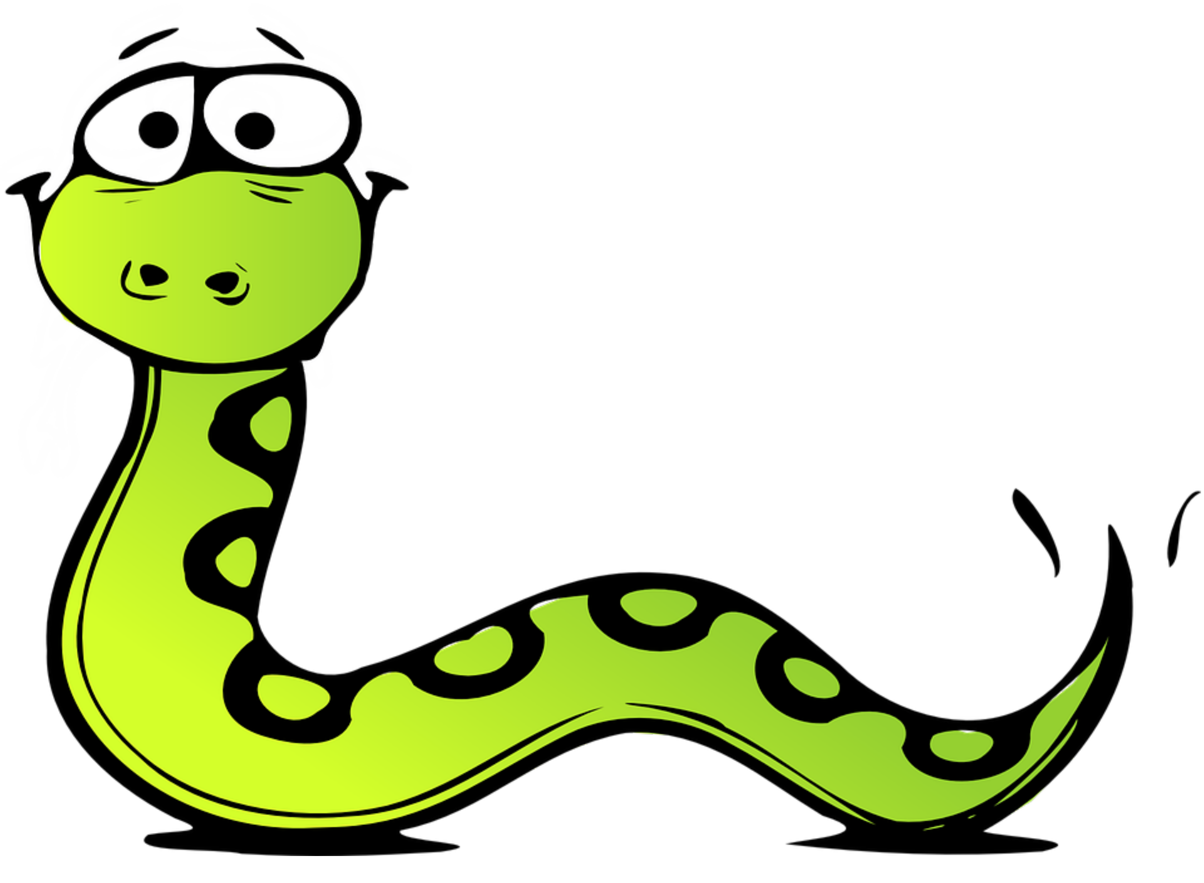
Slangennest



Wiskunde B-dag 2018

Universiteit Utrecht

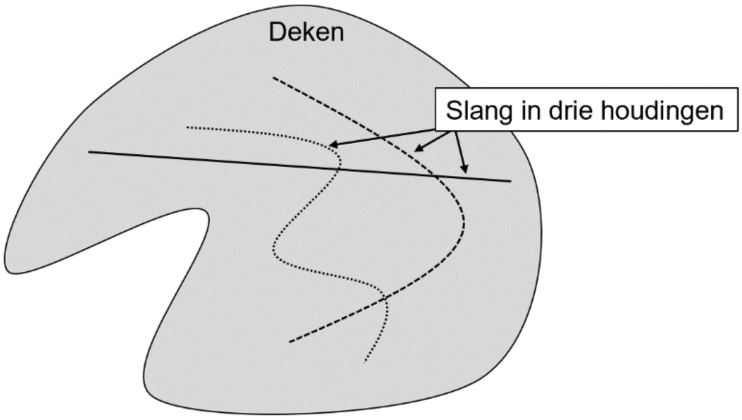
Wiskunde voor teams

Freudenthal Institute

Inleiding

Over de opdracht

Deze opdracht gaat over een kleine slang Lena en haar vader Marko. Lena is maar net 15 cm lang en heeft het elke nacht zo koud als ze gaat slapen. Marko is een zorgzame vader en besluit een dekentje voor haar te breien. Helaas heeft het gezin het niet breed en moet er bezuinigd worden op de wol. Daarom wil Marko een zo klein mogelijk dekentje breien. Helaas is het niet te voorspellen in welke houding Lena in slaap valt. Dus wil Marko het dekentje zo breien dat Lena eronder past in elke mogelijke houding. Het probleem waar jullie je vandaag mee bezig gaan houden: wat is de vorm en oppervlakte van het kleinst mogelijke dekentje dat Marko kan maken. Het gaat dan wel om een stug vlak dekentje: je kunt het alleen verplaatsen, niet vervormen of plooien.



Wiskundig kun je het probleem als volgt verwoorden: wat is de oppervlakte van de kleinste vlakke vorm (deken) die alle lijntjes (slangen) van lengte 15 kan overdekken (nadat je de slang of deken zo gedraaid, geschoven of omgedraaid hebt, dat het past). Dit is een open probleem in de wiskunde: niemand weet het antwoord!

Structuur van de dag

Deze Wiskunde B-dag opdracht bestaat uit inleidende opgaven en een eindopgave. Er zijn extra onderdelen; die kun je gewoon overslaan als je wilt, maar ze dragen wel bij aan een dieper begrip en extra uitdaging. Voel je ook bij de andere opgaven vrij om bij de ene wat uitgebreider eraan te werken (als je het een interessant onderdeel vindt) en bij de ander eventueel wat minder. Probeer ongeveer de helft van de dag aan de eindopgave te besteden. Deze bestaat uit een open onderzoek, waarbij je flink kan experimenteren en redeneren. Ieder (team) kan zijn eigen weg inslaan.

