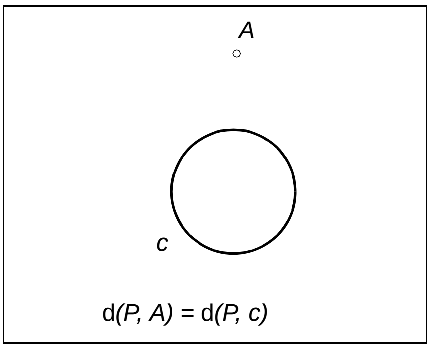
De middelloodlijn van twee punten *A* en *B* is de verzameling van alle punten *P* waarvoor geldt: $d(P, A) = d(P, B)$.

De middenparallel en de bissectrice kwamen in de vorige paragraaf al aan de orde.

10 Leg uit waarom de verzameling van alle conflictpunten van twee snijdende lijnen een bissectrice*paar* is.

Vanwege de symmetrie in de tabel blijven vier gevallen over.
Hieronder zie je twee tekeningen voor de gevallen ‘punt - rechte lijn’ en ‘punt - cirkel’.





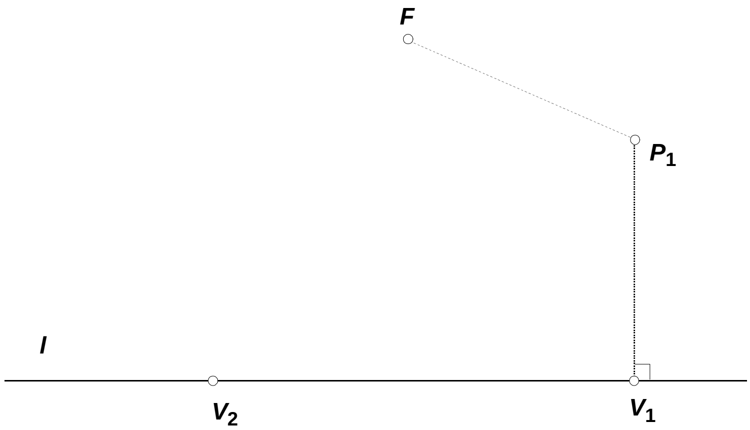
11 **a.** Probeer in de linker figuur de conflictlijn te schetsen.
Bedenk hierbij eerst:
- van welke conflictpunten je de exacte ligging snel kunt aangeven;
- hoe je van een willekeurig conflictpunt het voetpunt op lijn *l* vindt;
- welke symmetrie de conflictlijn heeft;
- of de conflictlijn oneindig lang of gesloten is.

b. Schets na dezelfde overwegingen ook in de rechter figuur de conflictlijn.

We willen straks in een CABRI-practicum deze twee gevallen nog uitgebreid bestuderen. Om de conflictlijnen op het scherm te krijgen, moeten we wel eerst een constructiemethode bedenken. Bij die constructiemethode kun je dan niet foezelen met een schuivende passerpunt, maar moet het echt raak zijn doordat je alleen gebruikmaakt van bekende lijnen en cirkels.

het geval punt-lijn

We nemen eerst het geval punt-lijn nader onder de loep.



12 In de tekening zie je bij het punt F en de lijn l een conflictpunt P_1 en zijn voetpunt V_1.
- **a.** Hoe kun je controleren dat $d(P_1, F) = d(P_1, V_1)$?
- **b.** Is P_1 het enige conflictpunt dat V_1 als voetpunt op de lijn l heeft? Leg uit waarom wel/niet.

13 In de tekening is op lijn l nog een punt V_2 aangegeven. Uitgaande van V_2 voeren we de constructie nogmaals uit, maar we gebruiken terloops geschikte terminologie.
- **a.** Teken alle punten waarvan V_2 het voetpunt op lijn l is. Wat is die verzameling punten?
- **b.** Teken alle punten die op gelijke afstanden van V_2 en F liggen. Wat is die verzameling punten?
- **c.** Markeer nu het gezochte punt P_2: het conflictpunt van F en l met voetpunt V_2 op l.

14 Op de manier van opgave **13** kun je bij *elk* punt V op l een conflictpunt P construeren.
- **a.** Waarom gaat het snijden van de twee lijnen nooit mis?
- **b.** Vat de methode samen in een constructieschema dat we straks met CABRI gaan uitvoeren. Vul dit schema verder in.

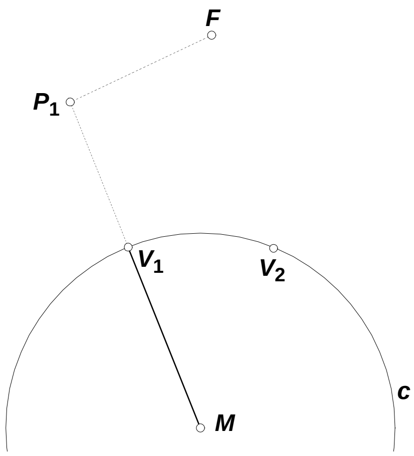
Hoe construeer je een punt op de conflictlijn van een punt en een lijn?	
1. Teken het punt *F*. 2. Teken de lijn *l*. 3. Teken een punt *V* op *l*.	voorbereidingsfase
4. Teken .... 5. Teken .... 6. Markeer het snijpunt en noem dat punt *P*.	constructiefase

Met dit schema kun je ieder conflictpunt construeren. Aan CABRI doe je deze constructie straks één keer nauwkeurig voor en daarna laat je CABRI zelf de constructie uitvoeren voor alle andere punten op de lijn l.

het geval punt-cirkel

15 Nu het geval punt-cirkel.
Het plaatje hieronder lijkt sterk op dat van het geval punt-lijn. Punt P_1 ligt op de conflictlijn want $d(P_1, F) = d(P_1, V_1)$.

a. V_2 is het voetpunt van een ander conflictpunt P_2.
Laat zien dat de constructie van P_2 vrijwel op dezelfde manier uitgevoerd kan worden als bij het geval punt-lijn.



Hoe construeer je een punt op de conflictlijn van een punt en een cirkel?

1. Teken het punt *F*.
2. Teken de cirkel *c*.
3. Teken een punt *V* op *c*.

voorbereidingsfase

4. Teken ....
5. Teken ....
6. Markeer het snijpunt en noem dat punt *P*.

b. Vul bovenstaand constructieschema verder in.
c. Vind je op deze manier bij *elk* punt V op de cirkel een conflictpunt P?
d. Vind je op deze manier *alle* punten van de conflictlijn?

Bij toepassingen ligt het voor de hand de cirkel c op te vatten als de rand van een gebied. In opgave **15** zoek je als het ware de conflictlijn tussen een groot eiland en een miniscuul klein, maar zelfstandig eilandje dat een eind uit de kust ligt.
Maar punt F kan ook in het binnengebied van cirkel c liggen. Je kunt in dat geval denken aan een land met een binnenmeer waarin een ‘heel klein’ zelfstandig eilandje ligt.

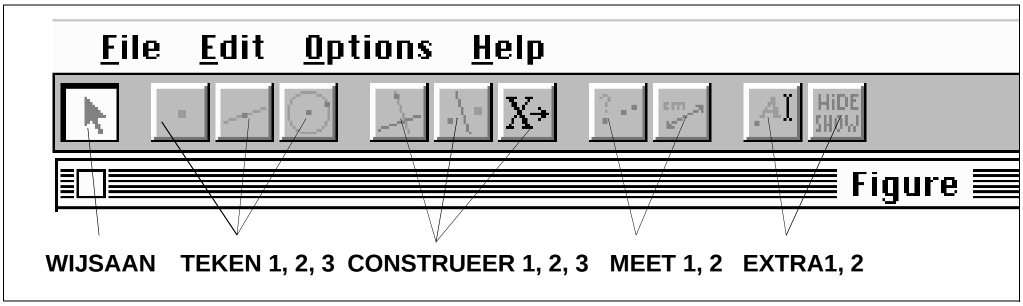
16 **a.** Teken een cirkel met een punt F in het binnengebied en schets de conflictlijn.
b. Ga na of je met je constructieschema van opgave **15b** ook alle punten van deze conflictlijn kunt construeren. Als dat niet het geval is, maak het schema dan daarvoor geschikt.
c. Stel F is toevallig het middelpunt van cirkel c. Wat is in dat geval de conflictlijn?

cirkel-lijn en cirkel-cirkel komen later

We besteden op dit moment en in het volgende CABRI-practicum nog even geen aandacht aan de twee gevallen ‘cirkel-rechte lijn’ en ‘cirkel-cirkel’.
Straks zal blijken dat deze gevallen vrij gemakkelijk te herleiden zijn tot de dan bekende gevallen ‘punt-rechte lijn’ en ‘punt-cirkel’.

4: Conflictlijnen met CABRI

Je ziet hier weer de menubalk van CABRI. We hanteren voor de buttons dezelfde namen als in het pakketje DENKEN IN CIRKELS EN LIJNEN. Toen gebruikten we CABRI bij de oriëntatie op verschillende bewijzen (als hulpmiddel bij het zoeken naar bewijzen dus), nu gebruiken we CABRI voor de constructie van conflictlijnen.

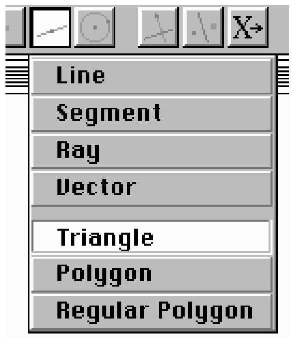


bediening

In dit practicum gebruik je opties uit de menu's die achter de buttons TEKENEN 1,2,3, CONSTRUEER 1 en EXTRA 1,2 zitten.

Opties geven we weer aan met BUTTON > OPTIE. De opdracht 'teken een driehoek' schrijven we dus zó:

TEKEN 2 > TRIANGLE



Jij klikt dan op button TEKEN 2 en sleept de wijzer op de optie TRIANGLE.

Omdat je misschien vergeten bent hoe je met CABRI moet werken, vind je:

- op de volgende bladzijde een *overzicht* van de belangrijkste *bedieningszaken*.
- achterin dit boekje een *overzicht* van alle *opties* in het Engels en het Nederlands (zie bladzijde 127).

Het doel van dit practicum is:

- je construeert de conflictlijnen bij de gevallen punt-lijn en punt-cirkel;
- je onderzoekt voor beide gevallen alle verschillende situaties;
- je interpreteert de uitkomsten en vertaalt die in definities voor parabool, hyperbool en ellips.

instellen

17 Voordat je aan de constructieopdrachten begint, moet je eventueel drie instellingen van het programma aanpassen.

Open het menu OPTIONS > PREFERENCES.

- Zet NUMBER OF OBJECTS IN LOCUS op **300** (niet méér; sommige tekeningen worden dan langzaam getekend en worden soms overvol).
- Zet LOCUS OF POINTS: LINK POINTS op **AAN** (je ziet dan een kruisje in het vierkant).
- Zet LOCUS OF LINES: ENVELOPE op **UIT** (dus géén kruisje in het vierkant).

Klik ten slotte op APPLY TO om de instellingen te activeren.

De belangrijkste zaken van CABRI op een rij:

AANKLIKKEN

Breng de wijzer op het bedoelde object. Tik kort op de linkermuisknop.

SLEPEN

Breng de wijzer op het bedoelde object. Druk de linkermuisknop in, verschuif de muis en laat los.

MENUKEUZE EN OPTIEKEUZE

Wijs een button aan, sleep de muiswijzer naar de te kiezen optie.

TEKENEN EN CONSTRUEREN

Onder de TEKEN- en CONSTRUEER-buttons staan alle beschikbare **teken- en constructie-opties**.
Kies de optie en klik vervolgens punten of objecten aan. Dit verschilt per optie.
Let erop: CABRI heeft **KEEP-IN-TOOL** bediening. Dat wil zeggen, zolang je niets anders doet, blijf je in de aangegeven optie hangen.
Zie ook **Aanwijstoestand**.
CABRI helpt je als je oude punten of lijnen wilt gebruiken om er zaken aan vast te koppelen.
Snijpunten van lijnen en cirkels zijn ook bruikbaar.

OPTIES VERLATEN

Verlaat opties door naar AANWIJSTOESTAND te gaan. Dat is bijvoorbeeld nodig bij rechter EXTRA-button met HIDE/SHOW of COLOUR.

AANWIJSTOESTAND

Door klikken op  kom je in aanwijstoestand. Dan zit je zeker niet meer in een van de optietoestanden; je kunt dan gevaarloos slepen en dingen aanklikken..

OBJECTEN WISSEN EN SCHERM SCHOONMAKEN

Selecteer door aanklikken in AANWIJSTOESTAND wat je wilt weggooien;
(met SHIFT + aanklikken kun je meer dingen tegelijk selecteren).
Tik op de toets Delete of Back Space.
Met EDIT>SELECTALL kun je alles tegelijk selecteren en vervolgens weggooien.

HERSTELLEN

Je laatste handeling kun je (meestal) herstellen met menukeuze EDIT > UNDO.

Uitdossen van tekeningen

Onder MEET1, 2 en EXTRA1,2 zitten mogelijkheden voor benoemen, kleuren, lijndikte, verbergen van objecten, enzovoort.

HULP

Gebruik HELP en hoop dat je voldoende informatie krijgt. CABRI geeft in Help-toestand informatie over de gekozen opties. Ook toets F1 zet de HELP aan en uit.

het geval punt-lijn

18 We onderzoeken eerst het geval ‘punt-rechte lijn’.
De stappen van de voorbereidingsfase en de constructiefase hebben we in de vorige paragraaf gevonden. De laatste drie stappen zijn bedoeld om de tekening zo duidelijk mogelijk te maken.

Hoe construeer je een punt op de conflictlijn van een punt en een lijn?

1. Teken een punt *F*.
2. Teken een lijn *l*.
3. Teken een ***nieuw*** punt *V* op *l*.

(voorbereiding)

4. Teken de loodlijn in *V* op *l*.
5. Teken de middelloodlijn van *V* en *F*.
6. Markeer het snijpunt van de twee lijnen.

(constructie)

7. Zet de namen bij de punten *F*, *V* en *P*.
8. Teken de lijnstukken *FP* en *VP* en kleur ze groen.
9. Teken lijnstuk *FV* en kleur dit lijnstuk geel.

(verfraaiing)

a. Voer deze constructie uit.
Je kunt een snijpunt markeren met de optie TEKEN 1 > INTERSECTION POINT.
Je kunt punten benoemen met de optie EXTRA 1 > LABEL.
Je kunt objecten inkleuren met de optie EXTRA 2 > COLOUR.

b. Versleep nu punt *V* en kijk wat er met punt *P* gebeurt. Dat punt doorloopt nu de conflictlijn. Let goed op driehoek *FPV*. Wat verandert wel en wat niet?

c. Met de optie EXTRA 1 > ANIMATION kun je de computer als het ware als een flipperkast gebruiken. Kies deze optie en klik punt *V* aan. Als je nu *V* probeert te verslepen, zie je dat een veer gespannen wordt. Probeer het en laat *V* losschieten.
Ter aanvulling nog dit:
- Hoe verder je de muis verschuift, hoe verder wordt de veer gespannen en hoe harder zal punt *V* langs lijn *l* schieten. Trek dus niet te hard!
- Het kan zijn dat punt *V* uiteindelijk buiten je scherm tot stilstand komt; met de optie EDIT > UNDO krijg je de situatie voor het ‘afschieten’ terug.
- Je kunt de animatie ook op elk moment stoppen door ergens op het tekenvel te klikken of met ESC.

d. Tot nu toe zie je steeds punt *P* bewegen, maar de conflictlijn zelf kreeg je niet te zien.
Deze kromme maak je zichtbaar met de optie CONSTRUEER 1 > LOCUS.
Kies deze optie. Klik dan **eerst op *P* en dan op *V*.** De computer tekent nu de conflictlijn.

locus = plaats

Opmerking: ‘Locus’ is het Latijnse woord voor ‘plaats’. Met de optie LOCUS laat je de plaats tekenen van alle punten *P* als *V* langs lijn *l* verschuift. Men spreekt ook wel van de ‘meetkundige plaats’.

19 Onderzoek nu hoe de vorm van deze conflictlijn verandert als je de afstand van *F* tot lijn *l* kleiner of groter maakt. Je kunt ook lijn *l* draaien en kijken wat er gebeurt.

20 Als je punt *V* versleept, draait de middelloodlijn van *FV*.
a. Welke rol lijkt deze middelloodlijn steeds voor de conflictlijn te spelen?

b. Met de LOCUS-optie kun je ook vele standen van deze middelloodlijn in één keer laten tekenen. Bedenk welke handelingen je moet doen en laat de computer ook nog deze locus tekenen.

parabool

De conflictlijn van een punt *F* en een rechte lijn *l* heet een *parabool*.
In de volgende paragraaf geven we een precieze meetkundige definitie van de parabool.

21 Schrijf in het volgende overzicht op wat je nu al van parabolen weet.

Een parabool is de conflictlijn van ....
Een parabool lijkt symmetrisch in ....
De top van de parabool is het midden van ....
De parabool lijkt smaller/breder als de afstand tussen brandpunt en richtlijn kleiner wordt.
De .... lijken raaklijnen aan de parabool te zijn.

het geval punt-cirkel, deel 1

We onderzoeken nu het geval punt-cirkel.

We onderzoeken eerst de situatie waar punt *F* buiten de cirkel ligt.

22 **a.** Maak het tekenscherm schoon.
b. Pas in het constructieschema voor de parabool twee regels aan, dan heb je al het constructieschema voor de nieuwe conflictlijn.
Gebruik in regel 4 de optie TEKEN 2 > RAY om een ‘halve lijn’ te tekenen die in punt *M* begint. Klik eerst op *M* en dan pas op *V*, anders gaat de straal de verkeerde kant uit.
c. Voer de constructie verder uit.
d. Voer nu dezelfde onderzoeksstappen uit als bij opgave **18**, dus
- versleep *V* eerst met de hand
- gebruik de ‘flipperkast’-optie (ANIMATION)
- laat de conflictlijn met de LOCUS-optie tekenen
- laat de middelloodlijnen *mll*(*F*, *V*) met de LOCUS-optie tekenen.

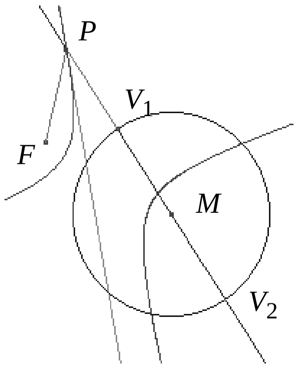
Bij de parabool leken de middelloodlijnen het hele buitengebied van de parabool te vullen. In dit geval laten de middelloodlijnen een gebied vrij dat erg lijkt op het binnengebied van de conflictlijn!

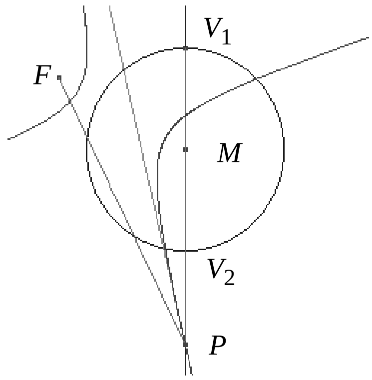
23 **a.** Bekijk nog eens wat er gebeurt als *V* versleept wordt. Niet altijd snijden de middelloodlijn en de halve lijn elkaar.
Pas in het constructieschema regel 4 zo aan, dat de computer niet de *halve* lijn maar de *hele* lijn door *M* en *V* tekent.
b. Verwijder de halve lijn op het scherm en voer de nieuwe constructie uit. Als je nu de verzameling punten *P* met de LOCUS-optie laat tekenen, merk je dat de getekende figuur uit twee delen bestaat; twee takken heeft, zegt men wel. Deze twee takken zijn ieder apart spiegelsymmetrisch, maar ze lijken ook elkaars spiegelbeeld te zijn. Welke twee lijnen zijn de symmetrieassen?
c. Er zijn twee punten *V* op de cirkel waarvoor de constructie op geen van de twee takken een punt *P* oplevert. Probeer deze twee plaatsen op de cirkel te vinden.
d. Welke vorm heeft in deze gevallen de driehoek *FVM*?
e. Welke rol speelt in deze gevallen de middelloodlijn *mll*(*F*, *V*) voor de conflict-

lijn?

f. En welke rol lijkt de middelloodlijn *mll*(F, V) te spelen als V elders op de cirkel ligt?

24 Je ziet hier twee schermafdrukken. In het linker plaatje is P een punt van de tak die helemaal buiten de cirkel ligt. In het rechter plaatje ligt P op de tak die de cirkel snijdt. De lijn door P en M snijdt in beide plaatjes de cirkel in punten V_1 en V_2.





Beantwoord voor beide plaatjes de volgende vragen.

a. Welk van de punten V_1 en V_2 is *volgens het plaatje* het voetpunt van P op de cirkel?

b. En welk van de twee punten is *volgens de constructie* het voetpunt van P?

c. Voor welk van deze punten geldt d(F, P) = d(V, P)?

d. Wat kun je voor het andere punt zeggen over deze twee afstanden?

hyperbool

De conflictlijn van een cirkel en een punt buiten de cirkel is een van de twee takken van een *hyperbool*. In de volgende paragraaf geven we een nauwkeurige definitie van de hyperbool.

25 Verwerk je resultaten in de volgende korte samenvatting.

Een hyperbool heeft twee takken.
De conflictlijn van een cirkel en een punt F buiten de cirkel is ....
....
Een hyperbool lijkt symmetrisch in ....
De hyperbool lijkt smaller / breder te worden als de afstand tussen punt F en de cirkel kleiner wordt.
De .... lijken raaklijnen aan de hyperbool te zijn.
Voor twee punten V op de cirkel levert de constructie geen punt P van de hyperbool op. In deze gevallen

– is driehoek *VFM* ....
– is *mll* (V, F) .... van de hyperbool.

het geval punt-cirkel, deel 2

26 Versleep nu punt *F* naar het binnengebied van de cirkel. Maak desnoods eerst de cirkel wat groter door vanuit aanwijstoestand eraan te trekken.
Voer ook voor deze situatie alle onderzoeksstappen uit, dus:
- versleep eerst *V* met de hand, probeer te begrijpen wat er gebeurt
- gebruik dan de ANIMATION-optie
- laat dan de conflictlijn met de LOCUS-optie tekenen; verander de plaats van *A* binnen de cirkel en onderzoek de gevolgen voor de vorm van de conflictlijn
- laat dan de middelloodlijnen *mll*(*A*, *V*) met de LOCUS-optie tekenen.

ellips

De conflictlijn van een cirkel en een punt *A* binnen de cirkel is een *ellips*.
In de volgende paragraaf geven we een nauwkeurige definitie van de ellips.

27 **a.** Een ellips lijkt twee symmetrieassen te hebben. Welke twee lijnen zijn dat?
b. Teken deze twee lijnen met CABRI. Verander de vorm van de ellips en kijk of deze twee lijnen de symmetrieassen van de ellips blijven.
c. Versleep punt *F* zó, dat het met het middelpunt van de cirkel samenvalt.
Wat gebeurt er met de ellips?
En wat kun je in dit geval over symmetrieassen zeggen?

28 Maak nu voor de ellips een samenvatting van de belangrijkste resultaten.

Een ellips is de conflictlijn van .... Een ellips lijkt symmetrisch in .... De ellips lijkt smaller / breder te worden als de afstand tussen punt *F* en de cirkel kleiner wordt. De .... lijken raaklijnen aan de ellips te zijn. ....

Hoofdstuk 2
Parabool, ellips en hyperbool

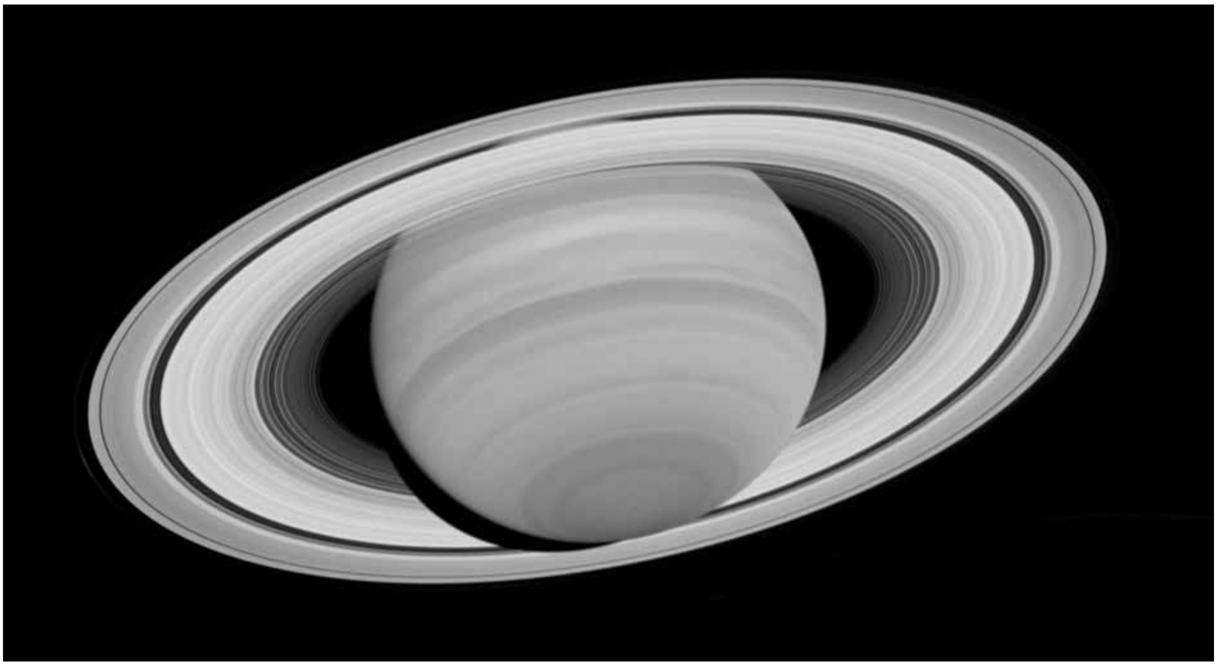


Foto ommezijde: Saturnus, gefotografeerd met de Hubble Space Telescope.

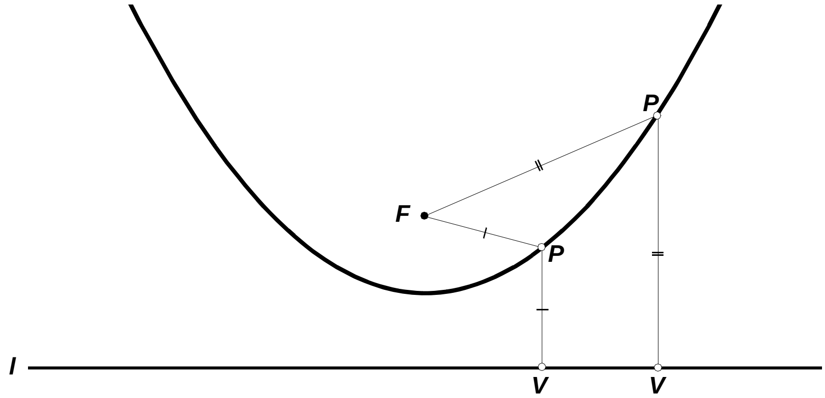
De planeet Saturnus draait in 29 jaar op een afstand van 1 429 400 000 km om de zon en heeft zelf een diameter van 121 000 km.
Rond de evenaar van Saturnus vindt een gigantische storm plaats, groot genoeg om de hele aarde in te doen verdwijnen. Zie de witte vlek op de foto.
Saturnus bezit een een antaal ringen die op de foto goed zichtbaar zijn. Deze ringen zijn in werkelijkheid cirkelvormig, maar doordat je er schuin op kijkt, worden ze vervormd weergegeven. De vorm op de foto is exact die van een ellips.
De Hubble Space Telescope draait in een licht ellipsvormige baan om de aarde op een hoogte van ongeveer 600 km. Door de goede atmosferishe omstandigheden op die hoogte – geen atmosfeer om precies te zijn – kunnen zeer gedetailleerde foto's worden gemaakt.
Deze telescoop maakt geen gebruik van lenzen maar van een gebogen spiegel. De hoofdspiegel van het systeem is een parabolische spiegel met een diameter van 2.5 meter.
In dit hoofdstuk komen vormen als ellips en parabool aan bod. De werking van de parabolische spiegel berust op de meetkunde van dit hoofdstuk; dat een in één richting samengedrukte cirkel een ellips is, wordt in hoofdstuk 3 aangetoond.

5: Definities en eigenschappen van parabool, ellips en hyperbool

wat is een parabool?

definitie parabool

Laat *F* een punt zijn en *l* een rechte lijn die niet door *F* gaat.
De verzameling van alle punten *P* waarvoor geldt: d(*P* , *F*) = d(*P* , *l*) heet een *parabool.*
***F* heet het *brandpunt* van de parabool, *l* heet de *richtlijn* van de parabool.**



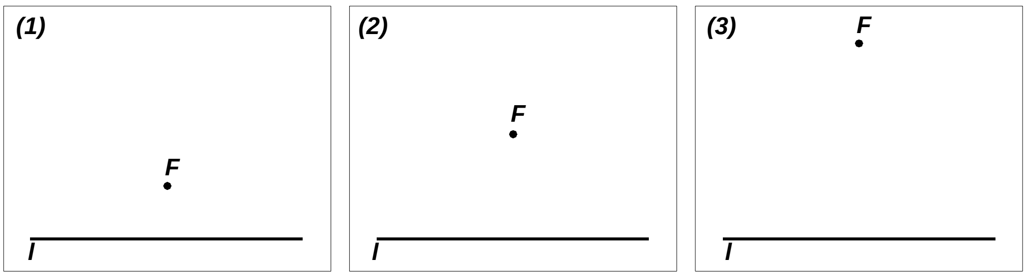
Dat *F* een brandpunt (Latijn: *focus*) wordt genoemd, vindt zijn oorsprong in een mooie toepassing: de parabolische spiegel. Dat zal worden verklaard in paragraaf 7 van dit hoofdstuk.
Je kent de naam parabool in verband met de grafiek van bijvoorbeeld $y = x^2$. In hoofdstuk 3 (Analytische Meetkunde) zal worden aangetoond dat die grafiek inderdaad aan de definitie van een parabool voldoet.

1 Wijkt de definitie veel af van de eerdere omschrijving?

symmetrie, top

Een parabool wordt dus geheel bepaald door een punt *F* en een rechte lijn *l* (niet door *F*). De figuur gevormd door *F* en *l* is symmetrisch, en de parabool is dat dus ook.
Het punt van de parabool dat op de symmetrieas ligt, heet de *top* van de parabool. Het is het punt van de parabool dat de kleinste afstand heeft tot richtlijn en brandpunt.

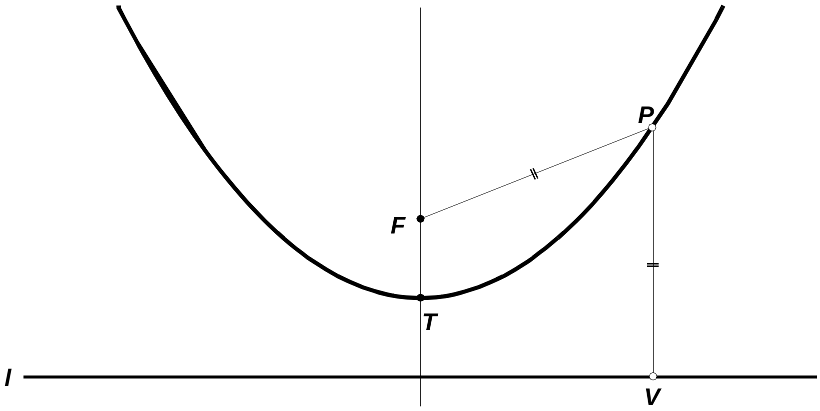
2 Als je de top en een paar punten hebt (zoals die in opgave **11 a**, bladzijde 14), kun je al een redelijke schets maken van de parabool. Voer dit uit in onderstaande drie situaties.



alle parabolen zijn gelijkvormig

Het lijkt of er onderscheid gemaakt kan worden tussen 'smalle' en 'brede' parabolen, maar dat is heel betrekkelijk! Als je de parabool van (1) uitvergroot zó dat de afstand van *F* tot *l* gelijk wordt aan de afstand in (3), dan krijg je de parabool van (3). Door in- of uitzoomen kun je bij elke twee parabolen de één gelijk maken aan de andere. We zeggen daarom dat alle parabolen *gelijkvormig zijn.*

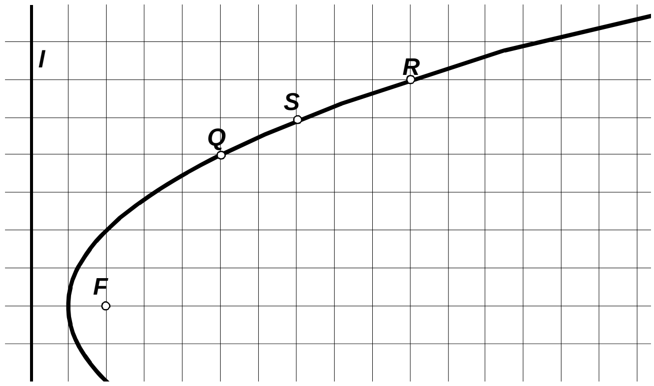
3 Hier is de symmetrieas in de figuur ook aangegeven.



a. Test of de figuur goed getekend is door het tekenen van een cirkel met middelpunt *P* die aan *l* raakt. Wat moet er nu kloppen?

b. Laat zien dat er nóg een parabool met dezelfde richtlijn en symmetrieas is, die ook door *P* gaat; bepaal nauwkeurig het brandpunt van die parabool.

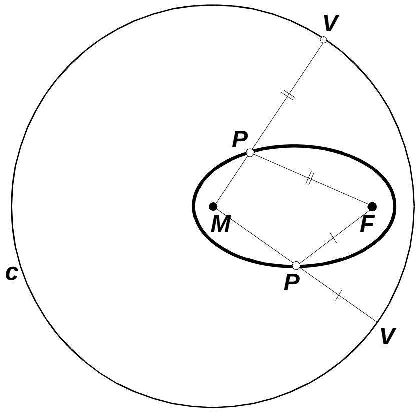
4 Hier is een parabool getekend met een vierkantenrooster op de achtergrond. Brandpunt en richtlijn liggen precies op dat rooster.



Toon via een berekening aan dat de roosterpunten *Q* en *R* volgens de definitie wel op de parabool liggen en *S* niet.

wat is een ellips?

De ellips hadden we omschreven als de conflictlijn van een cirkel *c* en een punt *F* binnen de cirkel. Je zou daar direct – net als bij de parabool – een definitie van kunnen maken. Die zou er dan ongeveer zó uit zien:



> Laat *c* een cirkel zijn en *F* een punt in het binnengebied van *c*.
> De verzameling van alle punten *P* waarvoor geldt: d(*P*, *F*) = d(*P*, *c*) is een ellips.

Maar dat is niet erg fraai vanwege het volgende. Een ellips wordt geheel bepaald door een cirkel *c* en een punt *F* (binnen *c*). De figuur gevormd door *F* en *c* heeft één symmetrieas (de lijn die *F* ver-

bindt met het middelpunt M van c). Die lijn is dus ook symmetrieas van de ellips.
De ellips bleek echter nog een tweede symmetrieas te hebben, namelijk de middelloodlijn van MF. Dat is niet direct te zien in de voorlopige definitie, maar wordt wel duidelijk in de volgende opgave.

5 Bekijk de figuur op bladzijde 28. De cirkel c heeft straal r.

a. Leg uit dat de voorwaarde $d(P, F) = d(P, c)$
gelijkwaardig is met: $d(P, M) + d(P, F) = r$.

b. Verklaar waarom de middelloodlijn van MF een symmetrieas van de ellips is.

De definitie van de ellips, zoals die van oudsher in de boeken is te vinden, gebruikt de tweede voorwaarde genoemd in opgave **5a**.
In die voorwaarde hebben de punten F en M geen verschillende rollen meer; dat was oorspronkelijk wel het geval. Om die gelijkwaardigheid te benadrukken, noemen we de twee punten nu voortaan F_1 en F_2. Zo krijgen we uiteindelijk:

standaard-definitie van de ellips

F_1 en F_2 zijn twee verschillende punten.
De verzameling van alle punten P waarvoor de *som* van de afstanden tot F_1 en F_2 constant is, heet een *ellips*.
F_1 en **F_2 heten de *brandpunten* van de ellips.**

Merk op: de constante moet groter zijn dan de afstand tussen de brandpunten.
Op de term brandpunten komen we later nog terug.

6 Hier is een manier om een elliptisch bloemperk in de tuin uit te zetten.

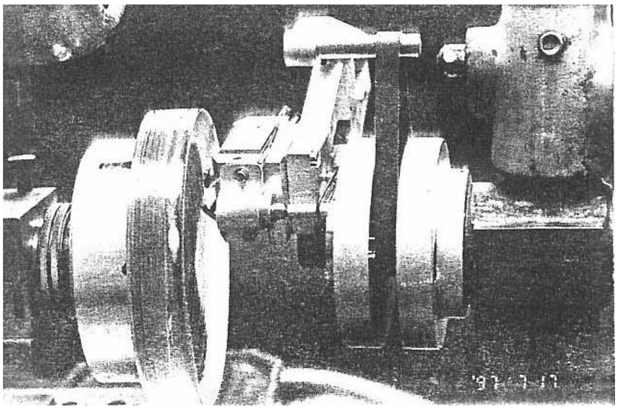
> Sla twee paaltjes in de grond op twee meter afstand van elkaar.
> Knoop de uiteinden van een 9 meter lang touw aan elkaar zodat er een lus ontstaat.
> Leg deze lus om de paaltjes, span het touw strak met een stevige pen.
> Beweeg de pen rond en kras met de punt van de pen een mooie ovaal in de grond.

a. Waarom heeft een op zo'n manier uitgezet bloemperk de vorm van een ellips?

b. Hoe lang en hoe breed wordt deze ellips?

c. Hoe verandert de lengte en de breedte van de ellips als je de twee paaltjes op minder dan 2 meter van elkaar in de grond slaat?

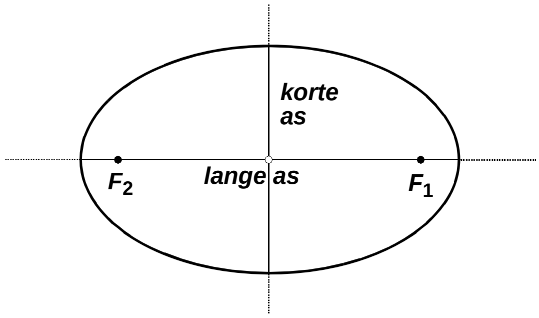
d. Het is ook mogelijk met het touw een ellips uit te zetten die 3 meter breed is.
Op welke afstand moet je dan de paaltjes in de grond slaan?



Dit zogenaamde tuinmansprincipe wordt toegepast bij het slijpen van speciale lenzen, die geen bolvormig maar een ellipsoïdaal oppervlak moeten hebben.
Hiernaast zie je de slijprobot WAGNER van de vakgroep Optica van de TU Delft in actie. Zichtbaar is de riem met bovenaan het bewegende punt.
De brandpunten zijn vaste staafjes tussen de twee schijven rechts op de foto. Een ander deel van het mechaniek is een pantograaf, waarmee de beweging teruggebracht wordt tot een kleinere schaal, zodat lenzen op de juiste maat worden gefabriceerd. (Bron: *Delft Integraal*, 97-3.)

lange en korte as, toppen

Je hebt gezien dat een ellips twee symmetrieassen heeft:
– de lijn die de brandpunten verbindt;
– de middelloodlijn van de twee brandpunten.



De stukken van de symmetrieassen die binnen de ellips liggen, worden genoemd: *lange as* en *korte as.* Op de lange as liggen de beide brandpunten.
De vier snijpunten van de assen met de ellips worden de *toppen* van de ellips genoemd.

7 Van een punt P is gegeven dat het op een ellips ligt met brandpunten F_1 en F_2 en dat geldt: $d(P, F_1) = 7$ en $d(P, F_2) = 3$. Bovendien geldt $d(F_1, F_2) = 8$.
Hoe lang zijn de beide assen (lange as en korte as) van de ellips?

8 **a.** Twee verschillende ellipsen hoeven niet (zoals twee parabolen) gelijkvormig te zijn. Dat wil zeggen dat bij twee ellipsen het (meestal) niet mogelijk is de een door in- of uitzoomen gelijk te maken aan de andere. Dat blijkt bijvoorbeeld al uit de voorlopige definitie waarbij een ellips wordt bepaald door een cirkel c en een punt F. Verklaar dit.
b. Wat voor vorm heeft de ellips als F samenvalt met het middelpunt van c? En wat weet je dan van de lange as en de korte as?
c. Stel je je twee gelijkvormige ellipsen voor. Aan welke voorwaarde zullen de assen van die ellipsen voldoen?

9 Gegeven twee punten F_1 en F_2 en een getal $r > \mathrm{d}(F_1, F_2)$.
c_1 is de cirkel met middelpunt F_1 en straal r; c_2 is de cirkel met middelpunt F_2 en straal r.
Toon aan dat de conflictlijn van F_1 en c_2 samenvalt met de conflictlijn van F_2 en c_1.

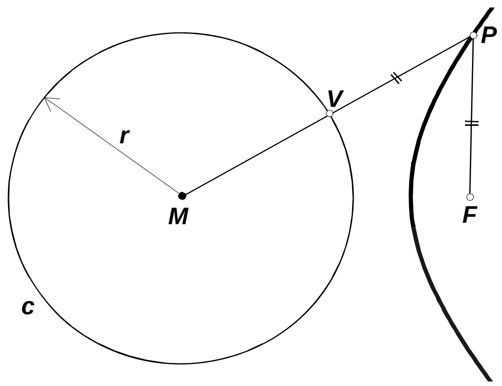
richtcirkel

In de standaarddefinitie van de ellips speelt de cirkel c nu geen rol meer. Bij het construeren van een ellips en bij diverse redeneringen zal hij toch vaak nuttig zijn. Daarom heeft die cirkel een speciale naam: het is een *richtcirkel* van de ellips. Het is een cirkel met als straal de constante uit de definitie en als middelpunt een van de brandpunten. Er zijn dus twee richtcirkels.

10 Waar is de straal van een richtcirkel van een ellips gelijk aan?

wat is een hyperbool?

De conflictlijn van een cirkel en een punt buiten die cirkel vormde slechts één tak van een hyperbool. Sterker nog dan bij de ellips laten we daarom de standaarddefinitie van de hyperbool afwijken van de conflictlijnomschrijving.
In de figuur hieronder zie je één hyperbooltak, getekend volgens de conflictlijnomschrijving.



Zo'n hyperbooltak wordt geheel bepaald door een cirkel *c* en een punt *F* buiten *c*.
De figuur gevormd door *F* en *c* heeft één symmetrieas (de lijn die *F* verbindt met het middelpunt *M* van *c*). Die lijn is dus ook symmetrieas van de hyperbooltak. Het punt van de hyperbooltak dat op de symmetrieas ligt is de top van de hyperbooltak.

