Differentiaal-
en
Integraalrekening

deel 3

Optimaliseren

Nieuwe wiskunde tweede fase
Profiel N&G en N&T
Freudenthal instituut

Optimaliseren

Project:	Wiskunde voor de tweede fase
Profiel:	N&G en N&T
Domein:	Analyse
Klas:	VWO 5
Staat:	Try-out versie voor Liemers College en Cals College
Ontwerp:	Michiel Doorman, Paul Drijvers en Martin Kindt

© Freudenthal instituut, januari 1996

Inhoudsopgave

1 Een klassiek probleem

In dit boekje komen onder andere de volgende vragen aan de orde:
- Als je met een stuk touw van honderd meter een vruchtbaar stuk land mag uitzetten, hoe kun je dat dan het beste doen ?
- Waar kan het best een nieuw station langs de spoorlijn worden gesitueerd ten behoeve van forenzen uit twee nabijliggende dorpen?
- Hoe worden lichtstralen, die in water vallen, door de waterspiegel gebroken?
- Bij welke vorm heeft een goot de grootste capaciteit?
- Welke rusttoestand zal een gewicht aan een katrol aannemen?

Optimaliserings-problemen

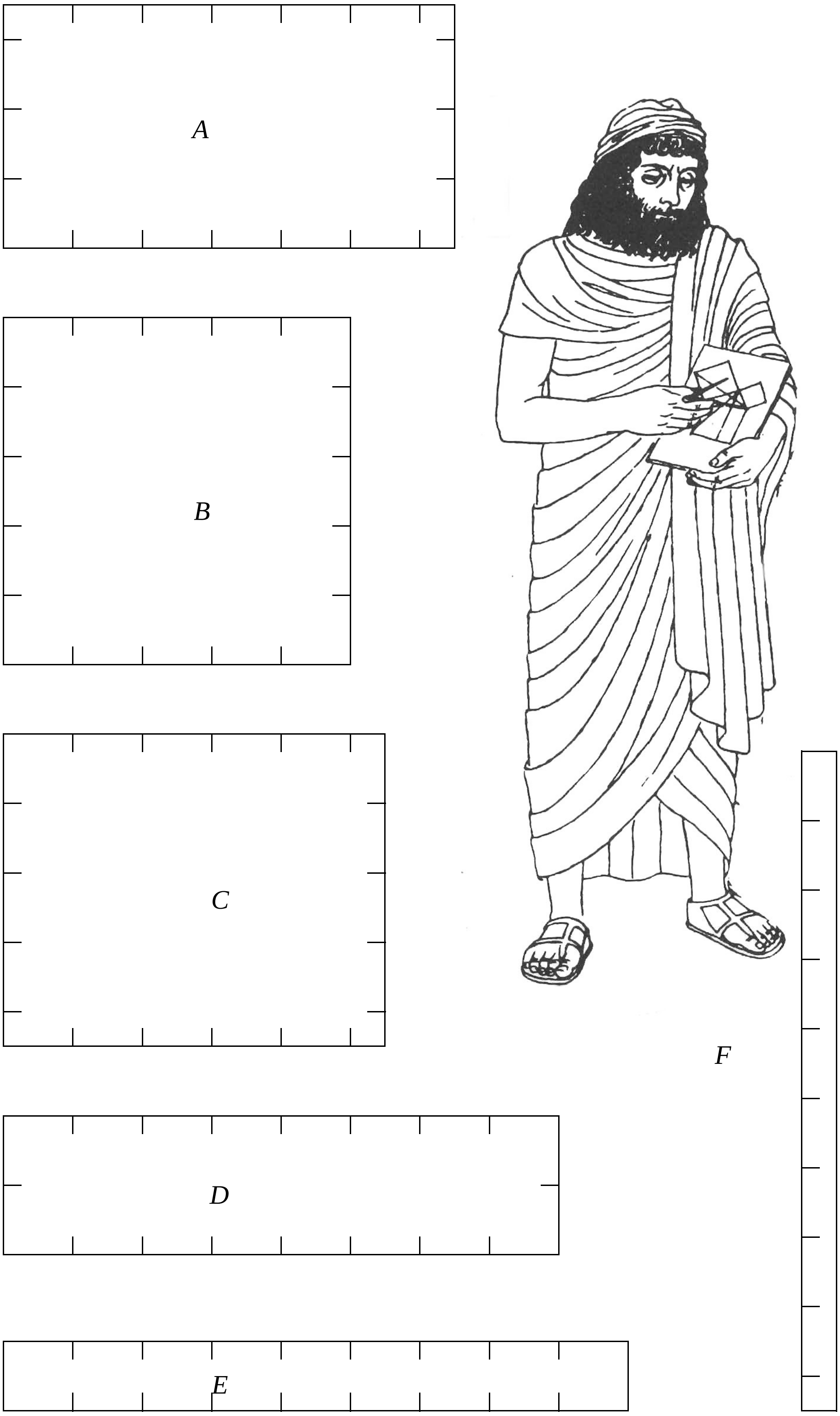
Dit zijn zo een paar vragen die te maken hebben met zogenaamde *optimaliseringsproblemen*. Optimaliseren betekent hier: het vinden van de meest gunstige oplossing.
En dat 'meest gunstig' heeft dan te maken met een *maximale* of een *minimale* waarde van een of andere grootheid.
In de wiskunde zijn er verschillende technieken voorhanden om optimaliseringsvraagstukken te kraken. Behalve de methode van de differentiaalrekening, die in de meeste gevallen functioneel is, wordt ook veel aandacht besteed aan het benaderen van oplossingen met behulp van de grafische rekenmachine. De derde methode is de meetkundige; veel van de behandelde problemen kun je ook met meetkunde oplossen. Als je een meetkundige oplossing eenmaal ziet, blijkt die vaak het eenvoudigst te onthouden en de 'mooiste'.

Optimaliseringsproblemen zijn al te vinden in heel oude teksten. Misschien wel het oudste beschreven 'optimaliseringsvraagstuk' uit de geschiedenis staat in één van de boeken van de Griekse meetkundige Euclides (ca. 300 v. Chr.). Dat probleem handelt over rechthoeken met een vaste omtrek. In de stijl van Euclides luidt het probleem ongeveer zo:

Vind bij een rechthoek met gegeven omtrek dié rechthoek waarvan de oppervlakte het grootst is.

Dit probleem zal nu van verschillende kanten worden bekeken.
Beantwoord eerst de volgende vragen naar aanleiding van de figuren op de volgende bladzij; daar zie je bij wijze van voorbeeld zes rechthoeken getekend met een omtrek van 20 cm.

1 **a.** Controleer eerst of de zes rechthoeken op bladzijde 2 inderdaad een omtrek van 20 cm hebben.
b. Gelijke omtrek betekent niet automatisch gelijke oppervlakte!
Rangschik de zes rechthoeken volgens oppervlakte van klein naar groot.
c. Noem de afmetingen van een rechthoek met een omtrek van 20 cm die een kleinere oppervlakte heeft dan elk van de zes getekende rechthoeken.
d. Bestaat er ook een rechthoek met een omtrek van 20 cm die een grotere oppervlakte heeft dan elk van de zes rechthoeken van bladzij 2? Waarom denk je dat?