Benodigdheden

- stukje koperdraad van 15 cm lang
- los ruitjespapier
- passer
- schaar
- plakband
- laptop/computer om het verslag te maken
- optioneel: GeoGebra of soortgelijke software

Wat lever je in?

Je werkt gedurende de dag aan een digitaal verslag. Om 16:00 uur lever je dat in. Daarin beschrijf je de resultaten die je bij de opgaven hebt gevonden, in het bijzonder van het onderzoek uit de eindopgave. Vertel je eigen, duidelijke en overtuigende verhaal.

Tips:

- Plan je tijd en verdeel de taken onder je teamleden. Het kan nuttig zijn om al in de ochtend te beginnen met het uitschrijven van je uitwerkingen van de inleidende opgaven.
- *Wees begrijpelijk*: zó dat je werk voor iemand die niet aan de Wiskunde B-dag heeft meegedaan (maar wel voldoende wiskunde beheerst) leesbaar is. Dat betekent dat je volledig moet formuleren.
- Als je onderbouwing, uitleg of verklaringen geeft, dan probeer je dat zo veel mogelijk *met wiskundige argumenten* te doen. Een combinatie van helderheid, bondigheid en correctheid is prachtig!
- Gebruik *figuren* om je ideeën te illustreren. Gebruik hiervoor bijvoorbeeld kopieën van door jou gemaakte plaatjes (screen captures of foto's van figuren op papier).
- Maak een *planning en verdeel de taken* over de groep.

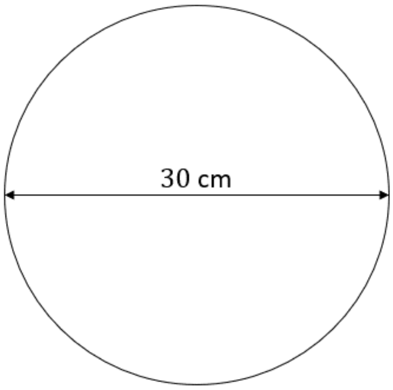
Zowel de wiskundige inhoud van het verslag als de manier waarop het is opgeschreven telt mee in de beoordeling!