11 Leg uit dat de voorwaarde: d(P, F) = d(P, c)
gelijkwaardig is met: d(P, M) – d(P, F) = r.

Met die laatste voorwaarde zijn we al dicht bij de definitie van een hyperbool.
Maar de punten *M* en *F* zijn hier niet, zoals bij de ellips, uitwisselbaar. Bij een som van twee afstanden is de volgorde niet belangrijk, bij een verschil wel.

12 a. Ga na dat de verzameling punten *P* die voldoen aan d(P, F) – d(P, M) = r een nieuwe hyperbooltak is, namelijk het spiegelbeeld van de hyperbooltak die hoort bij de voorwaarde d(P, M) – d(P, F) = r.
b. Voor welke cirkel en welk punt is de nieuwe hyperbooltak de conflictlijn?

absoluut verschil

De hyperbooltak bedoeld in **12 a** vormt samen met de andere tak een volledige hyperbool. Ofwel: het punt *P* ligt op de hyperbool als:

$$d(P, M) - d(P, F) = r \quad \text{óf} \quad d(P, F) - d(P, M) = r.$$

Korter genoteerd: *P* ligt op de hyperbool als:

$$d(P, M) - d(P, F) = \pm\, r$$

Of, met gebruikmaking van de *absolute waarde:*

$$|\, d(P, M) - d(P, F)\, | = r$$

Spreek uit:

het absolute verschil van d(P, M) en d(P, F) is gelijk aan r.

Om te benadrukken dat de punten M en F in deze voorwaarde gelijkwaardig zijn, noemen we ze liever F_1 en F_2. De definitie van de hyperbool, zoals die in de meeste boeken is te vinden, luidt dan ten slotte:

standaard-definitie van de hyperbool

F_1 en F_2 zijn twee verschillende punten.
De verzameling van alle punten P waarvoor geldt

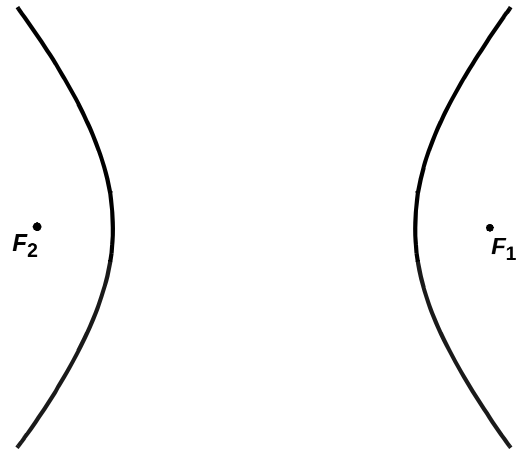
$$| d(F_1, P) - d(F_2, P) | = r$$

heet een *hyperbool.*
F_1 en F_2 heten de *brandpunten* van de hyperbool.

In woorden:

F_1 en F_2 zijn twee verschillende punten.
De verzameling van alle punten P waarvoor het *absolute verschil* van de afstanden tot F_1 en F_2 constant is, heet een *hyperbool.*

13 Hier is een hyperbool getekend met brandpunten F_1 en F_2.



a. Bepaal door meten wat de gebruikte waarde van r is.
b. Kies een punt P op de tak bij F_1 en een punt Q op de andere tak, zodanig dat de vierhoek F_1PF_2Q een parallellogram is. Welke rol speelt het midden van PQ?
c. Doe het nu zó dat F_1PF_2Q een rechthoek is. Met behulp van je geodriehoek is dat niet moeilijk.
d. Lukt het ook F_1PF_2Q vierkant te maken?

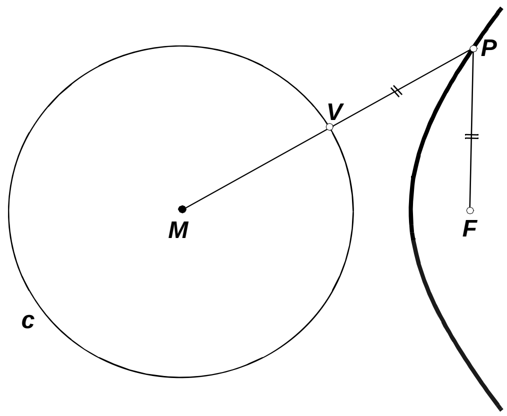
14 Bij een hyperbool is het wat raar om van lange en korte assen te spreken, maar het is wel redelijk om van assen zonder meer te spreken.
Waarom?

15 Omschrijf wat bedoeld kan worden met het begrip *richtcirkel* van een *hyperbool*.

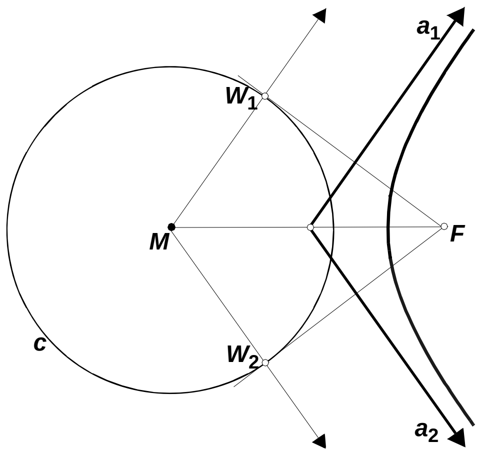
16 Alle parabolen zijn gelijkvormig. Niet alle ellipsen zijn gelijkvormig.
Hoe zit dat met hyperbolen?

de asymptoten van de hyperbool

Een bijzonderheid die je al eerder bij de hyperbooltak als conflictlijn hebt ontdekt, is dat de voetpunten van de conflictpunten *P*, slechts op een deel van de cirkel liggen. Kijk maar in de figuur die bij de conflictbeschrijving hoort.



In de figuur hieronder zijn W_1 en W_2 juist de grenspunten waar *V* tussen moet blijven. W_1 en W_2 zijn de raakpunten van de raaklijnen uit *F* aan de cirkel. De lijn MW_1 is evenwijdig met de middelloodlijn van FW_1 en levert daarom geen punt *P* op. Hetzelfde kan worden gezegd van MW_2 en de middelloodlijn van FW_2.

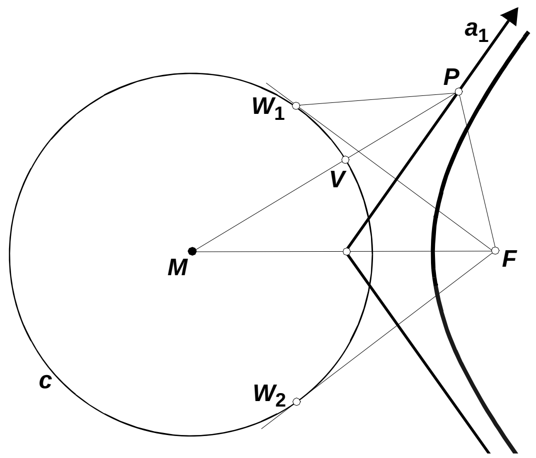


De middelloodlijnen van FW_1 en FW_2 worden de *asymptoten* (zeg a_1 en a_2) van de hyperbooltak genoemd. Als je het voetpunt *V* over de boog W_1W_2 laat lopen, dan doorloopt het punt *P* de hyperbooltak. Komt *V* in de buurt van W_1 of W_2, dan loopt *P* ontzettend ver weg; de afstand tot a_1 (of a_2) wordt dan heel klein. Die afstand nadert tot 0 als *V* tot W_1 (of W_2) nadert. In een extra opgave (nummer **19**) wordt daarop ingegaan; later bewijzen we dit ook nog met een andere methode.

17 Het lijkt erop dat de hyperbooltak in zijn geheel *binnen* de hoek gevormd door de halve lijnen a_1 en a_2 ligt. Maar wat er gebeurt als V heel dicht bij een van de grenspunten ligt, kun je niet zien. Om te bewijzen dat de hyperbooltak inderdaad binnen de hoek blijft, neem je een willekeurig punt P op een van de asymptoten. Daarvan kan worden bewezen dat het tot de invloedsfeer van c behoort, met andere woorden dat:

$$d(P, V) < d(P,F)$$

Bewijs dit laatste.

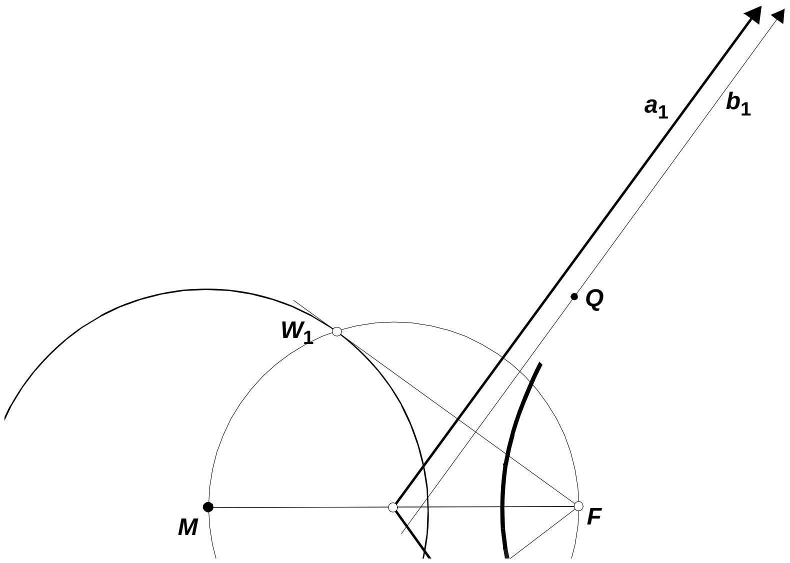


18 De asymptoten in deze figuur maken een stompe hoek.
Ontwerp een situatie waarbij de asymptoten loodrecht op elkaar staan.

Bij een volledige hyperbool – dus met beide takken – zijn de asymptoten hele lijnen, dat spreekt vanzelf.

extra, onderzoek asymptoot

19 Hieronder zie je een deel van dezelfde tekening, iets uitvergroot. Er is een lijn b_1 toegevoegd, evenwijdig aan a_1 aan de kant van F. Op die lijn ligt het punt Q.



a. Teken nauwkeurig de cirkel met middelpunt Q die door F gaat.

b. Snijdt deze cirkel de cirkel c? Wat betekent dat voor punt Q? Ligt het aan de F-kant van de hyperbooltak of juist aan de andere kant?

c. Herhaal het experiment met een punt R, dat verderweg ligt op de lijn b_1. Teken weer de cirkel om R die door F gaat. Er valt iets op aan de snijpunten van de beide cirkels met de lijn W_1F. Waarom moet dat inderdaad hetzelfde punt zijn?

d. Als je R steeds verder weg legt op de lijn b_1, wordt de cirkel om R die door F gaat ook steeds groter. Licht toe waarom je R zó ver weg kunt leggen, dat die cirkel op den duur de cirkel c niet meer snijdt.

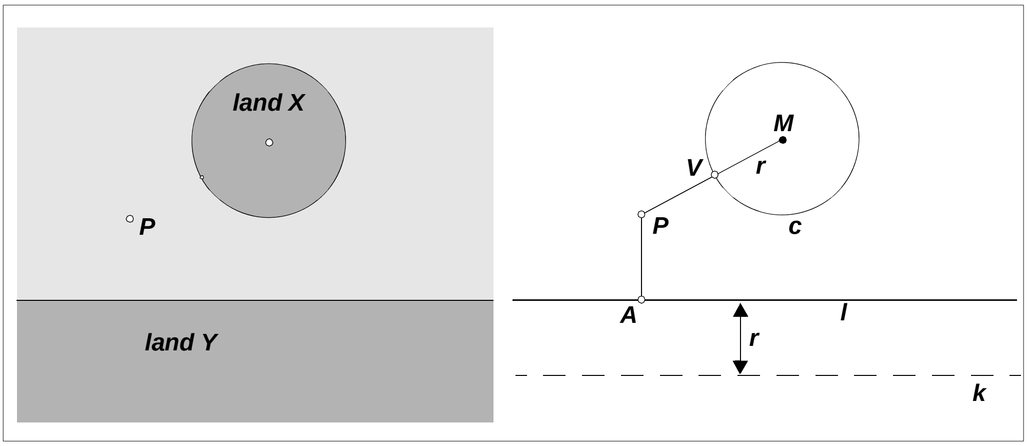
e. Hoe volgt daar nu uit: lijn b_1 snijdt de hyperbooltak?

6: Conflictlijnen herleiden en opsplitsen

De tabel van paragraaf 3, bladzijde 14, is nu voor een groot deel ingevuld. Je leert in deze paragraaf hoe je de twee ontbrekende gevallen kunt herleiden tot bekende situaties.

conflictlijn tussen ... en ...	punt	rechte lijn	cirkel
punt	middelloodlijn	parabool	ellips, hyperbooltak
rechte lijn		bissectricepaar, middenparallel	
cirkel			

het geval lijn-cirkel



20 **a.** In de linker figuur ligt een cirkelvormig eiland tegenover de rechte kust van een buurland. Schets in deze figuur de conflictlijn.

b. In de rechter figuur is behalve lijn l en cirkel c ook nog een lijn k getekend, die op afstand r evenwijdig aan l loopt.
Voor elk punt P op de conflictlijn geldt $d(P, c) = d(P, l)$ dus $d(P, V) = d(P, A)$.
Leg uit dat voor P dan óók geldt: $d(P, M) = d(P, k)$

c. Welke vorm heeft dus de gezochte conflictlijn?

Opmerking:
Bij de vorige opgave hebben we een belangrijke techniek toegepast.
We hebben de cirkel als het ware gereduceerd tot zijn middelpunt. We keken immers niet meer naar de conflictlijn van een *cirkel* en een ... , maar naar de conflictlijn van een *punt* en een ....
Als gevolg daarvan moesten we

de afstand	$d(P, c)$	vervangen door	$d(P, M) - r$.
De vergelijking	$d(P, c) = d(P, l)$	ging over in	$d(P, M) = d(P, l) + r$.

We konden $d(P, l) + r$ opvatten als de afstand van P tot een lijn k die op afstand r evenwijdig aan l loopt.

Dus: de voorwaarde $d(P, c) = d(P, l)$ is gelijkwaardig met $d(P, M) = d(P,k)$.

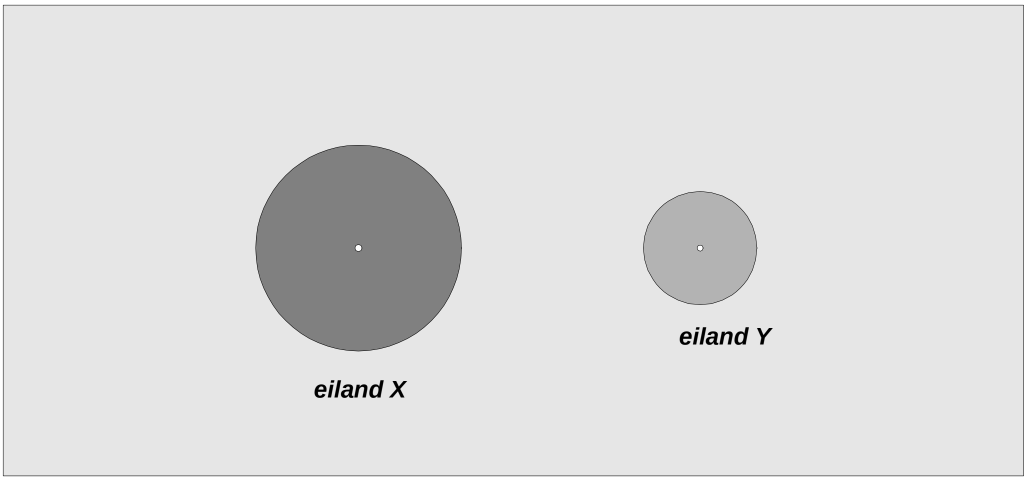
Zo hebben we het probleem herleid tot een bekende situatie.
Deze techniek passen we ook bij de opgaven **22** en **23** toe.

geval cirkel-cirkel

Bij het geval cirkel - cirkel beperken we ons tot de situaties waarin de cirkels geen gemeenschappelijke punten hebben. We bekijken eerst twee bijzondere gevallen.

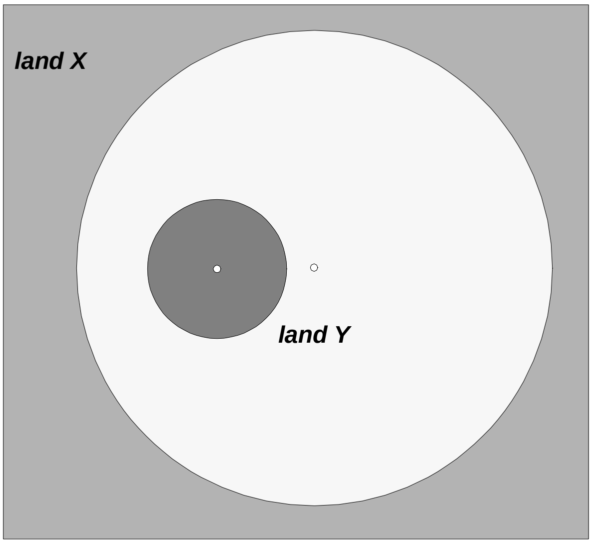
21 **a.** Welke vorm heeft de conflictlijn van twee even grote cirkels die buiten elkaar liggen?
b. Welke vorm heeft de conflictlijn van twee cirkels met verschillende straal, maar hetzelfde middelpunt?

22 Bepaal nu de conflictlijn van deze twee cirkelvormige eilanden.



Een goede aanpak is:
- teken eerst een paar punten van de conflictlijn
- stel een vermoeden op: welke bekende conflictlijn zou het kunnen zijn
- maak een nieuwe tekening met relevante gegevens
- herleid het probleem tot een bekende situatie.

23 Het cirkelvormige eiland *Y* ligt in een cirkelvormig binnenmeer van land *X*.
a. Beredeneer welke vorm de conflictlijn van deze twee landen heeft.
b. Teken enkele punten van de conflictlijn en schets vervolgens de conflictlijn.

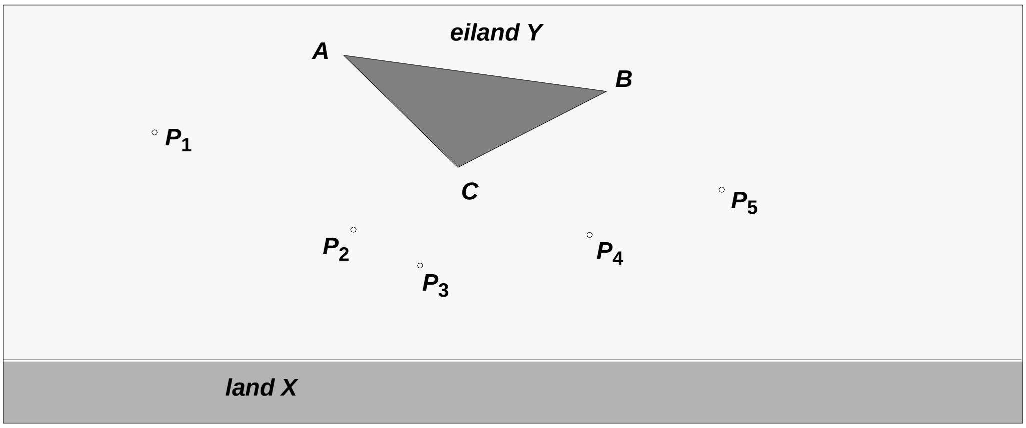


24 Hoe verandert de vorm van deze conflictlijn als
a. de straal van eiland *Y* kleiner/groter wordt gemaakt?
b. de afstand van de middelpunten van de twee cirkels kleiner/groter wordt gemaakt?

25 Verwerk de resultaten van de opgaven **22** en **23** in het overzichtsschema.

We onderzoeken nu paar situaties waarin we het te verdelen gebied in sectoren moeten opsplitsen. Dergelijke problemen heb je ook in hoofdstuk 5 van AFSTANDEN, GRENZEN EN GEBIEDEN bij iso-afstandslijnen ontmoet. Toen speelden kapen een belangrijke rol.

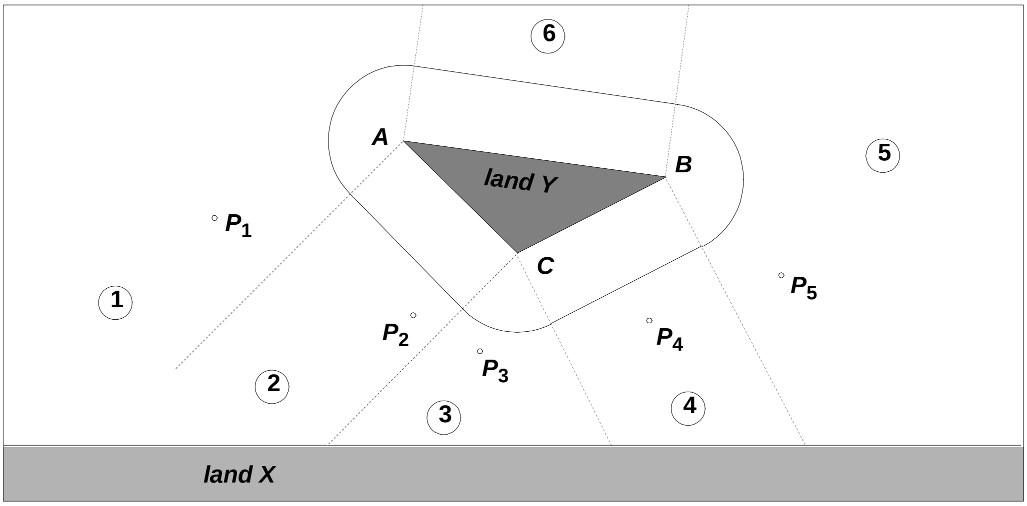
26 Een driehoekig eiland *Y* ligt tegenover de rechtlijnige kust van land *X*. In het gebied tussen de twee landen zijn vijf punten aangegeven.



a. Teken voor elk van deze vijf punten de voetpunten op de rand van land *X* en ook op de rand van eiland *Y*.

b. Zoek voor elk van de punten uit of het dichter bij land *X* of bij land *Y* ligt.

c. Schets hoe ongeveer de conflictlijn van de twee landen loopt. Zorg ervoor dat de punten P_1 tot en met P_5 aan de juiste kant van de conflictlijn liggen.



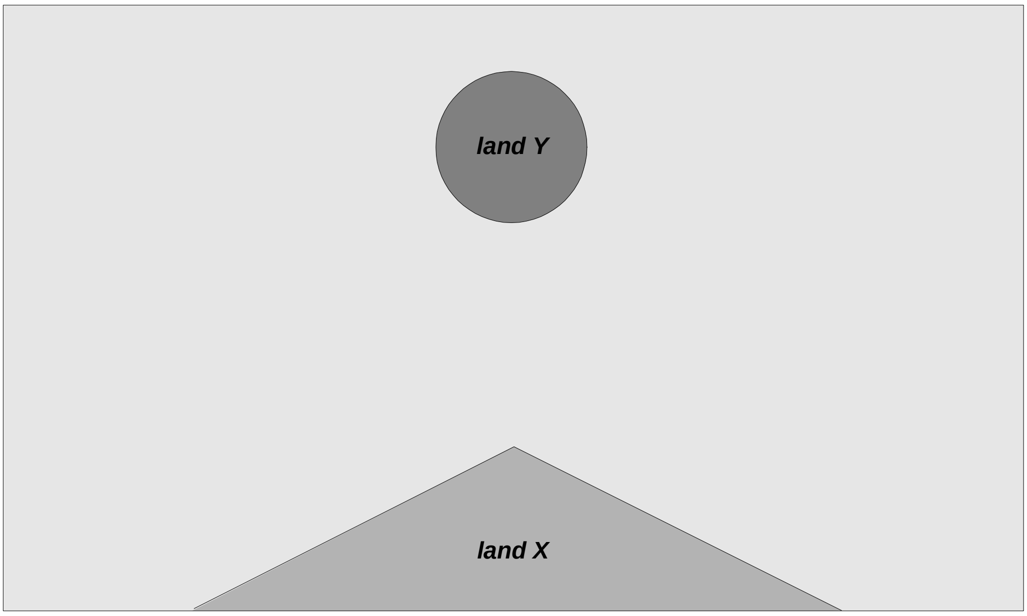
27 In deze figuur is een iso-afstandslijn van het eiland getekend. Deze lijn bestaat uit cirkelbogen en rechte lijnstukken. De delen van de iso-afstandslijn sluiten op de stippellijnen op elkaar aan. Deze stippellijnen zijn ook van groot belang voor de conflictlijn.

a. De stippellijnen verdelen het gebied rond het eiland in zes sectoren.
Geef voor de sectoren 1 tot en met 5 aan welke vorm de conflictlijn in dat deel heeft. Bedenk eerst met welk geval uit het overzichtsschema je te maken hebt.

b. Sector 6 ligt ‘achter’ het eiland. Onderzoek of de conflictlijn ook deze sector doorloopt.

c. Teken in de figuur een (ten opzichte van opgave **26**) verbeterde versie van de conflictlijn.

extra opgave



28 Bij de situatie hierboven bestaat de conflictlijn van de twee landen uit drie delen.
Schets deze conflictlijn.
Gebruik de technieken die je in deze paragraaf hebt gezien om de conflictlijn precies te kunnen beschrijven.
Geef er een duidelijke redenering bij.

7: De raaklijneigenschap van de parabool

Bij praktische toepassingen van parabolen, ellipsen en hyperbolen wordt vaak gebruikgemaakt van de bijzondere *raaklijneigenschap* van deze krommen. Je hebt *gezien* dat de middelloodlijnen die in de constructies optraden raaklijnen waren aan de parabool, de ellips en de hyperbool. In deze paragraaf zullen we dat bewijzen en dan direct gebruik maken van de eigenschappen van de raaklijnen bij belangrijke toepassingen van de drie figuren. De belangrijkste toepassing heeft te maken met spiegelen.

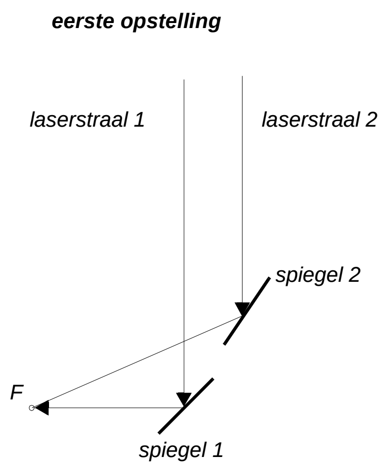
spiegelwet

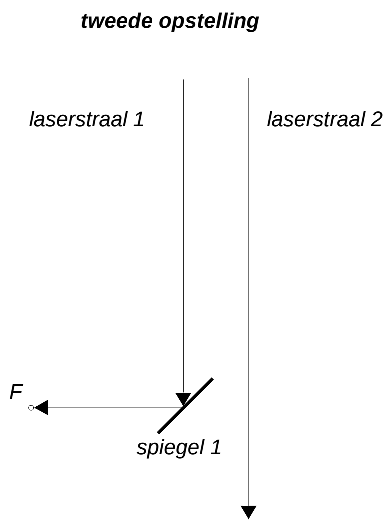
Zoals bekend geldt voor vlakke spiegels de *spiegelwet*:

hoek van inval = hoek van terugkaatsing

Als je een vlakke spiegel hebt en je laat er een evenwijdige bundel licht op invallen, dan ontstaat er een evenwijdige uittredende bundel. Dat is niet spectaculair.
Ons eerste doel is een spiegel te ontwerpen *die een evenwijdige bundel in een convergerende bundel omzet*, dat wil zeggen in een bundel die door één punt gaat. Dat is vast toepasbaar!

In de linker figuur zie je twee spiegels en twee laserstralen. Laserstraal 1 (2) wordt teruggekaatst via spiegel 1 (2). Beide stralen bereiken punt *F*.

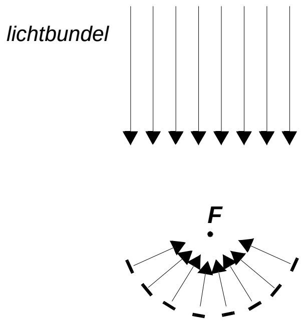




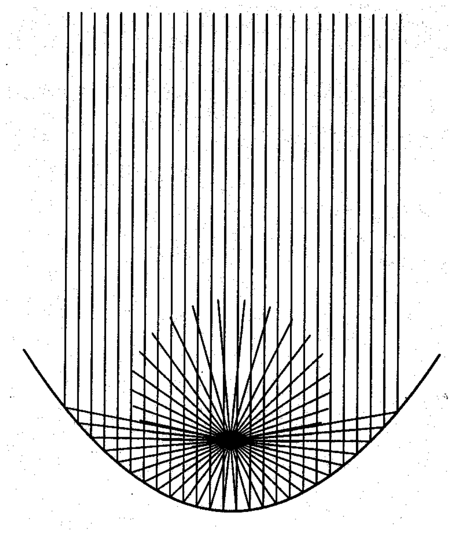
29 **a.** Hoe kun je met je geodriehoek in de linker figuur controleren dat de gereflecteerde stralen door *F* gaan?
b. Teken in de rechter figuur ook een spiegel 2 zó dat laserstraal 2 naar punt *F* gekaatst wordt (op de plaats van de punt van de pijl van laserstraal 2).
c. Wat merk je op als je de twee standen van spiegel 2 vergelijkt?

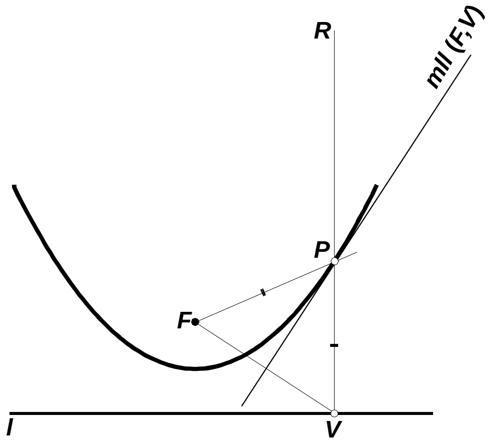
gebogen spiegel

Je kunt honderd evenwijdige laserstralen in principe met honderd vlakke spiegeltjes naar één bepaald punt kaatsen. Erg praktisch is dit niet, de spiegeltjes mogen elkaar niet in de weg zitten, om maar eens wat te noemen. Met een *bundel* stralen is het zelfs onmogelijk. Daarvoor heb je als het ware oneindig veel superkleine spiegeltjes nodig die samen een gebogen spiegel vormen. Die moet dan wel in een bepaalde vorm geslepen zijn. Ook voor een kromme spiegel geldt de spiegelwet. Met hoek van inval en hoek van terugkaatsing zijn dan de hoeken met de *raaklijn* aan de kromme bedoeld!



In de linker figuur hieronder zie je een spiegel met de gewenste kromme vorm: alle lichtstralen van de evenwijdige bundel convergeren na terugkaatsing naar één punt. Daarnaast zie je een tekening van een parabool, zoals je die eerder bent tegengekomen.





De sterke indruk bestaat dat de parabool de gezochte figuur is. Bij *R* zou dan een lichtstraal binnenvallen, evenwijdig aan de as van de parabool; de straal zou bij *P* de parabool treffen en na spiegelen bij *F* aankomen. Omdat dat voor alle stralen evenwijdig aan de as zou gelden, convergeert de bundel na spiegeling inderdaad naar *F*.

Twee zaken moeten eerst nagegaan worden:

I : de lijn *mll*(*F*, *V*) is inderdaad de raaklijn aan de parabool
II : de lijnen *RP* en *PF* gedragen zich ten opzichte van die middelloodlijn volgens de spiegelwet van hoek van inval = hoek van terugkaatsing.

30 Het tweede punt is het makkelijkst aan te tonen. Doe dat eerst zelf.

Je gaat vervolgens bewijzen dat de middelloodlijn van *F* en *V* op punt *P* na geheel buiten de parabool ligt.

Gegeven: ***P*** **is een punt van de parabool met brandpunt** ***F*** **en richtlijn** ***l*****.**
V **is het voetpunt van** ***P*** **op** ***l*****.**
Te bewijzen: ***mll*****(*F* , *V*) ligt op** ***P*** **na buiten de parabool.**

31 Kies een willekeurig punt Q op *mll* (F, V), verschillend van P.
Bewijs nu dat Q buiten de parabool ligt, dat wil zeggen dat $d(Q, F) > d(Q, l)$.
Tip: teken het lijnstuk dat de afstand $\mathrm{d}(Q, l)$ realiseert.

een overweging in de marge

Uit dit bewijs volgt dat *mll*(F, V) op P na buiten de parabool ligt. Is het daarom ook de raaklijn, dat is nu de vraag. Omdat de parabool een gladde figuur is, kun je je haast niet aan die indruk onttrekken. Maar eigenlijk moet je bewijzen dat er maar één zo'n lijn is, die buiten de parabool ligt op punt P na. Bewijzen dat dit inderdaad zo is, gaat op dit moment te ver. In hoofdstuk 3 komen we hier nog op terug.
Aangetoond zal daar worden:
– dat de grafiek van $y = x^2$ terecht met 'parabool' wordt aangeduid en dat bij die grafiek dus ook een brandpunt F een richtlijn l te vinden zijn;
– dat de grafiek van een lineaire benadering aan $y = x^2$ in een punt P *samenvalt met de middelloodlijn mll*(F, V), waarbij V weer het voetpunt is van de loodlijn uit P op l.
Anders gezegd: de raaklijn zoals hij in dit hoofdstuk is gevonden is dezelfde als die van de differentiaalrekening.

Je mag er in het vervolg dan ook van uitgaan dat *mll*(F, V) een raaklijn aan de parabool is. Kortom: je mag van de bij I en II beweerde zaken van de vorige bladzijde voortaan gebruikmaken.

Alles is samengevat in de volgende stelling over de *raaklijneigenschap van een parabool*:

raaklijn-eigenschap van de parabool

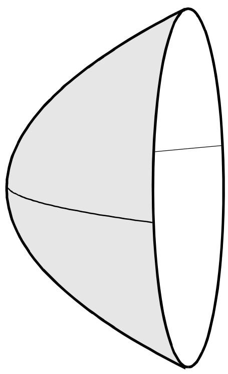
P **is een punt op de parabool met brandpunt** ***F*** **en richtlijn** ***l*****.**
De raaklijn in ***P*** **aan de parabool maakt gelijke hoeken met lijn** ***PF*** **en de loodlijn door** ***P*** **op** ***l*****.**

De natuurkundige betekenis van het voorgaande is:
Alle lichtstralen die evenwijdig aan de as op een parabolische spiegel vallen, worden teruggekaatst in de richting van het brandpunt van de parabool.

32 Vul nu zelf aan:
Als stralen ***uitgaan*** *van het brandpunt F, dan vormen de door de parabolische spiegel teruggekaatste stralen een ....*

paraboloïde

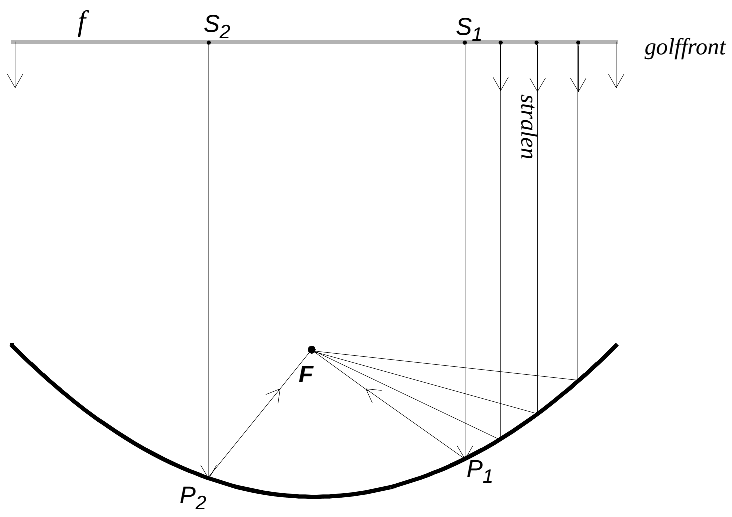
De koplamp van een fiets heeft de vorm van een *paraboloïde*.
Een paraboloïde is een ruimtelijke vorm die ontstaat als je een parabool om zijn symmetrieas wentelt.



33 Wat kun je over de lichtbundel van zo'n fietslamp zeggen:
a. als de gloeidraad van het lampje zich precies in het brandpunt bevindt?
b. als de gloeidraad van het lampje zich een beetje achter het brandpunt bevindt?

parallelle golffronten

Ook schotelantennes en radiotelescopen hebben de vorm van een paraboloïde (zie de foto op de beginpagina van dit hoofdstuk).
Bij de ontvangst van radio- of tv-signalen is het van belang dat alle 'stralen' gelijktijdig het brandpunt bereiken; alleen dan is optimale ontvangst mogelijk.
Je kunt je voorstellen dat een golffront (lijn *f* in onderstaande figuur) uit allemaal punten



bestaat, die met dezelfde snelheid in dezelfde richting bewegen, namelijk de richting van de pijlen.

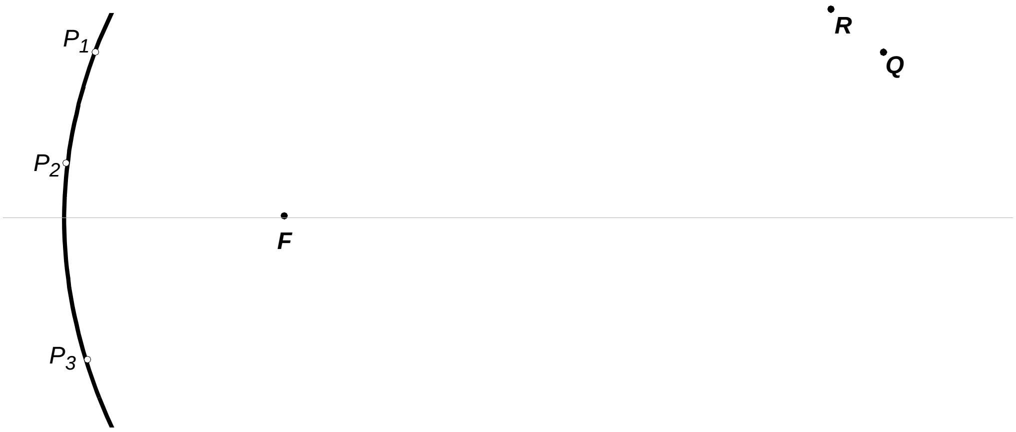
34 Verklaar dat bij een parabolische antenne alle lichtstralen een even lange weg afleggen en er dus aan deze voorwaarde voldaan wordt. Ofwel: toon aan dat de wegen S_1P_1F en S_2P_2F even lang zijn.

Tegenwoordig kun je parabolische antennes zien zoveel je wilt: de satellietantennes die aan veel huizen zijn bevestigd. Ze zijn gericht op satellieten die een vaste positie in nemen boven de evenaar. Dat betekent dat in onze streken de satellietantennes allemaal in zuidelijke richting wijzen. In de stad heb je geen kompas meer nodig om de juiste richting te weten.

35 Weet je nog een paar andere toepassingen van parabolische antennes?

scheve stralen construeren

36 Hieronder zie je een parabolische spiegel; de symmetrieas is aangegeven.



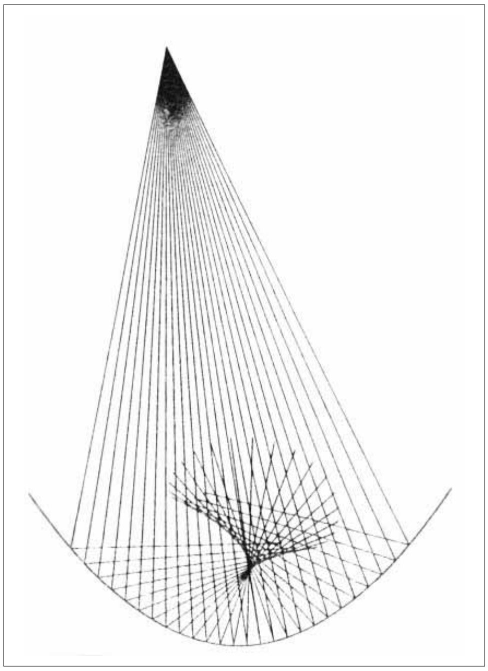
a. Een straal die vanuit Q naar P_1 gaat, is evenwijdig met de as. Teken de straal en het gespiegelde vervolg.

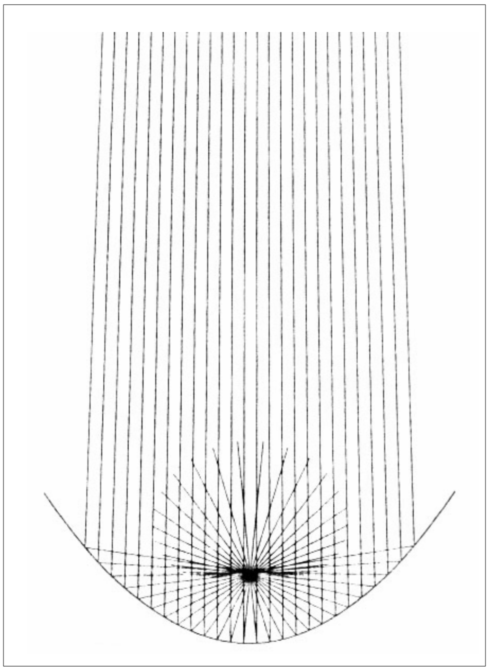
b. De straal die vanuit R op P_1 komt, gedraagt zich ook volgens de spiegelwet. Teken de straal en zijn gespiegeld vervolg. Je moet nu echt de raaklijn in P_1 tekenen of de loodlijn daarop, dat is de deellijn van QP_1F. Gebruik de geodriehoek.

c. Teken ook stralen die vanuit R naar P_2 en P_3 gaan en hun gespiegelde vervolgen.

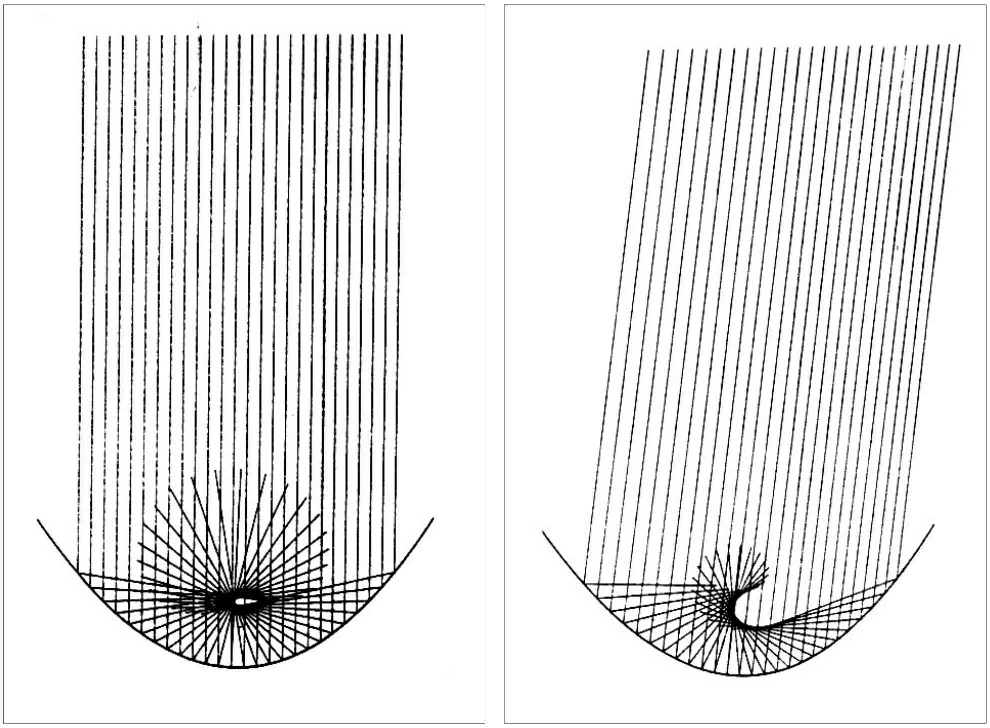
d. Wat valt op aan de stralen die vanuit R gaan en hun gespiegelde vervolg?