A
B
C
D
E
F

Euclides bewees dat van alle rechthoeken met een vaste omtrek, het vierkant de grootste oppervlakte heeft. Zijn bewijs kwam hier op neer:

Als het vierkant wordt veranderd in een rechthoek, zó dat de som van lengte en breedte (en dus ook de omtrek) gelijk blijft, gaat er één strook af (I) en komt er één strook bij (II) . Echter strook I is groter dan II (I en II zijn even smal, maar I is langer!)
Conclusie: het vierkant heeft meer oppervlakte dan de rechthoek.

Het probleem kan ook worden opgelost met rekenen en algebra.
Ga uit van een vierkant van bijvoorbeeld 10 bij 10 (dus met omtrek 40).
Als je de ene afmeting iets groter maakt, moet de andere zijde evenveel korter worden; zo krijg je een vergelijking van produkten:

$$\begin{aligned} 10 \cdot 10 &= 100 \\ 11 \cdot 9 &= 99 \\ 12 \cdot 8 &= 96 \\ 13 \cdot 7 &= 91 \\ 14 \cdot 6 &= 84 \\ 15 \cdot 5 &= 75 \end{aligned}$$

Blijkbaar gelt dat '10 + *iets*' maal '10 - *datzelfde iets*' kleiner is dan 100.

2 **a.** Hoe kun je dat bewijzen met algebra?
b. Twee getallen zijn samen 50.
Hoe groot is het produkt van die twee getallen op zijn hoogst?

Het principe dat van alle rechthoeken met vaste omtrek het vierkant de grootste oppervlakte heeft, is gelijkwaardig met de regel uit de algebra:

als $a+b$ constant is, dan is ab maximaal in het geval $a = b$

Eerlijk verdelen is optimaal

Populair gezegd: *'eerlijk verdelen' van de som levert het hoogst haalbare produkt op.*

Behalve de twee methoden van aanpak (met meetkunde en algebra) is er nog een derde manier om het probleem van Euclides te behandelen, namelijk met grafieken.

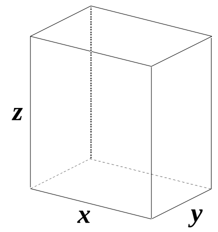
3 Gegeven: voor een rechthoek geldt: *lengte* + *breedte* = 8
Gevraagd: de maximale oppervlakte.
Oplossing: stel de lengte x , dan is de breedte $8 - x$
a. Voer in het functiebestand van de GR in: $y_1 = x$, $y_2 = 8 - x$ en $y_3 = y_1 * y_2$
b. Neem als venster [0, 8] bij [0, 20] en bekijk de grafieken.
c. Op het scherm kun je het verband zien tussen de veranderende lengte, breedte en oppervlakte van de rechthoek. Vertel wat je uit die grafiek kunt concluderen.

4 Bekijk nu het verband $y = x(a - x)$ voor diverse waarden van a.

a. Teken de grafieken van $y = x(a - x)$; kies daarbij voor a achtereenvolgens 2, 4, 6, 8 en 10. Bedenk dan wel eerst welke afmetingen van het venster geschikt zijn om alle grafieken op het scherm te krijgen.

b. Wat kun je zeggen van de coördinaten van de toppen? Met welke formule kun je, behalve de vijf grafieken ook de kromme op het scherm krijgen waar *alle* toppen (ook voor andere mogelijke waarden van a) op liggen?

5 De som van de lengte (x), de breedte (y) en de hoogte (z) van het nevenstaande blok is 12.



$x + y + z = 12$

a. Stel $z = 3$.
Voor welke waarden van x en y is de inhoud van het blok maximaal?

b. Bij elke gegeven hoogte z kan nu de inhoud in x worden uitgedrukt en de maximale inhoud worden bepaald. Maak een tabel voor z = 1, 2,..., 11:

z =	*inhoud =*	*max voor x =*	*max inhoud*
1	$1 \; x \; (11 - x)$	5,5	$1 \; 5{,}5^2 \; = 30{,}25$
2	$2 \; x \; (10 - x)$	5	$2 \; 5^2 \; = 50$
..	..	..	..

c. Teken voor verschillende waarden van z de grafiek van de inhoud van het blok als functie van x en let op de toppen van die grafieken.

d. Met welke formule kun je de kromme op het scherm krijgen waar alle toppen (voor welke z-waarde dan ook) op liggen?

e. Hoe groot is de maximale inhoud van het blok? Welke vorm heeft het blok met de maximale inhoud?

In opgave 5 komt naar voren dat het produkt $x{\cdot}y{\cdot}z$ van drie positieve getallen, waarvan de som gelijk is aan 12, maximaal is in het geval dat de drie getallen aan elkaar gelijk zijn. Het lijkt er op of het principe '*eerlijk verdelen van de som levert het hoogst haalbare produkt op*', ook voor drie positieve getallen geldt. En als dit principe voor twee en voor drie getallen geldt, waarom zou het dan die niet voor een willekeurig aantal getallen gelden?
Als in een produkt van een aantal getallen er twee ongelijke voorkomen, kun je dat produkt groter maken zonder dat daarbij de som van die getallen verandert, door die twee ongelijke getallen elk te vervangen door hun gemiddelde.
Zo is bijvoorbeeld $2 \;\; 3 \;\; 4 \;\; 4 \;\; 5$ kleiner dan $2 \;\; 3\tfrac{1}{2} \;\; 3\tfrac{1}{2} \;\; 4 \;\; 5$.

6 **a.** Verklaar bovenstaande ongelijkheid zonder de produkten uit te rekenen.

b. Hoe kun je dat produkt opnieuw vergroten door twee getallen te veranderen, terwijl de som van de vijf gelijk blijft?

c. Hoe groot zal het maximale produkt van vijf getallen met een som van 18 zijn?

Stelling **Gegeven is een aantal (zeg *n*) positieve getallen met een constante som. Het produkt van die getallen is maximaal als de *n* getallen stuk voor stuk aan elkaar gelijk zijn.**

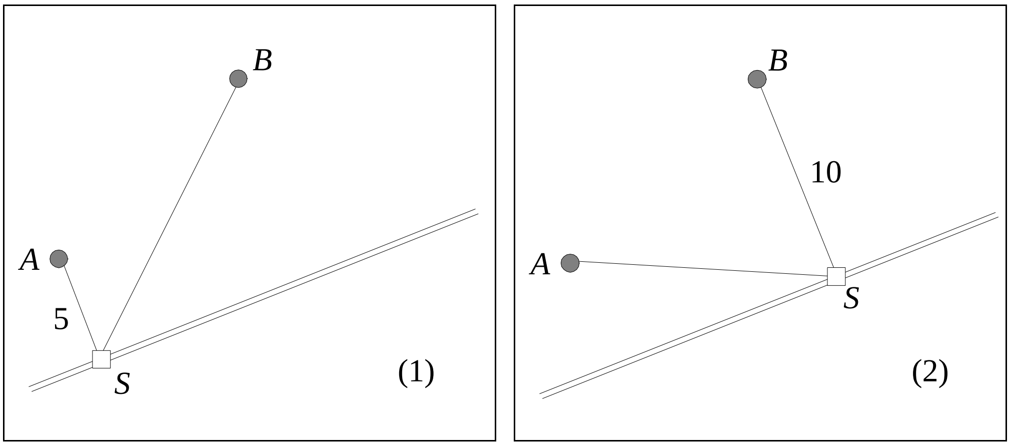
De stelling is waar, maar een streng bewijs is vrij lastig. Het is duidelijk dat het maximale produkt niet twee ongelijke getallen kan bevatten. Dus *als er een maximaal produkt bestaat*, dan moeten alle factoren van dat produkt gelijk zijn. In dat schuin gedrukte stukje zit hem nou precies het venijn. Voor een streng bewijs is het nodig dat het bestaan van een maximaal produkt wordt aangetoond. Dat bewijs blijft hier achterwege.