Basisopgaven

Opgave 1: Cirkeldekens

We gaan ervan uit dat Lena 15 cm lang is en superslank: ze heeft dikte 0. Ze is een lenig lijntje.

Het eerste dekentje dat Marko overweegt te maken is cirkelvormig met een diameter van 30 cm.



Het is intuïtief wel duidelijk dat Lena daar altijd onder past, ongeacht in welke houding ze ligt.

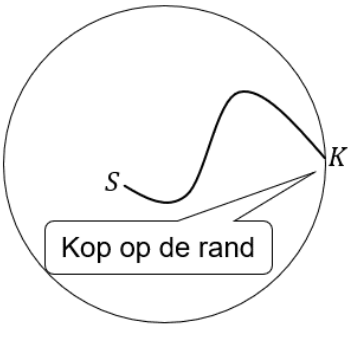
Maar kan de diameter ook kleiner, vragen we ons af.

(a) Gebruik het koperdraadje dat je bij deze opdracht gekregen hebt om te onderzoeken wat de cirkelvormige deken met de kleinste diameter is, waar Lena in alle houdingen nog onder past.

In deze opdracht willen we natuurlijk meer dan enkel experimenteren. We willen beredeneren waarom een dekentje al dan niet geschikt is. Als je beweert dat de slang *in elke houding* past bij een bepaalde deken-vorm, dan moet je uitleggen: hoe dan? Hoe moet je de slang neerleggen (zonder haar van houding te laten veranderen) zodat het past?.

Stel je hebt een ronde deken met een diameter van 20 cm. Je kunt niet zeggen:

> *"Ik leg Lena met haar kop op de cirkelrand en dan draai ik haar om dát punt, tot ze helemaal onder de deken ligt".*

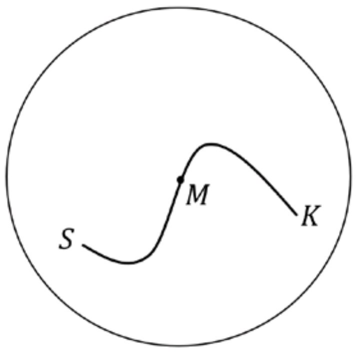


Want dat gaat je niet altijd lukken!

(b) Teken een vorm voor Lena waar het inderdaad niet lukt (de slang is niet geheel bedekt).

Een nieuwe poging is:

Noem het middelpunt van de cirkel M. Schuif Lena zo dat het midden van de slang op M ligt.



Dit werkt wel. Maar nu moet je wél een redenering geven dat Lena in elke houding onder de deken blijft.

(c) Doe dat voor de cirkel die je in onderdeel (a) gevonden hebt.

Zo'n beschrijving, die bij iedere houding aangeeft hoe je de slang onder de deken moet leggen (*cursief* hierboven), heet een positioneringsstrategie.

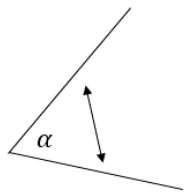
(d) Leg zo precies mogelijk uit waarom het niet past met kleinere cirkels dan die uit onderdeel (a).

(e) **(Extra; let op: moeilijk! Alleen doen bij voldoende tijd).** Gebruik het koperdraadje om te onderzoeken of je nog een stuk van de cirkelvormige deken met de kleinst mogelijke diameter (gevonden bij onderdeel (a)) kunt afknippen, zo dat het overgebleven stuk nog steeds een geschikt dekentje is. Geef een bijbehorende positioneringsstrategie en leg zo precies mogelijk uit waarom die strategie altijd werkt.

Opgave 2: De knikslang onder een rechthoekige deken

De slang kan op ontelbaar veel manieren gaan liggen en daarom is het probleem lastig te overzien. Het wordt hanteerbaarder als we naar slangen kijken die niet zo lenig zijn als Lena.

We beperken ons daarom in deze opgave tot een behoorlijk rigide slang: bestaande uit twee lijnstukken van lengte 7,5 cm met een scharnier in het midden: de *knikslang*. De hoek tussen de twee lijnstukken noteren we met α.