Uit het voorgaande kun je de conclusie trekken dat het bij niet-evenwijdige stralen niet echt tot convergeren komt. In onderstaande figuren is dat nog eens te zien, maar de rechter figuur toont ook aan: als de intredende stralen uit een verweg liggend punt komen, dan treedt convergentie op in redelijke benadering.





37 Hieronder zie je twee gevallen waarbij de bundel wel evenwijdig is, maar niet in de asrichting invalt.



Geef een genuanceerd commentaar.

8: De raaklijneigenschappen van ellips en hyperbool

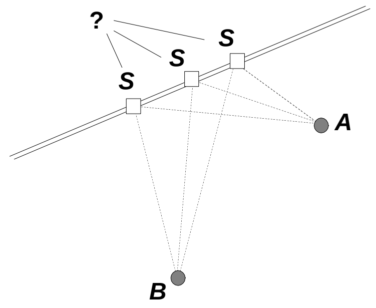
het geval van de ellips

Bij het onderzoeken van de raaklijneigenschap van de ellips kunnen we onverwacht een oud probleem hergebruiken.

het spiegel-principe

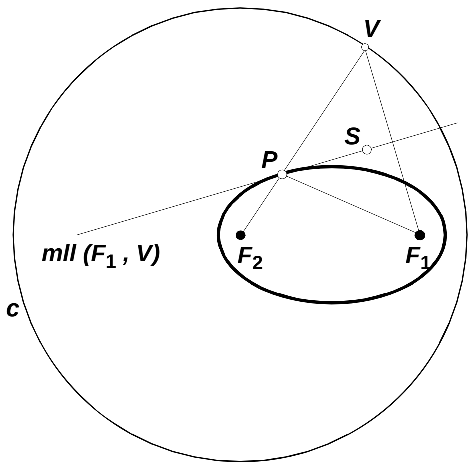
Misschien herken je het volgende optimaliseringsprobleem nog.

De gemeenten *A* en *B* liggen aan dezelfde kant van een spoorlijn.
Er moet één station komen voor beide gemeenten.
De busmaatschappij die de mensen uit *A* en *B* van en naar dit station moet vervoeren, wil dat de plaats van het station zó gekozen wordt dat de som van de afstanden tot *A* en *B* zo klein mogelijk is.



38 Los dit probleem nog een keer op door het spiegelprincipe toe te passen.

De tekening hiernaast bevat dezelfde elementen. A en B heten nu F_1 en F_2. De optimale plaats van het station (punt P in de figuur) is dat punt waar de lijn l (in de figuur $mll(F_1, V)$) aan een ellips met de brandpunten F_1 en F_2 raakt. r is hier de straal van de richtcirkel c.



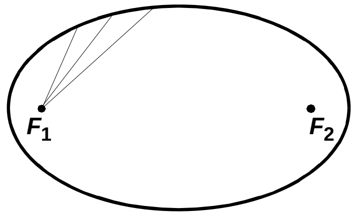
39 **a.** Bewijs dat elk ander punt S van de lijn l buiten de getekende ellips ligt.
b. Hoe volgt hieruit dat P het gezochte punt is?

40 Bewijs nu de stelling over de raaklijneigenschap van ellipsen.

> ***P* is een punt op de ellips met brandpunten F_1 en F_2.**
> **De raaklijn in *P* aan de ellips maakt gelijke hoeken met de lijnen PF_1 en PF_2.**

(Ook hier zal een gat in het bewijs voorlopig ongedicht blijven. Maak dezelfde aanname als we bij de parabool hebben gedaan.)

41 Pas de spiegelwet toe op een holle elliptische spiegel.
Wat gebeurt er met de lichtstralen die vanuit brandpunt F_1 vertrekken en door de spiegel worden teruggekaatst?

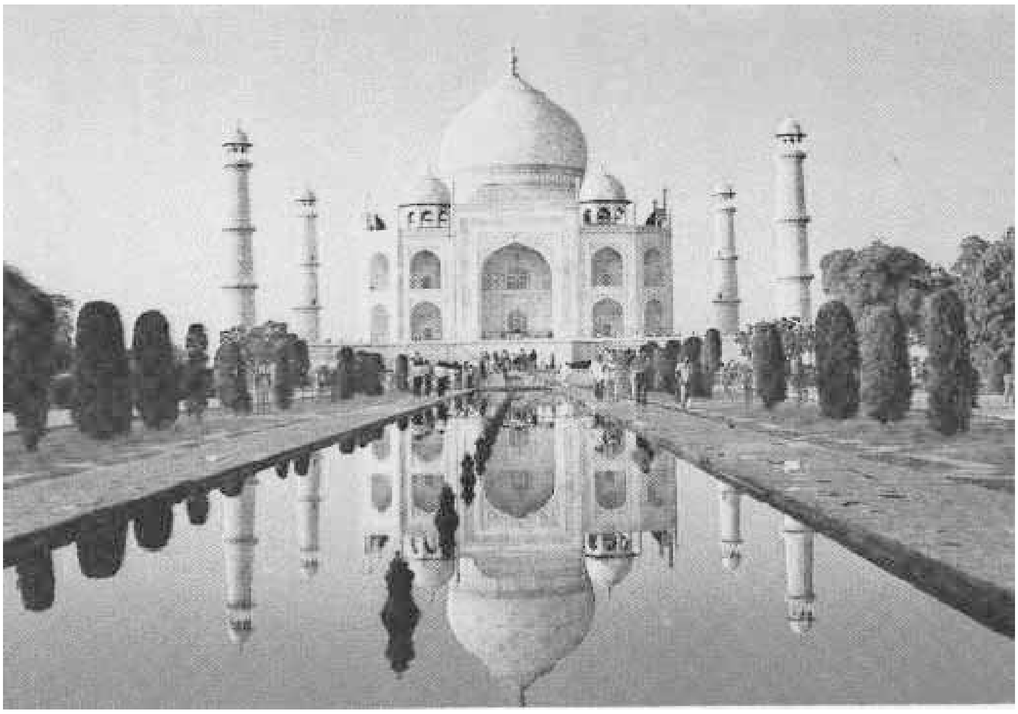


42 *Bij de tandarts*.
Boven het hoofd van de patiënt staat een felle lamp. Het licht van de lamp wordt in een spiegel gereflecteerd en gericht op de mondholte van de patiënt.

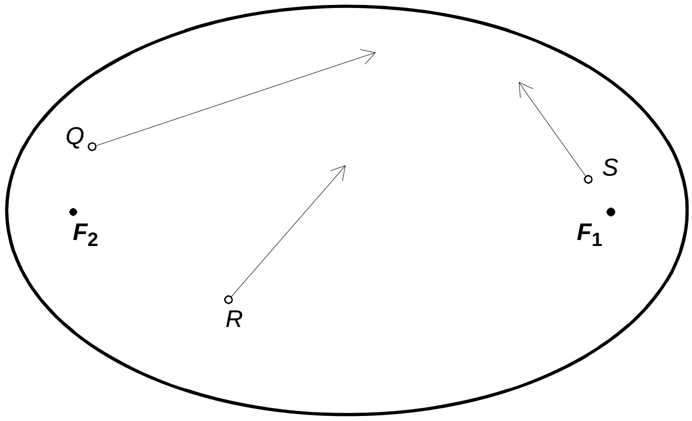
a. De tandarts moet zijn handelingen verrichten op een zeer kleine oppervlakte, ongeveer 1 cm^2. Stel dat hij het licht hier zoveel mogelijk op geconcentreerd wil zien, wat voor vorm zal de spiegel dan moeten hebben?

b. Te grote verschillen in lichtintensiteit tussen de werkoppervlakte en de directe omgeving zijn te vermoeiend voor het oog. Ook zou dan teveel hitte op de toch al zieke kies worden geconcentreerd. Daarom zal de tandarts een grotere oppervlakte verlicht willen hebben. Hoe kan dat worden bereikt?

43 In de Tadj Mahal in India is een zogenaamde fluisterzaal te vinden. Bruidsparen die de Tadj Mahal in het verleden bezochten, moesten in de fluisterzaal op twee speciale plekken gaan staan, 15 meter van elkaar. De bruidegom beloofde op zachte fluistertoon zijn bruid eeuwige trouw. Zijn woorden werden alleen door de bruid gehoord. Geef commentaar.



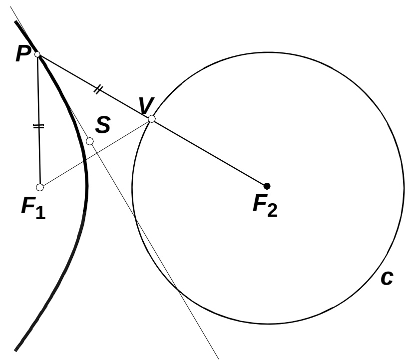
44 Interessant is ook het geval van een lichtstraal binnen een spiegelende ellips die niet in een brandpunt begint.



a. Zet de bij *Q* beginnende straal een aantal spiegelingen voort. Gebruik de techniek die je bij de parabool hebt gezien op een aangepaste manier.
b. De straal uit *Q* en al zijn spiegelingen gaat nooit tussen de brandpunten door. Toon dat aan.
c. Hoe zit dat met de stralen die bij *R* en *S* beginnen?

het geval van de hyperbool

Ook in de figuur van de hyperbool zie je dezelfde elementen als bij parabool en ellips.
De hyperbooltak ligt *op punt P na* weer geheel aan één kant van *mll* (F_1, *V*).



45 Daarvoor moet aangetoond worden:
$d(F_2, S) – d(F_1, S) < r$,
waarbij *r* de straal van de cirkel is.
Lever dat bewijs door op d(F_2, *S*) de driehoeksongelijkheid toe te passen. Zoek een geschikte driehoek.

Dus ook hier geldt:

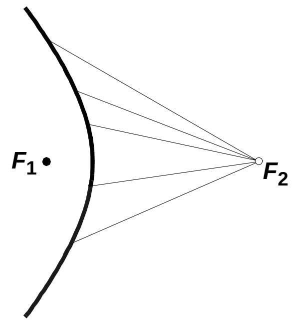
De middelloodlijn mll (F_1, *V*) *is de raaklijn in P aan de hyperbooltak.*

En ook geldt de raaklijneigenschap:

raaklijn-eigenschap hyperbool

> ***P*** **is een punt op de hyperbool met brandpunten** F_1 **en** F_2**.**
> **De raaklijn in *P* aan de hyperbool maakt gelijke hoeken met de lijnen** PF_1 **en** PF_2**.**

46 Hiernaast zie je een *bolle* hyperbolische spiegel. F_1 en F_2 zijn de brandpunten van de hyperbool.

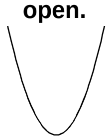
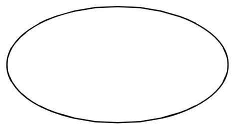
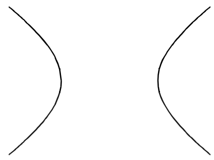


a. Zoek uit in welke richting de lichtstralen teruggekaatst worden die vanuit F_2 vertrekken.

b. Stel, je hebt een *holle* hyperbolische spiegel met een lichtbron in F_1.
Waar lijken alle lichtstralen vandaan te komen?

c. Als je op een of andere manier stralen hebt die allemaal op F_2 gericht zijn, hoe gedragen zich die na weerkaatsen?

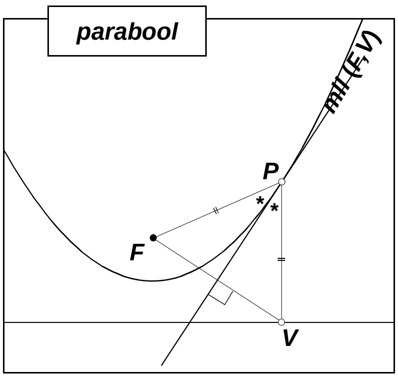
9: Overzicht parabool, ellips en hyperbool

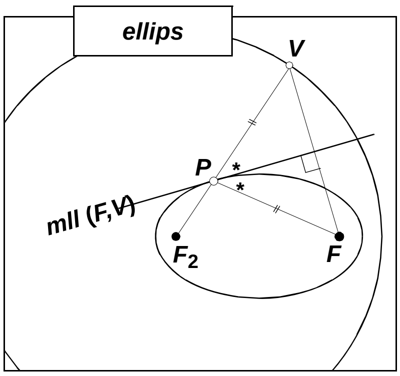
	parabool	**ellips**	**hyperbool**
gegevens	**Brandpunt *F*, richtlijn *l*.**	**Brandpunten F_1 en F_2, constante *r* ; $r > d(F_1, F_2)$.**	**Brandpunten F_1 en F_2, constante *r* ; $r < d(F_1, F_2)$.**
voorwaarde voor punt P op de figuur	**d(*P*, *F*) = d(*P*, *l*).**	**d(*P*, F_1) + d(P, F_2) = *r*.**	**| d(*P*, F_1) – d(P, F_2) | = *r*.**
vorm	**Eén tak, aan één kant open.** 	**Gesloten figuur.** 	**Twee open takken** 
aantal toppen	**1**	**4**	**2**
symmetrieassen	**1**	**2**	**2**
richtlijnen, richtcirkels	**Eén richtlijn.**	**Twee richtcirkels.**	**Twee richtcirkels.**
bijzonderheden	**Alle parabolen zijn gelijkvormig.**	**De stukken van de assen die binnen de ellips liggen, heten korte en lange as.**	**Een hyperbool heeft twee asymptoten.**
raaklijneigenschap	**De raaklijn in *P* aan de parabool maakt gelijke hoeken met lijn *PF* en de loodlijn door *P* op *l*.**	**De raaklijn in *P* aan de ellips maakt gelijke hoeken met de lijnen PF_1 en PF_2.**	**De raaklijn in *P* aan de hyperbool maakt gelijke hoeken met de lijnen PF_1 en PF_2**

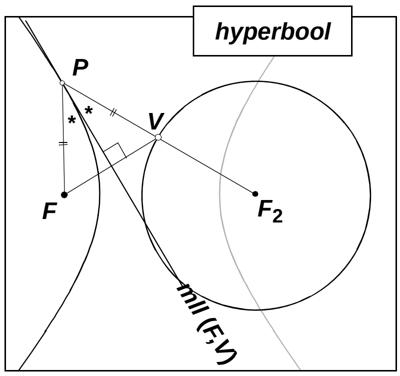
Samenvattende illustraties bij de raaklijneigenschappen

De belettering in de volgende figuren is overal dezelfde:
- *P* is steeds een punt op de figuur (parabool, ellips, hyperbool)
- *F* is het brandpunt (of één van de brandpunten)
- *V* is het voet punt van *P* op de richtlijn of de richtcirkel (als er twee zijn, om het andere brandpunt).

In alle drie de gevallen is de raaklijn in P de deellijn van – FPV en tegelijk mll(F, V)







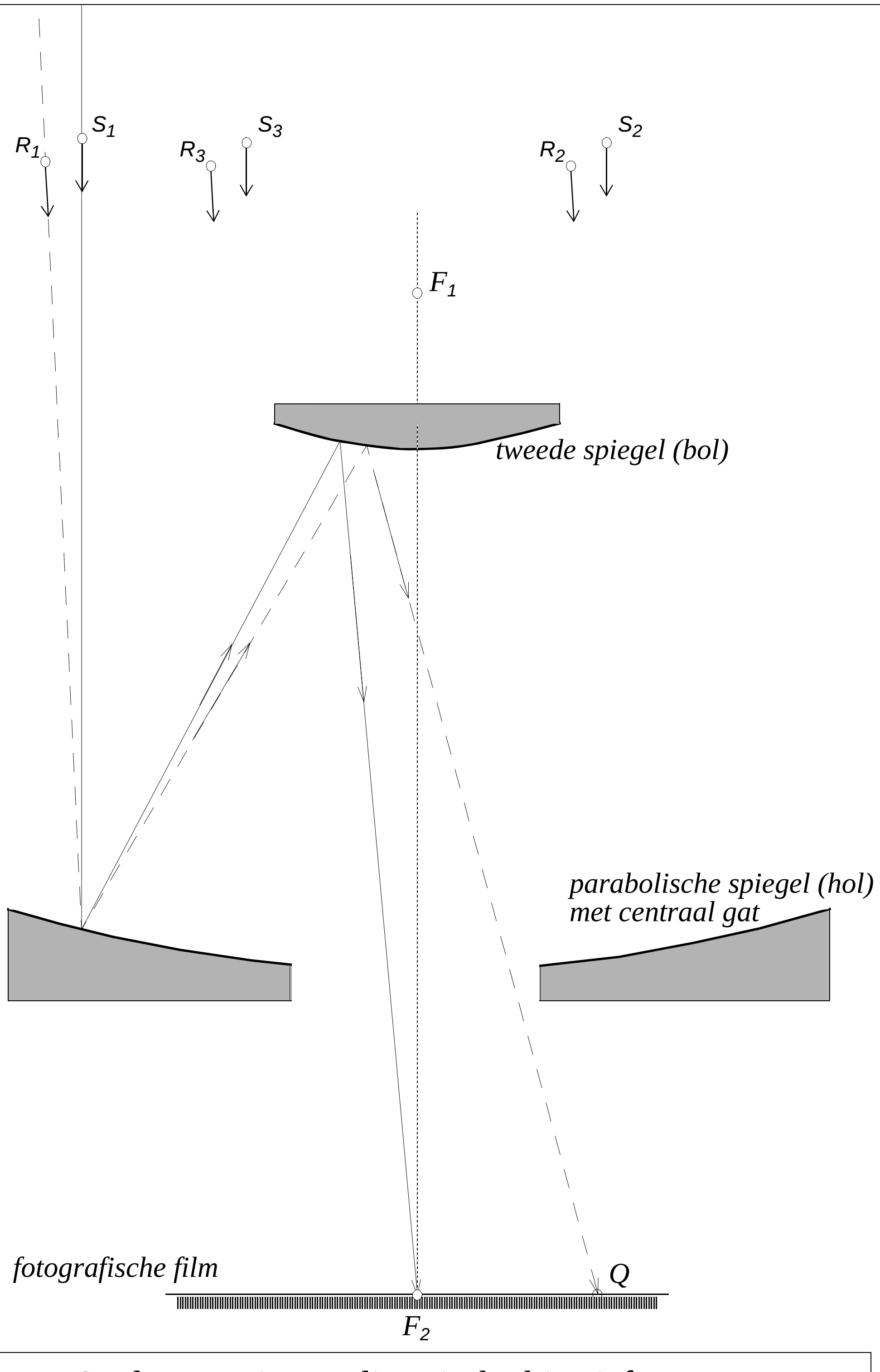
10: (Extra) De opgevouwen lichtweg

Van een sterke telelens, waarmee je sterren, sport of vogels wilt fotograferen, eis je dat:
- bundels evenwijdig invallend licht naar één punt wordt geconvergeerd
- dat twee bundels die in richting slechts weinig verschillen (die bijvoorbeeld van twee nauwelijks met het oog onderscheidbare sterren komen) toch convergentiepunten krijgen, die op een redelijke afstand van elkaar liggen.

Als je dat met gewone lenzen wilt bereiken, kom je op zware lenzen met lange brandpuntsafstanden uit.
Hiernaast zie je een zogenaamd *catadioptrisch objectief*. Dat is redelijk compact en heeft toch de gewenste eigenschappen.
Inwendig bevat het twee gebogen spiegels; de illustratie op de volgende bladzijde laat het objectief in doorsnede zien.
Er is een parabolische spiegel te zien; eigenlijk slechts een stuk ervan en in het midden zit een gat; het brandpunt ervan is met F_1 aangegeven.
De van S_1 binnenkomende lichtstraal loopt evenwijdig aan de as en kaatst dus richting F_1 terug. Maar vóór F_1 is een kleine gebogen spiegel opgesteld. Die stuurt deze lichtstraal uiteindelijk naar F_2, daar bevindt zich de fotografische film. (Het sluitermechanisme, dat de belichtingstijd bepaalt, is niet aangegeven).

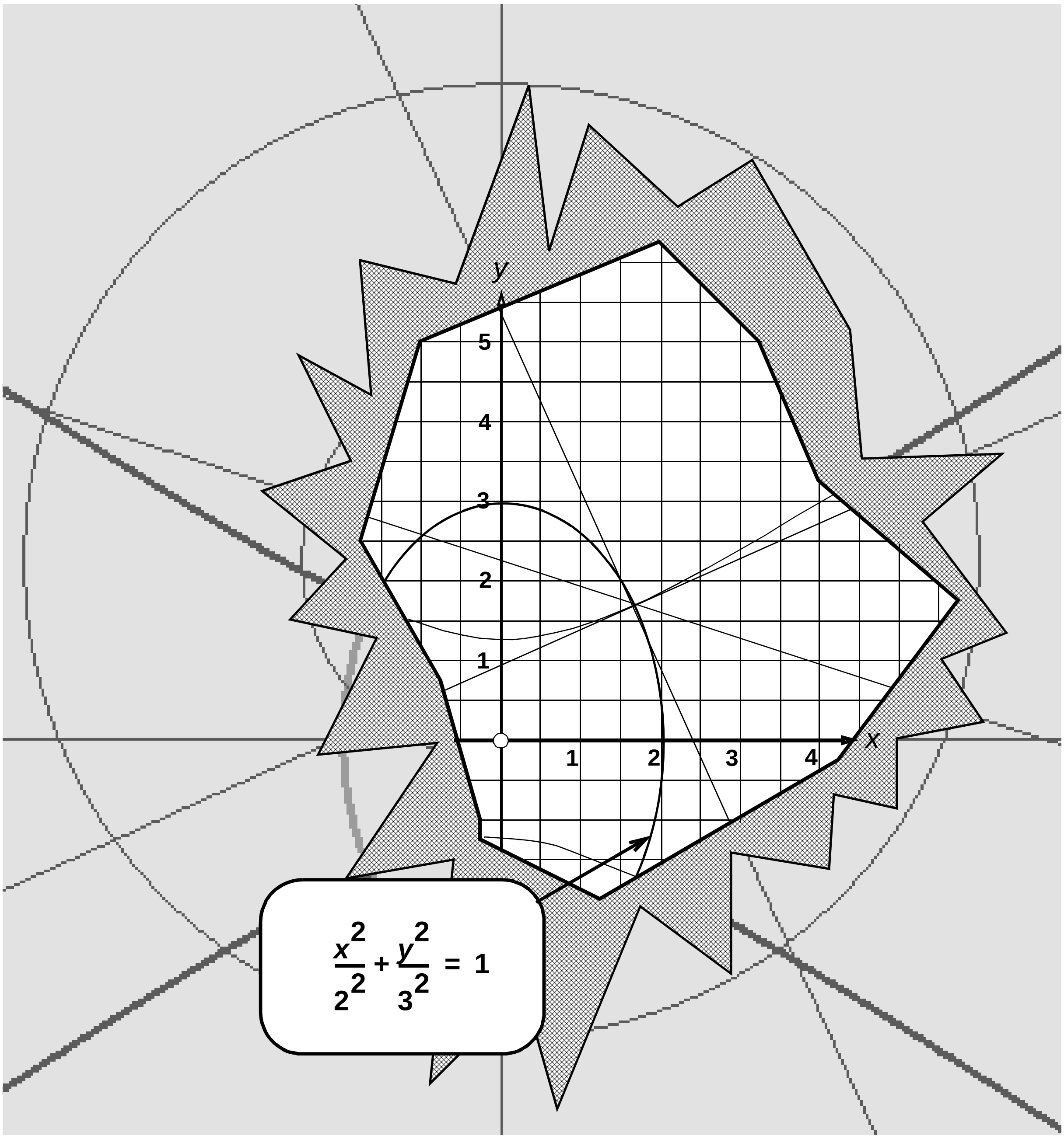
47 We onderzoeken de stralengang wat verder.
- **a.** Maak het verloop van de bij S_2 en S_3 beginnende stralen af. (Deze zijn evenwijdig aan de straal vanuit S_1.) Wat moet de kleine spiegel voor vorm hebben om te zorgen dat deze stralen ook bij F_1 uitkomen?
- **b.** De lichtstraal die vanaf R_1 binnenkomt, loopt niet evenwijdig aan de as. Controleer dat de straal wel volgens de spiegelwet op punt Q van de fotografische film komt.
- **c.** Construeer de gang van de stralen die vanaf R_2 en R_3 binnenkomen en evenwijdig zijn aan die vanuit R_1. Komen die stralen allemaal exact in Q aan?
- **d.** Als de bundel van de *S*- stralen van een ster af komt, en die van de *R*-stralen van een andere ster er vlakbij, wat is er dan op de fotografische plaat aan de hand?
- **e.** Voldoet het systeem aan de gestelde eisen?

De *R*-bundel convergeert niet helemaal exact op het filmvlak. Er zijn twee oplossingen voor dit probleem:
- zorgen dat de hoek die de *R*-bundel met de *S*-bundel maakt, klein blijft
- een ingewikkelder systeem construeren, waarbij ook nog een speciaal gevormde correctielens wordt gebruikt, zoals bijvoorbeeld het Schmidt-Cassegrain systeem, dat onder andere door Celestron International wordt geleverd. Zie de afbeelding hiernaast.



Stralengang in catadioptrisch objectief

Hoofdstuk 3
Analytische meetkunde



11: Cartesisch assenstelsel

Cartesius

De titel van deze paragraaf is een eerbetoon aan de filosoof, natuurkundige en wiskundige René Descartes (Cartesius) nu 400 jaar geleden geboren en overleden precies in het midden van de zeventiende eeuw. Hij heeft een sterke invloed gehad op de ontwikkeling van de filosofie en de wiskunde in de eeuwen daarna. In 1637 verscheen zijn werk *'Discours de la Méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences'*
(Letterlijk: 'Verhandeling van de Methode om de rede te besturen en de waarheid in de wetenschappen te zoeken'). Bij dit beroemd geworden werk waren, om de 'Methode' te illustreren, drie aanhangsels gevoegd: over l*ichtbreking*, *meteoren* en *meetkunde*.

een wiskundige droom

Acht jaar eerder had hij al regels geformuleerd voor 'de richting van het denken'.
Eenvoudig gezegd kwamen die hier op neer:
– elk type probleem moet worden teruggebracht tot een wiskundig probleem
– elk wiskundig probleem moet worden teruggebracht tot een algebraïsch probleem
– elk algebraïsch probleem moet worden teruggebracht tot het oplossen van een vergelijking met één onbekende.

Dat was idealistisch en zeer optimistisch.

algebra & meetkunde

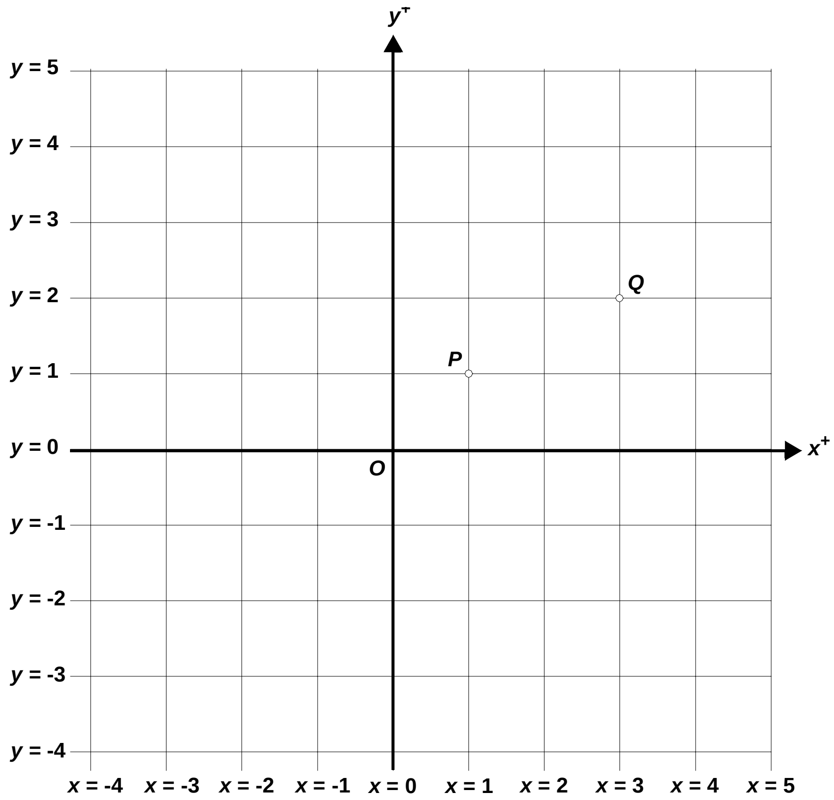
De latere publicatie over meetkunde (*La Géométrie*) was een voorbeeld van hoe zijn droom voor meetkundige problemen zou kunnen uitkomen. Daarbij gebruikte hij dus de algebra die toen nog in de kinderschoenen stond; het rekenen met letters voor onbenoemde getallen of grootheden was nauwelijks ontwikkeld en Descartes heeft in zijn boek belangrijke bijdragen geleverd aan theorieën over het oplossen van vergelijkingen.
Het revolutionaire idee van hem was dat meetkunde en algebra elkaar zouden kunnen bevruchten. Constructies met passer en liniaal vertaalde hij in het oplossen van stelsels vergelijkingen.

coördinaten

De sleutel voor het gebruik van algebra bij meetkunde is nu het gebruik van een coördinatenstelsel, dat naar hem een *cartesisch assenstelsel* is genoemd. Vreemd genoeg was het juist niet Descartes die uitdrukkelijk gebruikmaakte van zo'n assenstelsel, maar veeleer Pierre Fermat, advocaat in Toulouse. Deze schreef enkele beknopte meetkundige verhandelingen (waarschijnlijk voorafgaand aan de publicatie van Descartes' meetkundige geschrift), maar deze werden pas in 1679 gepubliceerd. Het coördinatenstelsel zoals wij dat nu gebruiken, zou dus eigenlijk naar Fermat vernoemd moeten zijn.
Aan Descartes de eer dat hij de 'universele' kracht van de 'analytische methode' heeft

gezien en dat hij daar op een overtuigende manier reclame voor heeft gemaakt.

cartesisch assenstelsel



Je ziet hierboven een plaatje van een *cartesisch assenstelsel Oxy*.
Zo'n assenstelsel voldoet aan de volgende eisen:

– *de beide coördinaatassen staan loodrecht op elkaar* (daar kijk je niet van op),
– *de beide lengte-eenheden op de assen zijn even lang* (men spreekt wel van een vierkant assenstelsel; denk aan 'Zsquare', optie van de GR),
– *de oriëntatie van het stelsel is positief* (dat betekent: de draaiing om O in positieve richting over 90^{o} brengt de x^+-as naar de y^+-as).

analytische voorstelling

Meetkundige begrippen zoals 'punt', 'rechte lijn', 'afstand', 'loodrecht', 'cirkel', 'rechthoekig gebied', 'hyperbool', ..., krijgen ten opzichte van zo'n assenstelsel een zogenaamde *analytische voorstelling*. Zo'n voorstelling kan zijn een vergelijking, een formule, een ongelijkheid, een parametervoorstelling of een combinatie van deze vormen. In dit hoofdstuk ga je analytische voorstellingen leren en gebruiken.

verticaal en horizontaal

Het 'vierkante' karakter van een cartesisch assenstelsel komt mooi tot uiting als je de *roosterlijnen* tekent (zoals hierboven).
De *verticale* roosterlijnen worden analytisch voorgesteld door een vergelijking van de vorm $x = k$ (met $k = 0, -1, -2, -3$, enzovoort).
De *horizontale* roosterlijnen worden analytisch voorgesteld door een vergelijking van de vorm $y = k$ (met $k = 0, -1, -2, -3$, enzovoort).
Het snijpunt van een horizontale en een verticale roosterlijn is een *roosterpunt*.
In de figuur hierboven zie je de roosterpunten P (snijpunt van $x = 1$ en $y = 1$) en Q (snijpunt van $x = 3$ en $y = 2$).

We schrijven kortweg: P: (1 , 1) en Q: (3 , 2).

1 **a.** Verklaar dat geldt: $d(Q,P) = \sqrt{5}$.
b. Er zijn in totaal acht roosterpunten met de afstand $\sqrt{5}$ tot Q. Geef de coördinaten van de andere zeven.

midden van een lijnstuk

2 Het midden M van het lijnstuk PQ is geen roosterpunt.
a. Wat zijn de coördinaten van M?
b. Wat zijn de coördinaten van het punt dat precies in het midden tussen de punten (-10 , 8) en (6 , 20) ligt?
c. Bedenk een algemene regel hoe je bij twee gegeven punten de coördinaten van het midden kunt vinden.

3 Gegeven zijn de punten A: (2 , 17) en M: (3 , 13). M is het midden van lijnstuk AB. Bereken de coördinaten van het punt B.

horizontale en verticale afstand

4 De punten P en Q worden respectievelijk voorgesteld door (3 , 5) en (-4 , 12).
a. Hoe groot is de afstand van P tot de lijn $x = 10$? En tot de lijn $x = -10$?
b. Dezelfde vraag voor Q en de lijnen $y = 25$ en $y = -8$.

5 Laat P het punt (x_P , y_P) zijn.
We willen de afstand van P tot de lijn l: $x = 4$ uitdrukken in de coördinaten van P.
a. Waarom speelt y_P daarbij geen rol?
b. Je kunt drie gevallen onderscheiden:

$x_P > 4$, dan d(P, l) = ...
$x_P = 4$, dan d(P, l) = ...
$x_P < 4$, dan d(P, l) = ...

6 Je kunt de drie gevallen van **5 b** onder één hoedje vangen met behulp van de absolute waarde.

$$d(P,l) = |x_P - 4|$$

Bedenk zelf één formule voor de afstand van P tot de lijn k : $y = 3$.

afstand van twee punten

7 Noem S het snijpunt van de lijnen l en k uit **5** en **6.**
Voor de afstand d(P, S) geldt:

$$d(P,S) = \sqrt{|x_P - 4|^2 + |y_P - 3|^2}$$

Verklaar deze formule.
Opmerking: omdat in de formule kwadraten staan, kun je de absoluutstrepen ook weglaten. Een kwadraat kan immers niet negatief zijn! Je krijgt dan:

$$d(P,S) = \sqrt{(x_P - 4)^2 + (y_P - 3)^2}$$

Nog wat algemener:
als P de coördinaten (x_P , y_P) heeft en Q de coördinaten (x_Q , y_Q), dan

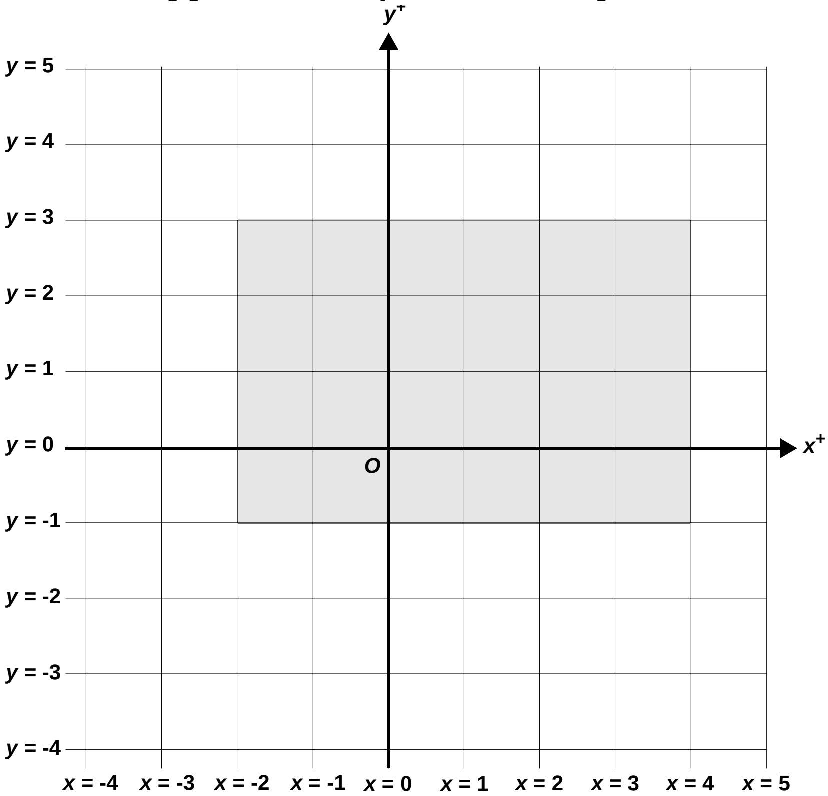
$$\mathbf{d(P , Q) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}}$$

8 Bereken met deze formule de afstand tussen de punten (-5 , 11) en (3 , -4).
Ook van: (49 , 37) en (-50 , 17) en van (115 , 88) en (120 , 88).

9 Wat gebeurt er met de afstand van (x_P , y_P) en (x_Q , y_Q) als je deze vier coördinaten verdubbelt? Teken ook een plaatje om je antwoord te verklaren.

10 De verzameling punten (x , y) waarvan de y-coördinaat voldoet aan $|y-5| \le 1$ vormen een gebied. Hoe ziet dat gebied eruit?

11 Van een rechthoekig gebied is de analytische voorstelling: $-2 \le x \le 4$ én $-1 \le y \le 3$.



a. Een andere analytische voorstelling van hetzelfde gebied heeft de gedaante:

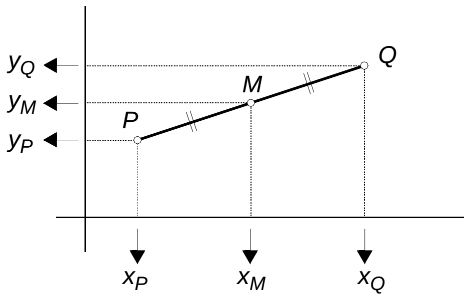
$$|x - \ldots| \le \ldots \quad \text{én} \quad |y - \ldots| \le \ldots \quad .$$

Welke vier getallen moeten er op de stippen staan?

b. Een punt $P(a , b)$ ligt buiten het gebied. Druk de afstand van P tot het gebied uit in a en b. Onderscheid alle mogelijke gevallen.

12: Zwaartepunten

In paragraaf **11** heb je bij opgave **2** een regel ontdekt om de coördinaten van het punt dat precies midden tussen twee gegeven punten ligt, uit te drukken in de coördinaten van die twee punten. Noemen we die punten P en Q en het middelpunt M, dan geldt:



$$x_M = \tfrac{1}{2}x_P + \tfrac{1}{2}x_Q$$

$$y_M = \tfrac{1}{2}y_P + \tfrac{1}{2}y_Q$$

De coördinaten van M zijn gelijk aan de gemiddelden van de coördinaten van P en Q.

12 Veronderstel dat in bovenstaande figuur L het midden is van PM. Je kunt nu de coördinaten van L ook uitdrukken in die van P en Q

a. Toon met behulp van bovenstaande regel aan dat geldt:

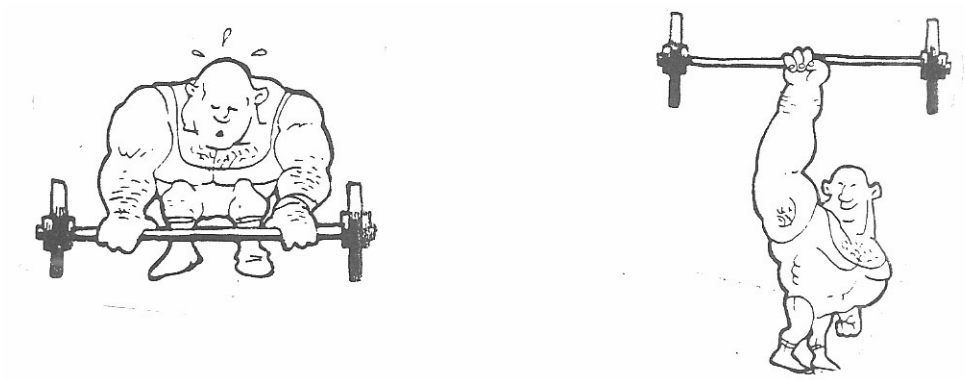
$$\begin{cases} x_L = \tfrac{3}{4}x_P + \tfrac{1}{4}x_Q \\ y_L = \tfrac{3}{4}y_P + \tfrac{1}{4}y_Q \end{cases}$$

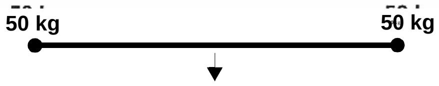
We zeggen nu dat de coördinaten van L ‘gewogen’ gemiddelden zijn van die van P en Q. De coördinaten van P tellen als het ware drie keer zo zwaar als die van Q.

b. Laat N het midden zijn van MQ. Je kunt nu wel raden hoe je de coördinaten van N uitdrukt in die van P en Q. Hoe?

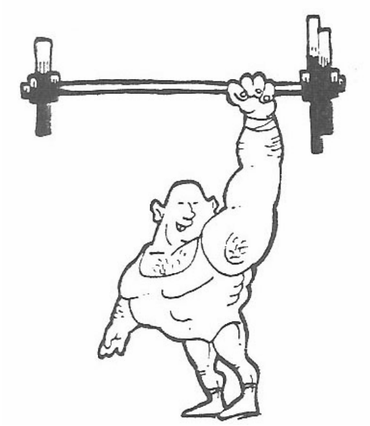
c. Bekijk de formules voor de coördinaten van L.
Wat voor bijzonders krijg je als $x_P = x_Q$?
Hoe kun je dat verklaren met een plaatje?

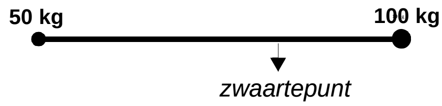
Gewogen gemiddelden kunnen in verband worden gebracht met zwaartepunten.
Bij een halter met twee even grote massa’s aan de uiteinden (zeg van 50 kg), ligt het zwaartepunt netjes in het midden.





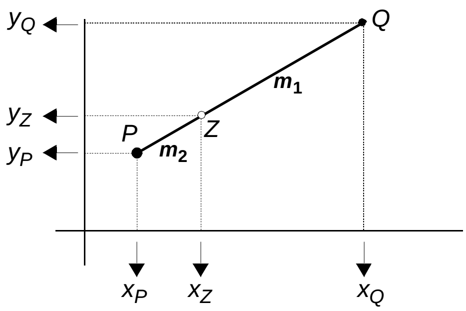
Als nu de massa van 50 kg aan één kant wordt vervangen door een massa van 100 kg, dan verschuift het zwaartepunt in de richting van de zwaarste massa.
De momentenstelling uit de natuurkunde zegt dat de afstanden van het zwaartepunt tot de uiteinden van de halter precies omgekeerd evenredig zijn met de massa's.