7 Een wiskundeleraar heeft het volgende systeem bedacht om rapportcijfers te berekenen. Stel hij heeft vier proefwerken gegeven. In plaats van ’optellen en delen door vier’ vermenigvuldigt hij de vier cijfers en trekt dan de vierde-machtswortel uit het zo verkregen produkt. Voor een leerling die vier keer hetzelfde cijfer heeft behaald, maakt het niet uit dat het nieuwe systeem gehanteerd wordt. Hoe zit dat in andere gevallen?

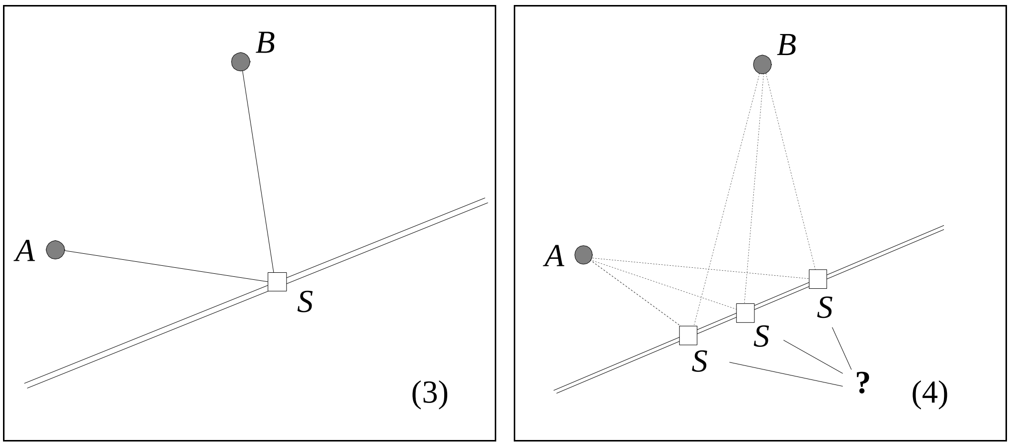
2 Waar komt het station?

De gemeenten *A* en *B* liggen aan dezelfde kant van een spoorlijn resp. op afstand 5 km en 10 km van die lijn. De afstand van *A* tot *B* is (hemelsbreed) 13 km.
De spoorwegmaatschappij wil een station aan genoemde spoorlijn bouwen en overlegt met diverse instanties waar de beste plaats voor het station (*S*) is. Het terrein aan de kant van de spoorlijn waar *A* en *B* liggen is nog braak en munt niet uit door natuurschoon, zodat men voor de aanleg van de wegen *AS* en *BS* alle vrijheid heeft.

Gemeente *A* wil natuurlijk dat *S* zo dicht mogelijk bij *A* ligt (1).
Gemeente *B* wil *S* zo dicht mogelijk bij *B* hebben (2)



Het provinciebestuur zou het liefst zien dat *S* op hemelsbreed gelijke afstanden van *A* en *B* komt te liggen (3). Tenslotte wil de provinciale busmaatschappij dat de totale afstand *AS* + *SB* zo klein mogelijk is (4).



1 **a.** Bereken de totale weglengte *AS* + *SB* in geval (1) in 1 decimaal nauwkeurig.
b. Dezelfde opdracht voor geval (2).
c. In geval (3) is *AS* + *BS* iets lastiger te berekenen. Het probleem kan worden opgelost met een vergelijking. Schuif vanuit situatie (2) het station *x* km langs de spoorlijn (richting *A*) en druk achtereenvolgens *BS* en *AS* uit in *x*.
d. Stel $BS = y_1$ en $AS = y_2$;

Voer y_1 en y_2 als functie van x in het functiebestand van de GR.
Kies een geschikt venster en bekijk de grafieken van y_1 en y_2 .
Lees nu af waar S volgens (3) moet liggen en bereken $AS + BS$.

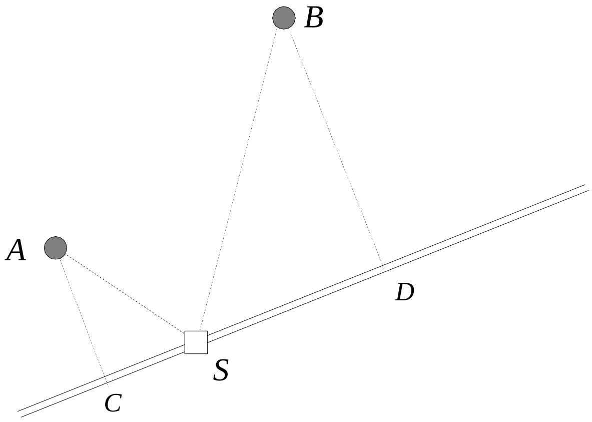
e. De vergelijking $AS = BS$ laat zich ook ‘exact’ en zonder gebruik van de grafische rekenmachine oplossen. Doe dat.

f. Hoe zou je geval (3) meetkundig kunnen aanpakken?

2 Nu het plan van de busmaatschappij waarbij het gaat om de minimale totale afstand.

a. Voer de functie $y_3 = y_1 + y_2$ in en bepaal de minimale waarde van y_3.

b. Lees uit de grafieken op het scherm af, hoe groot de verhouding van de afstanden AS en BS is in het geval de totale afstand $AS + BS$ minimaal is.



3 Hierboven is de optimale situatie getekend bedoeld in (4).
AC en BD zijn de afstanden hemelsbreed van A en B tot de spoorlijn.
Het resultaat van opgave 2 wijst er op dat AS en BS (en ook CS en DS) zich verhouden als AC en BD.
Ga na of dat ook klopt als A wat verderaf of wat dichterbij de spoorlijn ligt. Neem voor het gemak aan dat de plaats van C niet verandert; in het functiebestand hoef je dan bij y_2 maar één getal te wijzigen!

Het probleem van het vinden van de plaats S zodat $AS + SB$ minimaal is, werd in de 17^{e} eeuw door verschillende wiskundigen aangepakt. Er bestonden toen nog geen spoorlijnen, maar wel spiegels: de route ASB was in de probleemstelling de gang van een lichtstraal uitgaande van de lichtbron A en na terugkaatsing in een vlakke spiegel, aankomend bij B. Er werd wiskundig bewezen dat in zo’n geval de ‘hoek van inval’ gelijk moet zijn aan de ‘hoek van terugkaatsing’ of, wat op hetzelfde neerkomt, dat de driehoeken ACS en BDS gelijkvormig zijn. Een feit dat uit observatie al was gebleken.