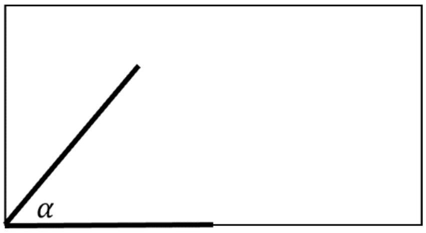


Wat betreft dekens beperken we ons, in eerste instantie, tot rechthoekige dekens.

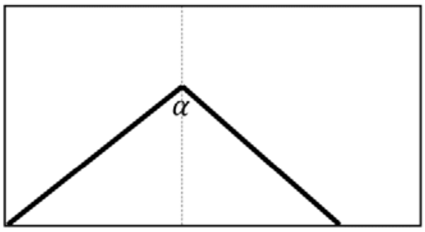
(a) We bekijken eerst een rechthoek van 14 cm bij 5 cm en een rechthoek van 15 cm bij 5 cm. Gebruik het koperdraadje om te onderzoeken of de knik-slang in alle houdingen onder deze rechthoekige dekens passen. Leg je antwoorden uit en zet ze eventueel kracht bij met een berekening.

Marko gaat proberen een kleine rechthoekige deken te vinden. Hij bedenkt daarbij de volgende positioneringsstrategie:

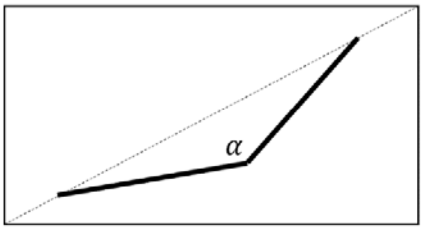
- Bij kleine hoeken α legt hij de slang met een zijde langs de onderrand (positie 1):



- Voor middelgrote hoeken legt hij de knikslang met de symmetrieas evenwijdig aan de zijkant van de deken (positie 2)



- Bij grote hoeken legt hij de uiteinden op de diagonaal (positie 3)



Nu werken we deze strategie uit met als doel een zo klein mogelijke rechthoek te krijgen. Het wordt nu een stapje moeilijker; neem je tijd, experimenteer en redeneer met elkaar.

(b) Marko let aanvankelijk enkel op de zijkant (hoogte) van de deken. Door bij een goede waarde van de hoek α over te stappen van positie 1 naar positie 2 kan hij die zijkant zo kort mogelijk houden. Bij welke hoek α is dat? En hoe lang is de zijkant dan?

(c) Bij welke hoek α moet Marko wisselen van positie 2 naar positie 3? Leg uit en ondersteun met de nodige berekeningen!

(d) Wat is de oppervlakte van de kleinste rechthoekige deken die Marko op deze manier krijgt?

(e) Nu hij de rechthoekige deken gevonden heeft, realiseert Marko zich dat je er nog stukken uit kunt wegknippen. Zie jij dat ook?

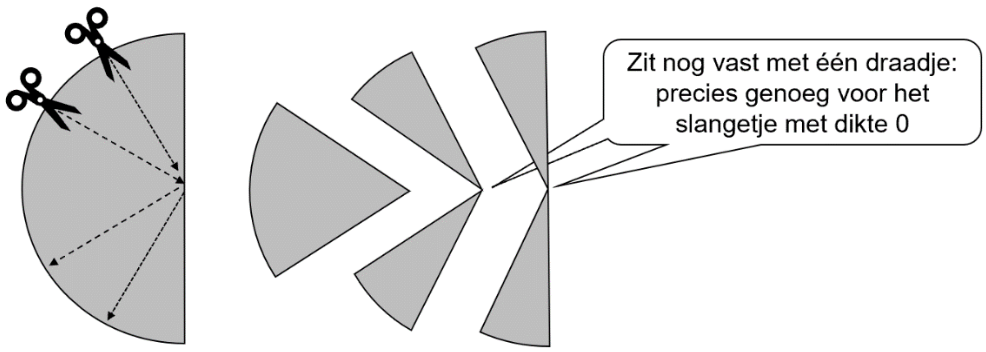
Opgave 1 en 2 laten een algemene benadering van het slang-en-dekenprobleem zien. Deze aanpak komt verderop terug in de voorbereidende opdrachten en in de eindopdracht. We vatten deze benadering samen in het schema hieronder.