13 Leg de halter langs de x-as; noem de uiteinden P en Q (Q rechts van P) en het zwaartepunt Z. Veronderstel dat de massa's in P en Q zich verhouden als 1 : 2.
Verklaar de formule: $x_Z = \frac{1}{3}x_P + \frac{2}{3}x_Q$

Het 'natuurkundige denken' helpt bij het onthouden van een 'meetkundige regel' over de coördinaten van het punt dat een lijnstuk in een gegeven verhouding verdeelt.
Vergelijk:



natuurkunde

in P bevindt zich een massa m_1

in Q bevindt zich een massa m_2

Z is het zwaartepunt

meetkunde

het punt Z verdeelt lijnstuk PQ in lijnstukken met verhouding $m_2 : m_1$

DAN

$$\begin{cases} x_Z = \dfrac{m_1}{m_1+m_2}x_P + \dfrac{m_2}{m_1+m_2}x_Q \\ y_Z = \dfrac{m_1}{m_1+m_2}y_P + \dfrac{m_2}{m_1+m_2}y_Q \end{cases}$$

x_Z en y_Z zijn gewogen gemiddelden van de coördinaten van P en Q ,

de 'gewichten' van P en Q verhouden zich als m_1 en m_2

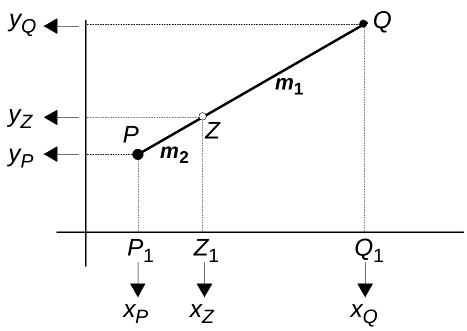
bewijs

Bekijk de figuur.
Laten P_1, Q_1 en Z_1 de voetpunten zijn van van P, Q en Z op de x-as.
Dan geldt:

$$|PZ| : |QZ| = |P_1Z_1| : |Q_1Z_1|$$

Dus: $|P_1Z_1| = \frac{m_2}{m_1 + m_2}|P_1Q_1|$

Ofwel: $x_Z - x_P = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(x_Q - x_P)$



Hieruit kan nu x_Z worden ‘opgelost’:

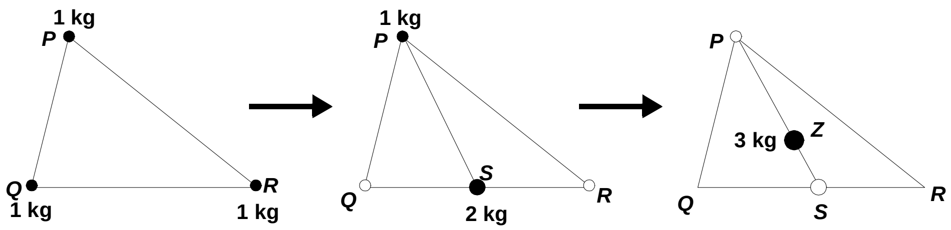
$$x_Z = x_P + \frac{m_2}{m_1 + m_2}(x_Q - x_P) = \left(x_P - \frac{m_2}{m_1 + m_2}x_P\right) + \frac{m_2}{m_1 + m_2}x_Q = \frac{m_1}{m_1 + m_2}x_P + \frac{m_2}{m_1 + m_2}x_Q$$

Het bewijs voor de y-coördinaten is geheel analoog.

14 Bij het vorige bewijs is gebruikgemaakt van de figuur.
a. Ga na wat er verandert als Q_1 (en dan ook Z_1) links van P_1 liggen.
b. En hoe zit het als Q_1 en P_1 samenvallen?

15 Gegeven de punten P: (4 , 17) en Q: (9 , -3).
Het punt S ligt op PQ zó dat $|PS| : |QS| = 2 : 3$.
Bereken de coördinaten van S.

16 In de punten P, Q en R bevinden zich drie gelijke massa’s, zeg van elk 1 kg.
In deze opgave ga je de plaats van het zwaartepunt van die drie massa’s bepalen.



a. Bekijk bovenstaande plaatjes. In het tweede plaatje zijn de massa’s in Q en R vervangen door een massa van 2 kg in S. In het derde plaatje zijn de massa’s bij P en S vervangen door een massa van 3 kg in Z.
Wat weet je van de positie van S? En van de positie van Z?
b. De lijn PS verbindt een hoekpunt van de driehoek met het midden van de overstaande zijde. Zo’n lijn heet een *zwaartelijn* van de driehoek. Er zijn nog twee andere zwaartelijnen in driehoek PQR. Uit de natuurkunde volgt dat die drie zwaartelijnen door één punt gaan. Verklaar dit.

17 Het ‘natuurkundige bewijs’ dat de zwaartelijnen van een driehoek door één punt gaan, laat zich vertalen in een analytisch-meetkundig bewijs.
Stel (x_P , y_P), (x_Q , y_Q) en (x_R , y_R) zijn de coördinatenparen van P, Q en R.
S is het midden van QR en Z ligt op PS zó dat $|PZ| : |ZS| = 2 : 1$
a. Druk eerst de coördinaten van S uit in die van Q en R.
b. Druk nu de coördinaten van Z uit in die van P, Q en R.
c. Hoe kun je nu aan het resultaat van **b** zien, dat het punt Z ook op de andere twee zwaartelijnen van de driehoek moet liggen.

Het punt Z uit de opgave **17** wordt het zwaartepunt van driehoek PQR genoemd.
We hebben nu de volgende stelling.

stelling

De drie zwaartelijnen van een driehoek gaan door één punt, het zwaartepunt van de driehoek. Het zwaartepunt verdeelt elke zwaartelijn in stukken met verhouding 2 : 1.

Als P, Q en R met coördinaten (x_P, y_P), (x_Q, y_Q) en (x_R, y_R) de hoekpunten zijn van de driehoek en als Z het zwaartepunt is met coördinaten (x_Z, y_Z), dan geldt:

$$\begin{cases} x_Z = \frac{1}{3}x_P + \frac{1}{3}x_Q + \frac{1}{3}x_R \\ y_Z = \frac{1}{3}y_P + \frac{1}{3}y_Q + \frac{1}{3}y_R \end{cases}$$

18 Van driehoek PQR zijn de hoekpunten P: (3 , 5), Q: (7 , 1) en R: (5, 9)

a. Bereken de coördinaten van het zwaartepunt Z van driehoek PQR.

b. De punten Z_1, Z_2 en Z_3 zijn de zwaartepunten van respectievelijk driehoek PQZ, QRZ en RPZ. Bereken de coördinaten van Z_1, Z_2 en Z_3.

c. Ga na dat het punt Z ook het zwaartepunt is van driehoek $Z_1Z_2Z_3$.

19 Geldt het resultaat van **18 c** voor *iedere* driehoek PQR? Zo ja, verklaar dit.

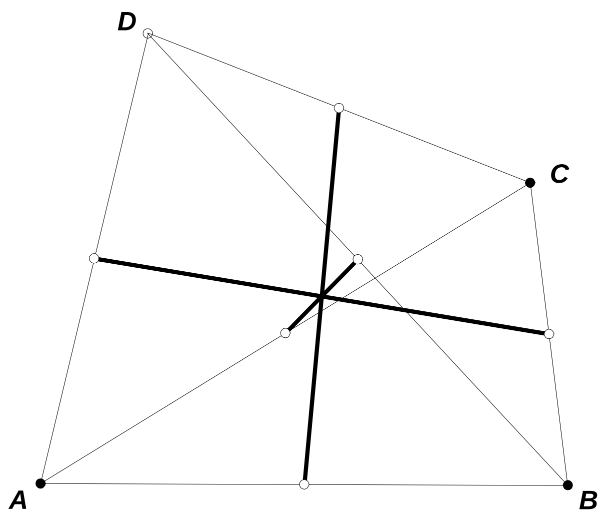
20 In de punten P, Q en R bevinden zich respectievelijk massa's van 1, 2 en 3 kg.
Laat zien dat de coördinaten van het zwaartepunt van deze drie massa's als volgt worden uitgedrukt in de coördinaten van P, Q en R:

$$\begin{cases} x_Z = \frac{1}{6}x_P + \frac{2}{6}x_Q + \frac{3}{6}x_R \\ y_Z = \frac{1}{6}y_P + \frac{2}{6}y_Q + \frac{3}{6}y_R \end{cases}$$

21 Gegeven een vierhoek $ABCD$. De twee lijnen die de middens van overstaande zijden verbinden en de lijn die de middens van de diagonalen verbindt, gaan door één punt.

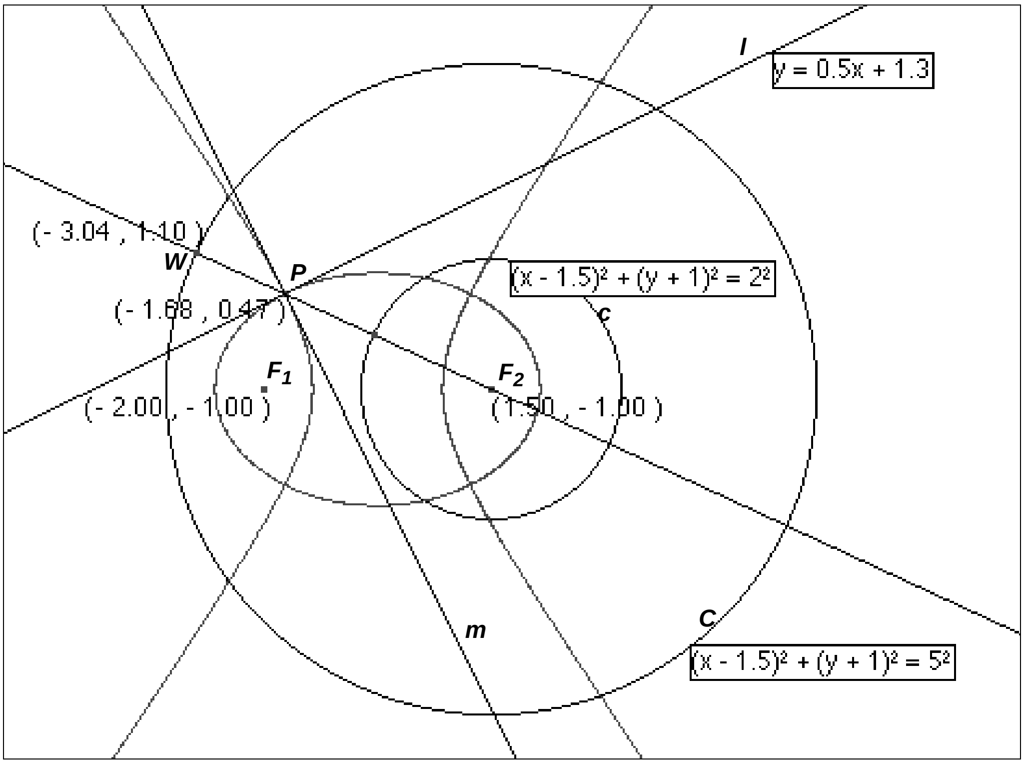
a. Geef hiervan een 'natuurkundig bewijs' (met behulp van massa's).

b. Geef ook een analytisch-meetkundig bewijs.



13: Vergelijking van cirkel en rechte lijn

Descartes' boek over meetkunde gaat vooral over het vertalen van meetkundige constructies (met passer en liniaal) in algebraïsche vergelijkingen. Dit idee is heel vruchtbaar bij het ontwerpen van computerprogramma's zoals CABRI, die meetkundige constructies uitvoeren. Je hebt daar misschien niet aan gedacht, maar in het 'brein' van de computer gebeuren de constructies via algebra! Je ziet hieronder een schermafdruk van CABRI, waarbij de *coördinaten* van de punten P, W, F_1 en F_2 zijn opgevraagd en de *vergelijkingen* voor de lijn l en de cirkels c en C.
Dat gaat met de optie MEET2 > EQUATION AND COÖRDINATES.



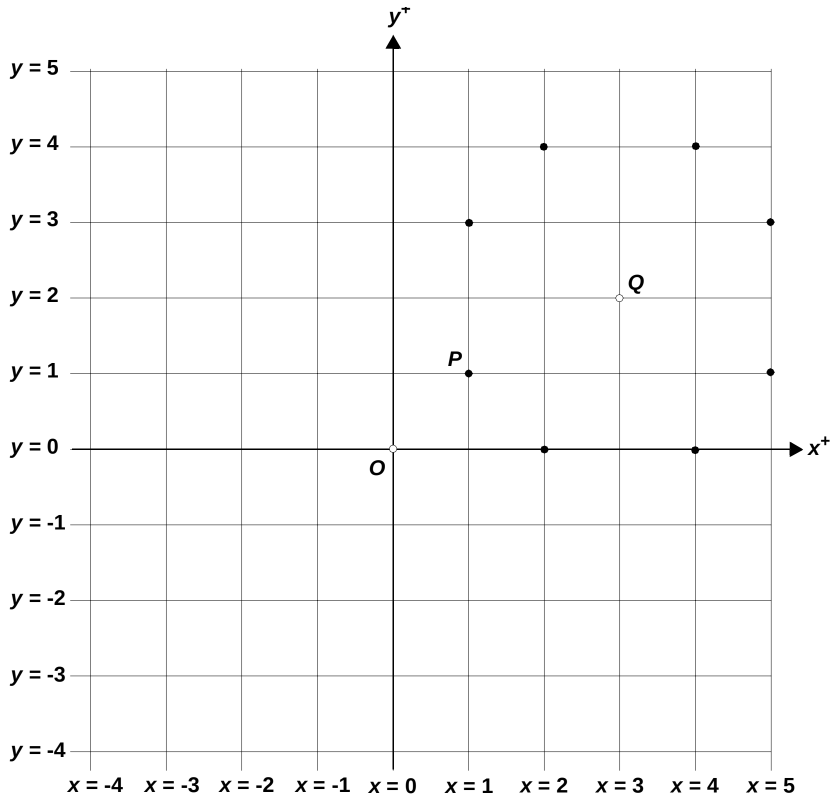
22 Deze coördinaten en vergelijkingen hebben betrekking op een rechthoekig assenstelsel *Oxy*. Met de optie EXTRA 2 > SHOW AXES zou je de computer ook nog de twee coördinaatassen kunnen laten tekenen. Kijk goed naar de gegeven getallenparen en geef aan waar de x-as en de y-as in de figuur moeten liggen.

23 a. De coördinaten van de punten en de coëfficiënten in de vergelijkingen worden *afgerond* weergegeven. Controleer dat door de coördinaten van punt P in de vergelijking van lijn m in te vullen.

b. Welke informatie geven de getallen 0.5 en 1.3 in de vergelijking van m?

c. En welke informatie, denk je, geven de getallen in de vergelijking van cirkel C?

d. Heb je een verklaring voor de gedaante van die vergelijking?



cirkel-vergelijking

24 Je hebt in de vorige paragraaf gezien dat er in totaal acht roosterpunten zijn die een afstand $\sqrt{5}$ tot Q: (3 , 2) hebben.
Die acht punten liggen dus op de cirkel met middelpunt Q en straal $\sqrt{5}$.
Verklaar waarom de complete cirkel kan worden voorgesteld door de vergelijking:

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 5$$

25 Bekijk de cirkel waarvan sprake is in opgave **24**. Neem nu een cirkel, weer met middelpunt Q: (3 , 2), maar met een twee keer zo grote straal.
a. Geef een vergelijking van die cirkel.
b. Hoeveel roosterpunten liggen op die cirkel?
c. Geef ook een vergelijking van de cirkel met middelpunt (3 , 2) die door de oorsprong gaat.

In het algemeen geldt:

De cirkel met middelpunt M : (a , b) en straal r , kan worden voorgesteld door de vergelijking:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

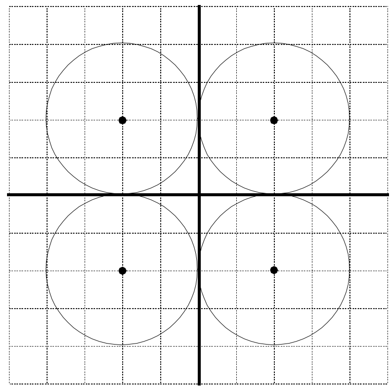
26 Aan welke voorwaarde moeten a , b en r voldoen, wil de cirkel door de oorsprong gaan?

27 Wat stelt de cirkelvergelijking voor als $r = 0$?

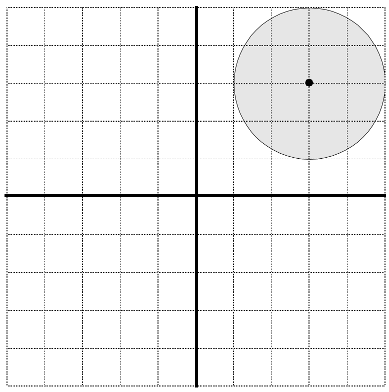
28 In de figuur zie je vier cirkels met straal 2 die raken aan de beide coördinaatassen.

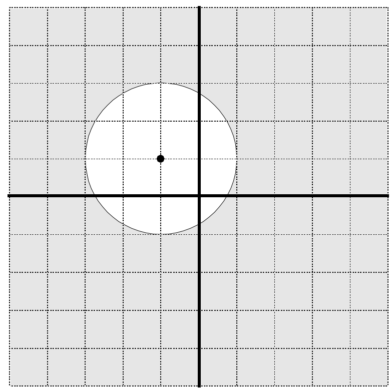
a. Geef van elke cirkel een vergelijking.

b. Er zijn twee cirkels met middelpunt *O* die raken aan alle vier de cirkels.
Geef van beide een vergelijking.



29 Bij een cirkel horen een binnengebied en een buitengebied. In de figuur hieronder zie je zulke gebieden. Geef van elk (inclusief de rand) een analytische voorstelling.



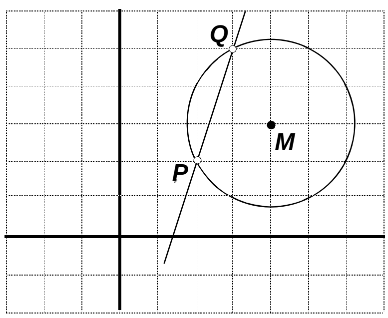


30 Welk gebied wordt er bepaald door 4 £ $x^2 + y^2$ £ 16 ? Maak een plaatje.

31 a. Bereken de afstand van het punt *P*: (5 , 12) tot de cirkel *C*: $x^2 + y^2 = 100$.

b. Dezelfde vraag voor *P*: (–3 , 2) en *C*: $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 100$.

32 Op de cirkel *C*: $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 5$ liggen de punten *P*: (2 , 2) en *Q*: (3 , 5).



a. Geef een vergelijking van de lijn *PQ*.

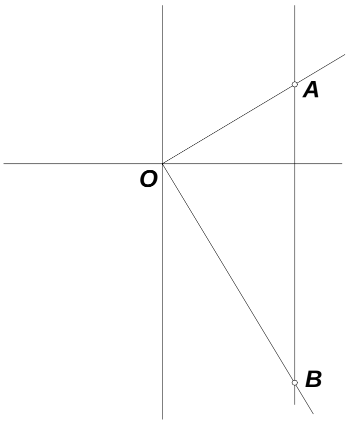
b. Het *lijnstuk PQ* is een koorde van de cirkel. Om van die koorde een analytische voorstelling te geven, moet je aan de vergelijking van **a** een beperkende voorwaarde toevoegen. Welke voorwaarde kan dat zijn?

c. Het punt *N* is het midden van de koorde *PQ*.
Bereken de richtingscoëfficiënt van *MN*.

loodrechte lijnen

Kijk even terug naar opgave **32.** Zoals je weet staat de verbindingslijn van het middelpunt van een cirkel met het midden van een koorde loodrecht op die koorde. Kort gezegd: *MN* ^ *PQ*. De richtingscoëfficiënten van *PQ* en *MN* zijn respectievelijk 3 en $-\frac{1}{3}$.
De tweede is het *tegengestelde van het omgekeerde* van de eerste. Of, wat op hetzelfde neerkomt, het product van de twee richtingscoëfficiënten is gelijk aan -1.
Zoals de volgende opgave leert, geldt dit in het algemeen voor twee lijnen die loodrecht op elkaar staan (en die niet evenwijdig zijn met de coördinaatassen).

33 In een vierkant assenstelsel zijn gegeven de punten $A = (1\ ,\ a)$ en $B = (1\ ,\ b)$ zodanig dat de lijnen *OA* en *OB* loodrecht op elkaar staan.



a. In de figuur zijn *a* en *b* respectievelijk positief en negatief. Is het denkbaar dat *a* en *b* beide positief (of beide negatief) zijn?
b. Wat is de richtingscoëfficiënt van *OA?* En van *OB*?
c. Druk de $|OA|$, $|OB|$ en $|AB|$ uit in *a* en *b*.
d. Omdat driehoek *AOB* rechthoekig is in *O*, kun je de stelling van Pythagoras toepassen op die driehoek. Gebruik je resultaten van **c** en laat zien dat de hierboven aangekondigde wet voor de richtingscoëfficiënten van loodrechte lijnen klopt.

De volgende stelling is nu bewezen:

stelling

Als de lijnen l_1 en l_2 met richtingscoëfficiënten h_1 en h_2 (beide niet 0) loodrecht op elkaar staan, dan geldt:

$$h_1 h_2 = -1$$

Omgekeerd:
Als het product van de richtingscoëfficiënten van twee lijnen gelijk is aan -1, dan staan die twee lijnen loodrecht op elkaar.

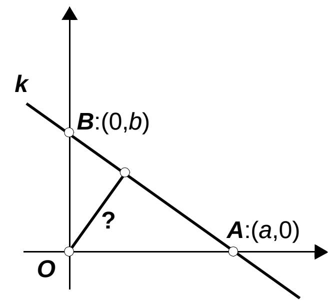
34 Een goede manier om de vergelijking op te stellen van een lijn door twee gegeven punten, is de volgende:
(1): bepaal eerst de richtingscoëfficiënt (D*y* gedeeld door D*x*)
(2) gebruik de vergelijking $y - y_0 = m(x - x_0)$; hierbij is *m* de gevonden richtingscoëfficiënt en zijn x_0 en y_0 de coördinaten van één van de twee punten.
In welke situatie gaat deze methode mis? En hoe kun je dan toch direct een vergelijking van die lijn geven?

35 Gegeven de punten *A*: (-2 , 5), *B*: (2 , 7) en *C*: (4 , 8).
Geef een vergelijking van de lijn door *A* die loodrecht staat op de lijn *BC*.

36 Onderzoek of de drie punten (5 , 8), (8 , 13) en (13 , 21) op een rechte lijn liggen.

assenvergelijking van een rechte lijn

37 Laat k een rechte lijn zijn die niet door O gaat en die de x-as snijdt in $(a\ ,\ 0)$ en de y-as in $(0\ ,\ b)$.



a. Toon aan dat $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

een vergelijking is van die lijn.
Opmerking:
deze vergelijking wordt wel de 'assenvergelijking' van de lijn genoemd. Deze voorstelling is alleen bruikbaar voor lijnen die niet door de oorsprong gaan.

b. Bewering: de afstand van de oorsprong O tot k is gelijk aan:

$$\frac{|ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Test deze formule voor $a = 1$ en $b = 1$.

c. Nog een test: als a en b met dezelfde positieve factor worden vermenigvuldigd, moet dat ook met de afstand gebeuren. Controleer of dat zo is.

d. Je zou deze formule kunnen bewijzen door een vergelijking op te stellen van de lijn door O die loodrecht staat op k en vervolgens de coördinaten van het voetpunt V van O te berekenen. Ten slotte kun je dan $|OV|$ vinden. Het rekenwerk hierbij is een beetje ingewikkeld. Als je je uitgedaagd voelt, moet je het maar proberen. Eenvoudiger gaat het echter door naar de oppervlakte van driehoek OAB te kijken.
Die oppervlakte kun je op twee manieren bepalen: ten eerste met basis $|OA|$ en hoogte $|OB|$, ten tweede met basis $|AB|$ en hoogte $|OV|$. Daarmee kun je dan $|OV|$ vinden!

beweging langs een lijn

38 Een punt beweegt in het Oxy-vlak met een constante snelheid en zonder van richting te veranderen.
Op het tijdstip $t = 0$ bevindt het punt zich in $(2\ ,\ 1)$; op het tijdstip $t = 1$ in $(5,\ 5)$.

a. Waar is het punt op $t = 2$? En op $t = \frac{3}{4}$? En op $t = 16$?

b. Hoe kun je de snelheidsvector van de beweging beschrijven?

c. Op de GR kun je de beweging van het punt zichtbaar maken (via de parameter mode). Welke formules moet je dan invoeren?

d. Geef een x-y vergelijking van de lijn waarlangs het punt zich beweegt.

39 Een punt P beweegt met constante snelheidsvector in het Oxy-vlak. Op $t = 0$ bevindt het zich in $(a\ ,\ b)$ en op $t = 1$ in $(c\ ,\ d)$.

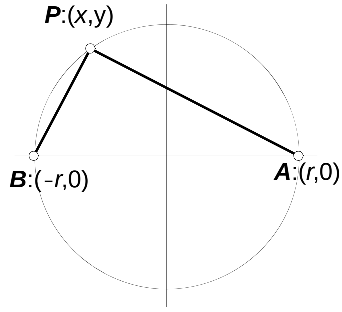
a. Stel een paar bewegingsformules op (dat wil zeggen druk x en y uit in t).

b. Met O: $(0\ ,\ 0)$ en Q: $(-a\ ,\ -b)$ vormt P op elk moment een driehoek.
Alleen op $t = 0$ is die driehoek 'ontaard' tot een lijnstuk.
Toon aan dat het zwaartepunt van die driehoek zich langs een rechte lijn door de oorsprong beweegt.

extra opgave **40** Dat de cirkel met middelpunt O en straal r analytisch kan worden voorgesteld door:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

volgt gemakkelijk uit de stelling van Pythagoras.
Er is nog een andere manier om deze vergelijking te vinden, namelijk met de stelling van Thales.
Stel A: $(r , 0)$ en B: $(-r , 0)$.
De punten P: (x , y) waarvoor geldt: $\angle APB = 90$ vormen tezamen met A en B de cirkel met middelpunt O en straal r. Dat zegt de stelling van Thales.



a. De richtingscoëfficiënten van PA en PB kun je uitdrukken in x, y en r. Hoe?

b. Loodrechte stand betekent: product van de richtingscoëfficiënten is gelijk aan -1. Pas dit toe op het resultaat van **a** en leid opnieuw de cirkelvergelijking af.

c. Noem V het voetpunt van P op AB. Er geldt: $|PV|^2 = |AV| \cdot |BV|$.
Kijk je berekening bij **b** er nog eens op na of je dit resultaat (vertaald in algebra) kunt terugvinden.

14: Conflict(lijn) en vergelijk(ing)

gewogen afstand

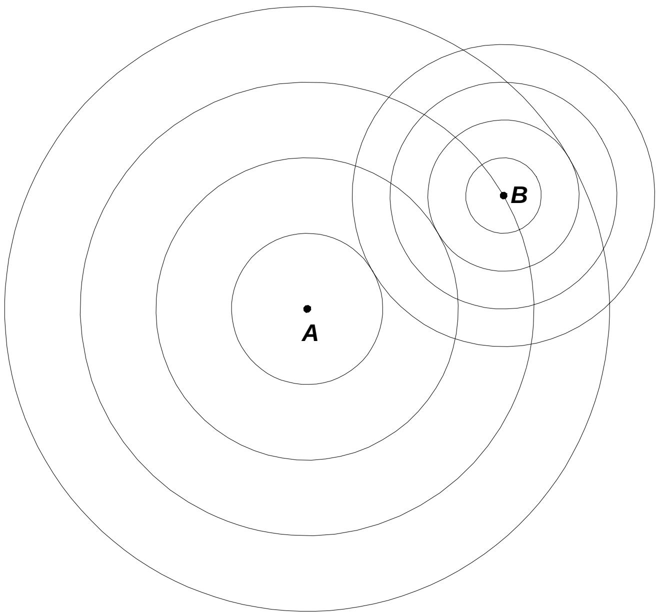
Stel je voor twee provinciehoofdsteden A en B, die hemelsbreed een onderlinge afstand van 120 km hebben. Stad A heeft twee keer zoveel inwoners als B. Om een nieuwe grens tussen de provincies van A en B te bepalen, spreekt men het volgende af: plaatsen die in de provincie van A liggen, mogen een twee keer zo grote afstand tot de hoofdstad hebben als plaatsen in de provincie van B. Anders gezegd: het punt P is een conflictpunt van A en B, als (en alleen als) $d(P, A) = 2 \cdot d(P, B)$.

41 De vraag is natuurlijk hoe de grens eruit komt te zien en waar ze precies moet liggen.

a. Op de rechte lijn tussen A en B kun je direct een conflictpunt P_1 aanwijzen. Welk punt is dat?

b. Iemand oppert dat de loodlijn door P_1 op AB dan wel de conflictlijn zal zijn. Waarom is dit niet waar?

c. Met behulp van cirkels om A en B kun je gemakkelijk conflictpunten construeren. Vind zo een paar conflictpunten. Heb je enig idee wat voor een soort figuur de conflictlijn zal zijn?



analytische methode

De analytische methode is bij uitstek geschikt voor het bepalen van wat in CABRI een LOCUS wordt genoemd: dat is de plaats van alle punten, die aan de gegeven voorwaarde moeten voldoen. In het bijzonder kun je denken aan het bepalen van conflictlijnen. Straks zal je zien hoe je het probleem van opgave **41** analytisch kunt oplossen.
Maar laten we met het eenvoudigste geval beginnen, de punten die even ver van twee gegeven punten af liggen. Doe nu even net of je nog niet weet wat die conflictlijn is.
Stel die punten zijn A: (3 , 4) en B: (5 , 2).
P: (x , y) is een conflictpunt, als (en alleen als) $d(P , A) = d(P , B)$. Analytisch vertaald:

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y-2)^2}$$

Dit is een analytische voorstelling van de conflictlijn. Maar aan deze vergelijking zie je niet zoveel. Daarom is het zaak om deze vergelijking in een herkenbare vorm te krijgen.

middelloodlijn

42 a. De eerste stap die je kunt zetten, is het weglaten van de worteltekens. Waarom mag dat?

b. Werk de zo verkregen vergelijking uit, tot je de vergelijking van een rechte lijn hebt.

c. Controleer dat die lijn door het midden van A en B gaat en tevens loodrecht op AB staat.

43 Bepaal een vergelijking van de middelloodlijn van de punten $(-5\ ,\ 7)$ en $(3\ ,\ -3)$:

a. door de middelloodlijn op te vatten als conflictlijn

b. door het woord 'letterlijk' op te vatten (midden en loodlijn).

Terug naar het probleem van opgave **41.** Om de analytische vertaling te kunnen maken, moet er een assenstelsel worden gekozen. Dat kan op talrijke manieren. Het is echter belangrijk dat je dit niet lukraak doet, maar het assenstelsel zó kiest dat het rekenwerk redelijk 'loopt' en de resultaten een betrekkelijk eenvoudige vorm krijgen. Vaak kun je al veel bereiken (nog voordat je iets hebt uitgerekend!), door te letten op bijzondere punten en op *symmetrie* van de figuur.

44 Neem het geval van de twee steden A en B. De conflictlijn zal symmetrisch moeten zijn ten opzichte van de lijn AB. Het is nu handig om één van de coördinaatassen langs de lijn AB te kiezen. Neem daar de x-as voor. Nu moet er nog een oorsprong en een lengte-eenheid worden gekozen. Als oorsprong lijkt in aanmerking te komen: A (of B, dat maakt niet uit). Maar ook een aardige keus zou kunnen zijn het conflictpunt bedoeld in **41a**.

a. Bedenk voor beide keuzen een argument.

b. We kiezen nu het conflictpunt van **41a** als oorsprong; als lengte-eenheid kiezen we: 10 km.
Welke coördinaten geef je dan A en B als B rechts van de oorsprong ligt?

c. Op de x-as ligt er nu buiten O nog een tweede conflictpunt. Je hoeft geen rekenwerk uit te voeren om dat te vinden. Welk punt is dat?

d. Ga uit van een willekeurig conflictpunt $(x\ ,\ y)$ en vertaal de voorwaarde

$$\mathrm{d}(P\ ,\ A) = 2\ \cdot\ \mathrm{d}(P\ ,\ B)$$

in een vergelijking in x en y.

e. Werk de worteltekens weg, vereenvoudig de vergelijking en laat tenslotte zien dat de conflictlijn een cirkel is met middelpunt $(8\ ,\ 0)$ en straal 8.

De conflictlijn die je nu gevonden hebt, staat bekend als de *cirkel van Apollonius*.
Apollonius was een Grieks wiskundige die je een echte specialist op het gebied van parabolen, ellipsen en hyperbolen zou kunnen noemen. Maar in de Griekse wiskunde maakte men geen gebruik van analytische methoden. Apollonius vond de naar hem genoemde cirkel dan ook langs 'zuiver' meetkundige weg. Als je wilt weten hoe, maak dan de extra opgave aan het eind van deze paragraaf (opgave 50 en 51).

In het vervolg van deze paragraaf ga je de methode om vergelijkingen van conflictlijnen te vinden, toepassen op de parabool. In de volgende paragraaf komen ellips en hyperbool aan de beurt.

parabool

45 De parabool als conflictlijn (van het punt *F* en de rechte lijn *l*) en de parabool als grafiek van een kwadratische functie, is dat wel dezelfde figuur? We gaan uit van de meetkundige definitie en proberen daarmee een analytische voorstelling te vinden voor de parabool. Daartoe kiezen we eerst op verstandige wijze een assenstelsel.

a. De symmetrieas van de parabool is kandidaat voor één van de coördinaatassen. Bijzondere punten die je als oorsprong zou kunnen kiezen, zijn het brandpunt en de top. Geef een argument om de top als oorsprong te kiezen.

b. Neem nu de symmetrieas als *y*-as en de top als oorsprong. Stel de afstand tussen top en brandpunt gelijk aan 1. Hoe stel je nu *F* en *l* analytisch voor?

c. Stel dat *P*: $(x\,,\,y)$ een punt is van de door *F* en *l* bepaalde parabool, ofwel: *P* is een conflictpunt van *F* en *l*. Vertaal deze voorwaarde in een *x*,*y*-vergelijking.

d. Werk deze vergelijking uit totdat je *y* hebt uitgedrukt in *x*.

e. Achteraf blijkt dat je niet de allereenvoudigste paraboolvergelijking hebt gekregen. Door een andere keus van de lengte-eenheid zou dat misschien wel zijn gelukt. Hoe groot moet je de afstand top-brandpunt nemen om $y = x^2$ als vergelijking van de conflictlijn te vinden?

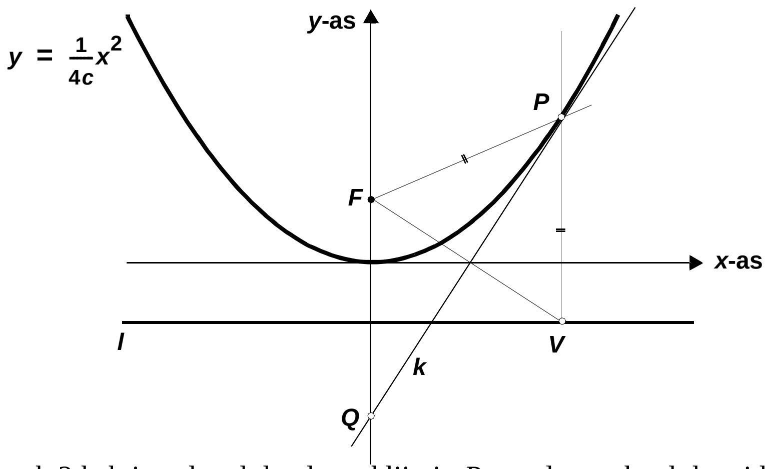
vergelijking parabool

Wat je in opgave **45** hebt gezien, kan nog wat algemener worden gesteld.
Laat de *y*-as de symmetrieas van een parabool zijn en de oorsprong de top.
Als het brandpunt *F* de coördinaten $(0\,,\,c)$ heeft, dan is de analytische voorstelling van de parabool:

$$y = \frac{1}{4c}x^2$$

46 Geef een vergelijking van de parabool met brandpunt $(4\,,\,0)$ en richtlijn $x = -4$.

raaklijn parabool



In hoofdstuk 2 heb je geleerd dat de raaklijn in *P* aan de parabool de middelloodlijn is van *F* en *V*, waarbij *V* het voetpunt van *P* op de richtlijn is. In opgave **47** ga je controleren dat dit dezelfde raaklijn is, als de raaklijn die je bij de differentiaal- en integraalrekening bent tegengekomen.

47 Stel het punt *P*: $(x_P\,,\,y_P)$ op de parabool met vergelijking $y = \frac{1}{4c}x^2$.

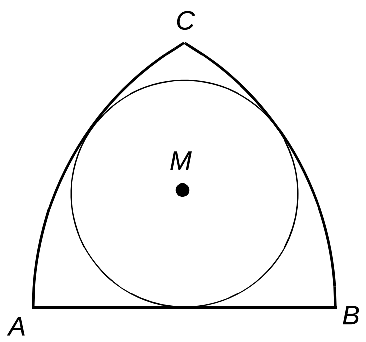
a. De raaklijn-van-de-differentiaalrekening in het punt *P* (zeg *k*) snijdt de *y*-as in *Q*. De *y*-coördinaten van *P* en *Q* zijn aan elkaar tegengesteld. Dat heb je vroeger geleerd. Weet je nog een verklaring hiervoor?

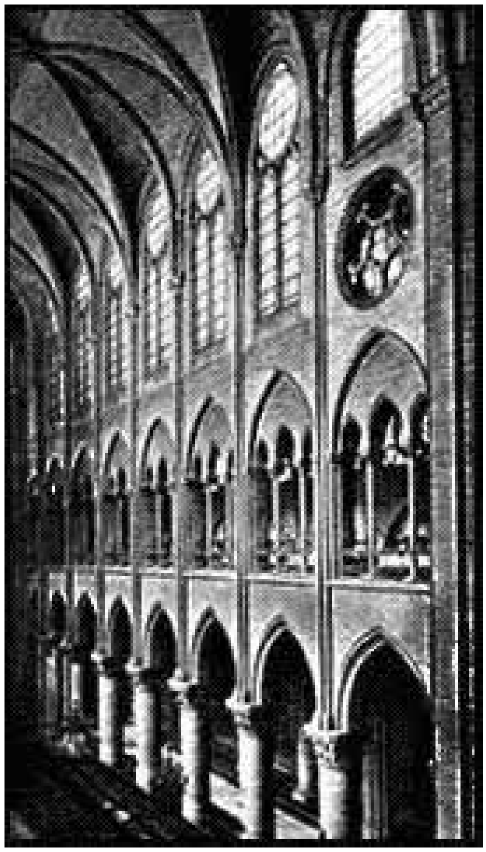
b. Bewijs nu dat de lijnstukken *FQ* en *PV* even lang zijn.

c. Uit **b** volgt dat *k* de middelloodlijn is van *FV*. Hoe? (Tip: let op vierhoek *FQVP*).

gotisch venster

Een van de standaardvormen van een Gotisch venster bestaat uit een symmetrische ‘driehoek’ *ABC* waarvan de opstaande zijden geen rechte lijnen, maar cirkelbogen zijn, met een ingeschreven cirkel. In de illustratie hiernaast zie je zulke vensters.
In de volgende opgaven ga je uitzoeken hoe je zo’n figuur kunt construeren.





48 Stel d(A,B) = r.
De cirkelboog *BC* is een deel van de cirkel met middelpunt *A* en straal *r*.
Je kunt nu wel raden hoe het zit met de cirkelboog *AC*.

a. Construeer nu zelf zo’n Gotische driehoek.

b. Om nu de ingeschreven cirkel te kunnen construeren, moet je weten wat de hoogte van het middelpunt boven de basis *AB* is. Je kunt dit doen met de analytische methode. Dus moet je de figuur nu eerst in een assenstelsel plaatsen.
Maak zelf een keus voor het assenstelsel.

c. Wat zijn nu de coördinaten van *A* uitgedrukt in *r*? En van *B*?

d. Het middelpunt *M* van de ingeschreven cirkel ligt even ver van lijnstuk *AB* als van boog *BC*. Bereken de coördinaten van het punt *M*, uitgedrukt in *r*.

49 De figuur van opgave **48** lijkt op een driehoek met een ingeschreven cirkel.
Zoals je weet is het middelpunt van een ingeschreven cirkel het snijpunt van de drie bissectrices.
De bissectrice uit een hoekpunt was (ook) de lijn van punten die gelijke afstande hadden tot de in dat hoepunt samenkomende zijden.

a. Welke vorm hebben de ‘bissectrices’ van het Gotisch venster?

b. Geef van elk van die ‘bissectrices’ een vergelijking.

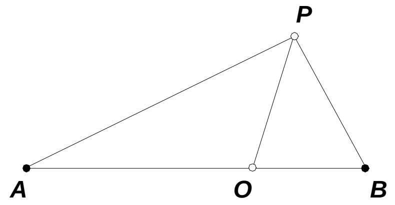
extra opgaven

50 In deze opgave kun je ontdekken hoe Apollonius zijn cirkel vond.
Daarbij gaan we uit van de in het begin van deze paragraaf geschetste situatie.
Neem eerst het conflictpunt O tussen A en B en een conflictpunt P buiten de lijn AB.

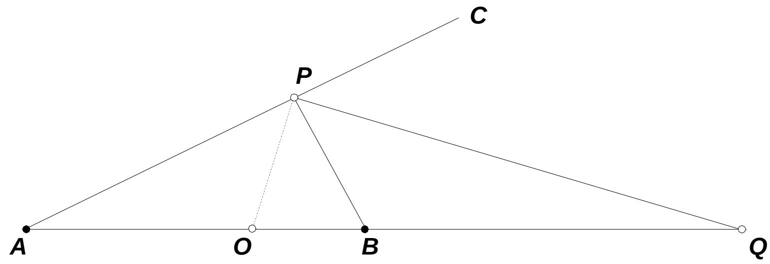
a. Let nu op de driehoeken AOP en BOP. De oppervlakten van deze driehoeken verhouden zich als 2 : 1. Waarom?

b. Omdat de zijden PA en PB zich ook verhouden als 2 : 1 volgt dat O even ver ligt van PA en PB. Verklaar dit.

c. Wat weet je nu van de lijn PO ten opzichte van $\angle APB$?



51 Er is een tweede conflictpunt op de lijn AB, we noemen het Q.



a. Let op de driehoeken AQP en BQP. Hoe verhouden zich de oppervlakten?

b. Bewijs dat Q op de bissectrice ligt van $\angle BPC$.

c. Uit **50c** en **51b** volgt dat OP en QP loodrecht op elkaar staan. Waarom?

d. Maar nu kun je inzien dat alle conflictpunten P op een cirkel liggen! Leg dit uit. Waar precies ligt het middelpunt van de cirkel?

15: Vergelijkingen van ellips en hyperbool

De methode om langs analytische weg conflictlijnen te vinden, kan worden gebruikt om analytische voorstellingen van ellips en hyperbool te vinden. Het rekenwerk dat nodig is om een 'mooie' vergelijking te krijgen, vraagt wat meer uithoudingsvermogen dan in de voorbeelden van de vorige paragraaf.

ellips

Van de ellips heb je een definitie gezien als conflictlijn van een punt en een cirkel. Verder weet je dat de ellips twee symmetrieassen heeft. Daarmee heeft het assenstelsel zichzelf al bijna gekozen!