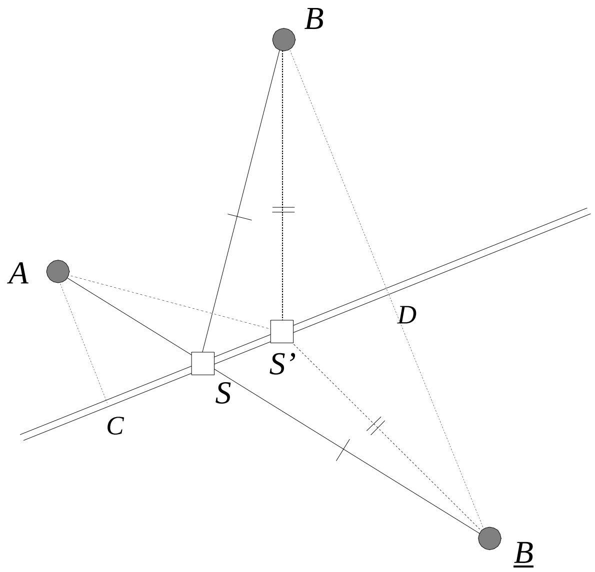
4 In de 17^{e} eeuw werd ook de differentiaalrekening uitgevonden en een van de uitvinders, Leibniz, stelde vast dat de positie van S kan worden berekend door y_3 te differentiëren naar x en de afgeleide van y_3 gelijk te stellen aan 0. Daarbij gebruikte hij de gelijkwaardigheid van de betrekkingen $y_3' = y_1' + y_2' = 0$ en $y_1' = -y_2'$

a. Bereken met de kettingregel y_1' en y_2'

b. Laat zien dat y_1' gelijk is aan de verhouding $DS : BS$ en dat y_2' tegengesteld is aan de verhouding $CS : AS$.

c. De optimale plaats voor S is zodanig dat AS en BS gelijke hoeken maken met de spoorlijn. Verklaar dit uit het voorgaande.

De aanpak met differentiaalrekening is voor dit speciale probleem zeker niet de eenvoudigste oplossing; er bestaat ook een fraaie meetkundige manier!



5 Bekijk bovenstaande figuur.
Stel dat een plaats $\underline{B}$ aan de andere kant van de spoorlijn ligt, precies gespiegeld ten opzichte van *B*.
a. Waar moet het station *S* liggen opdat de totale afstand tussen *A* en $\underline{B}$ minimaal is?
b. Hoe kun je meetkundig onderbouwen dat de positie *S* ’ niet de optimale is?
c. En waarom kun je er zeker van zijn dat $AS + SB$ minimaal is?
d. Ga na dat nu ook meteen volgt dat $CS : DS = AS : BS = AC : BD$.

De bovenstaande meetkundige oplossing is prachtig en ook al weer heel oud; hij wordt toegeschreven aan Heron van Alexandrië (ca. 100 na Chr.). Het voordeel van de meetkundige methode ten opzichte van de op algebra gebaseerde manier, is dat je de oplossing echt kunt *zien*. Het nadeel is dat de toepassingsmogelijkheid beperkter is dan die met algebra. Opgave 6 maakt dat duidelijk.

6 Veronderstel dat gemeente *B* veel groter is dan *A*, zeg twee keer zo groot.
Is het dan wel eerlijk om de afstanden *AS* en *BS* even ‘zwaar’ te rekenen?
Je zou kunnen stellen dat er per dag twee keer zoveel reizigers de route *BS* moeten afleggen en dat daarom de afstand *BS* twee keer zoveel gewicht in de schaal moet leggen. Dus in plaats van $y_3 = y_1 + y_2$ stel je $y_3 = 2y_1 + y_2$.
a. Zoek met de grafische rekenmachine in dit geval het minimum van y_3 en bepaal de positie van het station *S*.
b. Ga na dat bij deze positie van *S* het totale aantal ‘reizigerskilometers’ per dag minimaal is.
c. Bij deze positie van *S* zijn de hoeken die *AS* en *BS* met de spoorlijn maken niet aan elkaar gelijk. Kun je nog iets meer zeggen over het verband tussen deze hoeken? Tip: Let op de cosinus van elk van de hoeken.

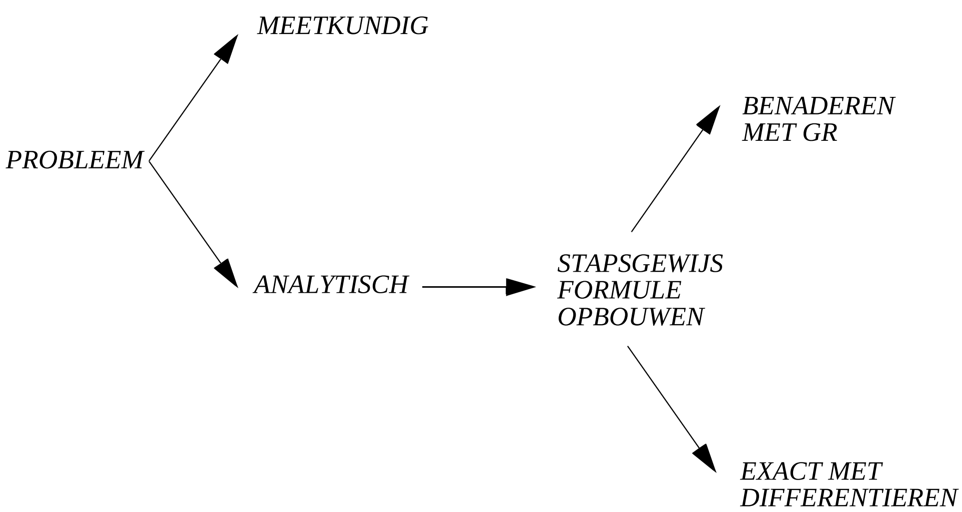
In het vervolg van dit boekje kom je een aantal maximaliserings- en minimaliseringsproblemen tegen, die je op verschillende manieren kunt aanpakken. De meetkundige aanpak is mooi, maar van geval tot geval verschillend. De analytische aanpak komt er op neer, dat je een functie bij het probleem opstelt. Vaak stel je zo'n functie op in verschillende stapjes. Je maakt dan gebruik van een aantal 'componenten'. Als je nog even terugkijkt naar de twee voorbeelden, dan zie je dat het daar ook zo gebeurd is:

Functie in stappen opbouwen

– in het voorbeeld van Euclides werden de componenten $y_1 = x$ en $y_2 = 8 - x$ ingevoerd en vervolgens werd de functie $y_3 = y_1 * y_2$ bekeken;
– in het probleem van de spoorlijn kreeg je $y_1 = \sqrt{100 + x^2}$ en $y_2 = \sqrt{25 + (12 - x)^2}$ en vervolgens $y_3 = y_1 + y_2$ met zijn grafiek.