Stappen algemene benadering

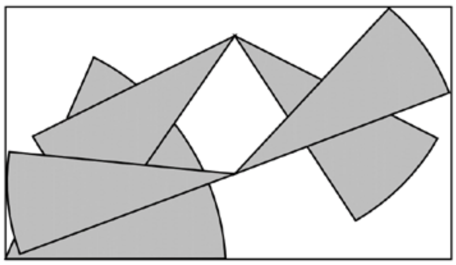
A. Beperk je tot een deelprobleem: beperk welk type slangen en welk type dekens dat je beschouwt
B. Experimenteer
C. Geef een *positioneringsstrategie* voor alle houdingen van de slang
D. Vind de bijbehorende minimale afmetingen
E. Leg uit dat alle vormen onder het dekentje blijven met de strategie uit C
F. Eventueel: knip de deken bij

Opgave 3: Schuiven met waaierdekens voor knikslangen

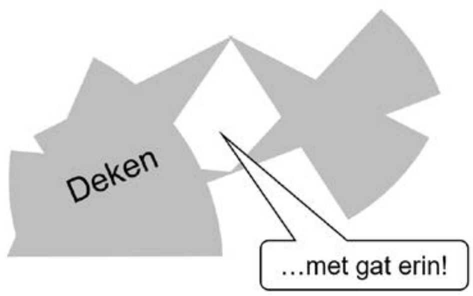
Je kunt ook op een andere manier proberen een deken te maken voor knikslangen. Begin met een halve cirkel en knip die in drie *waaier*dekens, voor kleine, middel en grote hoeken in de knikslang.



Probeer die vervolgens gunstig in een rechthoek te plaatsen om een kleiner rechthoekig dekentje te maken, bijvoorbeeld:



Beter nog is om elk deel van de rechthoek dat niets overdekt weg te knippen. Je krijgt dan een grilliger, maar kleiner dekentje (misschien zelf met een gat erin):



(Het aantal van *drie* waaiers is hier willekeurig. Wellicht gaat het met een *groter aantal* beter).

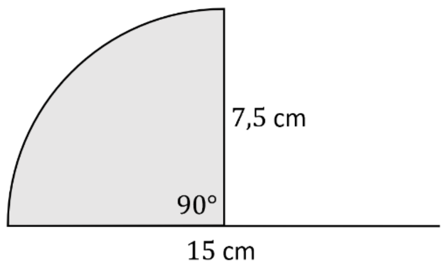
Maak van ruitjespapier een halve cirkel met een straal van 7,5 cm en knip die op in een zelf gekozen aantal waaierdekens (gebruik een plakbandje om de hoekpunten van twee taartpunten bij elkaar te houden).

Schuif de dekens over elkaar tot een kleine deken; hoe kleiner, hoe beter. Voeg een foto toe aan je verslag. Als je handig bent met GeoGebra of een soortgelijk programma, dan mag het ook daarmee. Geef uitleg en eventueel een berekening. Je kunt de oppervlakte van de deken ook schatten, bijvoorbeeld door hokjes te tellen.

Opmerking: het *type deken* waartoe je je beperkt (onderdeel A van bovenstaand schema) is hier dus niet één vorm, maar een aantal vormen die je optimaal over elkaar probeert te schuiven! Dat is het experimenteren (onderdeel B van het schema). Onderdelen C, E en F zijn nu makkelijk, maar onderdeel D kan nog flink lastig zijn.

Opgave 4: Dekens met een streepje voor

Een ander soort dekentje voor **knikslangen** ziet er uit als een kwartcirkel (taartpunt) met een straal van 7,5 cm met daaraan vast een "heel dun" lijntje van 7,5 cm vanuit het midden naar rechts.



(a) Gebruik het koperdraadje om te onderzoeken hoe de knikslangen hieronder passen. Beschrijf je positioneringsstrategie.

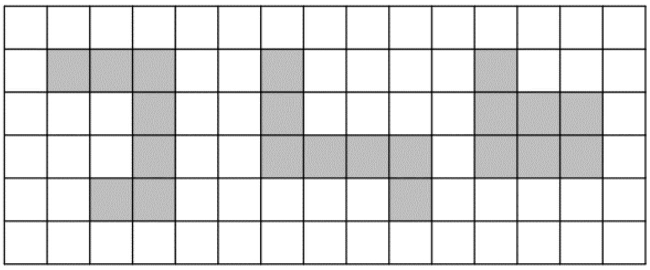
(b) Kun je, uitgaande van een taartpunt met een hoek kleiner dan $90°$, ook een geschikte deken maken op een vergelijkbare manier? En met een nog kleinere hoek?