52 Neem nu de x-as langs de lange as en de y-as langs de korte as. Stel de afstand van een brandpunt F_1 tot oorsprong gelijk aan 4, zeg F_1: (4 , 0). De straal van de cirkel om het andere brandpunt (F_2) mag dan niet kleiner dan 8 zijn! Laat die straal bijvoorbeeld gelijk zijn aan 10.

a. Hoe lang zijn de beide assen van de ellips?

b. $P(x , y)$ is een conflictpunt van c en F_1 betekent dan hetzelfde als:

$$10 - \sqrt{(x+4)^2 + y^2} = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}$$

Verklaar dit.

c. Het uitwerken hiervan tot een eenvoudige vergelijking valt niet mee. Als je links en rechts kwadrateert om de worteltekens weg te werken, blijf je nog met één wortelteken zitten. Schrijf de vergelijking op die zó ontstaat.

d. Als je nu 'schoon schip' maakt, nog een keer kwadrateert, en weer schoon schip maakt, krijg je deze vergelijking:

$$9x^2 + 25y^2 = 225$$

en dat kan ook zó worden geschreven:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Controleer dit alles.

e. Aan deze vergelijking kun je direct een paar dingen controleren, namelijk de symmetrie en de lengten van de assen. Hoe?

vergelijking ellips

In het algemeen kan worden bewezen dat een ellips waarvan de x-as en de y-as de symmetrieassen zijn, een vergelijking heeft van de vorm:

$$\mathbf{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Hierbij veronderstellen we $a > 0$ en $b > 0$.
Men spreekt wel van 'assenvergelijking' van de ellips.

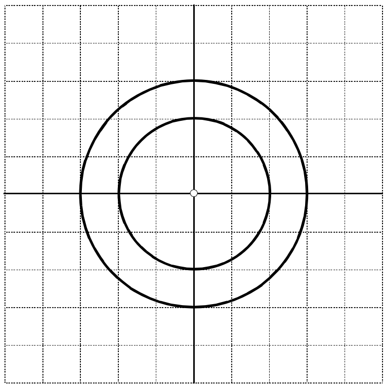
53 a. Hoe lang zijn de assen van de ellips met deze vergelijking?

b. Wat stelt deze vergelijking voor als $a = b$?

c. Je kunt zeggen: een ellips is een opgerekte cirkel. Verklaar dat uit de gevonden vergelijking.

54 Hiernaast zie je een tekening van de cirkels voorgesteld door:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9} = 1 \text{ en } \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4} = 1 .$$



a. Neem de figuur over en schets daarbij ook de ellips:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4} = 1$$

b. Nu ook de ellips:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} = 1$$

***abc* van de ellips**

55 Neem aan dat in de ellipsvergelijking $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ geldt $a > b$.

De lange as valt dan langs de x-as en de brandpunten liggen dus op die as.

a. Wat zijn de coördinaten van de vier toppen van de ellips?

b. Stel de afstand van de brandpunten tot de oorsprong gelijk aan c.
Bewijs dat geldt:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

56 Bereken de coördinaten van de brandpunten van de ellipsen in opgave **54**.

57 Van een ellips is (0 , 0) het middelpunt, (2,0) een top en $(\sqrt{3},0)$ een brandpunt.
Geef een vergelijking van deze ellips.

58 Bekijk op de GR (vierkant assenstelsel) de beweging volgens de formules:

$$\begin{cases} x = 13\cos t \\ y = 5\sin t \end{cases}$$

a. De baan is een ellips. Hoe kun je dat zeker weten?

b. Welke punten zijn de brandpunten?

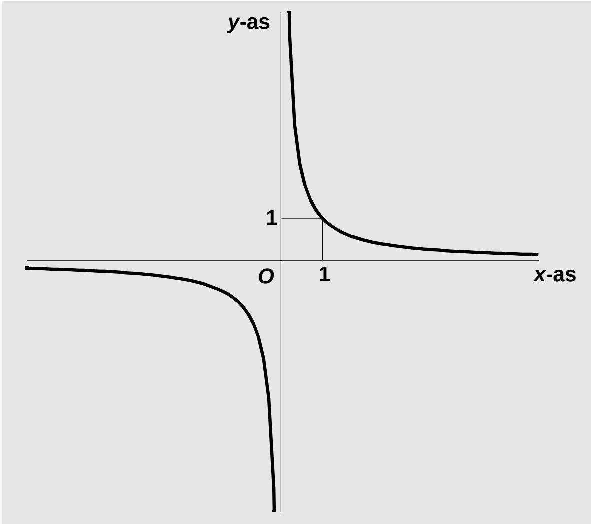
59 Gegeven zijn de cirkels c_1: $(x+1)^2+y^2 = 9$ en c_2: $(x-1)^2+y^2 = 25$.

a. Teken beide cirkels in een coördinatenstelsel.

b. Wat voor een soort kromme is de conflictlijn van beide cirkels?

c. Bepaal een vergelijking van die conflictlijn.

orthogonale hyperbool



Een hyperbool die je in de differentiaal- en integraalrekening bent tegengekomen, luistert naar de vergelijking: $y = \frac{1}{x}$ ofwel $xy = 1$.

In nog wat algemenere vorm is de vergelijking: $xy = c$, waarbij c een constante ongelijk aan 0 is.
Ook in de natuurkunde ben je deze kromme en een drgelijke formule tegengekomen bij de gaswet van Boyle (bij gegeven temperatuur geldt: *druk* $\cdot$ *volume =constant).*
Van zo'n hyperbool staan de asymptoten loodrecht op elkaar en daarom wordt het een *orthogonale hyperbool* genoemd (orthogonaal betekent loodrecht).

Verdient een kromme met vergelijking $xy = c$ inderdaad de naam hyperbool? Met andere woorden: beantwoordt de kromme aan de definitie zoals gegeven in het vorige hoofdstuk? Daarover gaat de volgende opgave.

60 a. Van een hyperbool zijn de coördinaatassen de asymptoten.
Welke lijnen zijn dan de symmetrieassen?

b. Veronderstel dat het brandpunt F_1 de coördinaten (2 , 2) heeft. Wat zijn de coördinaten van het andere brandpunt (F_2)?

c. We beperken ons nu tot de tak in het gebied $x > 0$ en $y > 0$. Die kun je opvatten als de conflictlijn van het punt (2 , 2) en een cirkel met middelpunt F_2.
Hoe groot moet de straal van die cirkel zijn?
(Raadpleeg zo nodig hoofdstuk 2, paragraaf 1).

d. Vertaal nu de conflictvoorwaarde in een x,y-vergelijking en werk deze uit. Als je geen rekenfouten maakt, moet je een vergelijking krijgen van de vorm $xy = c$!

Je weet nu zeker dat de hyperbool die je vroeger tegen bent gekomen, dezelfde is als de hyperbool (met onderling loodrechte asymptoten) van de standaarddefinitie.
De vorm $xy = c$ leert ons onmiddellijk een speciale eigenschap van de orthogonale hyperbool: *als je uit een punt P van de orthogonale hyperbool twee loodlijnen op de asymptoten neerlaat, dan vormen die samen met de asymptoten een rechthoek waarvan de oppervlakte onafhankelijk is van de plaats van P op de hyperbool.*

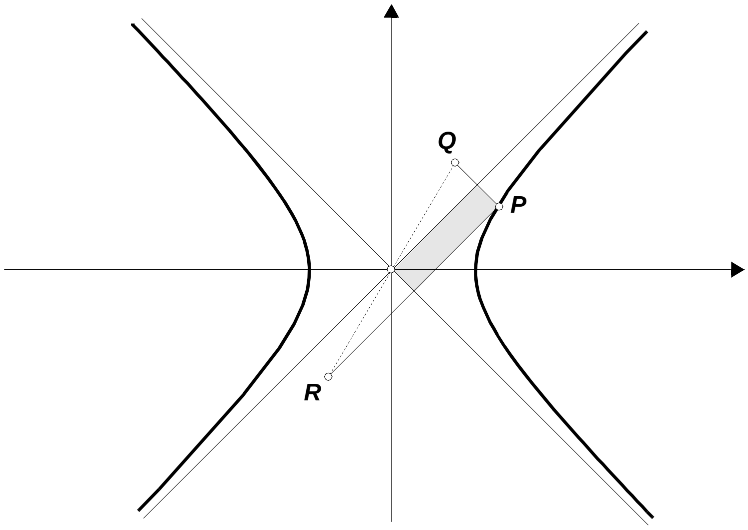
61 Dat is een ingewikkelde zin. Pluis die zin goed uit en ga zorgvuldig na of je het met de uitspraak eens bent.

assenvergelijking

Net als bij de ellips is de favoriete vergelijking van de hyperbool die, waarbij de coördinaatassen de symmetrieassen zijn. Om zo'n vergelijking op te stellen, kun je op dezelfde manier te werk gaan als bij de ellips. Brandpunten kiezen (op de x-as), conflictvoorwaarde opstellen, vergelijking uitwerken. Er komt dan ten slotte een vergelijking die heel erg lijkt op die van de ellips, met één belangrijk verschil: in plaats van een plusteken in het linkerlid, staat er een min. Dat wil zeggen:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Zoals bij de ellips het geval $a = b$ bijzonder is (een cirkel), zo geeft $a = b$ bij de hyperbool ook een bijzonder exemplaar, namelijk de orthogonale hyperbool.
Door gebruik te maken van de 'rechthoek-met-constante-oppervlakte' (zie **61**) kunnen we deze laatste opmerking met heel weinig rekenwerk bewijzen.



62 In de figuur zie je de hyperbool die je krijgt als de hyperbool $xy = 1$ over een hoek van -45 wordt gedraaid. De oppervlakte van de grijze rechthoek = 1.

a. Welke vergelijkingen hebben de asymptoten?

b. Een willekeurig punt P: (x , y) wordt gespiegeld ten opzichte van de beide asymptoten. Dat geeft de punten Q en R. Wat zijn de coördinaten van Q en R?

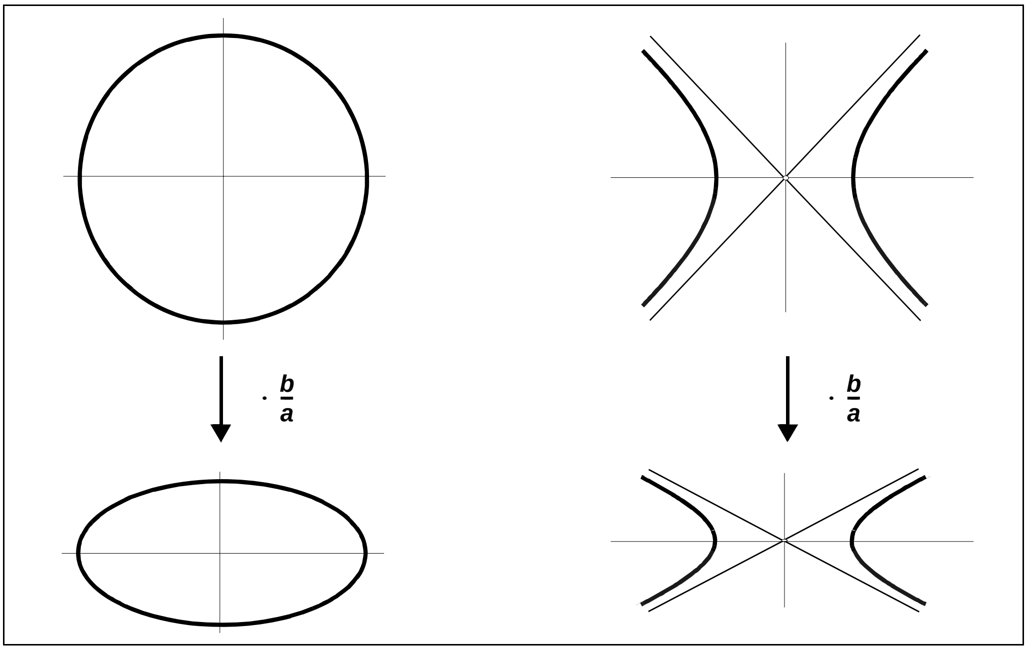
c. De oppervlakte van de grijze rechthoek is precies de helft van de oppervlakte van rechthoekige driehoek PQR. Verklaar dit.

d. Met de afstandsformule kun je de rechthoekszijden PQ en PR berekenen. Controleer dat die gelijk zijn aan $|x - y|\sqrt{2}$ en $|x + y|\sqrt{2}$.

e. Verklaar hieruit dat de hyperbool de vergelijking $x^2 - y^2 = 2$ heeft.

scheve hyperbool

Zoals je een willekeurige ellips door rekken/krimpen uit de cirkel $x^2 + y^2 = a^2$ kunt laten ontstaan, zo kun je een willekeurige hyperbool krijgen door rekken/krimpen van de orthogonale hyperbool $x^2 - y^2 = a^2$. Kijk naar het plaatje op de volgende bladzijde.
De asymptoten maken dan niet langer een rechte hoek en men spreekt wel van een *scheve hyperbool*.



cirkel $x^2 + y^2 = a^2$ $\longrightarrow$ *rekken / krimpen* $\longrightarrow$ ***ellips*** $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

orthogonale hyperbool $x^2 - y^2 = a^2$ $\longrightarrow$ *rekken / krimpen* $\longrightarrow$ ***scheve hyperbool*** $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

63 a. Wat zijn de coördinaten van de toppen van de hyperbool: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$?

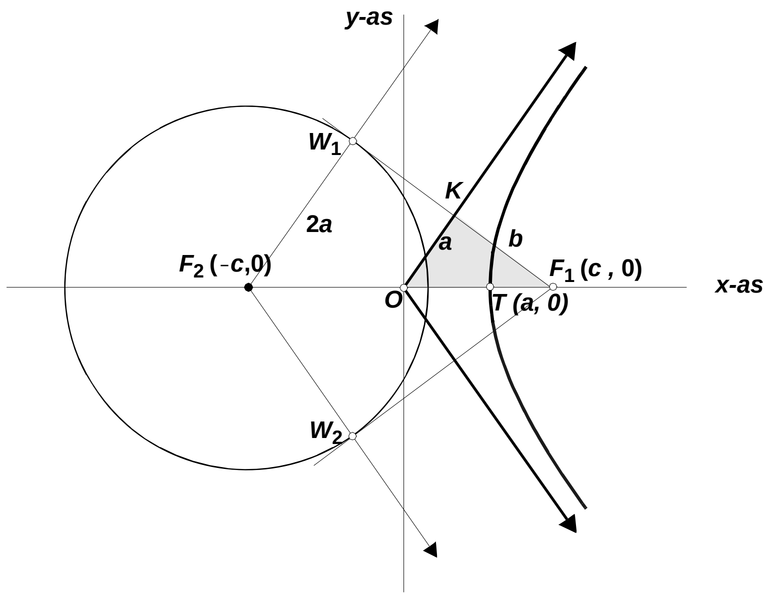
b. De lijnen met vergelijking $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ en $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ zijn de asymptoten van de hyperbool. Verklaar dit uit bovenstaande figuur.

asymptotisch gedrag

In hoofdstuk 2 (opgave 19, bladzijde 34) is met meetkundige middelen aangetoond dat de twee asymptoten van een hyperbool terecht die naam dragen. Dat wil zeggen dat de hyperbool die lijnen *willekeurig dicht* benadert. We kunnen dit nu ook analytisch laten zien.
Als je een punt met positieve coördinaten over de hyperbool $xy = 1$ laat wandelen, zó dat de x-coördinaat onbeperkt groter wordt, dan wordt de afstand tot de x-as onbeperkt klein. Als je bijvoorbeeld een punt op de hyperbool zoekt dat op 0.00 000 0001 van de x-as ligt, dan lukt dat. De x-coördinaat moet eenvoudig het omgekeerde van dit getalletje zijn, dus 1000 0000 00.

We zeggen nu: *y nadert tot 0 voor x nadert tot* ¥.
Ook geldt: *x nadert tot 0 voor y nadert tot* ¥ .
Daarmee is aangetoond dat een orthogonale hyperbool twee asymptoten heeft.
Een scheve hyperbool ontstaat door rekken of krimpen uit een orthogonale hyperbool en erft als het ware de asymptotische eigenschap. Immers de rek- of krimpfactor is constant en de afstand van een punt van de hyperbool tot een asymptoot wordt dan met die constante vermenigvuldigd. Maar dat is niet van invloed op het ‘willekeurig klein’ worden van de afstand.

64



Dit plaatje heb je ook in hoofdstuk 2 kunnen bewonderen, afgezien van het assenstelsel dat is toegevoegd.
De brandpunten van de hyperbool hebben de coördinaten (c , 0) en ($-c$, 0).
De hyperbooltak is de conflictlijn van de cirkel met straal r om F_2 en het punt F_1.
De top T van de hyperbooltak heeft de coördinaten (a , 0).
De asymptoten hebben de vergelijking: $y = -\frac{b}{a}x$

a. Toon aan dat geldt: $r = 2a$ (aanwijzing: gebruik het conflictpunt T).
b. Een van de asymptoten is de middelloodlijn van F_1 en W_1. Daaruit volgt dat de afstand van O tot K (zie figuur) gelijk moet zijn aan a. Verklaar dit.
c. Let nu op het grijze rechthoekige driehoekje OKF_1.Van twee zijden van die driehoek weet je nu de lengte; zijde OF_1 heeft lengte c en zijde OK de lengte a. Waarom moet de derde zijde F_1K gelijk zijn aan b?

***abc* van de hyperbool**

De stelling van Pythagoras in driehoek OKF_1 geeft:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

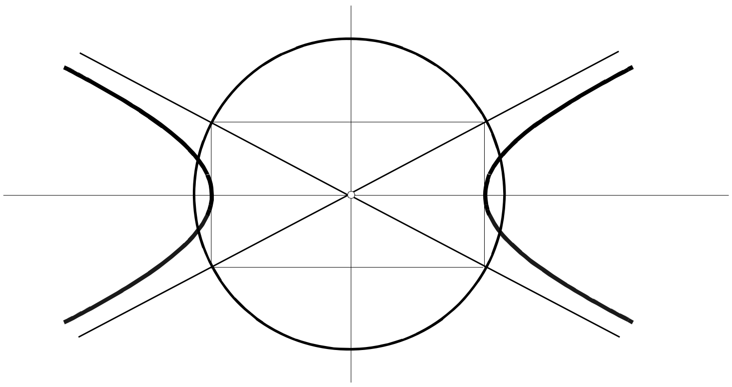
65 Gegeven de hyperbool met vergelijking: $4x^2 - y^2 = 4$.
a. Wat zijn de coördinaten van de toppen en van de brandpunten?
b. Wat zijn de vergelijkingen van de asymptoten?

66 Bekijk op de GR (vierkant assenstelsel) de beweging volgens de formules:

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{\cos t} \\ y = 4\tan t \end{cases}$$

a. De baan is een hyperbool. Verklaar dit door de *x*,*y*-vergelijking op te stellen.
b. Wat zijn de vergelijkingen van de asymptoten?
c. Wat zijn de coördinaten van de brandpunten?

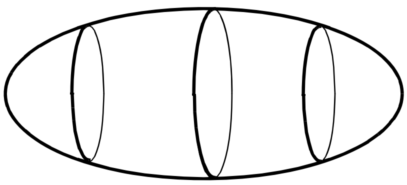
67 In de figuur zie je de hyperbool met vergelijking: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.



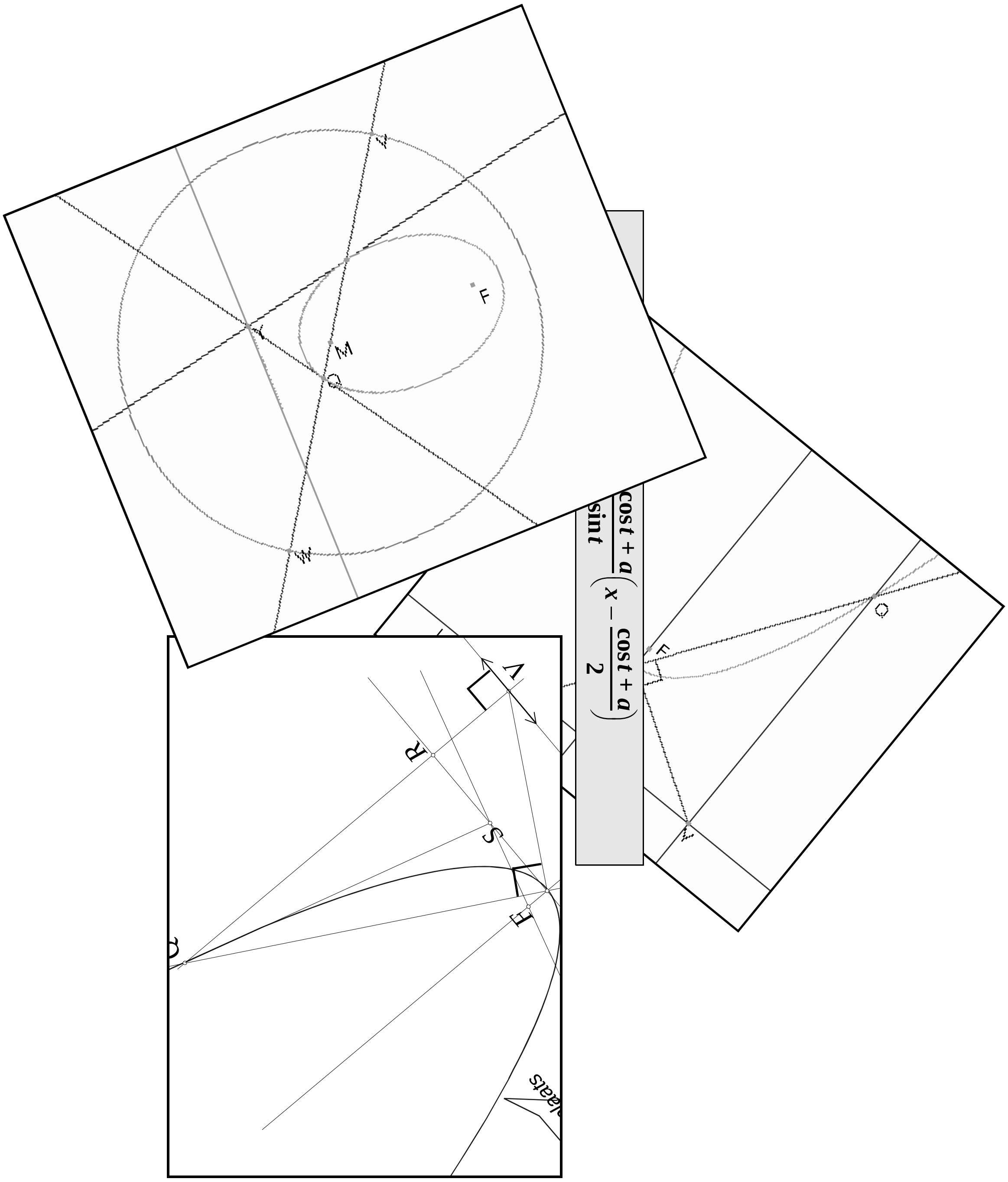
De getekende rechthoek raakt aan de hyperbool en de diagonalen van de rechthoek liggen op de asymptoten. Verder is er nog de omgeschreven cirkel van de rechthoek getekend.
a. Hoe groot zijn de zijden van de rechthoek?
b. Hoe kun je nu de brandpunten van de hyperbool gemakkelijk vinden?
c. Er is een hyperbool die aan de andere twee zijden van de rechthoek raakt en die ook de diagonalen van de rechthoek als asymptoten heeft.
Wat is de vergelijking van die hyperbool?

extra opgave

68 Als je een ellips om zijn lange as laat wentelen, krijg je een soort rugbybal. De naam van het omwentelingslichaam is *ellipsoïde*.
Stel de lange as van de gewentelde ellips = 2*a* en de korte as = 2*b*.
Druk (met behulp van integraalrekening) de inhoud van de ellipsoïde uit in *a* en *b*.



Hoofdstuk 4
Parabool, ellips, hyperbool onder de loep



ter inleiding op dit hoofdstuk

De problemen die in dit hoofdstuk aan de orde komen, bestaan steeds uit twee delen.

Het eerste deel is een experiment met CABRI. Je construeert iets en je ontdekt waarschijnlijk iets bijzonders.
Het tweede deel is het zoeken naar een verklaring. Vanuit wat je al weet over parabolen, ellipsen en hyperbolen moet je kunnen bewijzen dat de verschijnselen niet toevallig verschijningen op het scherm zijn, maar echt logisch aantoonbaar zijn.

Als dat praktischer is, kun je alle CABRI-experimenten eerst doen en daarna pas werken aan de bewijsgedeelten.
Maar misschien is het beter als je de bewijzen zoekt, terwijl je CABRI met de beweegbare tekening nog in de buurt hebt. Wellicht wil je tijdens het bewijzen iets nader bekijken op het computerscherm.

16: De parabool onder de loep

onderzoek met CABRI

1 Breng nog eens de constructie van de parabool op het scherm zoals je die in opgave 18, bladzijde 20 uitgevoerd hebt.

a. Voeg nu het lijnstuk *VF* aan de tekening toe. Gebruik de optie TEKEN2 > SEGMENT.
Markeer het snijpunt van *VF* en de *mll*(*V*, *F*); noem dat punt *S*.
Teken nu ook de *meetkundige plaats* van *S* als *V* over de lijn richtlijn *l* loopt.
Beschrijf deze meetkundige plaats nauwkeurig.

b. Noem de top van de parabool *T*. Construeer *T* door het midden van de loodlijn uit *F* op *l* te tekenen. Wis nu de meetkundige plaats van vraag **a** uit en teken de lijn door *T* evenwijdig aan *l*. Noem deze lijn *m*.
(Het verschil met vraag **a** is dat CABRI met deze lijn verder kan werken.)

c. Markeer het snijpunt van *PV* en *m* en noem dit *R*. Wat lijkt het verband tussen d(*R*, *S*) en d(*S*, *T*) te zijn?

d. Schets de figuur met alle letters op papier, om later te kunnen terugzien.

bewijs zoeken

2 Bij de vorige opgave kun je wat je ziet (de rechtlijnige meetkundige plaats) nog wel verklaren met gelijke driehoeken, extra lijnen en dergelijke. Toch – ter oefening – zoeken we ook een verklaring die de middelen van het vorige hoofdstuk benut. Dat is hier niet heel moeilijk.

a. Gebruik dezelfde ligging van de parabool in het *xy*-vlak als bij opgave **45**, bladzijde 71. Voeg dit coördinatenstelsel aan je schets toe.

b. Verklaar waarom nu *V* door (*x*, –1) moet worden voorgesteld.

c. Wat zijn de coördinaten van *S*, passend bij die van *V*?

d. Hoe verklaar je nu de verschijnselen van de vorige opgave, onderdeel ***a*** en ***c***?

3 Dit is een voortzetting van de vorige opgave. We gaan op een andere manier de vergelijking van de parabool bepalen, aansluitend bij de CABRI-constructie.

a. Als eerste stap kiezen we voor *V* het punt (12, –1). Je begrijpt: straks stappen we van de 12 af en doen we het ‘algemeen’. Bepaal de vergelijking van de middelloodlijn van *FV*.

b. Bereken de coördinaten van het snijpunt *P* van die lijn met de lijn $x = 12$. Dat is immers precies zoals je het met CABRI hebt gedaan.

c. Herhaal nu de exercitie van ***a*** en ***b***, maar met het ‘algemene’ punt *V*: (x_V,–1).
De coördinaten van het uiteindelijke snijpunt *P* worden dus in x_V uitgedrukt.
Let op: tussentijds verschijnt in je rekenwerk natuurlijk ook een gewone *x*, maar uiteindelijk worden de coördinaten van *P* alleen in x_V uitgedrukt.

d. Slotfase: hoe hangt de *y*-coördinaat van *P* met de *x*-coördinaat samen?
Noteer dat verband, dat is de vergelijking van de parabool. Klopt het met opgave **45**, bladzijde 71?

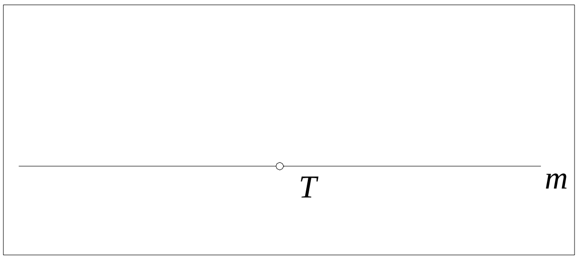
17: Veel parabolen tegelijk en één in het bijzonder

In dit gedeelte voer je twee constructies uit, die extra inzicht kunnen geven voor het wat lastiger probleem van de volgende paragraaf.

voorbereidingsfase

4 In deze opgave construeren we alle parabolen met gemeenschappelijke top en raaklijn aan de top.

a. Maak het scherm schoon en breng het volgende in beeld:



b. Nu moeten brandpunt en richtlijn, F en l, bepaald worden. Je weet intussen waar F kán liggen: op de symmetrieas van de parabolen. Teken dat object en leg er een punt F op.

c. Gebruik het spiegelbeeld van F in de lijn m om de richtlijn l precies te kunnen tekenen. Gebruik de optie CONSTRUEER2 > REFLECTION en klik op F, daarna op m.

d. Construeer nu de parabool.

e. Kijk wat het effect van verslepen van F is.

f. Kies nu de optie

EXTRA1 > TRACE ON/OFF

en klik de parabool aan. Als je nu weer F versleept, krijg je een spoor van parabolen te zien.

g. Met de optie

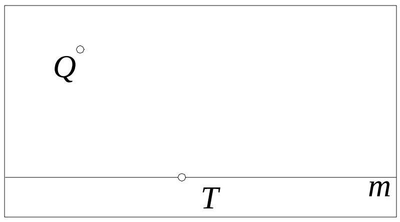
EDIT > REFRESH DRAWING

wis je de parabolen uit. Je moet nogmaals TRACE ON/OFF gebruiken en op de parabool klikken om verdere sporen te vermijden. Doe dat.

5 Construeer een parabool die:

– een gegeven punt T als top heeft
– raakt aan de lijn m (die door door T gaat)
– door het gegeven punt Q gaat.

Tip: maak gebruik van punt S zoals dat in opgave **1** optrad.



18: Een andere meetkundige plaats?

onderzoek met Cabri

6 Kies op het scherm weer een punt en een lijn. Noem ze *T* en *l*. (Neem *T* niet *op l*.)
We gaan een constructie uitvoeren die als twee druppels water op die van de parabool lijkt, maar het toch echt niet is.

a. Kies weer een lopend punt *V* op *l* en construeer nu:
- de loodlijn in *V* op *l*
- het segment *VT*
- de loodlijn op *VT* in *T*
- het snijpunt van die twee loodlijnen. Noem dat *Q*.

Laat CABRI nu weer de meetkundige plaats van *Q* tekenen als *V* de lijn **l** doorloopt.

b. Op welk punt wijkt de constructie af van die van de paraboolconstructie?

c. Sleep wat aan T en *l*. Noteer je vermoedens over de vorm van de meetkundige plaats.

7 Nader onderzoek met CABRI is hier nodig! Laat daarom de figuur op het scherm staan.

a. Construeer op de manier van opgave **4** weer parabolen waarvan *T* de top is en waarvan je het brandpunt *F* nog kunt verslepen terwijl de top op dezelfde plaats blijft.

b. Onderzoek waar je *F* moet leggen om een parabool te vinden, die schijnbaar perfect met de meetkundige plaats van opgave **6** te samenvalt.

c. Wat lijkt het verband te zijn tussen de afstanden d(*F*, *T*) en d(*T*, *l*)?

bewijzen zoeken

Bij wat hier te ontdekken viel, kun je een bewijs zoeken met coördinaten, maar ook een meer ‘gewoon’ bewijs is mogelijk.

8 Deze opgave helpt je op het coördinatenpad op weg.
Omdat de te onderzoeken figuur door *T* gaat, kies je de oorsprong in *T*. Laat **l** door (0, –1) gaan.

a. Probeer nu de methode van opgave **3** aan deze situatie aan te passen. In plaats van de middelloodlijn van *FV* moet je nu met een andere lijn werken.

b. Wat vind je uiteindelijk als vergelijking van de gevonden kromme? En wat is dat volgens die vergelijking dan voor kromme?

c. Word je vermoeden van opgave **7c** bewaarheid?

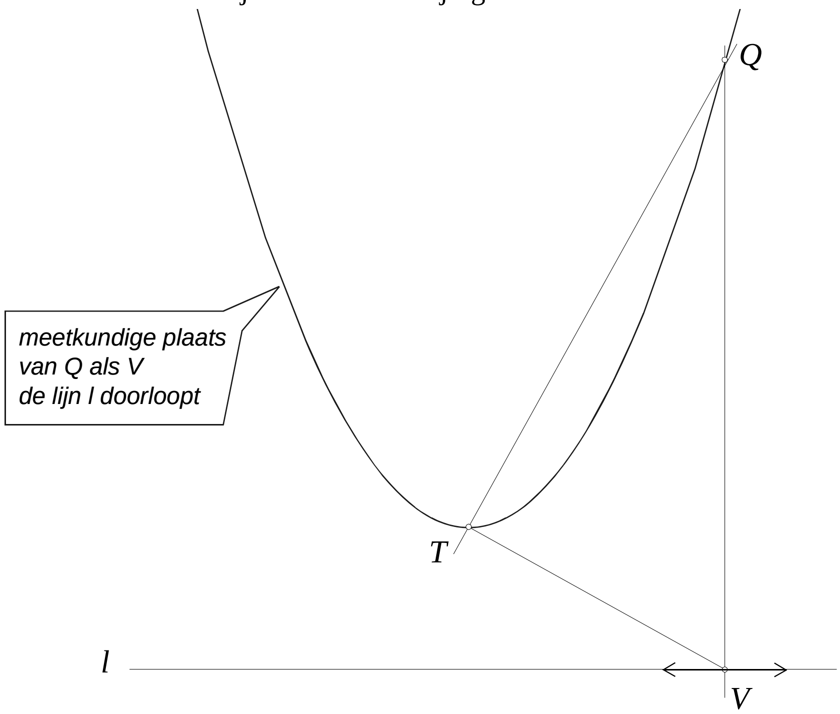
9 Ben je het eens met de volgende bewering:

het rekenwerk valt eigenlijk wel mee, ik zie ook wel dat de vergelijking die van een parabool is, maar ....

Noteer je eigen commentaar!

10 In deze opgave werken we zonder coördinaten aan hetzelfde probleem. Je moet nu even vergeten dát de kromme een parabool is, want we willen dat juist op een andere manier bewijzen.

a. In de figuur hieronder zie je een schets van de constructiewijze. Markeer in de figuur twee belangrijke loodrechte standen. Teken ook de symmetrieas van de kromme en de lijn door *T* evenwijdig aan *l*.



b. Een idee voor een bewijs is nu dit:

áls de figuur een parabool is met aangegeven as die door Q gaat, dan moet met de methode van opgave **5** *het brandpunt te bepalen zijn. Als we zo een punt vinden dat niet van Q af blijkt te hangen, dan zitten we goed. Want dan valt de parabool die ..... samen met............*

Vul dit aan en licht het nader toe!

c. Daar gaan we dan: voer de constructies van opgave **5** uit en voeg zodoende de punten *S*, *R* en *F* aan de figuur toe.

d. De driehoeken *FTS* en *SRQ* zijn beide rechthoekig met overeenkomende hoeken.

Daaruit volgen gelijke verhoudingen: $|FT| : |TS|$ = ...

e. Met welke driehoek is *TRV* gelijkvormig? Druk dat ook uit in verhoudingen van zijden; zorg dat er verbanden ontstaan met de voorgaande verhouding!

f. Probeer uitgaande van die gevonden verhoudingen, het verband tussen $|FT|$ en $|RV|$ te bepalen.

g. Waarom is *FT* alleen afhankelijk van de afstand van *T* tot *l* en niet van de ligging van *V* (of *Q*) ?

h. Vat de hele redenering in enkele regels samen.

11 Geef in enkele regels je commentaar op dit tweede bewijs in de stijl van opgave **9**. Maak ook duidelijk aan welk bewijs jij de voorkeur geeft en waarom.

19: De confocale schaar van ellipsen en hyperbolen

onderzoek met Cabri

12 Breng nog eens de constructie van de ellips in beeld.

a. Noem het punt dat tegenover V op de cirkel c ligt W.
Teken mll(W, F) en snijd die met MV. Noem dat punt Q. Waarom ligt Q ook op de ellips?

b. Noem het snijpunt van mll(W, F) en mll(V, F) nu Y. Construeer de meetkundige plaats van Y en verbaas je hierover!

een bewijs zoeken

13 Net als bij het vorige probleem zijn er twee methoden om dit fenomeen te bewijzen: met of zonder coördinaten.
Voor de coördinatenmethode krijg je de volgende tip:

Stel $V(t) = (\cos t, \sin t)$.

Zoals je weet, stelt dat een punt voor dat over de cirkel loopt.
Je weet nu dat $M = (0, 0)$. Stel nog $F = (a, 0)$, waarbij a dus een vast getal is.

a. Druk nu ook W in t uit.

b. Bereken nu de coördinaten van Y, het punt dat in de vorige opgave de bijzondere baan doorliep. Maak eerst een globaal plan en voer dat puntsgewijs uit.

c. Hoe volgt hier nu uit dat Y op een lijn evenwijdig aan de y-as ligt?

onderzoek met Cabri

14 Breng nog eens de constructie van de ellips in beeld.

a. Dat gaat het snelst door in je vorige figuur W te verwijderen; alles wat van W afhangt verdwijnt nu ook.

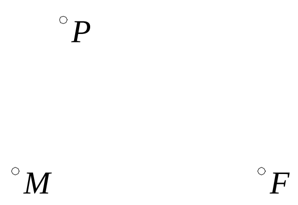
b. Als je de cirkel c vergroot of verkleint (door slepen aan de cirkel zelf) terwijl F en M vast blijven liggen, verandert de ellips mee.
Hoe krijg je een smalle, hoe een relatief brede ellips? En hoe zit dat met de hyperbolen die ook zullen ontstaan?

c. Bestudeer het beeld dat je krijgt als je TRACE ON/OFF gebruikt op de ellips.

d. Zorg dat je ook hyperbolen in beeld krijgt met dezelfde brandpunten F en M.
Onderzoek hoe de hyperbolen en de ellipsen elkaar snijden:
snijden ze elkaar altijd of soms, en onder welke hoeken snijden ze elkaar?

Het computerscherm vertoont nu een serie ellipsen en hyperbolen met gemeenschappelijke brandpunten: de zogenaamde *confocale schaar* van ellipsen en hyperbolen.

15 Construeer een ellips waarvan de brandpunten M en F gegeven zijn en ook nog een punt P op de ellips, zoals in deze figuur, daar is d(P, F) > d(P, M).



a. Zoek eerst een punt op de richtcirkel. Voor dat punt V_1 moet gelden:
d(P, V_1) = d(P, F).
Noem die richtcirkel c_1
Zorg dat V_1 ook op MP ligt.

b. Construeer nu de ellips op de gewone manier. Je moet dus eerst een extra punt op V de richtcirkel leggen!

16 Je hebt bij de vorige opgave V_1 bepaald als snijpunt van de cirkel om P door F met de lijn door M en P. De cirkel om M door V_1 is de richtcirkel.

a. Gebruik nu het andere snijpunt van de cirkel met MP, noem dat V_2 en gebruik de cirkel om M door V_2 als richtcirkel. Noem die cirkel c_2.

b. Construeer nu de bijbehorende hyperbool die door P gaat.
Let hier ook op de opmerking bij **15b**. En de volgende handigheid: doordat MV al loopt over c_1 is er al een punt W dat loopt over c_2. Dat kun je gebruiken.

c. Je hebt nu een ellips en een hyperbool die door P gaan. Lijkt je vermoeden over de hoeken (vraag **14d**) te kloppen? Test dit door MV zó te draaien dat de geconstrueerde punten op de ellips en de hyperbool met P samenvallen.

bewijs vinden

17 Kies zelf langs welke weg je wilt gaan bewijzen dat de raaklijnen in P loodrecht op elkaar staan. Je hebt de methode van opstellen van de vergelijkingen van de middeloodlijnen een paar keer gezien, dus dat zou moeten kunnen.
Maar misschien is er een andere, makkelijker weg, per slot van rekening weet je een hoop over cirkels, raaklijnen, deellijnen, middellijnen en rechthoekige driehoeken. Zoek het uit op de manier die jou bevalt.

Voorbeelduitwerkingen

bij

Conflictlijnen en Spiegels

Hoofdstuk 1: Grens en conflict

20: Grenzen onder water

1 **a.** De straal van een getekende cirkel is de (gelijke) afstand van het middelpunt tot de Deense en de Noorse kust.

b. Nee; als je de grens doortrekt richting Britse kust, dan geldt voor een punt op de grens nog steeds d(P, *Noorwegen*) = d(P, *Denemarken*), maar zo'n punt ligt niet meer op de grens.

2 **a.** Het voetpunt van een punt P op de rand van een gebied G is een punt waarvoor de afstand tot P minimaal is.

b. Bij een inham kan een punt meerdere voetpunten hebben.

c. Een iso-afstandslijn van een gebied G is de verzameling van alle punten P waarvoor d(P, G) dezelfde waarde heeft.

d. Bij het tekenen van de iso-a-lijn bij een ingewikkeld gebied kun je gebruikmaken van stootcirkels (dat zijn cirkels met straal a die met G alleen randpunten gemeen hebben).
De iso-a-lijn is dan de lijn waarop de middelpunten van alle stootcirkels liggen.

3 **a.** Groot-Brittannië.

b. Teken de stootcirkel om dat drielandenpunt.

c. GB - DK - D en GB - D - NL

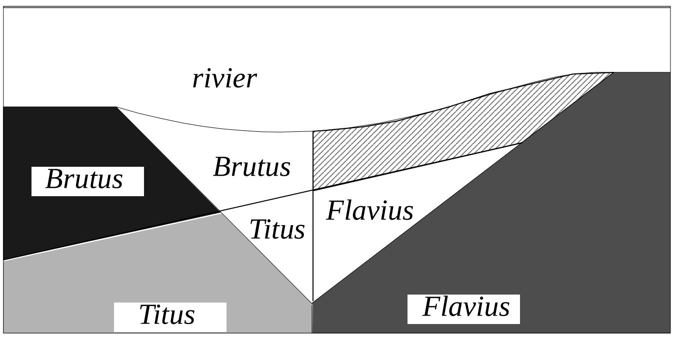
4 **a.** Zoek met de passer enkele middelpunten van aan Nederland en Denemarken rakende stootcirkels. Deze punten liggen vrijwel op een recht lijnstuk dat halverwege de twee drielandenpunten van de vorige opgave begint en op het zuidelijke puntje van de monding van de Elbe eindigt.

b. Sommige van die stootcirkels lopen door Duits gebied. Zoek de stootcirkel die juist aan Duits gebied raakt. Vanuit het middelpunt van die stootcirkel loopt de Duits-Nederlands grens naar de Dollard en de Duits-Deenes naar het eind van de Duits-Deense landgrens. Dat laatste punt kun je op de kaart vinden: de 'politiek' gemaakte onderwatergrens eindigt daar natuurlijk ook.