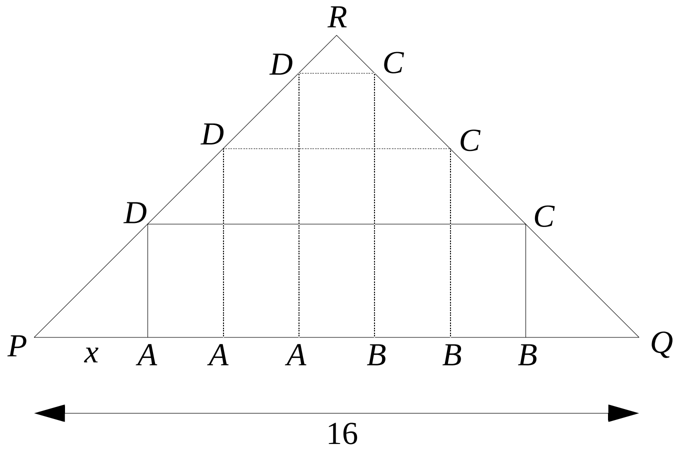
Zo'n opbouw met componenten heeft verschillende voordelen:
– het opstellen van het uiteindelijke functievoorschrift is gemakkelijker bijv.: de formules van y_1, y_2 en y_3 hierboven zijn overzichtelijker en beter op tikfouten te controleren dan $y_1 = (100 + x^2) + (25 + (12 - x)^2)$
– het gedrag van de componenten waaruit de functie is opgebouwd, neem je automatisch mee in de oplossing bijv.: je ziet in de grafiek van y_1, y_2 en y_3 ook de verandering van *AS* en *BS*.
– verandering van voorwaarden kan leiden tot verandering van één van de componenten, en dat kun je snel doorvoeren in het functiebestand bijv.: zie opgave 3 en opgave 6.
– de invoer in de grafische rekenmachine is eenvoudiger omdat je geen ellenlange formules hoeft in te toetsen

Als je eenmaal een functie hebt, staan er nog twee wegen tot je beschikking: de grafisch/numerieke met de grafische rekenmachine, waarbij je met TRACE en/of CALC de optimale waarde(n) benadert, en de exacte methode, waarbij je de afgeleide gelijk aan 0 stelt. In schema:



3 Omtrek, oppervlakte en inhoud

1 Van de ’geo-driehoek’ *PQR* is de basis 16 cm.



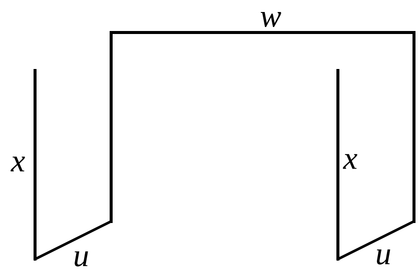
In de driehoek worden rechthoeken *ABCD* beschreven.
Bereken de maximale oppervlakte die zo’n rechthoek kan hebben.
Aanwijzing: stel $PA = x$.
Welk verband zie je met het probleem van Euclides in hoofdstuk 1?

2 Bekijk de grafieken van $y_1 = x$, $y_2 = \frac{25}{x}$ en $y_3 = y_1 + y_2$ voor x tussen 0 en 10.

a. Hoe groot is de minimale waarde van y_3?

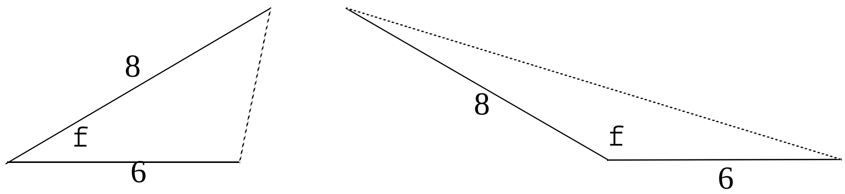
b. Beschouw alle rechthoeken met oppervlakte van 25 cm^2.
Uit **a.** volgt dat van al deze rechthoeken het vierkant de kleinste omtrek heeft.
Verklaar dat.

3 Een rechthoekige gebogen draad van 120 cm lengte dient om een doos te verstevigen.



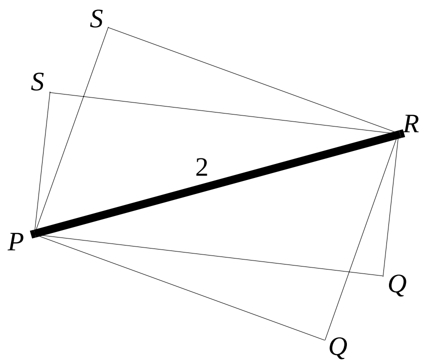
De zijkanten van de doos worden met reclameplaten beplakt.
Daarvoor moet gelden: $x = 2u$.
Bij welke afmetingen van de draad is de inhoud van de doos maximaal?

4 Een driehoek heeft een zijde met lengte 8 en een met lengte 6.
De ingesloten hoek tussen deze twee zijden varieert en daarmee ook de omtrek en de oppervlakte van de driehoek.



a. Tussen welke grenzen varieert de *omtrek* als `f` varieert van 0 tot `180` graden?
b. Bereken de maximale *oppervlakte* van de driehoek.
c. Noem de lengten van de twee constante zijden respectievelijk a en b en druk de maximale oppervlakte van de driehoek uit in a en b.

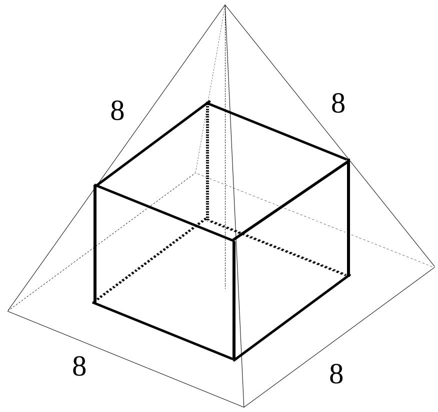
5 Rechthoeken met dezelfde diagonaal.



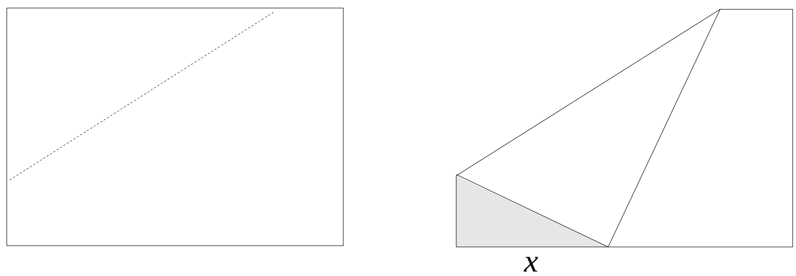
Bekijk alle rechthoeken $PQRS$ met een vaste diagonaal PR (= 2).
Variabel zijn lengte, breedte, omtrek en oppervlakte.
a. Verklaar waarom alle rechthoeken precies passen in de cirkel met middellijn PR.
b. Stel één van de zijden x en druk zowel de omtrek als de oppervlakte van de rechthoek uit in x.
c. Onderzoek bij welke rechthoek de omtrek en bij welke rechthoek de oppervlakte maximaal is.
d. Probeer het laatste resultaat ook meetkundig te verklaren.

6 Op de emballage-afdeling van een fabriek vervaardigt men ondermeer kartonnen dozen met een inhoud van 36 dm^3. De bodem van zo'n doos moet een vaste vorm hebben: lengte en breedte verhouden zich als 2 : 1. De dozen zijn aan de bovenkant open.
a. Onderzoek hoe de benodigde hoeveelheid karton varieert met de hoogte van de doos.
b. Bij welke afmetingen is de karton oppervlakte minimaal?

7 Gegeven een piramide met vierkante bodem. Alle ribben hebben de lengte 8.
In de piramide past een balk, waarvan het grondvlak op de bodem van de piramide staat en waarvan het bovenvlak tegen de opstaande ribben van de piramide rust.
Bereken bij welke afmetingen de balk een maximale inhoud heeft.