Je zult bij onderdeel (b) ongetwijfeld ontdekt hebben dat je de oppervlakte van de deken zo klein kunt maken als je wilt. Daar kun je uit opmaken dat we het probleem, met de knikslangen, te veel versimpeld hebben. Toch is het de moeite waard om moeilijke probleem eerst in versimpelde vorm op te lossen, omdat je daarmee soms technieken ontdekt die ook voor het niet-versimpelde probleem werken.

Opgave 5: Tetraslangen

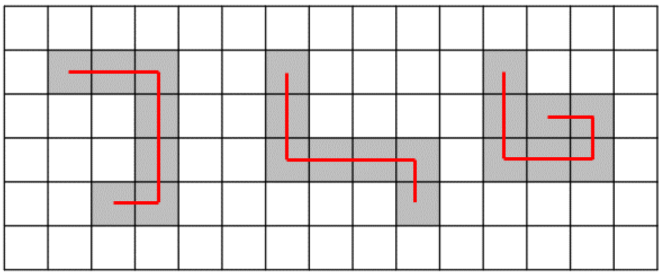
Een heel andere manier om het probleem te versimpelen is te werken met slangen en dekens die bestaan uit vierkantjes in een rooster, tetraslangen en tetradekens.

Hier zie je enkele tetraslangen van lengte 7:

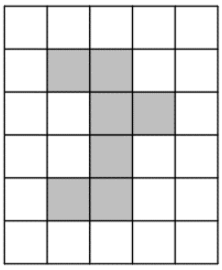


Bij een tetraslang ligt elk vierkantje van zijn lijf met een zijde tegen de zijde van een ander vierkantje van zijn lijf aan. De vierkantje kunnen niet op elkaar liggen.

Met een lijn door het midden van de vierkantjes kun je aangeven hoe de slang ligt; merk op dat er bij de rechter onderstaande slang nóg twee mogelijkheden zijn.



Het onderstaande plaatje kan onmogelijk bij een tetraslang horen.

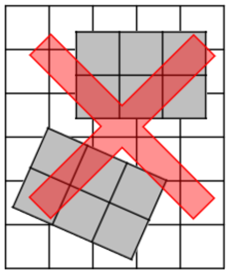
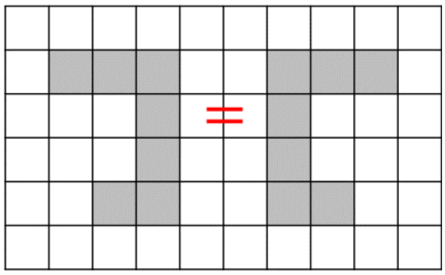


(a) Teken alle mogelijke posities die een tetraslang van lengte 4 kan aannemen.

Voordat we kunnen onderzoeken wat geschikte dekens zijn voor een tetraslang, moeten we duidelijk afspreken hoe je de slangen mag verplaatsen (zonder de houding te veranderen) om ze onder de deken te passen. We spreken af:

- Tetraslangen mag je schuiven en draaien, maar alleen zo dat de vierkanten van de slang precies op de vierkanten van het rooster vallen. De slang kan dus niet *schuin* of *halverwege het rooster* komen te liggen.

- Je mag tetraslangen spiegelen, oftewel oppakken en op de andere kant leggen.

In de volgende onderdelen ga je telkens een deken ontwerpen. Denk daarbij aan de stappen A t/m F van de algemene benadering.

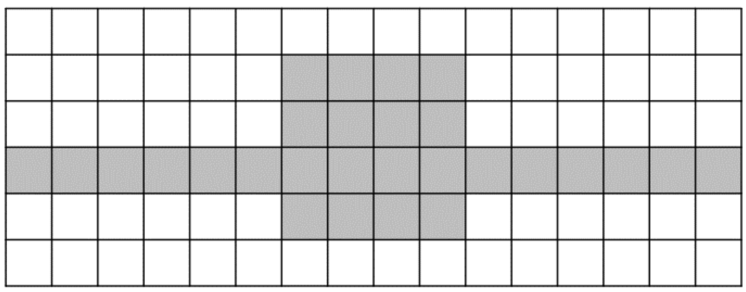
(b) Vind een zo klein mogelijke deken voor een tetraslang van lengte 4. Geef de bijbehorende positioneringsstrategie. Leg uit waarom het volgens jullie niet kleiner kan.