5

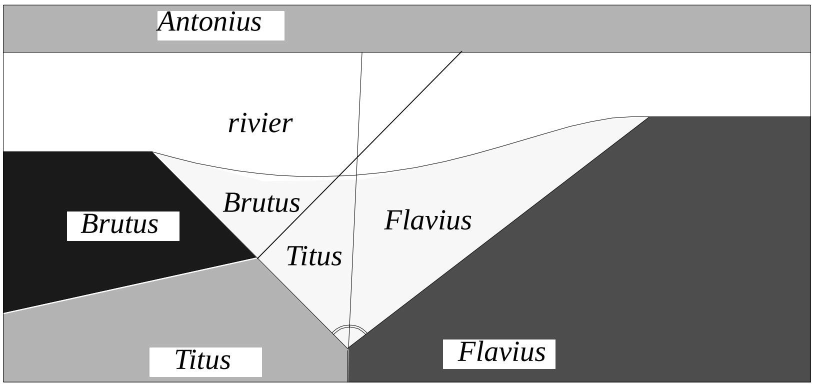
21: Verdelingsproblemen

6 **a.** Volgens dit principe kan niet vastgesteld worden of Brutus of Flavius de eigenaar van het gearceerde gebied wordt.

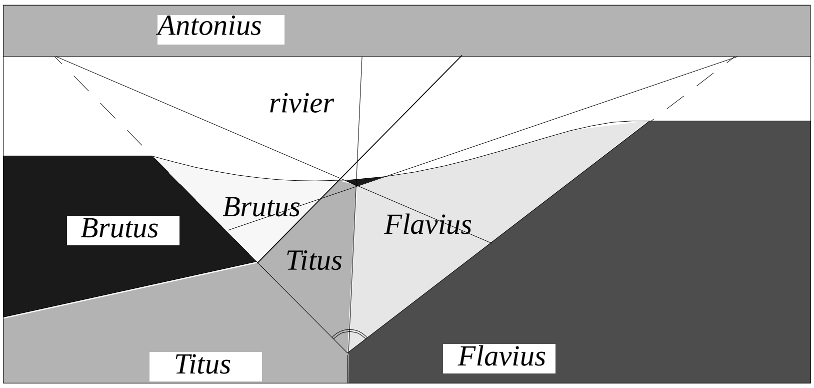


b. – Titus verliest zijn directe toegang tot de rivier
– hij had in de inham een even lange kustlijn als Brutus, maar aan zijn deel is veel minder 'aangegroeid'.

7 De grenzen worden nu gevormd door twee bissectrices (bij Brutus en Titus wordt een hoek van 180 doormidden gedeeld).

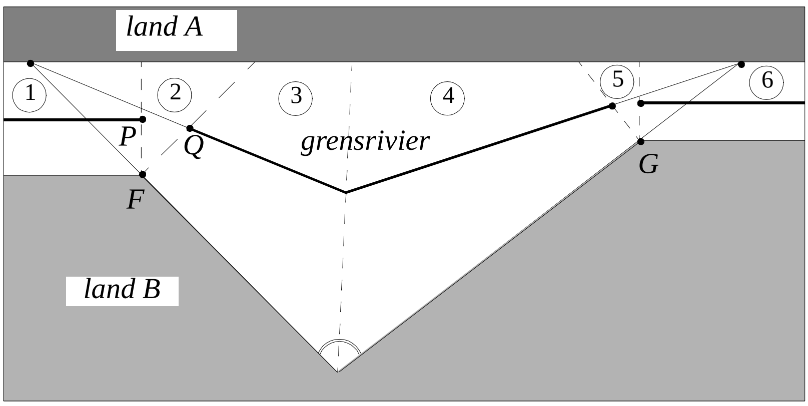


8 Nu spelen de bissectrices een rol van de driehoek die gevormd wordt door de kustlijn van Antonius en de twee kustlijnen van de oorspronkelijke inham.



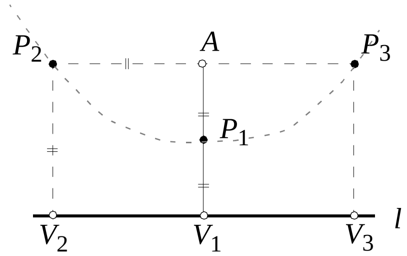
Antonius heeft recht op de kleine donkere 'driehoek'.

9 **a.** In sector 6 is de grens ook een middenparallel.
b. In de sectoren 3 en 4 ligt de grens op een bissectrice (zie opgave **8**).
c. Dat zijn de sectoren 2 en 5.
d. In sector 2 zijn de iso-afstandslijnen van land *B* cirkelbogen om *F*.
Omdat d(*P*, *F*) < d(*Q*, *F*) is *de conflictlijn* niet deel van een cirkel om *F*.
e. *F* en *G* zijn kapen van land *B*.



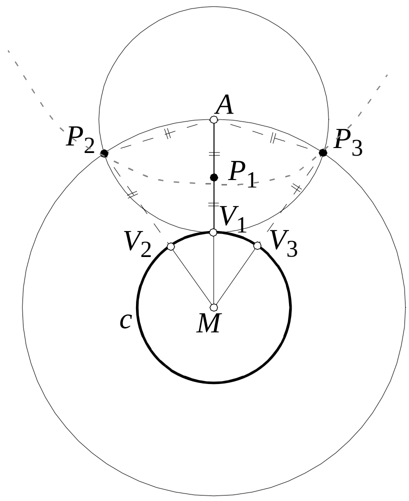
22: Constructie van conflictpunten

10 Er zijn vier 'inhammen'; in elke inham liggen de conflictpunten op een deellijn.
De 'halve' deellijnen van overstaande hoeken vormen samen een hele lijn, een bissectrice. De vier 'halve' deellijnen vormen dus een bissectricepaar.



11 **a.** Je kunt de punten P_1, P_2 en P_3 snel en exact tekenen:
- P_1 is het midden van het loodlijnstuk van A op l;
- P_2 en P_3 liggen op de lijn door A evenwijdig aan l; ze zijn hoekpunten van twee vierkanten.
- het voetpunt V van een conflictpunt P is het snijpunt van l met de loodlijn door P;
- de conflictlijn is symmetrisch in lijn AV_1;
- op het verlengde van AV_1 kan geen tweede conflictpunt meer liggen, de conflictlijn is dus niet gesloten.

b. Je kunt hier helemaal in analogie met de vorige situatie aan het werk gaan.
- de punten P_1, P_2 en P_3 zijn snel en exact te tekenen:
  P_1 is het midden van AV_1; P_2 en P_3 liggen op de cirkel door A om M; ze zijn de twee snijpunten van deze cirkel met de cirkel om A met straal d(A, V_1);
- het voetpunt V van een conflictpunt P is het snijpunt van c met de lijn PM; (deze lijn is in analogie met de situatie bij vraag **a** de loodlijn op c in V);
- de conflictlijn is symmetrisch in lijn AV_1 (= MA);
- op het verlengte van AV_1 kan geen tweede conflictpunt meer liggen, de conflictlijn is dus niet gesloten.



12 **a.** – F en V_1 liggen op dezelfde cirkel om P_1;
– P_1 ligt op de middelloodlijn van F en V_1.

b. De middelloodlijn mll (F, V_1) kan met de loodlijn op l in V_1 niet meer dan één snijpunt hebben; dat punt is al 'vergeven' (P_1). Er is dus geen ander conflictpunt dat V_1 als voetpunt heeft.

13

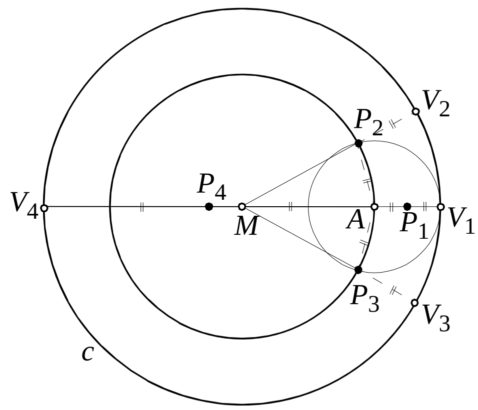
a. De loodlijn in V_2 op l.
b. Teken *mll (F, V).*
c. Het snijpunt van de zojuist getekende lijnen heeft V_2 als voetpunt en ligt dus op gelijke afstanden van F en V_2 en ook van F en l.

14

a. Omdat de middelloodlijn nooit evenwijdig aan de loodlijn op l loopt, is er altijd zo'n snijpunt.
b. 4. Teken de loodlijn in V op l.
5. Teken mll (F, V).

15 **a.** Teken de loodlijn op c in V_2, dat is MV_2. Teken mll (F, V_2). Het snijpunt is P_2.
b. 4. Teken lijn MV. 5. Teken mll (F, V).
c. Nee. Het is bijvoorbeeld mogelijk dat de twee lijnen evenwijdig lopen of dat het snijpunt in het binnengebied van de cirkel ligt.
d. Ja. Want er is om een conflictpunt altijd een stootcirkel die aan c raakt en door F gaat. Het raakpunt heeft de rol van V.

16 **a.** Analoge overwegingen als bij opgave **11 a** leiden tot de figuur hiernaast. Nu kun je vier conflictpunten snel en exact tekenen:
- P_1 is het midden van AV_1;
  P_2 en P_3 liggen op de cirkel door A om M; ze zijn de twee snijpunten van deze cirkel met de cirkel om A met straal d(A, V_1);
- Diametraal aan V_1 ligt op cirkel c het punt V_4; dat is het voetpunt van P_4.
- de conflictlijn is symmetrisch in lijn AV_1 (= MA);
- op het verlengte van AV_1 ligt nu wel een tweede conflictpunt (P_4), deze conflictlijn is wel gesloten.



b. Ja, dat gaat goed.

c. Als F samenvalt met het middelpunt M van cirkel c, dan is de conflictlijn de cirkel om M met een half zo grote straal als c.

23: Conflictlijnen met CABRI

17

18 **a.**

b. De driehoek blijft gelijkbenig. De tophoek verandert wel van grootte.

c.

d.

19

20

a. De middelloodlijnen lijken aan de conflictlijn te raken.

b.

21 Een parabool is de conflictlijn van *een lijn l en een punt F (niet op die lijn).*
Een parabool is symmetrisch in *de loodlijn door F op l*.
De top van de parabool is het midden van *F en het voetpunt van F op l*.
De parabool lijkt *smaller* te worden als de afstand tussen brandpunt en richtlijn kleiner wordt.
De *middelloodlijnen mll (F, V)* lijken raaklijnen aan de parabool te zijn.

22

a.
b.
c.
d.

Hoe construeer je een punt op de conflictlijn van een punt en een cirkel?

1. Teken een punt *F* 2. Teken een cirkel *c* met middelpunt *M* 3. Teken een nieuw punt *V* op *c*.	*voorbereiding*
4. Teken de halve lijn *MV*. 5. Teken de middelloodlijn van *V* en *F* 6. Markeer het snijpunt van de twee lijnen indien het bestaat.	*constructie*
7. Zet de namen bij de punten *F*, *V* en *P* 8. Teken de lijnstukken *FP* en *VP* en kleur ze groen 9. Teken lijnstuk *FV* en kleur dit lijnstuk geel.	*verfraaiing*

23 **a.**
b. De symmetrieassen lijken te zijn: lijn *FM* en *mll* (*F*, *M*)
c.
d. Driehoek *FVM* is dan rechthoekig in *V*.
e. De middelloodlijn *mll*(*F*, *V*) heeft net geen gemeenschappelijk punt met de conflictlijn; hij lijkt asymptoot te zijn.
f. Als *V* wel een conflictpunt *P* oplevert, dan lijkt de middelloodlijn *mll*(*F*, *V*) de raaklijn in *P* aan de conflictlijn te zijn.

24 **a.** links: V_1 rechts: V_2
b. links: V_1 rechts: V_1
c. links: V_1 rechts: V_1
d. links: $d(V_2, P) = d(F, P) + 2r$ rechts: $d(V_2, P) = d(F, P) - 2r$

25 Een hyperbool heeft twee takken.
De conflictlijn van een cirkel en een punt *F* buiten de cirkel is *een van de takken van een hyperbool*.
Een hyperbool is symmetrisch in *de lijn FM en mll(F, M)*
De hyperbool lijkt *smaller* te worden als de afstand tussen punt *F* en
de cirkel kleiner wordt.
De *middelloodlijnen mll(F, M)* lijken raaklijnen aan de hyperbool te zijn.
Voor twee punten *V* op de cirkel levert de constructie geen punt *P* van de hyperbool op. In deze gevallen
– is driehoek *VFM rechthoekig in V*
– is *mll* (*V* , *F*) *een asymptoot* van de hyperbool.

26

27 **a.** De lijn *FM* en *mll (F, M)*
b.
c. Als *F* samenvalt met *M*, dan is de ellips een cirkel.
Dan is er geen lijn *FM* meer en ook geen middelloodlijn; de cirkel heeft oneindig veel symmetrieassen.

28 Een ellips is de conflictlijn van *een cirkel met middelpunt M en een punt F binnen deze cirkel*.
Een ellips is symmetrisch in *de lijn FM en mll (F, M)*
De ellips lijkt *smaller* te worden als de afstand tussen punt *F* en de cirkel kleiner wordt.
De *middelloodlijnen mll (F,V)* lijken raaklijnen aan de ellips te zijn.

Hoofdstuk 2: Parabool, ellips, hyperbool

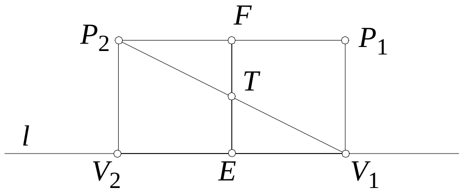
24: Definities van parabool, ellips, hyperbool

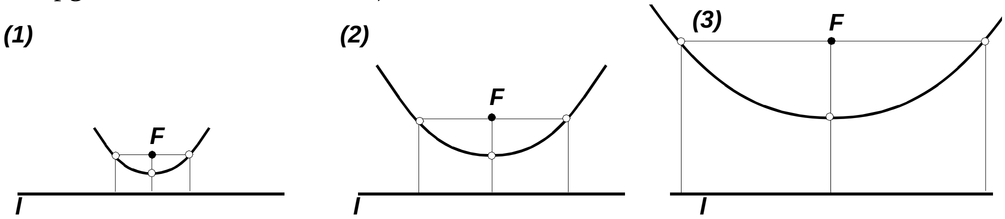
1 Eigenlijk niet. Hij heet nu alleen geen conflictlijn meer.

2 Teken de loodlijn uit F op l (voetpunt E).
Maak nu de twee vierkanten waarvan FE een zijde is.
Dat geeft twee punten P_1 en P_2 van de parabool.
Inderdaad:

$$d(P_1, F) = d(P_1, V) = d(P_1, l) \text{ en}$$
$$d(P_2, F) = d(P_2, V) = d(P_2, l)$$

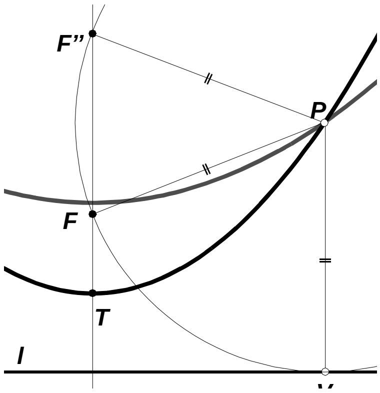
(Zie ook opgave **11 a** van hoofdstuk 1)





3

a. Die cirkel moet door F gaan.
b. Het tweede snijpunt van de cirkel met de symmetrieas is een tweede mogelijkheid voor F, zeg F'.



4 d(Q, l) = 5. Volgens Pythagoras d(Q, F) $= \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

d(R, l) = 10. Volgens Pythagoras d(R, F) $= \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

d(S, l) = 7. Volgens Pythagoras d(S, F) $= \sqrt{5^2 + 5^2} \approx 7{,}071$

Q en R liggen dus wel op de parabool, maar S niet.

5 **a.** Deel I:

Gegeven: d(P, F) = d(P, c)
Te bewijzen: d(P, F) + d(P, M) = r.
Bewijs:
d(P, c) = d(P, V) (afstand punt tot cirkel)
d(P, F) = d(P, c) (gegeven)
Conclusie I: d(P, F) = d(P, V)

d(P, V) + d(P, M) = d(M, V) = r want M, P en V liggen op een rechte lijn)
d(P, F) = d(P, V) (conclusie I)
Conclusie II: d(P, F) + d(P, M) = r.

Deel II:
Gegeven: d(P, F) + d(P, M) = r.
Te bewijzen: d(P, F) = d(P, c).

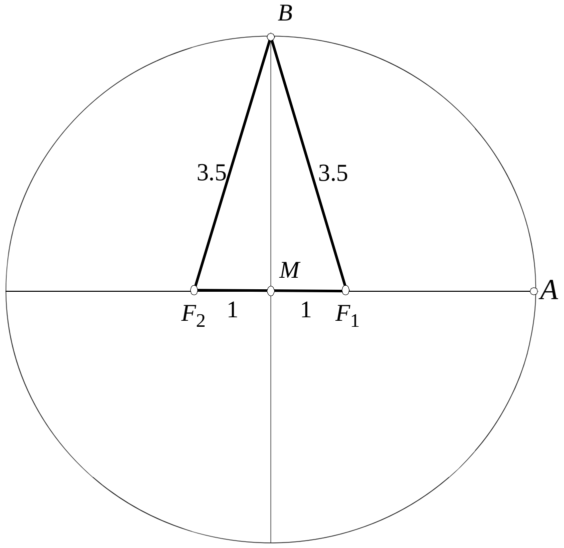
Bewijs:
d(P, V) + d(P, M) = d(M, V) =r want M, P en V liggen op een rechte lijn
d(P, F) + d(P, M) = r (gegeven)
Conclusie III: d(P, F) = d(P, V).

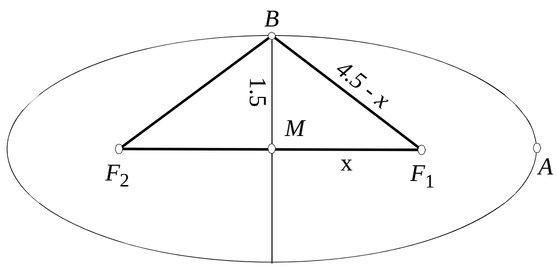
Anderzijds: d(P, c) = d(P, V) (afstand punt tot cirkel)
Conclusie IV: d(P, F) = d(P, c)

b. Als P gespiegeld wordt in mll (M, F) krijg je een punt P' en dan geldt:
d(P, F) = d(P', M) en d(P, M) = d(P', F).
Het spiegelpunt P' voldoet ook aan de voorwaarde dat de som van de afstanden tot F en M gelijk is aan r en ligt dus ook op de ellips.

6 **a.** De som van de afstanden van elk punt van de 'ovaal' tot de beide paaltjes is 7 m; deze eigenschap komt overeen met die in de standaarddefinitie van de ellips.

b. Laat M het punt midden tussen de paaltjes zijn. Je kunt nu de afstanden van de 'extreme punten' B en A tot M berekenen. Zie linkerfiguur.





d(B, M) = $\sqrt{3{,}5^2 - 1^2}$ = $\sqrt{11{,}25}$
'breedte' van de ellips = $2\sqrt{11{,}25}$ = $\sqrt{45}$ » 6,7m

Omdat d(A, F_1) + d(, F_2) = 7, is ook d(A, M) + d(, M) = 7
dus: d(A, M) = 3.5
Dus: 'lengte' ellips = 7 m.

c. De ellips gaat nog meer op een cirkel lijken.

d. De lengte van de ellips blijft 7 meter.
Inde rechterfiguur krijgt BM nu de lengte 1.5.
Stel nu de afstand van het brandpunt tot M gelijk aan x. Dan is d(F_1, B) = 4.5 - x, omdat het touw in totaal 9 meter lang blijft.
Pythagoras in driehoek MF_1B geeft nu een vergelijking:

$$x^2 + 1{,}5^2 = (4{,}5 - x)^2$$

Uitwerken: $x^2 + 1{,}5^2 = 4{,}5^2 - 9x + x^2$

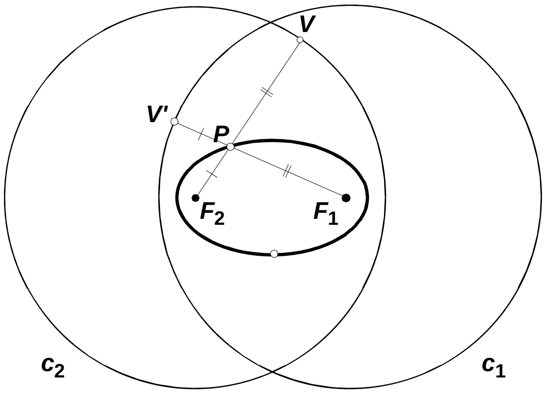
Dus: $x = \frac{4{,}5^2 - 1{,}5^2}{9} = 2$

De paaltjes moeten dus 4 m uit elkaar staan.

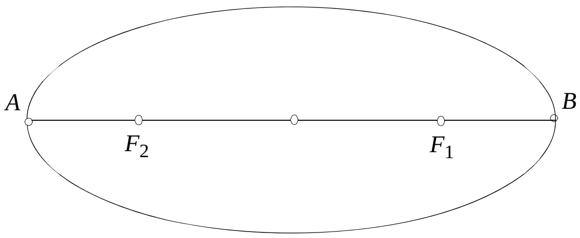
7 De lange as heeft de lengte 10, de korte as heeft de lengte 6.

8 **a.** Twee figuren bestaande uit een cirkel en een punt binnen de cirkel, kunnen in het algemeen niet door in- of uitzoomen in elkaar worden overgevoerd.
b. Een cirkel. Je kunt dan niet spreken van dé lange en dé korte as; een cirkel heeft oneindig veel symmetrieassen.
c. De lengteverhouding van de lange as en de korte as moet hetzelfde zijn.

9 In opgave **3** heb je gezien dat de voorwaarde
$d(P, F_1) = d(P, c_2)$
gelijkwaardig is met
$d(P, F_1) + d(P, F_2) = r$
Op dezelfde wijze als in opgave **3** volgt dat
$d(P, F_2) = d(P, c_1)$
gelijkwaardig is met
$d(P, F_1) + d(P, F_2) = r$
Hieruit volgt nu dat de conflictlijn van F_1 en c_2 samenvalt met de conflictlijn van F_2 en c_1.



10 Aan de lange as.
Immers de straal van de richtcirkel is de constante som van een punt tot de brandpunten.
Neem A als punt:
d(A, F₁) + d(A, F₂) =
d(B, F₁) + d(A, F₁) = d(A, B).



11 *Deel I:*
Gegeven: $d(P, F) = d(P, c)$
Te bewijzen: $d(P, M) - d(P, F) = r$
Bewijs:

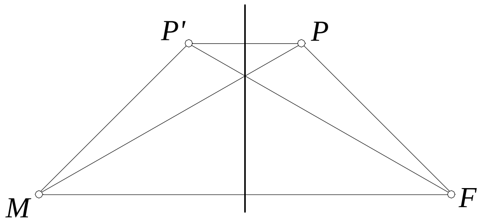
$d(P, c) = d(P, V)$	(afstand punt tot cirkel)
$d(P, F) = d(P, c)$	(gegeven)
Conclusie I: $d(P, F) = d(P, V)$	
$d(P, M) - d(P, V) = d(M, V) = r$	(want M, P en V liggen op een rechte lijn)
$d(P, F) = d(P, V)$	(conclusie I)
Conclusie II: $d(P, M) - d(P, F) = r$	

Deel II (het omgekeerde):
Gegeven: $d(P, M) - d(P, F) = r$

Te bewijzen: $d(P, F) = d(P, c)$
Bewijs:
$d(P, M) - d(P, V) = r$ (want M, P en V liggen op een rechte lijn)
$d(P, M) - d(P, F) = r$ (gegeven)
Conclusie III: $d(P, F) = d(P, V)$

Anderzijds: $d(P, c) = d(P, V)$ (afstand punt tot cirkel)
Conclusie IV: $d(P, F) = d(P, c)$.

12 **a.** Als je P spiegelt in de middelloodlijn van M en F, krijg je een punt P' en dan geldt er:
$d(P', F) = d(P, M)$ en
$d(P', M) = d(P, F)$.
Dus:
$d(P', F) - d(P', M) = r$
$d(P, M) - d(P, F) = r$.



Bij de voorwaarde $d(P, M) - d(P, F) = r$ hoort één hyperbooltak. Bij de voorwaarde $d(P', F) - d(P', M) = r$ hoort ook één hyperbooltak en die is dus het spiegelbeeld van de eerste tak.

b. Het punt M en de cirkel met middelpunt F en straal r.

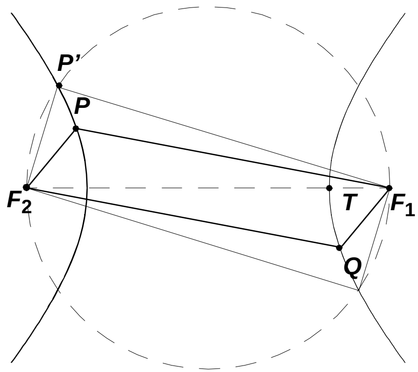
13

a. Trek de verbindingslijn der brandpunten. Dat bepaalt een van de toppen, T.
$r = |\, d(T, F2) - d(T, F1) \,| = 5$ cm – 1 cm = 4 cm.

b. Dat is het midden van F_1F_2 .

c. Het kan door de geodriehoek met de rechte hoek tussen de brandpunten in te schuiven, zoals dat bij ‘Denken in cirkels en lijnen’ gebeurde. Je kunt ook de cirkel met middellijn F_1F_2 tekenen om P en Q te bepalen.

d. Nee, want de zijden PF_2 en PF_1 verschillen altijd 4 cm!

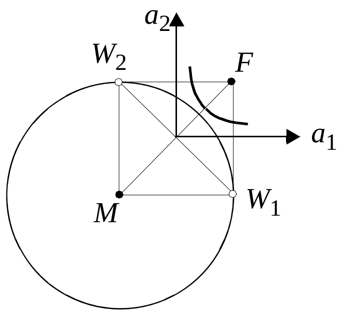


14 ‘Korte as’ zou nog wel kunnen, maar de lange as zou een hele lijn zijn, die niet eens twee punten van de hyperbool verbindt, zoals bij de ellips.
Assen zonder meer is goed: het zijn de symmetrieassen.

15 De richtcirkels zijn de cirkels met straal c om de brandpunten. Het zijn net als bij de ellips de cirkels die gebruikt kunnen worden in de conflictlijnbeschrijving van de hyperbool.

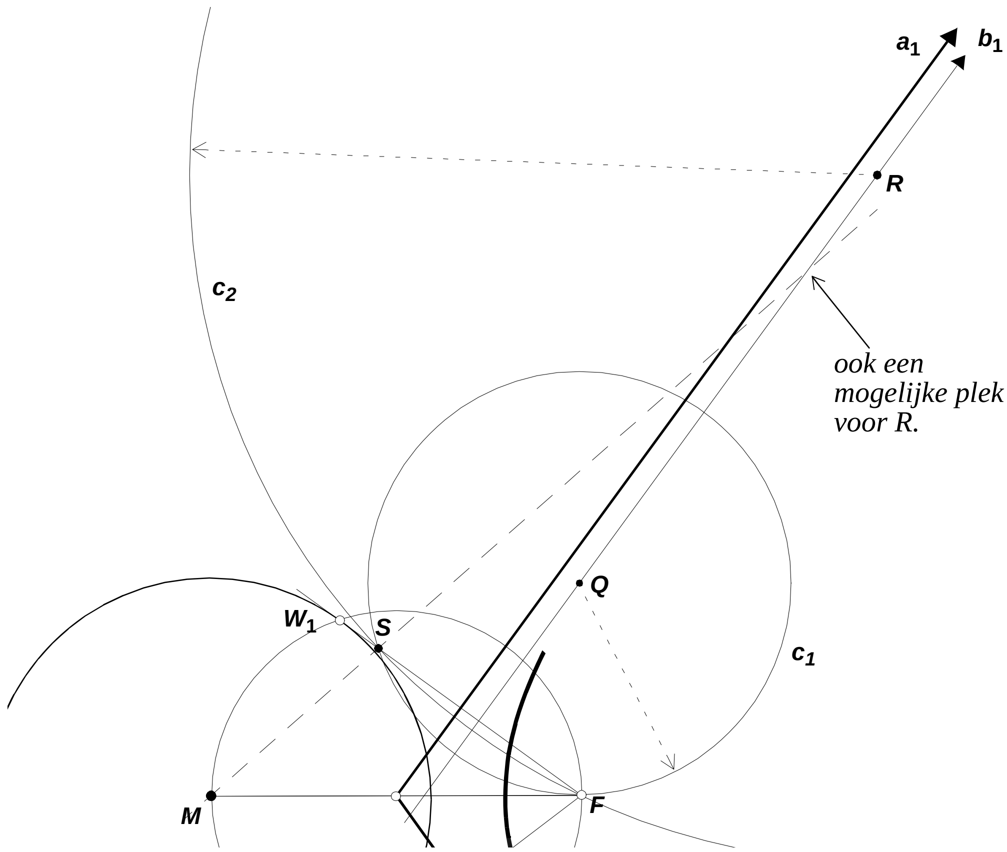
16 Net als twee ellipsen zijn twee hyperbolen in het algemeen niet gelijkvormig.
Ofwel precies hetzelfde antwoord als bij de ellips:
Twee figuren bestaande uit een cirkel en een punt binnen de cirkel, kunnen in het algemeen niet door in- of uitzoomen in elkaar worden overgevoerd.
Bovendien nog: Als de hoeken tussen de asymptoten van twee hyperbolen ongelijk zijn, dan zijn die hyperbolen zeker niet gelijkvormig.

17 d(P, V) < d(P, W_1), want V is het voetpunt van P op de cirkel,
d(P, W_1) = d(P, F), want a_1 is middelloodlijn van W_1 en F.
Conclusie: d(P, V) < d(P, F)



18 Willen a_1 en a_2 loodrecht op elkaar staan, dan moeten FW_1 en FW_2 loodrecht op elkaar staan, en dus ook MW_1 en MW_2
Je kunt nu een cirkel tekenen met twee onderling loodrechte raaklijnen, het snijpunt is dan het punt F.

19



a. c_1
b. Ja. Dus ligt Q dichter bij M dan bij F.
c. De figuur van Q, R en beide cirkels is spiegelsymmetrisch rond de lijn b_1. Dus gaan de cirkels door één punt, zeg S, het spiegelbeeld van F in b_1 dat ook op W_1F ligt.
d. In de tekening is dat al zo. Het kan, omdat de boog van de cirkel tussen S en F steeds vlakker wordt als R verder weg gaat liggen.
Als je wilt, kun je een geschikte positie van R ook nauwkeurig bepalen:
Trek de lijn MS en snijd die met b_1 (de streepjeslijn in de figuur).
Neem dat snijpunt als punt R. Nu hebben de cirkel rond M en de cirkel rond R die door F en S gaat zeker geen punt gemeen, want S is het punt van die cirkel dat het dichtst bij M ligt, en S ligt buiten de cirkel om M omdat W_1F aan de cirkel om M raakt.
e. R ligt aan de F-kant van de hyperbooltak, Q aan de M-kant. Ergens ertussen moet de hyperbool de lijn b_1 dus oversteken.

25: Conflictlijnen herleiden en opsplitsen

20 **a.** De conflictlijn moet symmetrisch zijn en je kunt drie punten weer vrij makkelijk vinden: het punt op de loodlijn door M op de kust van land Y en de punten op de lijn door M evenwijdig aan die kust (M is het middelpunt van de cirkel).

b. (1) $\quad d(P, M) = d(P, V) + r$

(2) $\quad d(P, k) = d(P, l) + r = d(P, A) + r$

(3) $\quad d(P, V) = d(P, A)$ (P op conflictlijn van l en c)

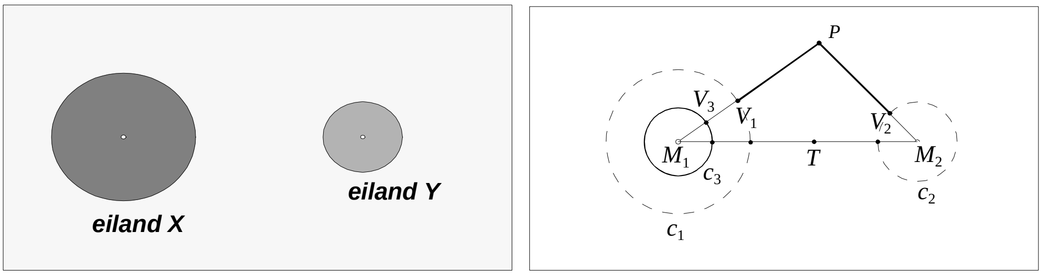
Conclusie: $d(P, M) = d(P, k)$

c. Parabool (met brandpunt M en richtlijn k)

21 **a.** Een rechte lijn: de middelloodlijn van de twee middelpunten.

b. Een concentrische cirkel precies tussen de twee cirkels in.

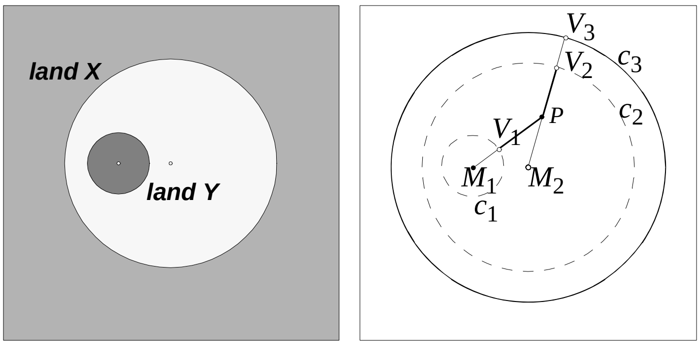
22



In de rechter figuur is eiland X vervangen door cirkel c_1 met straal r_1 en is eiland Y vervangen door cirkel c_2 met straal r_2.
Cirkel c_3 heeft straal $r_1 - r_2$ (c_3 is ‘evenwijdig’ aan c_1 op afstand r_2).
Nu geldt analoog aan de redenering bij **20 a** t/m **c**:
Elk punt P op de conflictlijn van c_1 en c_2 heeft gelijke afstanden tot c_3 en M_2.
De conflictlijn is dus een hyperbooltak (met brandpunten M_1 en M_2; T is de top).

23

a. In de rechter figuur zijn de twee landen weer vervangen door de cirkels c_1 met straal r_1 en c_2 met straal r_2.
Cirkel c_3 heeft nu straal $r_1 + r_2$.
Elk punt P op de conflictlijn van c_1 en c_2 heeft nu gelijke afstanden tot c_3 en M_1.
De conflictlijn is dus een *ellips* (met brandpunten M_1 en M_2).



24 **a.** Als de straal groter wordt, wordt de ellips ronder.

b. Als de afstand van de middelpunten groter wordt, wordt de ellips platter.

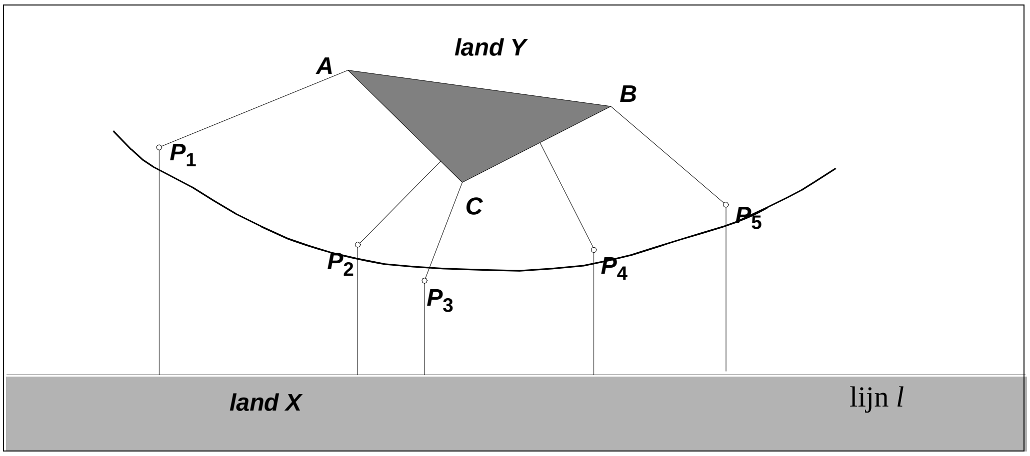
25

conflictlijn tussen ... en ...	punt	rechte lijn	cirkel
punt	middelloodlijn	parabool	ellips, hyperbooltak

conflictlijn tussen ... en ...	punt	rechte lijn	cirkel
rechte lijn		**bissectricepaar, middenparallel**	**parabool**
cirkel			**ellips, hyperbooltak**

26

a.
b.
c.



27

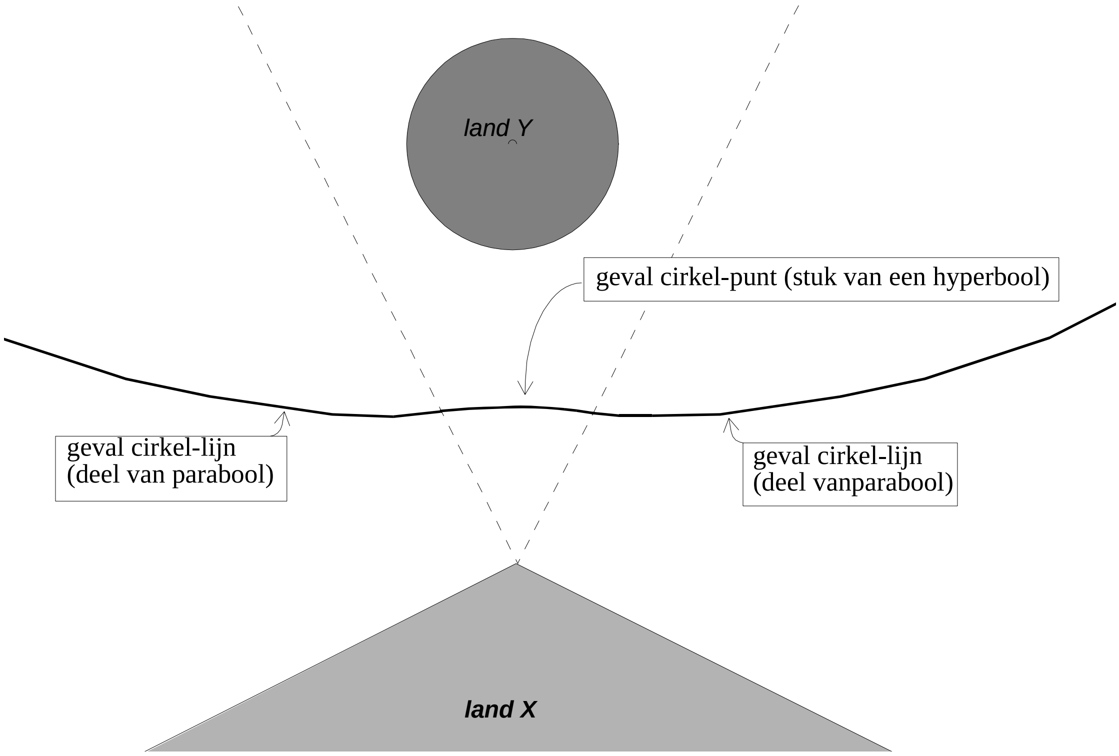
a.

sector	geval	conflictlijn
1	**punt-lijn**	**parabool met brandpunt *A* en richtlijn *l***
2	**lijn-lijn**	**bissectrice van *AC* en *l***
3	**punt-lijn**	**parabool met brandpunt *C* en richtlijn *l***
4	**lijn-lijn**	**bissectrice van *CB* en *l***
5	**punt-lijn**	**parabool met brandpunt *B* en richtlijn *l***

b. Ja, de parabool loopt op gegeven moment steiler dan de grenslijn van de sectoren 5 en 6 en snijdt dus ooit eens deze lijn.
In sector 6 is de conflictlijn dan de bissectrice van *AB* en *l*.

c. Trek de lijnen *AC* en *BC* door om de snijpunten met *l* te vinden. Teken dan de twee bissectrices (stippelen buiten de desbetreffende sector!).
Teken de top van de parabool in sector 3 en laat de parabool soepel aansluiten op de twee bissectrices.
Teken uiteindelijk nog enkele punten van de parabolen in de sectoren 1 en 5.

28



In de sectoren is de aard van het stuk van de conflictlijn aangegeven. Het hyperbolische deel heeft de bolling in de richting van land *Y*.

26: De raaklijneigenschap van de parabool

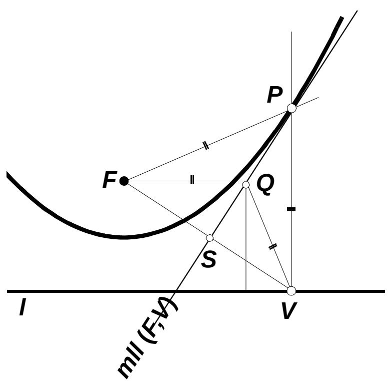
29 **a.** De loodlijn op de spiegel in het punt waar de straal aankomt, moet bissectrice zijn van de invallende en teruggekaatste straal.

b. Verbind de pijlpunt met *F*. Teken dan eerst de bissectrice van de twee stralen.
Daarop loodrecht vind je de goede stand van de spiegel.

c. De spiegels zijn niet evenwijdig.

30 *Te bewijzen*: $\angle FPS = \angle VPS$
Bewijs:
(1) driehoek *FPV* is gelijkbenig, (want d(*P*, *F*) = d(*P*, *V*))
(2) in een gelijkbenige driehoek zijn de basishoeken gelijk.
(3) *Conclusie I:* $\angle PFS = \angle PVS$
(4) $\angle FSP = \angle VSSP = 90$ (*SSP* is *mll*(*F, V*))
(5) In een driehoek is de som van de hoeken 180 , (basisfeit 7)
Uit (3), (4) en (5) volgt *conclusie 2*: $\angle FPSS = \angle VPSS$

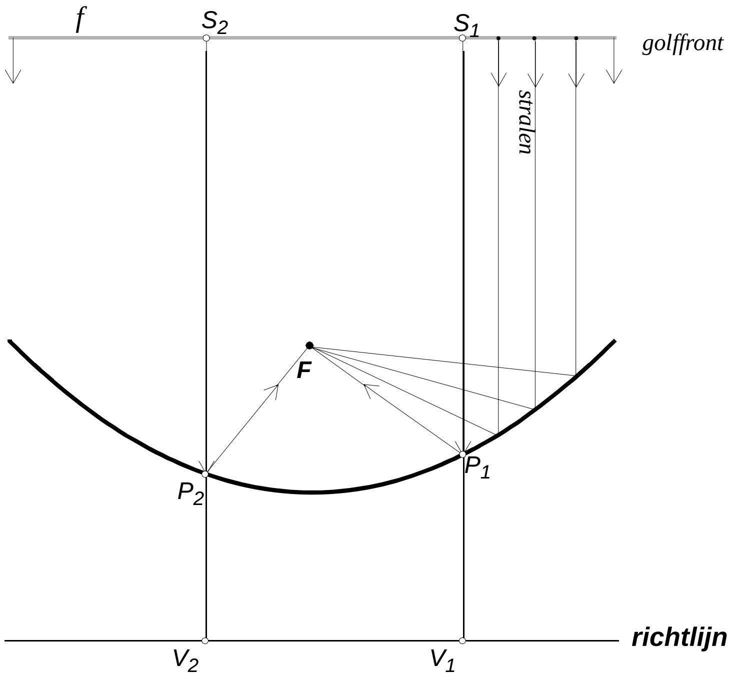
31 (1) d(*Q*, *V*) = d(*Q*, *F*) (want *Q* ligt op *mll*(F, *V*)
(2) d(*Q*, *V*) > d(*Q*, *l*) (want Q heeft een ander voetpunt op l dan *V*)
Uit (1) en (2) volgt de bewering.
(Het maakt voor de redenering niet uit aan welke kant van *P* het punt *Q* ligt.)