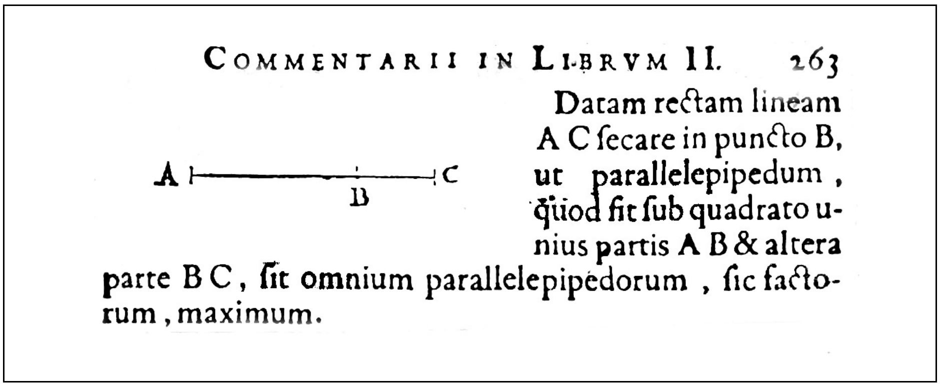
8 Een vel papier van het formaat A4 meet 21 bij 29,7 cm. Het papier wordt zo gevouwen dat een hoekpunt op de overstaande lange zijde komt te liggen; zo ontstaat er in een van de hoeken een rechthoekig driehoekje (grijs in de figuur).



Als je dit met zo'n vel papier uitvoert, zie je al gauw dat je hele 'smalle' rechthoekige driehoeken kunt krijgen met een kleine oppervlakte en minder smalle driehoeken met een grotere oppervlakte.
De vraag is natuurlijk: welke rechthoekige driehoek heeft de maximale oppervlakte? Bereken de zijde x van die optimale driehoek.

Descartes (1596-1650)

9 Zoals in hoofdstuk 1 enkele malen is aangegeven, bestond in het (verre) verleden een sterke interesse voor optimaliseringsproblemen. De Latijnse tekst hieronder is een fragment uit de *Géométrie* van Descartes uit 1637.


COMMENTARII IN LIBRVM II. 263

Datam rectam lineam A C ſecare in puncto B, ut parallelepipedum, quod fit ſub quadrato unius partis A B & altera parte B C, ſit omnium parallelepipedorum, ſic factorum, maximum.

Vertaald in ouderwets Nederlands staat er:
Een gegeven lijnstuk AC zo in een punt B te snijden dat de balk, die het vierkant met zijde AB als grondvlak heeft en BC als hoogte, het grootste is van alle zo geproduceerde balken.
Neem voor het gemak de lengte van $AC = 10$.

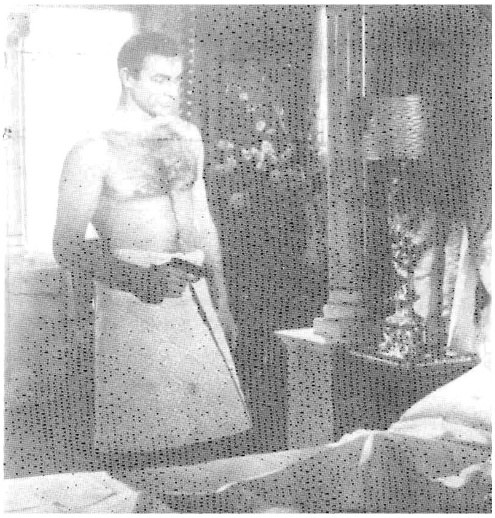
a. Stel de lengte van *AB* gelijk aan x en druk de inhoud van de balk uit in x.
b. Bepaal bij welke afmetingen de balk een maximale inhoud heeft.
c. Het antwoord is ook te vinden met het ‘eerlijk-verdeel-principe’ uit hoofdstuk 1. Daarvoor moet je een slimmigheidje gebruiken, want de som van lengte, breedte en hoogte is hier niet constant! Dat geldt echter wèl voor ’lengte + breedte + dubbele hoogte’. Probeer langs deze weg de optimale afmetingen te vinden.

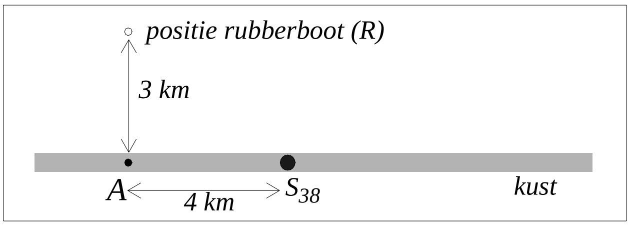
10 Bij opgave 6, 7, 8 en 9 van dit hoofdstuk heb je waarschijnlijk zowel de grafische rekenmachine, als de afgeleide functie als meetkunde gebruikt.
Loop deze opgaven nog eens langs en ga na welke methode(n) je bij elke opgave hebt gebruikt. Probeer te motiveren waarom je die methode (of een combinatie van methoden) gebruikt hebt en waarom hij geschikt lijkt.

4 James Bond en de wet van Snellius

Agent 007

James Bond, Geheim Agent 007, is op drie kilometer afstand van de kust gedropt. Met een rubberboot wil hij de kust bereiken om bij strandpaal 38 een geheime boodschap achter te laten. Natuurlijk is het zaak dat hij zijn missie zo snel mogelijk volbrengt. Met de rubberboot kan hij zich roeiend verplaatsen met een snelheid van 6 km/u. Het water is zo rustig dat de vaarrichting niet van invloed is op zijn snelheid. Op het strand kan hij een lange poos een snelheid van 12 km/u volhouden. In onderstaande situatieschets zie je dat de strandpaal (S_{38}) 4 km verwijderd is van de plaats (A) op het strand die James Bond zou bereiken als hij de kortste weg naar het strand zou nemen.





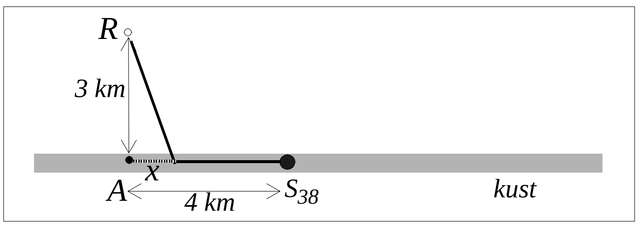
1 Veronderstel dat James Bond inderdaad de kortste weg naar het strand neemt en daarna 4 km loopt.

a. Hoeveel minuten heeft hij dan nodig om paal S_{38} te bereiken?

b. Hoeveel minuten heeft hij nodig als hij in schuine richting rechtstreeks naar de strandpaal roeit?

c. De vraag is of de kortste weg ook de snelste is. Wellicht kan hij tijd besparen door halverwege A en de strandpaal aan land te gaan, dus op 2 km van paal 38. Hoeveel minuten tijdwinst boekt hij ten opzichte van de vorige routes?