(c) Vind een zo klein mogelijke deken voor een tetraslang van lengte 5. Geef de bijbehorende positioneringsstrategie. Leg uit waarom het volgens jullie niet kleiner kan.

(d) **(Extra, alleen bij voldoende tijd)** Vind een zo klein mogelijke deken voor een tetraslang van lengte 6. Geef de bijbehorende positioneringsstrategie. Leg uit waarom het volgens jullie niet kleiner kan.

Misschien werd het bij onderdeel (d) al wel lastig om uit te leggen dat het echt niet kleiner kan. Als je positioneringsstrategie goed is en je weet zeker dat de slang in alle houdingen onder de deken past, dan weet je wel zeker dat de kleinste deken tenminste zo klein is als die van jullie. In andere woorden: je hebt een bovengrens voor de grootte van de deken gevonden.

Ondergrenzen kun je ook zoeken. Zo kun je beredeneren dat een deken voor een tetraslang van lengte 16 uit minstens 28 vierkanten moet bestaan: omdat de gestrekte slang en de tot vierkant gespiraalde slang eronder moeten passen en de overlap van die twee maximaal vier vierkantjes is, vinden we een minimum van 16+16-4=28 vakjes voor de deken.



(e) Vind een hogere ondergrens voor tetraslangen van lengte zestien door nog (minstens) één houding van de slang aan de redenering toe te voegen. Leg vervolgens precies uit hoe je aan die ondergrens komt.

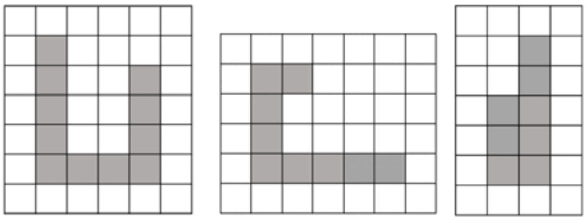
Een knik-tetraslang is een tetraslang met maar één knik (zoals in Opgave 2), maar nu zit de knik **niet** per sé in het midden.

(f) Beschrijf een deken voor een knik-tetraslang van lengte n voor ieder positief geheel getal $n = 1, 2, 3, \ldots$ Geef een formule in n voor de oppervlakte van die deken. Hint:

probeer eerst eens de kleinste deken te vinden voor kleine waarden van n (zoals 1 t/m 7) en probeer wat je daar vindt algemener te maken.

(Extra)

Een U-tetraslang is een tetraslang met twee knikken van 90 graden, zo dat de slang een U-achtige vorm krijgt. Zie onderstaande voorbeelden:



Het middendeel (tussen de knikken) mag overigens best lengte 2 hebben, zoals in het rechter voorbeeld.

Een bovengrens voor de oppervlakte van een kleinste deken voor een tetraslang van lengte n is n^2. Zo'n slang past namelijk in iedere houding onder een vierkante deken met zijde n. Jullie kunnen speciaal voor U-tetraslangen vast kleinere dekens maken en daarmee een betere bovengrens!

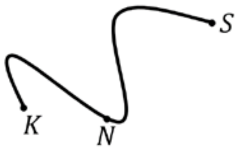
(g) **(Extra)** Geef een formule in n voor een betere bovengrens voor de oppervlakte van een deken voor een U-tetraslang van lengte n voor ieder positief geheel getal $n = 1, 2, 3, \ldots$

Opgave 6: Een deken voor alle houdingen

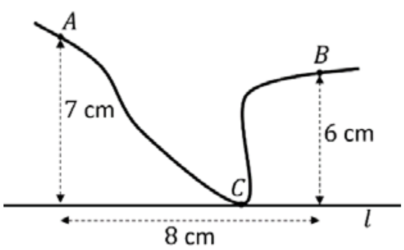
Terug naar het **algemene** probleem! Hoe kun je beredeneren dat een slang altijd onder een deken past? In deze opgave doen we via twee vragen suggesties over belangrijke redeneerstappen en passen die daarna toe op een dekentje in vorm van een ruit.

De slang is nog steeds 15 cm lang.