32 De stralenrichting wordt omgekeerd, maar voor het spiegelen maakt dat niet uit. Dus:
Als stralen uitgaan van het brandpunt F, dan vormen de door de parabolische spiegel teruggekaatste stralen een evenwijdige bundel.

33 **a.** De lichtbundel is een ‘massieve cilinder’, alle stralen zijn evenwijdig.
b. Dan krijg je een divergerende lichtbundel: de lichtstralen waaieren uit.

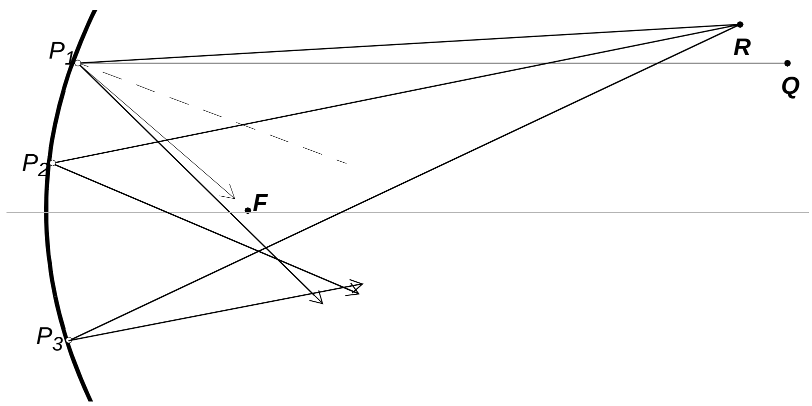
34



Voeg de richtlijn aan de figuur toe en de bijhorende punten V_1 en V_2
d(S_1, P_1) + d(P_1, F) = d(S_1, P_1) + d(P_1, V_1) = d(f, l).
Precies zo:
d(S_2, P_2) + d(P_2, F) = d(S_2, P_2) + d(P_2, V_2) = d(f, l).

35 Radiotelescopen, waarmee de PTT signaalverbindingen legt, richtmicrofoons die bijvoorbeeld gebruikt worden om geluiden op het voetbalveld of tennisbaan op te kunnen nemen voor uitzending.

36

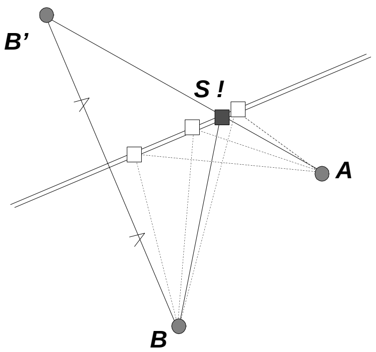


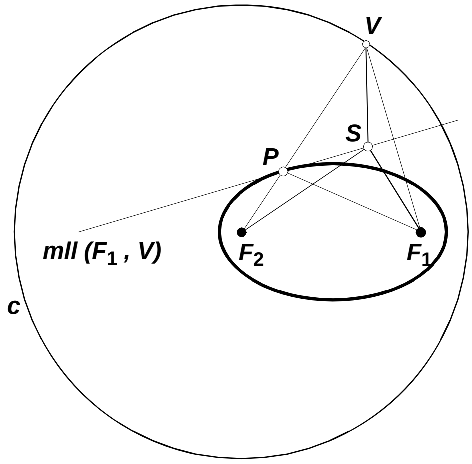
a. De gereflecteerde straal uit Q gaat door F.
b. Spiegel RP_1 in de deellijn van QP_1F om de voortzetting te vinden.
c. Teken ook stralen die vanuit R naar P_2 en P_3 gaan en hun gespiegelde vervolgen.
d. De stralen die vanuit R gaan vormen een divergerende bundel. Na reflectie in de parabool gaan ze niet door één punt.

37 Als de bundel niet evenwijdig aan de as invalt, vormen de gereflecteerde stralen geen convergerende bundel meer. Maar als de hoek met de as klein is, wijkt het weinig af van convergentie.

27: De raaklijneigenschap van ellips en hyperbool

38



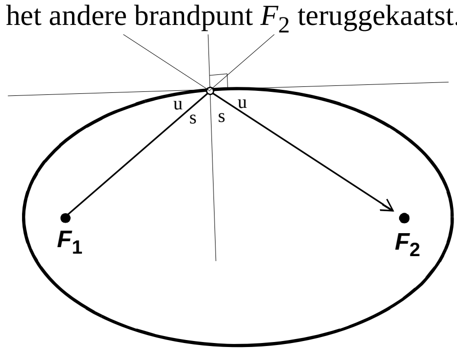


39 **a.** $d(S, F_1) = d(S, V)$ (S op $mll(V, F_1)$)
$d(S, F_1) + d(S, F_2) = d(S, V) + d(S, F_2)$ (invullen voorgaande)
$d(S, V) + d(S, F_2) > d(V, F_2) = r$ (driehoeksongelijkheid)
Dus: $d(S, F_1) + d(S, F_2) > r$. Dus ligt S buiten de ellips.

b. Voor elk punt op de getekende ellips is de som van de afstanden tot de twee brandpunten gelijk; voor elk punt daarbuiten is de som groter.
P is het enige punt dat op de middelloodlijn én de ellips ligt. *P* is dus het gezochte punt.

40 Het bewijs is precies hetzelfde als voor de parabool in opgave **30** van de vorige paragraaf. Je hoeft alleen *F* te vervangen door F_1.

41 Ze worden allemaal naar het andere brandpunt F_2 teruggekaatst.



De hoeken u zijn gelijk vanwege de raaklijneigenschappen. Maar dan zijn ook de hoeken van inval en terugkaatsing (s) gelijk.

42 **a.** Elliptisch: de lamp in het ene brandpunt, de kies van de patient in het andere.

b. Een parabolische spiegel met de lamp in het brandpunt. Het oppervlak moet zó groot zijn dat de bundel van evenwijdige lichtstralen de juiste diameter heeft.
Een andere mogelijkheid is een elliptische spiegel waarbij de lamp niet helemaal in een brand-

punt zit.

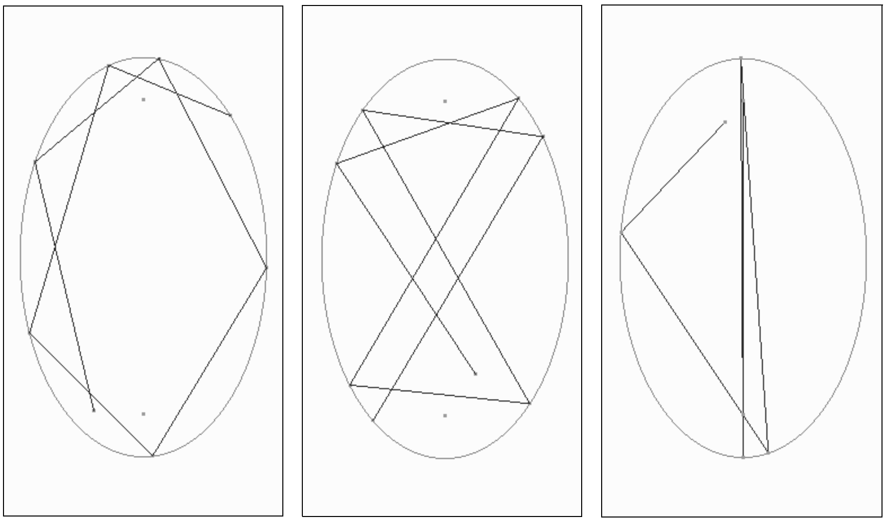
43 De vloer van de zaal heeft de vorm van een ellips.

44

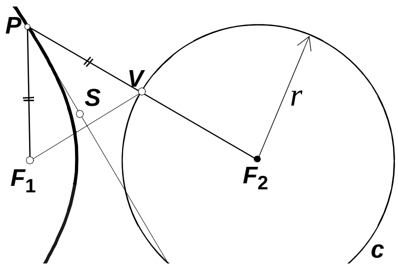
a.

b. Het spiegelbeeld van de straal uit Q ligt weer buiten de hoek $F_1P_1F_2$, maar dan aan de kant van F_2. Deze raakt de ellips in P_2. Dezelfde redenering toepassen op P_1P_2 enzovoort, levert op: alle gereflecteerde stukken gaan niet tussen de brandpunten door.

c. De straal uit R blijft tussen de brandpunten doorlopen. Die uit S gaat om en om door de twee brandpunten. Blijkbaar gaan de stukken steeds meer langs de lange as lopen!
De volgende drie plaatjes zijn met CABRI gemaakt en geven de situaties goed weer.



45 Omdat d(F_1, S) = d(V, S) gaan we driehoek SVF_2 gebruiken en daaruit een ongelijkheid voor d(F_2, S) halen.
d(F_2, S) < d(V, S) + d(V, F_2) (driehoeksongelijkheid))
Omdat d(V, F_2) = r, en d(F_1, S) = d(V, S) kan dat direct omgewerkt worden tot:
d(F_2, S) – d(F_1, S) < r.

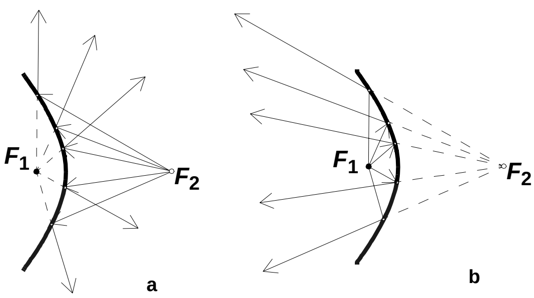


46

a. Alsof ze uit F_1 zouden komen.

b. Alsof ze uit F_2 zouden komen.

c. Ze gaan allemaal naar F_1.

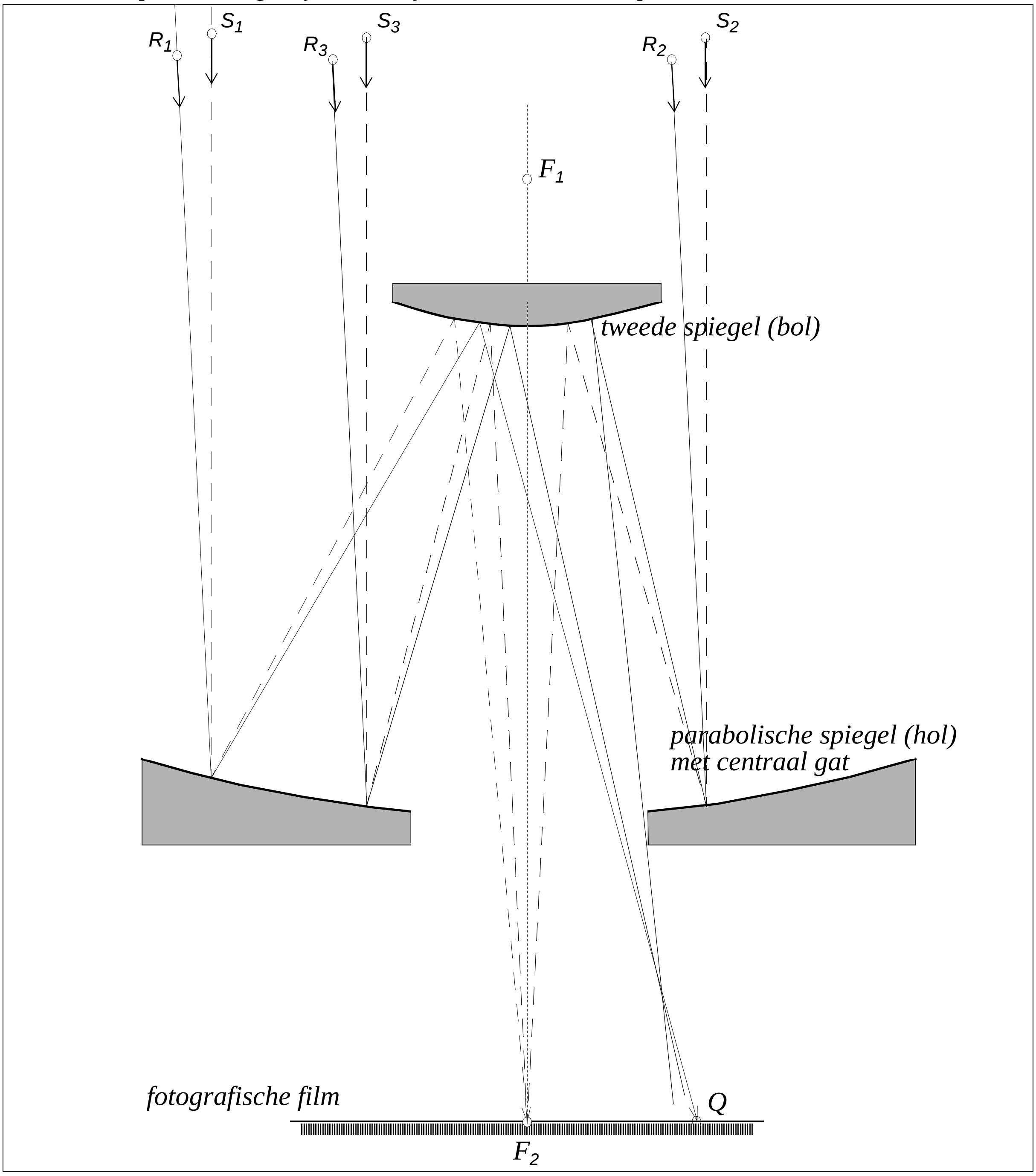


28: (Overzicht parabool, ellips en hyperbool)

29: (Extra) De opgevouwen lichtweg

47

- **a.** Hyperbolisch, met brandpunten F_1 en F_2.
- **b.**
- **c.** De gestippelde lijnen. De straal komt bijna in Q aan.
- **d.** F_1 en Q liggen behoorlijk ver uit elkaar.
- **e.** Wat het uit elkaar leggen van de beelden betreft wel, wat de scherpte betreft nog niet helemaal. Want punt Q is eigenlijk een vlekje, het is niet echt één punt.



Hoofdstuk 3: Analytische Meetkunde

30: Cartesisch assenstelsel

1 **a.** *P* en *Q* hebben een 'horizontale afstand' 2 en een 'verticale afstand' 1.

De stelling van Pythagoras geeft nu: $d(P, Q) = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

b. (1 , 3) ; (2 , 4) ; (4 , 4) ; (5 , 3) ; (5 , 1) ; (4 , 0) ; (2 , 0).

2 **a.** (2 , 1.5)

b. (–2 , 14)

c. De *x*-coördinaat (*y*-coördinaat) van het midden is het *gemiddelde* van de *x*-coördinaten (*y*-coördinaten) van de twee gegeven punten.

3 *B*: (4 , 9)

4 **a.** 7 ; 13

b. 13 ; 20

5 **a.** Als *P* verticaal wordt verschoven, verandert de afstand tot de lijn $x = 4$ niet.

b. Als $x_P > 4$, dan $d(P, l) = x_P - 4$, als $x_P = 4$, dan $d(P, l) = 0$,
als $x_P < 4$, dan $d(P, l) = 4 - x_P$

6 $d(P, l) = |y_P - 3|$

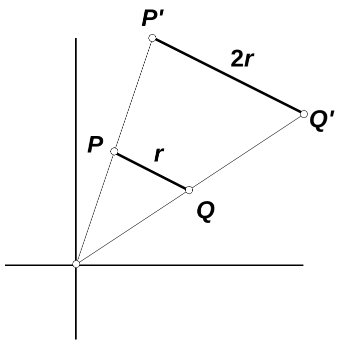
7 Uit de stelling van Pythagoras volgt: $d(P, S)^2 = d(P, l)^2 + d(P, k)^2$ en daaruit volgt de formule.

8 17 ; 101 ; 5

9 De afstand verdubbelt ook. Dat kun je zien aan de formule: als je alle coördinaten verdubbelt, krijg je: $\sqrt{(2x_P - 2x_q)^2 + (2y_p - 2y_Q)^2}$

en dat is gelijk aan $\sqrt{4(x_P - x_q)^2 + 4(y_p - y_Q)^2}$ ofwel $2\sqrt{(x_P - x_q)^2 + (y_p - y_Q)^2}$

Meetkundig:

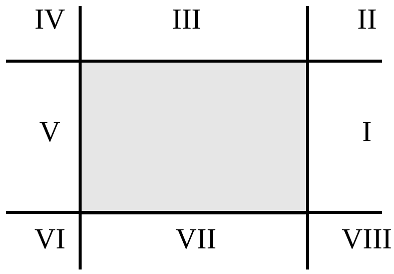


Als je de coördinaten van een punt verdubbelt, komt dat meetkundig neer op een vermenigvuldiging vanuit de oorsprong met factor 2.
Het lijnstuk *PQ* wordt daarbij 2 keer zo lang.

10 Een oneindig lange horizontale strook, begrensd door de lijnen $y = 4$ en $y = 6$.

11 **a.** Een analytische voorstelling is: $|x - 1|$ £ 3 én $|y - 1|$ £ 2

b. Als de acht gebieden als volgt worden genummerd:



dan geldt:

P in	afstand van P tot gebied
I	$\lvert a - 4\rvert$
II	$\sqrt{(a-4)^2 + (b-3)^2}$
III	$\lvert b - 3\rvert$
IV	$\sqrt{(a+2)^2 + (b-3)^2}$
V	$\lvert a + 2\rvert$
VI	$\sqrt{(a+2)^2 + (b+1)^2}$
VII	$\lvert b + 1\rvert$
VIII	$\sqrt{(a-4)^2 + (b+1)^2}$

31: Zwaartepunten

12

a. $x_L = \frac{1}{2}x_P + \frac{1}{2}x_M = \frac{1}{2}x_P + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x_P + \frac{1}{2}x_Q\right) = \frac{3}{4}x_P + \frac{1}{4}x_Q$

Analoog voor de y-coördinaat.

b. P en Q verwisselen van rol, dus $x_N = \frac{1}{4}x_P + \frac{3}{4}x_Q$. Evenzo voor y_N.

c. Dan $x_L = \frac{3}{4}x_P + \frac{1}{4}x_P = x_P$

Het lijnstuk PQ is dan verticaal en de x-coördinaat van L is dan ook gelijk aan die van P (en Q).

13 $x_Z = x_P + \frac{2}{3}(x_Q - x_P) = \frac{1}{3}x_P + \frac{2}{3}x_Q$

14

a. Dan volgt uit: $|P_1Z_1| = \frac{m_2}{m_1 + m_2}|P_1Q_1|$ dat: $x_P - x_Z = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(x_P - x_Q)$ en door beide leden met -1 te vermenigvuldigen, krijg je dezelfde vergelijking als bovenaan bladzij 59.

b. Dan geldt $x_P = x_Q = x_Z$, en dat klopt ook met de formule.

15 (6 , 9)

16

a. *S* ligt in het midden van lijnstuk *QR*. Z ligt op *PS* zó, dat $|PZ| : |ZS| = 2 : 1$

b. Het zwaartepunt van de drie massa's ligt op de lijn die *Q* verbindt met het midden van *PR*. Evenzo ligt het zwaartepunt op de zwaartelijn uit *R*. En omdat drie massa's slechts één zwaartepunt hebben, gaan de drie zwaartelijnen door hetzelfde punt *Z*.

17

a. $x_S = \frac{1}{2}x_Q + \frac{1}{2}x_R$, $y_S = \frac{1}{2}y_Q + \frac{1}{2}y_R$

b. $x_Z = \frac{1}{3}x_P + \frac{2}{3}x_S = \frac{1}{3}x_P + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}x_Q + \frac{1}{2}x_R\right) = \frac{1}{3}x_P + \frac{1}{3}x_Q + \frac{1}{3}x_R$, evenzo $y_Z = \frac{1}{3}y_P + \frac{1}{3}y_Q + \frac{1}{3}y_R$

c. Deze formules zijn 'symmetrisch' in *P*, *Q* en *R*. Dat wil zeggen dat je de punten onderling van rol kunt laten veranderen, zonder dat dit iets aan het resultaat verandert. Als je dus bijvoorbeeld *Q* met het midden van *PR* verbindt en op dit lijnstuk het punt berekent dat dit lijnstuk in de verhouding 2 : 1 verdeelt, vind je hetzelfde punt *Z*! Zo ook met de lijn die *R* verbindt met het midden van *QP*. Conclusie: *Z* ligt op alle drie de zwaartelijnen.

18

a. *Z*: (5 , 5)

b. Z_1: $(5\ ,\ 3\frac{2}{3})$, Z_2: $(5\frac{2}{3}\ ,\ 5)$, Z_3: $(4\frac{1}{3}\ ,\ 6\frac{1}{3})$

c. Het gemiddelde van de *x*-coördinaten van Z_1, Z_2 en Z_3 is gelijk aan 5; evenzo voor de *y*-coördinaten.

19 Ja. Je kunt dit narekenen door uit te gaan van *P*: $(x_P\ ,\ y_P)$, *Q*: $(x_Q\ ,\ y_Q)$ en *R*: $(x_R\ ,\ y_R)$

Dat levert voor de *x*-coördinaten op:

$x_{Z_1} = \frac{4}{9}x_P + \frac{4}{9}x_Q + \frac{1}{9}x_R$, $x_{Z_2} = \frac{1}{9}x_P + \frac{4}{9}x_Q + \frac{4}{9}x_R$ en $x_{Z_3} = \frac{4}{9}x_P + \frac{1}{9}x_Q + \frac{4}{9}x_R$

Het gemiddelde van deze drie coördinaten is juist gelijk aan het gemiddelde van x_P , x_Q en x_R.

20 Neem bijvoorbeeld eerst het zwaartepunt *G* van de massa's in *P* en *Q*.

Voor de coördinaten van *G* geldt: $x_G = \frac{1}{3}x_P + \frac{2}{3}x_Q$ en $y_G = \frac{1}{3}y_P + \frac{2}{3}y_Q$.

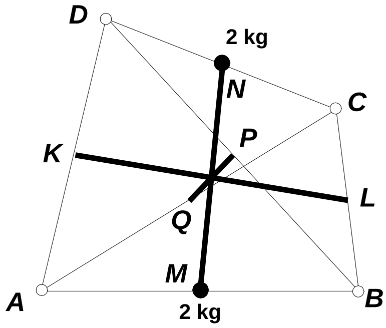
Je kunt de massa's in *P* en *Q* nu vervangen door een massa van 3kg in *G*.
De *x*-coördinaat van het zwaartepunt *Z* van de massa's in *G* en *R* volgt uit:

$$x_Z = \frac{1}{2}x_G + \frac{1}{2}x_R = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}x_P + \frac{2}{3}x_Q\right) + \frac{1}{2}x_R = \frac{1}{6}x_P + \frac{1}{3}x_Q + \frac{1}{2}x_R$$

Evenzo de *y*-coördinaat. Merk op dat de coördinaten van *Z* 'gewogen gemiddelden' zijn van die van *P*, *Q* en *R* en dat de verhouding van de 'gewichten' gelijk is aan 1 : 2 : 3.

21

a. Plaats gelijke massa's in *A*, *B*, *C* en *D* (zeg van 1 kg).
De massa's in *A* en *B* hebben hun zwaartepunt in het midden *M* van *AB* en je kunt daar dus een vervangende massa van 2 kg plaatsen. Analoog voor de massa's in *C* en *D*. Het zwaartepunt van de twee massa's van 2 kg in *M* en *N* is het midden van *MN*.
Als je de vier massa's op een andere manier in tweetallen verdeelt, vind je dat het zwaartepunt op *KL* moet liggen of op *PQ*. Omdat het systeem van de vier massa's één zwaartepunt heeft, weet je nu dat *KL*, *MN* en *PQ* door één punt gaan (en dat dit punt het midden is van de drie lijnstukken).



b. Voor de *x*-coördinaat van het midden *Z* van de middens van

AB en *CD* geldt:

$$x_Z = \tfrac{1}{2}x_M + \tfrac{1}{2}x_N = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}x_A + \tfrac{1}{2}x_B\right) + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}x_C + \tfrac{1}{2}x_D\right) = \tfrac{1}{4}x_A + \tfrac{1}{4}x_B + \tfrac{1}{4}x_C + \tfrac{1}{4}x_D$$

Omdat x_A, x_B, x_C, x_D volkomen gelijkwaardige rollen in deze uitdrukking hebben, valt er een snelle conclusie te trekken over het midden van de middens van *AC* en *BD*: dat is hezelfde punt. Anders gezegd: vanwege de symmetrie in x_A, x_B, x_C, x_D heeft het midden van de middens van *AC* en *BD* of van *AD* en *BC* dezelfde *x*-coördinaat.
Net z iets geldt natuurlijk voor de *y*-coördinaat.
Conclusie: de drie verbindingslijnen van de middens van achtereenvolgens *AB* en *CD*, *AC* en *BD* en *AD* en *BC* gaan door één punt. (Dit punt heet het zwaartepunt van het puntenviertal *ABCD.)*

32: Vergelijking van cirkel en rechte lijn

23 **a.** 0.5 $-1.68 + 1.3 = 0.46$ en niet 0.47.
b. 0.5 is de richtingscoëfficiënt, 1.3 is de *y*-coördinaat van het snijpunt met de *y*-as.
c. 1.5 en -1 zijn de coördinaten van het middelpunt, 5 is de straal.
d. Denk aan de formule voor de afstand van twee punten. Het punt (x , y) ligt op de cirkel *C* als en alleen als de afstand van (x , y) tot het punt $(1.5 , -1)$ gelijk is aan 5.

24 De afstand van een punt (x , y) tot het middelpunt $(3 , 2)$ is gelijk aan: $\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}$;
$\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{5}$ is gelijkwaardig met $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 5$.

25 **a.** $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 20$
b. Acht stuks.
c. $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 13$

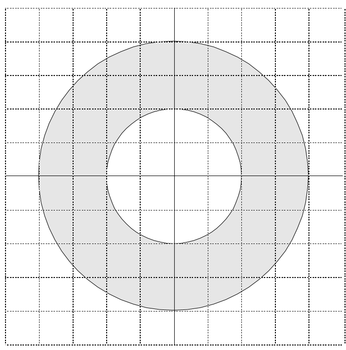
26 $a^2 + b^2 = r^2$

27 Het punt (a , b). Men spreekt soms van ‘puntcirkel’.

28 **a.** De vergelijkingen zijn: $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$, $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$,
$(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$, $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$.
b. De straal van de kleinste cirkel is $2\sqrt{2} - 2$ en de straal van de grootste is $2\sqrt{2} + 2$.
De vergelijkingen van de beide cirkels zijn:
$x^2 + y^2 = 12 - 8\sqrt{2}$ en $x^2 + y^2 = 12 + 8\sqrt{2}$

29 Binnengebied met rand: $(x-3)^2 + (y-3)^2$ £ 4 . Buitengebied met rand: $(x+1)^2 + (y-1)^2$ ‡ 4

30 Zie de figuur rechts.



31 **a.** d(*P*, *M*) = 13, $r = 10$, dus d(*P*, *C*) $=13 - 10 = 3$
b. $10 - 5 = 5$

32 **a.** $y - 2 = 3(x - 2)$ ofwel $y = 3x - 4$
b. 2 £ *x* £ 3, of even goed: 2 £ *y* £ 5
c. *N*: $(2\tfrac{1}{2} , 3\tfrac{1}{2})$; de richtingscoëfficiënt van *MN* is $\dfrac{3 - 3\frac{1}{2}}{4 - 2\frac{1}{2}} = -\dfrac{1}{3}$.

33

a. Nee.

b. Richtingscoëfficiënten van *OA* en OB zijn respectievelijk *a* en *b*.

c. $|OA| = \sqrt{1+a^2}$, $|OB| = \sqrt{1+b^2}$, $|AB| = |a-b|$

d. $|OA|^2 + |OB|^2 = |AB|^2 \qquad (1+a^2) + (1+b^2) = (a-b)^2 \qquad 2 = -2ab \qquad ab = -1$

34 Als de punten dezelfde *x*-coördinaat x_0 hebben. De vergelijking wordt dan: $x = x_0$

35 De richtingscoëfficiënt van *BC* is $\frac{1}{2}$; de richtingscoëfficiënt van een loodlijn op *BC* is dus -2.

De gevraagde vergelijking is: $y - 5 = -2(x + 2)$ ofwel: $y = -2x + 1$.

36 Verbindingslijn van (5 , 8) en (8 , 13) heeft richtingscoëfficiënt $\frac{5}{3}$.

Verbindingslijn van (8 , 13) en (13 , 21) heeft richtingscoëfficiënt $\frac{8}{5}$.

Omdat $\frac{5}{3}$ „ $\frac{8}{5}$ liggen de drie punten niet op één lijn.

37 **a.** De genoemde vergelijking is van de eerste graad in *x* en *y* en stelt dus een rechte lijn voor. De coördinaten van de punten *A*: (*a* , 0) en *B*: (0 , *b*) voldoen aan de vergelijking en die moet dus wel de lijn *AB* voorstellen.

b. Voor *a* = 1 en *b* = 1 is *AB* de verbindingslijn van (1 , 0) en (0 , 1).
Het loodlijnstuk is dan een halve diagonaal van een vierkant met zijde 1 en heeft dus de lengte $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Dat is gelijk aan de uitkomst $\frac{1}{\sqrt{2}}$ van de formule.

c. Noem die factor *k*. $\dfrac{|(ka)\quad(kb)|}{\sqrt{(ka)^2 + (kab)^2}} = \dfrac{k^2\quad|ab|}{k\quad\sqrt{a^2+b^2}} = k \quad oude\ afstand$

d. Manier 1: oppervlakte = $\frac{1}{2}$ d(O, B) d(O, A) = $\frac{1}{2}$ $|ab|$

Manier 2: oppervlakte = $\frac{1}{2}$ d(A, B) d(O, V) = $\frac{1}{2}$ $\sqrt{a^2+b^2}$ d(O, V)

Gelijkstellen geeft de juiste uitdrukking voor d(*O*, *V*).

38

a. $t = 2$: (8 , 9); $t = \frac{3}{4}$: $(4\frac{1}{4}$, 4); $t = 16$: (50 , 65)

b. Die vector heeft componenten ter grootte 3 en 4 in respectievelijk de *x*- en *y*-richting; kortweg: vector = (3 , 4).

c. $X_{1T} = 2 + 3T$, $Y_{1T} = 1 + 4T$

d. De lijn gaat door (2 , 1) en heeft richtingscoëfficiënt $\frac{4}{3}$; vergelijking: $y - 1 = \frac{4}{3}(x-2)$ ofwel $4x - 3y = 5$
Andere manier:
Uit $x = 2 + 3t$ en $y = 1 + 4t$ volgt dat $4x = 8 + 12t$ en $3y = 3 + 12t$.
Uit de laatste twee vergelijkingen volgt: $4x - 3y = 8 - 3$ dus $4x - 3y = 5$ is de *x*-*y*-vergelijking van de lijn. Opmerking: deze berekeningswijze wordt wel *eliminatie van t* genoemd.

39

a. $\begin{cases} x = a + (c-a)t \\ y = b + (d-b)t \end{cases}$

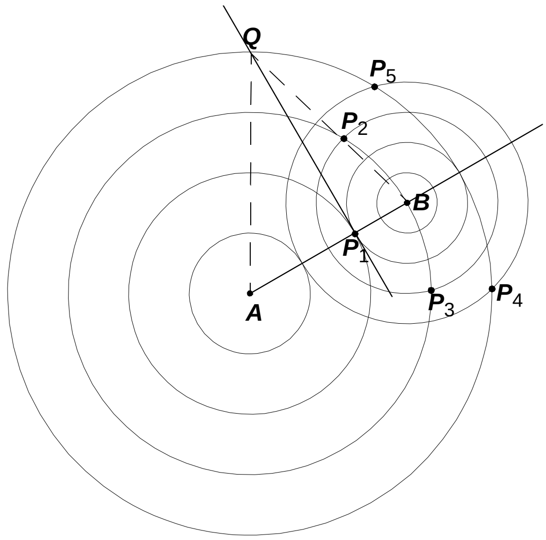
b. Het zwaartepunt van OPQ is $\left(\frac{1}{3}(c-a)t, \frac{1}{3}(d-b)t\right)$. Dit punt beweegt met een constante snelheidsvector, namelijk $\left(\frac{1}{3}(c-a), \frac{1}{3}(d-b)\right)$ en doorloopt dus een rechte lijn. Op $t = 0$ bevindt het punt zich in de oorsprong.

40 **a.** De richtingscoëfficiënt van PA is $\frac{-y}{r-x}$, die van BP is $\frac{y}{r+x}$

b. Product = -1 geeft $-y^2 = -((r-x)(r+x)) = -r^2 + x^2$ dus $x^2 + y^2 = r^2$

c. $|PV|^2 = y^2$, $|AV| = r - x$, $|BV| = x + r$

33: Conflict(lijn) en vergelijk(ing)



41 **a.** Punt P_1 verdeelt lijnstuk AB in de verhouding 2:1

b. Punt Q op deze middelloodlijn ligt op afstand 160 km van A, maar op een afstand van veel meer dan 80 km van B.

c. De punten P_2 tot en met P_5 in de figuur. De conflictlijn is zeker symmetrisch in AB, niet recht, maar gesloten (op AB is er aan de kant van B nog een punt P_6 zó, dat $d(P_6, A) = 2 \cdot d(P_6, B)$)

42 **a.** Wortels ‘weglaten’ betekent eigenlijk: kwadrateren. Omdat onder beide wortels de term niet-negatief is, haal je geen extra oplossingen binnen.

b. Alle kwadraat-termen vallen tegen elkaar weg, er blijft na herleiden over: $y = x - 1$

c. Deze lijn gaat door het midden (4, 3) van lijnstuk AB en heeft de juiste richtingscoëfficiënt.

43 **a.** $\sqrt{(x+5)^2 + (y-7)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y+3)^2}$ $\quad y = \frac{4}{5}x + \frac{14}{5}$

b. Het midden is M: (-1, 2), de richtingscoëfficiënt van AB is $-\frac{5}{4}$

De gezochte lijn moet dus door (-1, 2) gaan en de richtingscoëfficiënt $\frac{4}{5}$ hebben en dat levert weer op: $y = \frac{4}{5}x + \frac{14}{5}$.

44 **a.** Kies je bijvoorbeeld de oorsprong in A, dan wordt de afstand tot A heel eenvoudig ($d(P, A) = \sqrt{x^2 + y^2}$)

Kies je de oorsprong in P_1, dan gaat de conflictlijn door de oorsprong en heeft daarom (misschien) een eenvoudigere vergelijking.

b. A: (-8, 0) , B: (4, 0)

c. P_6: (16, 0)

d. $\sqrt{(x+8)^2 + y^2} = 2 \cdot \sqrt{(x-4)^2 + y^2}$ $\quad x^2 - 16x + y^2 = 0$

e. De cirkel met middelpunt (8, 0) en straal 8 heeft vergelijking $(x-8)^2 + y^2 = 64$.

Uitwerken hiervan geeft ook $x^2 - 16x + y^2 = 0$

45 **a.** Als dan ook nog de y-as als symmetrieas gekozen wordt, moet de formule de eenvoudige vorm $y = ax^2$ krijgen.

b. F: (0, 1) en l: $y = -1$ voor een 'dalparabool'
(de keuze F: (0, −1) en l: $y = 1$ geeft een 'bergparabool')

c. $\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = y + 1$ (Merk op: $y > -1$, dus $|y + 1| = y + 1$)

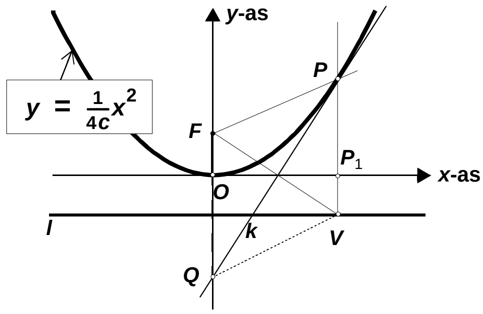
d. $y = \frac{1}{4}x^2$

e. De afstand moet $\frac{1}{4}$ zijn.

46 $x = \frac{1}{16}y^2$

47 **a.** Bekijk nog eens 'De techniek van het differentiëren', blz. 15.

b. *Gegeven:* d(P, P_1) = d(Q, O)
d(O, l) = d(P_1, V) = d(F, O) (definitie parabool)
Te bewijzen: d(P, V) = d(F, Q)
Bewijs:
d(P, V) = d(P, P_1) + d(P_1, V) = d(Q, O) + d(O, F)
= d(Q, F)



c. d(P, V) = d(F, Q) (volgens **b**)
d(P, V) = d(P, F) (P op parabool)
FO parallel aan PV
Conclusie 1: vierhoek $FQVP$ is een ruit,
dus d(Q, V) = d(Q, F)
Conclusie 2: Q ligt op de middelloodlijn van F en V, dus k ís de middelloodlijn van F en V.

48

b. Neem bijvoorbeeld de x-as langs A en B en de y-as als middelloodlijn van AB.

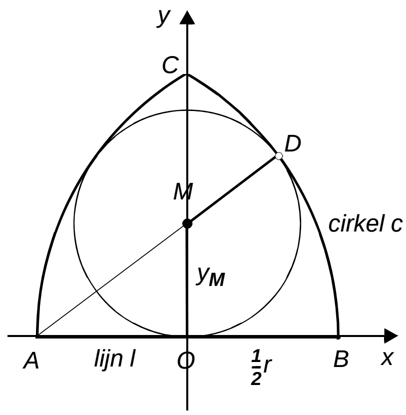
c. A: $(-\frac{1}{2}r\ ,\ 0)$, B: $(\frac{1}{2}r\ ,\ 0)$

d. M: $(0\ ,\ y_M)$. Dan:
d(M , l) = d(M , c)
d(M , O) = d(D , A) − d(M , A)

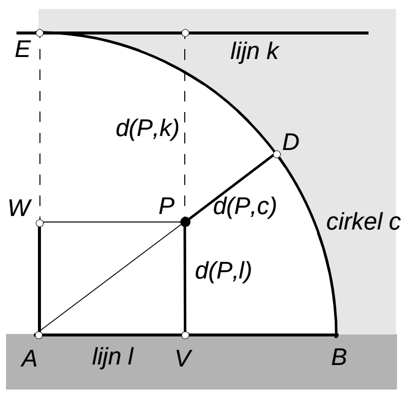
$$y_M = r - \sqrt{y_M^2 - (\tfrac{1}{2}r)^2}$$

$$\sqrt{y_M^2 - (\tfrac{1}{2}r)^2} = r - y_M$$

dit geeft $y_M = \frac{3}{8}r$



49 **a.** De 'bissectrice' van ∠ACB is mll(A, B),
de andere twee 'bissectrices' zijn conflictlijnen van een cirkel en een rechte lijn; volgens het overzicht uit hoofdstuk 3 zijn dat parabolen.
Hier het bewijs voor de conflictlijn van lijn l en cirkel c:
d(P, l) = d(P, c)
d(P, V) = r − d(P, A)
d(P, A) = r − d(P, V)
d(P, A) = d(E, A) − d(W, A)
d(P, A) = d(W, E)
(P, A) = d(P, k)
De conflictlijn is dus de (berg)parabool met brandpunt



A en richtlijn *k*.

b. voor $r = 4$:

$y = -\frac{1}{8}(x+2)^2 + 2$ (brandpunt *A*),

$y = -\frac{1}{8}(x-2)^2 + 2$ (brandpunt *B*)

50 a. De hoogte van de driehoeken is gelijk, maar ΔAOP heeft een twee keer zo lange basis.

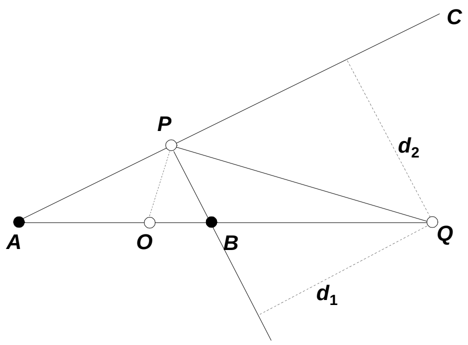
b. Neem nu *AP* respectievelijk *PB* als basis.
ΔAOP heeft weer een twee keer zo grote oppervlakte en een twee keer zo lange basis als ΔBOP; beide driehoeken moeten dus weer dezelfde hoogte hebben.

c. *PO* is de deellijn van $\angle APB$.

51 a. 2:1 (net zo als bij **50 a**).

b. Het bewijs gaat analoog aan de vorige opgave. d_1 is de hoogtelijn van ΔPQB bij basis *BP*, d_2 is de hoogtelijn van ΔPQA bij basis *AP*. Dubbele oppervlakte en dubbele lengte van de basis geeft weer gelijke hoogte.

c. De binnen- en de buitenbissectrice van een hoek staan loodrecht op elkaar! De punten *P* moeten op de cirkel van Thales liggen met middellijn *OQ* Het middelpunt is het midden van *OQ*.



34: Vergelijkingen van ellips en hyperbool

52

a. Lange as = 10, korte as = 6.

b. $d(P, c) = d(P, F_1) = r - d(P, F_2)$

c. $100 - 20\sqrt{(x+4)^2 + y^2} + x^2 + 8x + 16 + y^2 = x^2 - 8x + 16 + y^2$

d. Eerst *gelijksoortige* termen samenvatten, dan wortel apart zetten:

$5\sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 25 - 4x$, dan pas kwadrateren

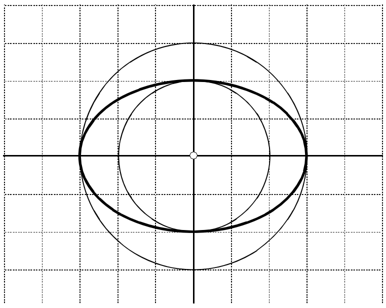
e. *Symmetrie*: als de coördinaten van een punt *P*; (x, y) aan de vergelijking voldoen, dan geldt dat ook voor die van een punt *Q*: $(-x, y)$ en van een punt *R*: $(x, -y)$.
Q is het spiegelbeeld van *P* in de *y*-as, *R* is het spiegelbeeld van *P* in de *x*-as.
Aslengten: $y = 0$ geeft de toppen (5, 0) en (–5, 0). De lange as is dus 10 lang.
$x = 0$ geeft de toppen (0, 3) en (0, –3). De korte as heeft dus lengte 6.