2 Nu algemeen. Stel dat hij in punt B op x km van punt A aan land gaat.



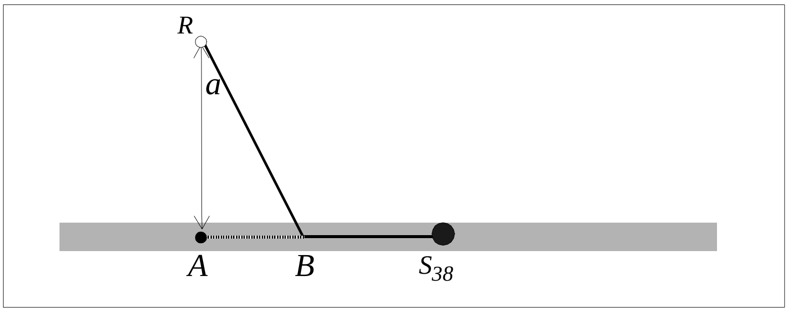
De totale tijd y_3 om de strandpaal te bereiken is de roeitijd y_1 plus de looptijd y_2

a. Teken de grafieken van y_1, y_2 en y_3 als functie van x.

b. Waar moet 007 aan land gaan om zo snel mogelijk de opdracht te volbrengen?

c. Hoe lang doet hij erover?

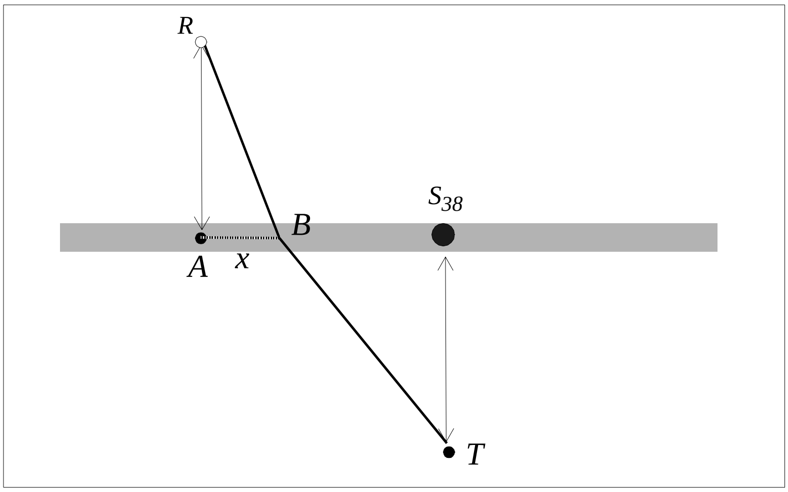
3 Vanuit het startpunt *R* zal de vaarkoers zo goed mogelijk bepaald moeten worden. Immers, een kleine afwijking in de vaarrichting kan tot belangrijke tijdsverschillen leiden, levensgevaarlijk voor onze held! Daarom nemen we nu de grootte van de hoek tussen de vaarrichting en de loodlijn op de kust (in de tekening hoek *ARB*) als uitgangspunt van de berekeningen.



a. Stel de 'koershoek' *ARB* is α (radialen of graden) en maak de grafiek van de totale tijd (die James Bond nodig heeft) als functie van die hoek.
b. Hoe groot moet de koershoek bij benadering (in graden) zijn om zo snel mogelijk het doel te bereiken?
c. Verschuift de optimale landingsplaats als de boodschap bij een verder van *A* verwijderde kilometerpaal moet worden achtergelaten? Waarom?

4 Noem de snelheid waarmee James Bond roeit v_1 en die waarmee hij rent v_2 (beide snelheden in km/h).
a. Bewijs dat voor de optimale koershoek α geldt: $\sin\alpha = \dfrac{v_1}{v_2}$
Gebruik de methode van Fermat.
(Zie opgaven 4 en 6 van hoofdstuk 2.)
b. Ga na dat bovenstaande formule geldt onder de voorwaarde: $0 < v_1 \leq 0{,}8\, v_2$

5 Bekijk nu het geval dat onze held zijn boodschap moet afgeven op een landinwaarts gelegen plaats *T*. Zeg 3 km vanuit de kust recht onder S_{38}.



a. Stel weer v_1 = 6 km/h (snelheid ter zee) en v_2 = 12 km/h (snelheid ter land). Bepaal *x* (= *AB*) zó dat de benodigde tijd voor James Bond minimaal is.

Stel de hoek tussen *AR* en *RB* gelijk aan a en de hoek tussen *BT* en de lijn van *T* naar S_{38} is gelijk aan b.

b. Bewijs met gebruikmaking van differentiaalrekening, dat voor het geval de route *RBT* maximaal snel is, geldt dat sin a en sin b zich verhouden als de snelheden v_1 en v_2 (ongeacht de waarden van v_1 en v_2, mits geen van beide nul is). (Aanwijzing: zie weer de opgaven 4 en 6 van hoofdstuk 2).

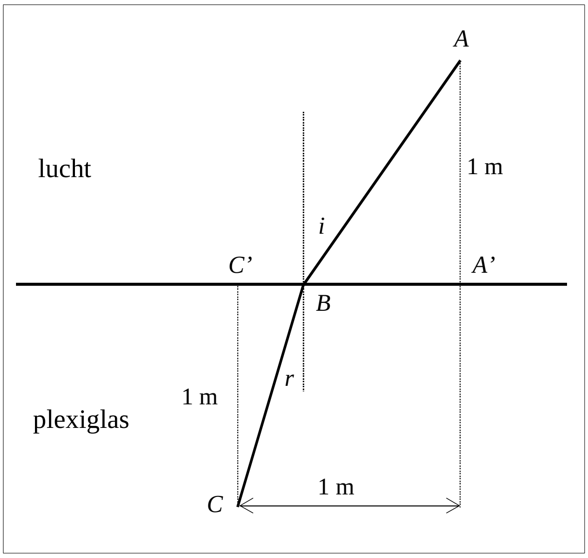
Breking van licht

Een stok die je gedeeltelijk in het water houdt, lijkt duidelijk geknakt. De verklaring hiervoor ligt in het feit dat het licht bij de overgang van lucht naar water een plotselinge koersverandering ondergaat. Dit verschijnsel wordt de *breking* van licht genoemd. In de zeventiende eeuw onderzocht men hoe de grootte van de afwijking bepaald kon worden, afhankelijk van twee media (bijvoorbeeld lucht en water). Nadat het Kepler niet lukte een bevredigende wet te ontdekken, slaagde de Nederlandse natuurkundige Snellius (1591-1626) daar wel in. Voor de route die het licht volgt, geldt dat de verhouding tussen de sinus van hoek van *inval* (*i*) en de sinus van de zogenaamde *brekingshoek* (*r*) constant is bij twee gegeven media.

Brekingsindex

Deze constante, de zogenaamde *brekingsindex*, is gelijk aan de verhouding tussen de lichtsnelheden in de beide media.

6 Geel licht valt vanuit een lamp *A* op een blok plexiglas in punt *B*, om vervolgens in het punt *C* in het blok aan te komen. Door de lucht plant het licht zich voort met een snelheid van (ongeveer) 3.10^8 meter per seconde. In plexiglas is deze snelheid wat minder: 2.10^8 meter per seconde. Voor de afstanden geldt: *AA*' = *CC'* = *A'C*' = 1 m. Zie onderstaande figuur.



a. Vergelijk deze situatie met die van de vorige opgave.

b. Het licht volgt de snelste weg. Waar ligt het punt *B*?