(a) Stel de kop van de slang ligt in punt K, de staartpunt in punt S en ergens gaat het lijf ook door punt N. De som $|KN| + |NS| \leq 15$. Waarom?

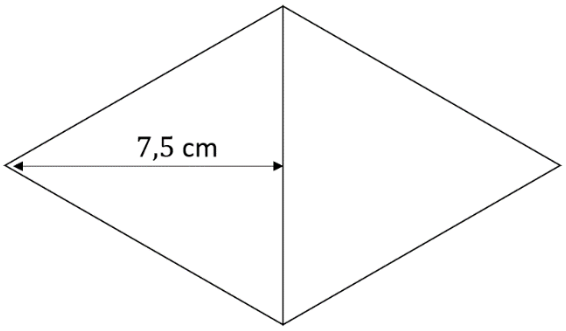


(b) Stel de slang gaat door punt A en door punt B onder de deken. Lijn l is een rand van de deken. De afstanden zijn als in het plaatje staat weergegeven.
Kan de slang echt wel zo liggen dat de slang op de rand van de deken komt?



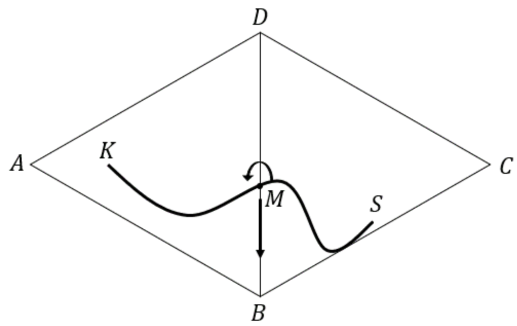
Hint: spiegel punt B en het stuk slang van het randpunt C naar punt B in lijn l.

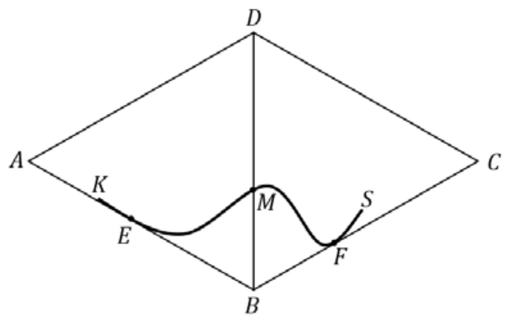
We blijven de slang algemeen houden, maar we beperken de vorm van de deken: een dekentje dat bestaat uit twee gelijkzijdige driehoeken met *hoogte* $7{,}5$ cm op elkaar.



(c) Bereken de oppervlakte van het dekentje

Positioneringsstrategie (zie de figuren hieronder): leg de slang met zijn midden M op de diagonaal BD zodat het staartdeel MS van de slang lijnstuk BC raakt (linker figuur). Dan schuif je M naar beneden en roteer je om M (zo dat staartdeel MS lijnstuk BC blijft raken) totdat het kopdeel KM lijnstuk AB raakt (rechter figuur). In het uiterste geval gebeurt dat pas als M op B valt.





(d) Laat zien dat het slangetje er zo altijd in past.

(e) **(Extra)** Kun je nog stukjes van de deken afknippen?

Eindopgave

De eindopgave, waar je geacht wordt je het tweede deel van de dag aan te wijden, luidt als volgt: ontwerp een zo klein mogelijk dekentje voor de slang van 15 cm. Maak daarbij gebruik van het eerder besproken schema van aanpak:

Een **algemene benadering** van het probleem is de volgende

A. Beperk welke *type* slangen je beschouwt en het *type* dekentjes
B. Experimenteer
C. Geef een *positioneringsstrategie* voor alle vormen voor die dekens
D. Vind de bijbehorende minimale afmetingen
E. Leg uit dat alle vormen onder het dekentje blijven met de strategie uit C
F. Eventueel: knip de deken bij!

Beschrijf deze stappen in je verslag. Het is niet verplicht je te beperken, zoals in A beschreven. Het is van groot belang dat je een duidelijke positioneringsstrategie hebt en dat je helder uitlegt dat die ook werkt. Aan de andere kant, als de berekening bij D niet exact lukt, mag je natuurlijk ook een goede schatting geven; en als je redenering bij E niet helemaal lukt, dan kun je aangeven welke intuïtie je gebruikt, wat je *vermoeden* is. Je mag gebruikmaken van software zoals GeoGebra.