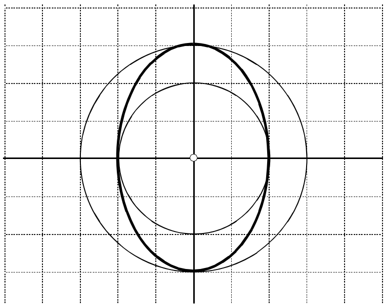
53

a. $2a$ en $2b$

b. Een cirkel met straal *a*

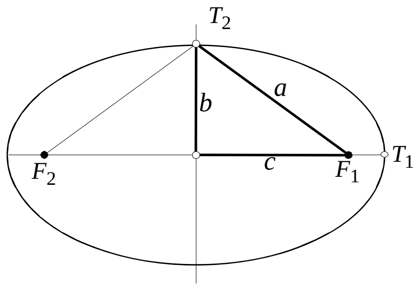
c. Als je de cirkel $x^2 + y^2 = a^2$ in de *y*-richting vermenigvuldigt met factor $\frac{b}{a}$ krijg je de figuur met vergelijking $x^2 + (\frac{a}{b}y)^2 = a^2$ en dat is precies de ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

54 **a.** 

b. 

55 **a.** $T_1(a, 0)$, $T_2(-a, 0)$, $T_3(0, b)$, $T_4(0, -b)$.

b. Zie de tekening hiernaast.



56 Bij beide ellipsen is $c = \ \ 5$
Bij de ellips van **54 a**: $F_1(\ \ 5, 0)$, $F_2(-\ \ 5, 0)$
Bij de andere ellips: $F_1(0 ,\ \ 5)$, $F_2(0 , -\ \ 5)$

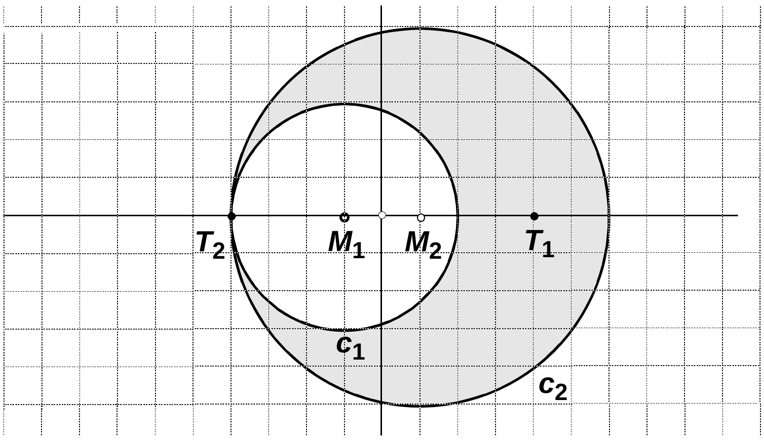
57 Brandpunten op de x-as dus $a > b$. $b = 1$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$$

58 **a.** $\left(\frac{x}{13}\right)^2 + \left(\frac{y}{5}\right)^2 = (\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1$.

b. $c = 12$ en $a > b$, dus $F_1(12, 0)$, $F_2(-12, 0)$.

59 **a.**



Een *globale analyse* geeft de volgende resultaten:
– de conflictlijn gaat door het raakpunt T_2: (-4, 0) van de twee cirkels;
– de conflictlijn is symmetrisch in de lijn door de twee middelpunten;
– de conflictlijn gaat door het gebied tussen de twee cirkels; de doorgang door de x-as is direct te bepalen, T_1: (4, 0);
– er liggen ook punten van de conflictlijn buiten c_2; de punten links van T_2 op de x-as.
– de punten T_1: (4, 0) en T_2: (-4, 0) zijn toppen van de conflictlijn;
– de conflictlijn is een gesloten kromme, waarschijnlijk een ellips.

b. De meetkundige aanpak moet onderscheid maken in twee gevallen:
Geval EEN: Binnen de cirkel c_2:

$d(P, c_1) = d(P, c_2)$ $\quad d(P, M_1) - 3 = 5 - d(P, M_2)$ $\quad d(P, M_1) + d(P, M_2) = 8$

Dat is een ellips met brandpunten M_1 en M_2 en $a = 4$, c= 1.
Omdat $c = 1$ volgt $b =$ 15

Geval TWEE: Buiten de cirkel c_2:

$d(P, c_1) = d(P, c_2)$ $\quad d(P, M_1) - 3 = d(P, M_2) – 5$ $\quad d(P, M_2) - d(P, M_1) = 2$

Dat zijn precies de punten van de x-as met, met $x < –4$.

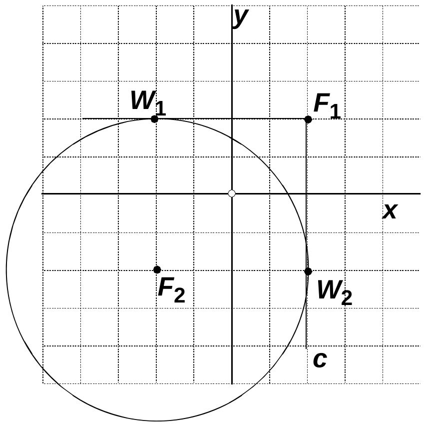
c. De vergelijking van de ellips is : $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{15} = 1$

De vergelijking van het anderes stuk is: y=0 *én* x <-4.

60 a. $y = x$ en $y = -x$

b. F_2: (-2, -2)

c. De asymptoten zijn de middelloodlijnen van F_1W_1 en F_2W_2.
In de figuur kun je W_1 en W_2 zien en ook dat $r = 4$.



d. $d(P, F_1) = d(P, c)$

$d(P, F_1) = 4 - d(P, F_2)$

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} = 4 - \sqrt{(x+2)^2 + (y+2)^2}$$

Een keer kwadrateren, herleiden en vereenvoudigen geeft

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y+2)^2} = 2 + x + y\ .$$

Na nog een keer kwadrateren blijft uiteindelijk alleen over:

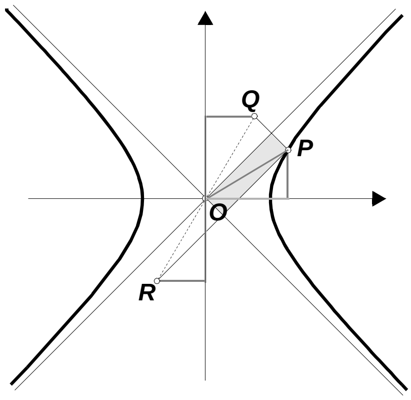
$$xy = 2.$$

61

62 a. $y = x$ en $y = -x$

b. Q: (y, x) en R: $(-y, -x)$

c. Teken lijnstuk OP. De grijze rechthoek bevat nu twee grijze driehoekjes; als je die driehoekjes spiegelt in de lijnen $y = x$ en $y = -x$, dan krijg je twee witte driehoekjes. De oppervlakte van de rechthoek is dus gelijk aan de som van de oppervlakten van de beide witte driehoekjes en daaruit volgt het gevraagde.



d. $d(P, Q) = \sqrt{(x-y)^2 + (y-x)^2}$

$$= \sqrt{2(x-y)^2} = \sqrt{2}\ |x-y|$$

$d(P, R)$ analoog

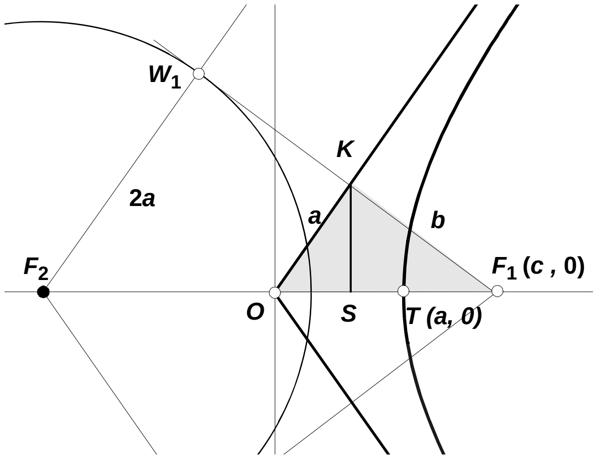
e. opp. rechthoek = 1 $\quad \frac{1}{4} \cdot |RP| \cdot |PQ| = 1 \quad \frac{1}{4} \cdot |x-y|\sqrt{2} \cdot |x+y|\sqrt{2} = 1$

$\frac{1}{2} \cdot (x^2 - y^2) = 1 \quad x^2 - y^2 = 2$

63 a. $y = 0$ geeft de toppen T_1: $(a, 0)$, T_2: $(-a, 0)$
$x = 0$ geeft $y^2 = -b^2$ en dus geen oplossingen!

b. Als je de lijn $y = x$ in verticale richting met $\frac{b}{a}$ vermenigvuldigt, krijg je de lijn $y = \frac{b}{a}x$. Deze vergelijking is gelijkwaardig met $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$.
Evenzo vind je voor de andere asymptoot: $y = -\frac{b}{a}x$ ofwel $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$.

64 a. $d(T, F_1) = d(T, F_2) - r$ geeft $c - a = c + a - r$.
Hieruit volgt: $r = 2a$



b. De driehoeken OKF_1 en $F_2W_1F_1$ zijn gelijkvormig en omdat $|F_1F_2| = 2 \cdot |OF_1|$ is de gelijkvormigheidsfactor gelijk aan 2.

c. Je kunt de tangens van – KOF_1 = a op twee manieren berekenen:
In driehoek OKF_1 geldt

$$\tan a = \frac{F_1K}{OK} = \frac{F_1K}{a}$$

In driehoek OSK geldt $\tan a = \frac{KS}{SO} = \frac{b}{a} =$ richtingscoëfficiënt van de asymptoot.
Dus $F_1K = b$.

65 a. Links en rechts delen door 4 geeft $a = 1$, $b = 2$. De toppen zijn T_1: (1, 0) , T_2: (-1, 0) en de brandpunten F_1: (5, 0) , F_2: (- 5, 0)

b. $y = 2x$ en $y = -2x$

66 a. $\left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{y}{4}\right)^2 = \frac{1}{(\cos t)^2} - (\tan t)^2 = \frac{1 - (\sin t)^2}{(\cos t)^2} = \frac{(\cos t)^2}{(\cos t)^2} = 1$

b. $y = -\frac{4}{3}x$

c. $F_1(5, 0)$, $F_2(-5, 0)$

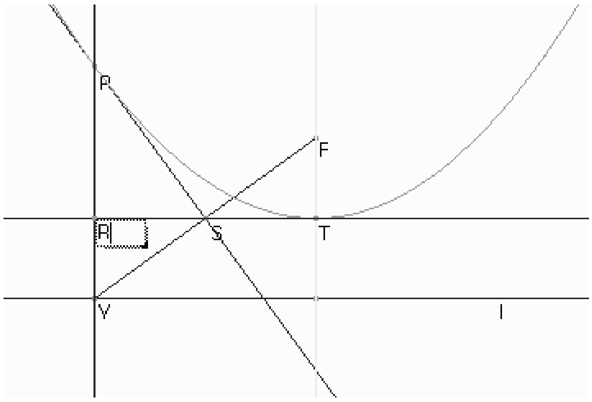
67 a. $2a$ en $2b$

b. De cirkel heeft straal $\sqrt{a^2 + b^2} = c$, de brandpunten zijn dus de snijpunten van de cirkel met de x-as.

c. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$; $x = 0$ geeft de toppen T_3: (0, b) en T_4: (0, $-b$).

68 De inhoud van de ellipsoïde is gelijk aan: $\int_{-a}^{a} py^2 dx = b^2 \int_{-a}^{a} p\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4}{3}pab^2$.

Hoofdstuk 4: Onderzoek parabool, ellips, hyperbool



1

- **a.** Een rechte lijn, evenwijdig aan de richtlijn door de top van de parabool.
- **b.**
- **c.**
- **d.**

2

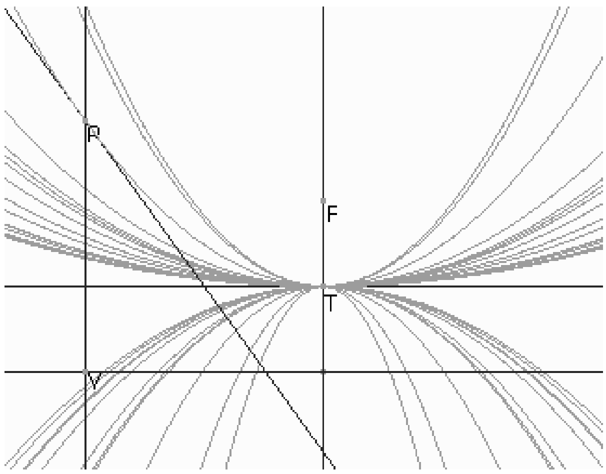
- **a.**
- **b.** V ligt op de lijn $y = -1$.
- **c.** S is het midden van FV volgens bladzijde 57. S: $\left(\frac{1}{2}x, 0\right)$.
- **d.** S ligt op de x-as; de afstanden $|TS|$ en $|SR|$ zijn beide $\left|\frac{1}{2}x\right|$.

3

- **a.** De manier van opgave **34**, bladzijde 66, is bruikbaar. De lijn gaat door (6, 0) en heeft richtingscoëfficiënt 6. Dus: $y = 6(x - 6)$.
- **b.** P: (12 , 6(12-6)) = (12 , 36).
- **c.** De vergelijking van de middelloodlijn van FV wordt: $y = \frac{x_V}{2}\left(x - \frac{x_V}{2}\right)$.

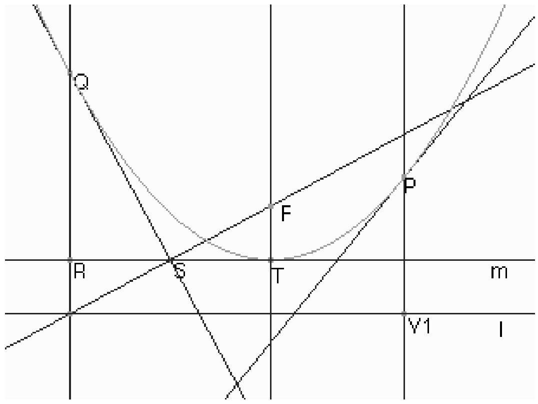
  P ligt op die lijn en heeft x-coördinaat x_V. Invullen geeft P: $\left(x_V, \frac{x_V}{2}\left(x_V - \frac{x_V}{2}\right)\right) = \left(x_V, \frac{x_V^2}{4}\right)$
- **d.** $y = \frac{1}{4}x^2$. Klopt met wat eerder gevonden is.

4



- **a.**
- **b.**
- **c.**
- **d.**
- **e.**
- **f.**

5 Teken de loodlijn vanuit Q op m. Het voetpunt is R.
S is het midden van RT (Optie: CONSTRUEER1 > MIDPOINT).
Als F het brandpunt is, dan moet SV loodrecht op QS staan.
Daarom is QS getekend, die loodlijn, en de loodlijn in T op m.
Nu zijn F en l bepaald en kan de gewone paraboolconstructie uitgevoerd worden. Er moet dus een extra punt V_1 op l aangebracht worden; dat punt wordt als lopend punt gebruikt voor de eigenlijke paraboolconstructie.
De locus van P is de uiteindelijke parabool.

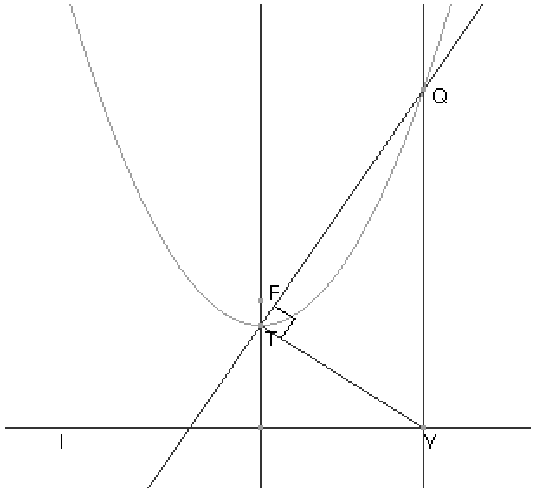


6

a.

b. De loodlijn gaat door het eind van het segment TV, niet door het midden.

c. Het lijkt weer een parabool te zijn.



7

a.

b.

c. d(T, l) = 4d(F, T)

8

a. Stel V: (X_V , -1).

De richtinscoëfficiënt van lijn VT is $\frac{-1}{X_V}$, dus die van de loodlijn op VT is X_V

De vergelijking van TQ is dus: $y = X_V x$

Snijden met de lijn VP (dat is $x = X_V$) geeft Q: $(X_V, X_V^{\,2})$

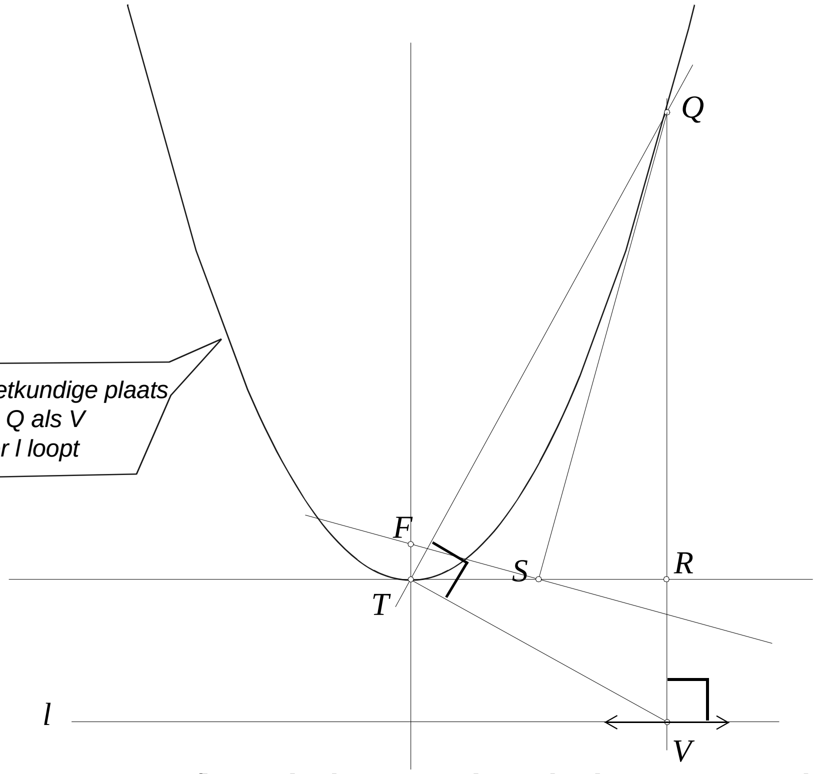
b. $y = x^2$; een parabool.

c. Ja. Het brandpunt van $y = x^2$ is $(0 , \frac{1}{4})$.

9 Je zou kunnen zeggen:
maar ik zie eigenlijk niet waarom $(0 , \frac{1}{4})$ brandpunt zou zijn van de figuur. Dat merk je alleen door het rekenen, maar in de figuur betekent het nog niet veel.

10

a. *TQ* loodrecht op *TV* en *QV* loodrecht op *l*.



b. Als dat punt *F* niet van *Q* afhangt, dan kunnen we de parabool construeren met brandpunt *F*, top *T* en *TR* als topraaklijn. *Q* ligt dan volgens de constructie van *S* en de loodlijn in *S* op *FS* op de parabool. Dit geldt voor alle mogelijke punten *Q*. Dit betekent dat de hele meetkundige plaats op die parabool ligt.
Andersom geldt ook: elk punt Q van de parabool kan door de constructie geleverd worden.

c. Zie figuur.

d. $|FT| : |TS| = |SR| : |RQ|$.

e. *TRV* is gelijkvormig met *QRT*. (Weliswaar ook met *QTV*, maar omdat we met *TR* willen werken is die niet zo geschikt voor ons verhaal.)
$|RV| : |RT| = |RT| : |RQ|$.

f. Nog niet gebruikt is dat $|TS| = |SR| = \frac{1}{2}\,|TR|$.

Invullen en uitwerken van de verhoudingen waar *FT* en *RV* voorkomen:

$$|FT| = \frac{|TS|\ \ |SR|}{|RQ|} = \frac{1}{4}\frac{|TR|\ \ |TR|}{|RQ|}$$

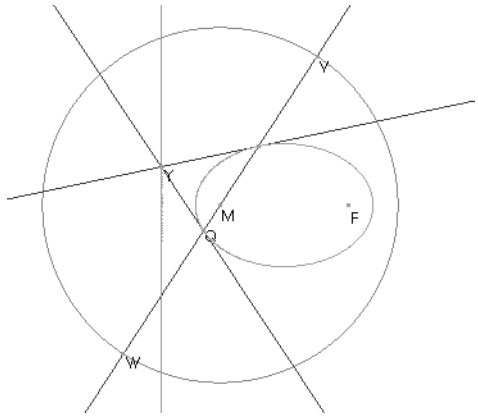
$$|RV| = \frac{|TR|\ \ |TR|}{|RQ|}$$

g. $|FT|$ is een vierde van $|RV|$. *RV* is onafhankelijk van *V*, *RV* is constant. Het is juist de afstand van *T* tot *l*. Dus *FT* is onafhankelijk van *V* (en van *Q*). Kortom: *F* is een vast punt.

h. De parabool door *Q* met top *T* kan geconstrueerd worden door eerst het brandpunt te bepalen via punt *S*. Een berekening leidde tot de conclusie dat dat brandpunt onafhankelijk van de gekozen ligging van *V*, dus van *Q* is. Dat betekent dat alle parabolen die je zou vinden als *Q* zou lopen over de oorspronkelijke meetkundige plaats, *een en dezelfde parabool* zijn. Dat moet dan juist de meetkundige plaats van *Q* zijn, want ‘alle’ *Q*’s liggen erop.

11

12



a. *W* is een punt op de cirkel, dat nu de rol van *V* speelt.
b. *Y* doorloopt een lijn! De lijn staat loodrecht op de verbindingslijn *FM*.

13

a. W ligt tegenover *V* op de cirkel,
dus: *W*: (–cos *t*, –sin t)
b. ***Plan***:
– Stap EEN: Bepaal de vergelijking van de middelloodlijn van *VF*, noem die l_1
– Stap TWEE: Bepaal de vergelijking van de middelloodlijn van *WF*, noem die l_2
– Stap DRIE: Bereken de coördinaten van het snijpunt van l_1 en l_2.

De uitzonderlijke situaties waarin richtingscoëfficiënten niet bepaalbaar zijn (omdat een lijn evenwijdig aan de *y*-as loopt) of wanneer de lijnen niet snijden (doordat ze evenwijdig zijn) bekijken we achteraf.

Uitvoering:
Stap EEN:
Gebruik de methode van opgave **43b**, bladzijde 70. Dat was de methode zonder verdrijven van wortels.

Het midden van *FV* is ($\frac{\cos t + a}{2}$, $\frac{\sin t}{2}$), de richtingscoëfficiënt van *FV* is $\frac{\sin t}{\cos t - a}$

De gezochte lijn moet dus door ($\frac{\cos t + a}{2}$, $\frac{\sin t}{2}$) gaan en de richtingscoëfficiënt $\frac{-\cos t + a}{\sin t}$ hebben en dat levert de vergelijking voor l_1 op: .

$$y - \frac{\sin t}{2} = \frac{-\cos t + a}{\sin t}\left(x - \frac{\cos t + a}{2}\right)$$

(Werk dit niet verder uit voor je weet dat het absoluut nodig is.)
Stap TWEE: De vergelijking voor l_2 kunnen we op dezelfde manier berekenen, maar een shortcut is: vervang overal, **cos** door **–cos** en **sin** door **–sin**. Immers dat is de manier hoe we van *V* naar *W* kwamen.
De vergelijking voor l_2 wordt nu:

$$y + \frac{\sin t}{2} = \frac{\cos t + a}{-\sin t}\left(x - \frac{-\cos t + a}{2}\right)$$

Stap DRIE: het snijpunt van l_1 en l_2 bepalen. Omdat we willen aantonen dat dat snijpunt op een lijn evenwijdig aan de *y*-as ligt, berekenen we alleen de *x*-coördinaat en ‘hopen’ dat die niet van *t* afhangt. ‘Hopen’ is te zwak gezegd: als het niet uitkomt, dan valt niet te bewijzen dat de punten Y op zo’n lijn liggen.
Omdat je *y* dus kwijt wilt, trek je de vergelijkingen van elkaar af, *y* verdwijnt dan uit het linkerlid. Dus:

$$-\frac{\sin t}{2} - \frac{\sin t}{2} = \frac{-\cos t + a}{\sin t}\left(x - \frac{\cos t + a}{2}\right) - \frac{\cos t + a}{-\sin t}\left(x - \frac{-\cos t + a}{2}\right)$$

Langs veel wegen kun je nu vereenvoudigingen uitvoeren. Een goed plan is: met sin *t* vermenigvuldigen (de uitzondering *sin t = 0* komt later aan bod).

$$-\frac{(\sin t)^2}{2}-\frac{(\sin t)^2}{2} = (-\cos t + a)\left(x-\frac{\cos t + a}{2}\right) + (\cos t + a)\left(x - \frac{-\cos t + a}{2}\right)$$

Alle sinussen en cosinussen blijken nu door wegvallen tegen elkaar of door gebruikmaken van $(\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1$ als sneeuw voor de zon te verdwijnen.

Resultaat na overbrengen van de termen waarin de cosinus in het kwadraat voorkomt naar de linkerkant en zorgvuldig observeren dat de bijdragen met een **cos** in het rechterlid allen twee keer voorkomen, aan elkaar tegengesteld:

$$-1 = (a)\left(x-\frac{a}{2}\right) + (a)\left(x-\frac{a}{2}\right)$$

Het lukt! *x* hangt niet van *t* af, uiteraard wel van *a*, namelijk zo:

$$x = \frac{a^2-1}{2a}$$

De storingen onderweg kunnen zijn:

– *FV* is evenwijdig aan de *y*-as; dan is de richtingscoëfficiënt van de middelloodlijn toch te bepalen, die is dan 0. In dat geval is juist $\cos t = a$, er is geen echt probleem. Zelfde overweging voor *FW*.

– De lijnen snijden elkaar niet. Dat gebeurt als de twee middelloodlijnen evenwijdig zijn. Dat gebeurt in ieder geval als *V* en *W* op de *x*-as liggen, dus als sin *t* = 0. Dan zijn beide *mll*’s evenwijdig aan de y-as.

Als dat niet zo is, moeten $\frac{-\cos t + a}{\sin t}$ en $\frac{\cos t + a}{-\sin t}$ aan elkaar gelijk zijn. Dat leidt tot *a* = –*a* en is dus uitgesloten.

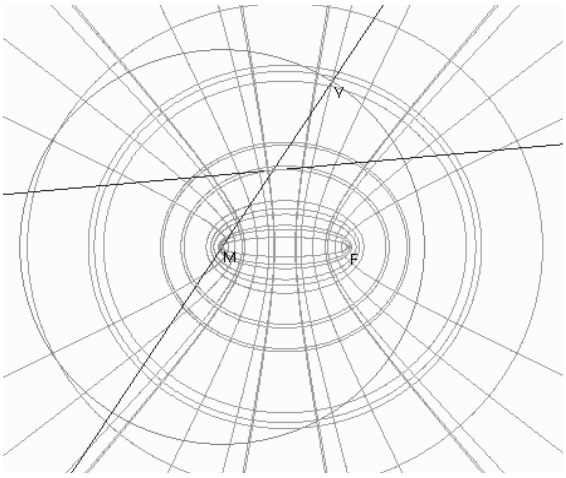
M.a.w. Het niet-snijden is een geïsoleerd uitzonderingsgeval.

c. Omdat de *x*-coördinaat van het snijpunt *Y* constant is, ligt dat punt op een vaste lijn. De vergelijking ervan is:

$$x = \frac{-1+a^2}{2a}$$

14

a.

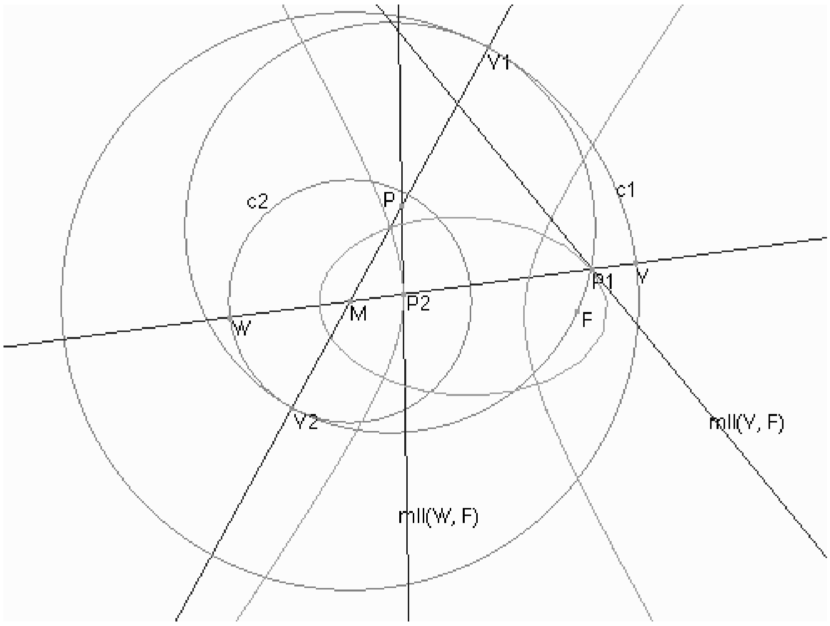


b. Als de cirkel groter wordt, wordt de ellips relatief breder. Het is eigenlijk dezelfde vormverandering als die bij het verslepen van *F* richting *M*.
Als de cirkel kleiner wordt, wordt eerst de ellips smaller. Als de cirkelrand over *F* heengaat, wordt naar heel platte hyperbolen gesprongen. Hoe kleiner de cirkel hoe ‘steiler’ de hyperbool.

c.

d. Elke hyperbool snijdt alle ellipsen, omdat de hyperbool tussen de brandpunten doorloopt en de ellipsen eromheen. En andersom.
Het lijkt erop of alle snijdingen loodrecht zijn!
De ellipsen snijden elkaar niet. De hyperbolen snijden elkaar onderling ook niet.

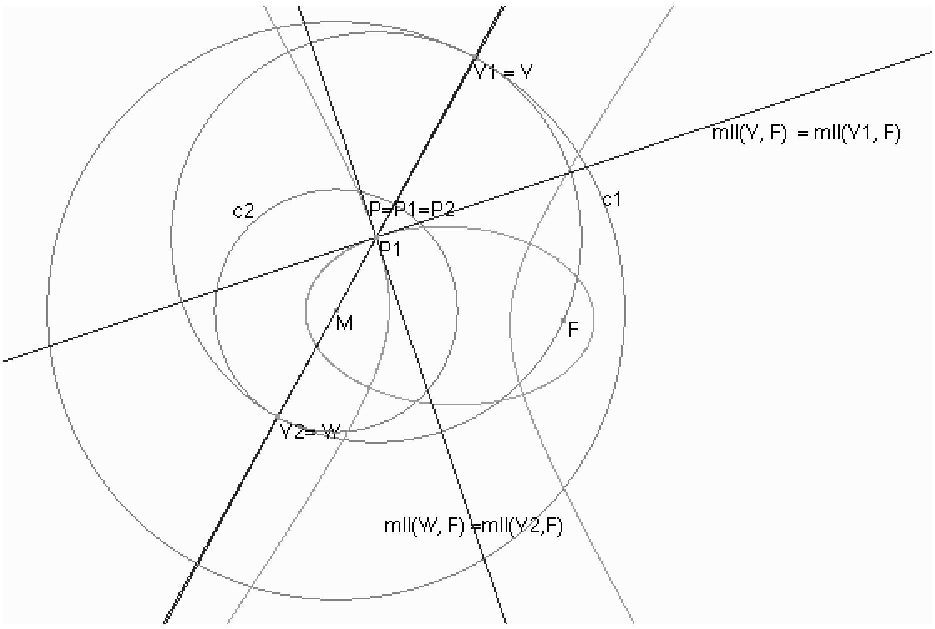
15



a. Teken de cirkel om *P* die door *F* gaat en snijdt die met *MP*.
b. P_1 is het lopende punt van de ellips in de tekening hierboven.

16

a.
b. Het punt *W* dat over de kleine cirkel (c_2) loopt, is gebruikt. P_2 is het lopende punt van de hyperbool.
c. Zo te zien klopt het. Als je *V* op V_1 legt, gaat *W* met V_2 samenvallen. Zie onderstaande figuur.

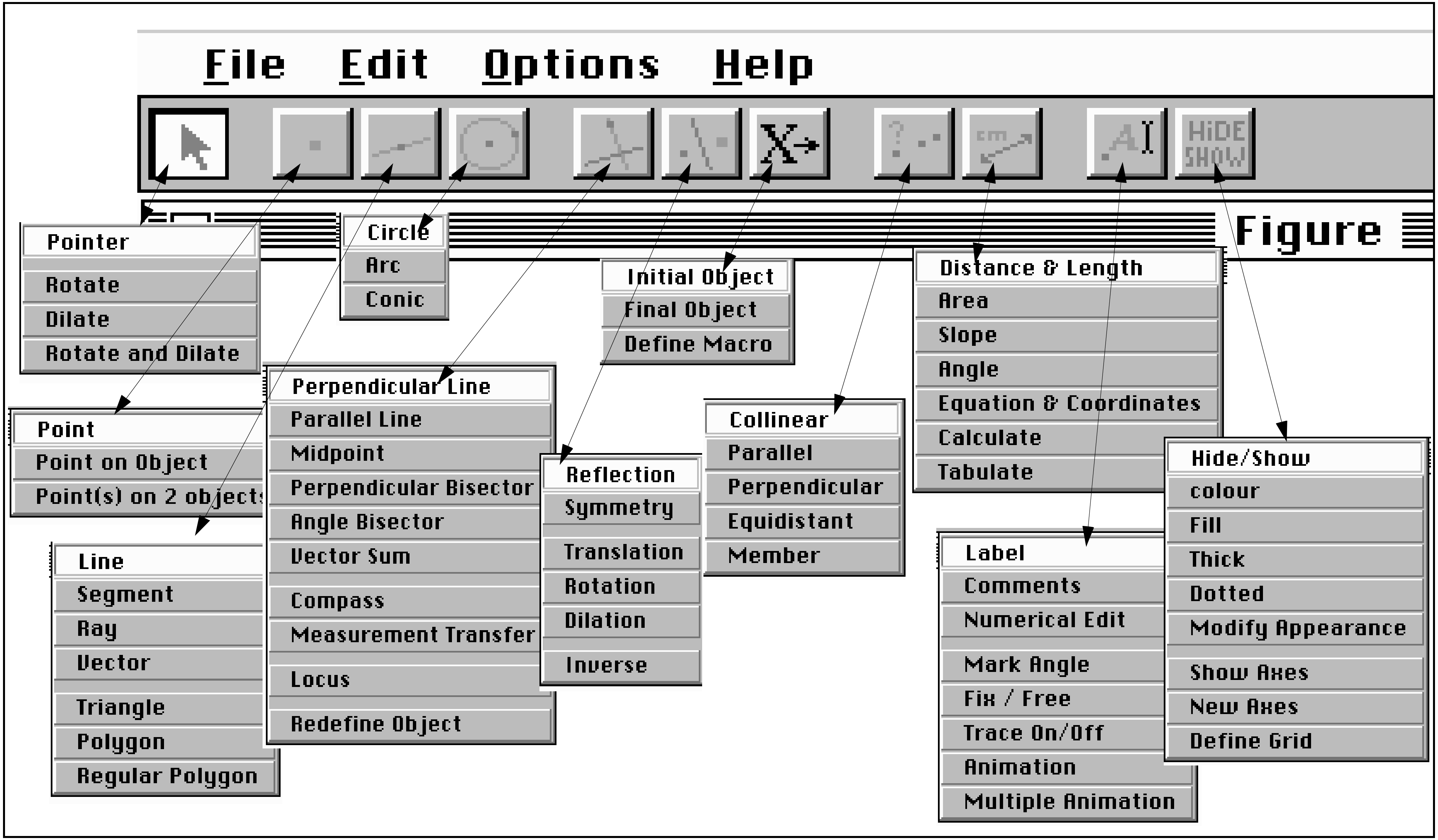


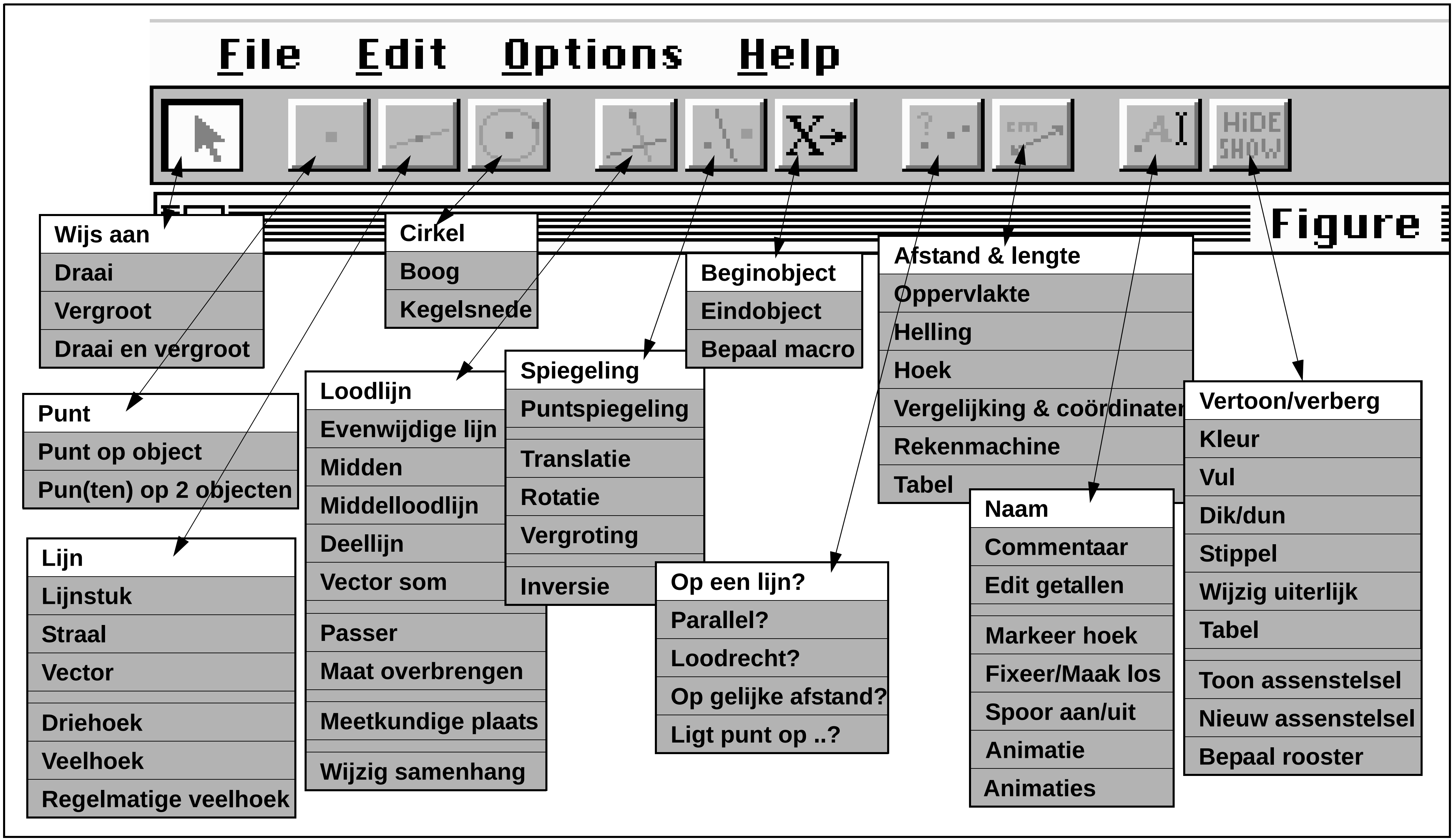
Een meetkundige redeneerweg is nu snel gevonden:
De raaklijnen in *P* zijn in de laatste figuur de middelloodlijnen van V_1F en V_2F. Die staan loodrecht op elkaar omdat V_1F en V_2F zelf loodrecht op elkaar staan. Dat komt omdat V_1V_2 een middellijn is van de in **15 a** getekende cirkel, die ook door *F* gaat.

Een andere redenering:
Trek de lijnen *PF* en *PM*. De raaklijnen in *P* aan de ellips en aan de hyperbool zijn de beide deellijnen van dat lijnenpaar. Die staan dus loodrecht op elkaar. Einde bewijs.

Een analytische weg is er ook wel, maar daarvoor moet je eerst uitzoeken hoe je uit het *abc* van de ellips en dat van de hyperbool vergelijkingen van confocale ellipsen en hyperbolen vindt. Daarna zou je hun snijpunt moeten bepalen en dan de raaklijnen. Tot slot zou je moeten aantonen dat de richtingscoëfficiënten product -1 hebben. Het moet kunnen, en misschien valt het rekenwerk ook wel mee.
Na de voorgaande meetkundige oplossingen zul je er wel niet zo'n zin in hebben!

Bedenk na deze kritische noot dat bij het onderzoek naar de meetkundige plaats van paragraaf 18 de analytische methode ons wel degelijk hielp!


File
Edit
Options
Help
HIDE SHOW
Figure
Pointer
Rotate
Dilate
Rotate and Dilate
Point
Point on Object
Point(s) on 2 objects
Line
Segment
Ray
Vector
Triangle
Polygon
Regular Polygon
Circle
Arc
Conic
Perpendicular Line
Parallel Line
Midpoint
Perpendicular Bisector
Angle Bisector
Vector Sum
Compass
Measurement Transfer
Locus
Redefine Object
Reflection
Symmetry
Translation
Rotation
Dilation
Inverse
Initial Object
Final Object
Define Macro
Collinear
Parallel
Perpendicular
Equidistant
Member
Distance & Length
Area
Slope
Angle
Equation & Coordinates
Calculate
Tabulate
Label
Comments
Numerical Edit
Mark Angle
Fix / Free
Trace On/Off
Animation
Multiple Animation
Hide/Show
colour
Fill
Thick
Dotted
Modify Appearance
Show Axes
New Axes
Define Grid


File
Edit
Options
Help
HIDE SHOW
Figure
Wijs aan
Draai
Vergroot
Draai en vergroot
Punt
Punt op object
Pun(ten) op 2 objecten
Lijn
Lijnstuk
Straal
Vector
Driehoek
Veelhoek
Regelmatige veelhoek
Cirkel
Boog
Kegelsnede
Loodlijn
Evenwijdige lijn
Midden
Middelloodlijn
Deellijn
Vector som
Passer
Maat overbrengen
Meetkundige plaats
Wijzig samenhang
Spiegeling
Puntspiegeling
Translatie
Rotatie
Vergroting
Inversie
Beginobject
Eindobject
Bepaal macro
Op een lijn?
Parallel?
Loodrecht?
Op gelijke afstand?
Ligt punt op ..?
Afstand & lengte
Oppervlakte
Helling
Hoek
Vergelijking & coördinaten
Rekenmachine
Tabel
Naam
Commentaar
Edit getallen
Markeer hoek
Fixeer/Maak los
Spoor aan/uit
Animatie
Animaties
Vertoon/verberg
Kleur
Vul
Dik/dun
Stippel
Wijzig uiterlijk
Tabel
Toon assenstelsel
Nieuw assenstelsel
Bepaal rooster