Het breken van licht in water kun je mooi laten zien aan de hand van een klein experiment. Neem een lege beker en leg op de bodem een kwartje. Als je op de bodem kijkt zie je het kwartje liggen. Ga nu met je hoofd naar achteren totdat je het kwartje niet meer ziet. Houd je hoofd op die plaats. Als je vervolgens langzaam water in de beker laat lopen, dan komt het kwartje boven ’drijven’....

5 Onderzoeksopdrachten

Dit hoofdstuk bevat twee onderzoeksopdrachten. Deze opdrachten zijn wat omvangrijker en opener dan de opgaven in de voorafgaande hoofdstukken.
Let bij deze opdrachten op de volgende aandachtspunten:

- werk goed samen;
- maak een net en overzichtelijk verslag;
- vermeld in het verslag ook vermoedens, redeneringen, argumenten en mislukkingen;
- probeer verschillende oplosmethoden te combineren.

1 De beste vorm voor een goot

Voor een bevloeïngssysteem worden goten gemaakt van platen kunststof die 60 cm breed zijn. Het probleem is: hoe moeten de platen gebogen worden om een zo groot mogelijke doorstroming te krijgen?

Recht-hoekige goten

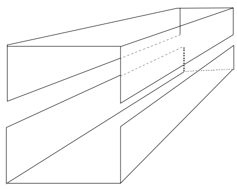
Het lijkt het meest eenvoudig om de goten zó te maken dat de zijwanden loodrecht op de bodem staan:

Een eerste opwelling is om zo'n goot vierkant in doorsnede te maken, dus 20 cm hoog en 20 cm breed.

Capaciteit

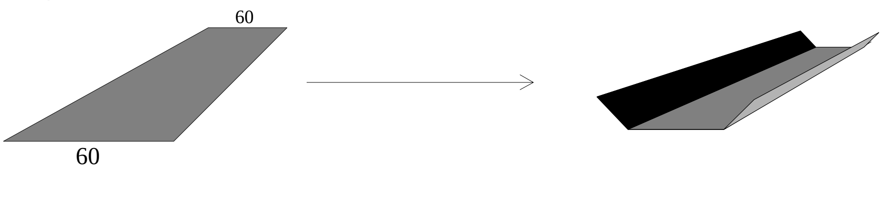
1 Onderzoek de *capaciteit* (= aantal liter water per strekkende meter) van de goot in dit geval. Hoe verandert de capaciteit als de goot niet vierkant maar rechthoekig van doorsnede is? Bij welke hoogte is de capaciteit van de ’rechthoekige’ goot optimaal?

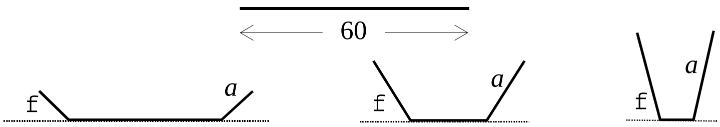
2 De oppervlakte van de doorsnede van de goot is gelijk aan de helft van de oppervlakte van de rechthoek die ontstaat door twee identieke goten op elkaar te plaatsen. Hoe kun je met behulp hiervan het antwoord van vraag **1** ook meetkundig verklaren?



Goten in trapeziumvorm

Je kunt de goten natuurlijk ook zó maken:

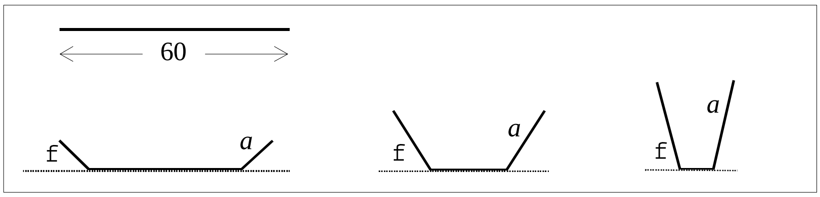




De dwarsdoorsnede is steeds een symmetrisch trapezium. De opstaande randen maken een hoek van f (= 'fi') graden met de bodem. Dit is misschien niet zo'n gek idee: de goot wordt weliswaar lager, maar daar staat een winst in de breedte tegenover.

3 Kies zelf een vaste waarde voor f die je geschikt lijkt. Is bij deze vorm een verbetering van de capaciteit ten opzicht van die van de vorige opgave mogelijk? Leidt een andere keuze van f tot een grotere capaciteit?

4 Variëer nu zowel de lengte *a* van de opstaande rand als de hoek f met de bodem.



Onderzoek voor welke waarden van *a* en f de maximale capaciteit bereikt wordt.
Wat voor een veelhoek ontstaat er ditmaal als je ondersteboven op deze 'optimale' goot eenzelfde goot zou plaatsen?

Regelmatige zeshoek

Uit het voorafgaande blijkt dat je de beste vorm van de goot krijgt als je de helft van een regelmatige zeshoek neemt.
Stel nu dat we de goot in plaats van twee knikken meer knikken mogen geven, of zelfs kunnen buigen.

5 Onderzoek welke vorm de 'optimale' goot heeft.
Bereken voor jouw keuze de afmetingen en de capaciteit van de goot.

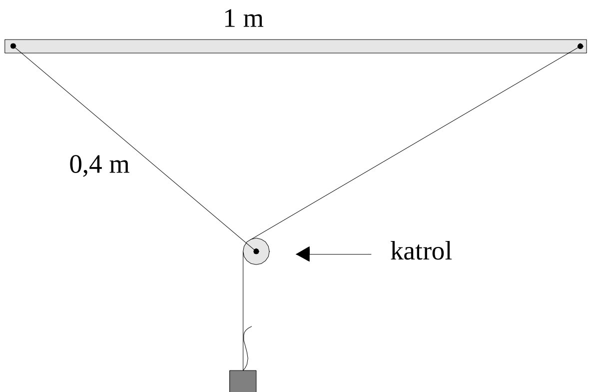
2 Een gewichtig probleem

L’Hôpital (1661-1704)
Bernoulli (1667-1748)

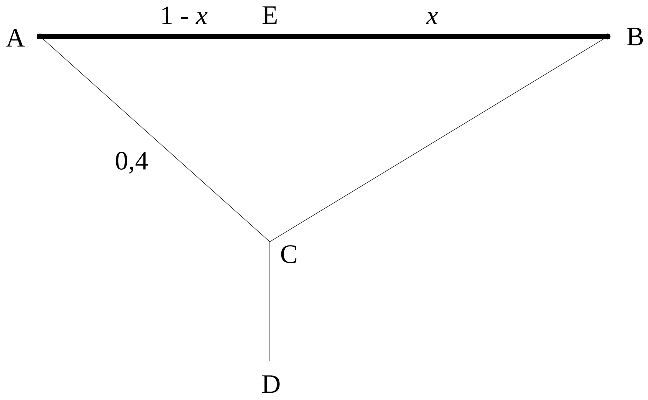
Markies de l’Hôpital was een wiskundige die leefde in de 17e eeuw. In 1696 publiceerde hij het boek ‘Analyse des infiniment petits’, dat als één van de eerste leerboeken in de analyse wordt beschouwd. De inhoud van dit boek is grotendeels niet door l’Hôpital zelf bedacht, maar door zijn leermeester Johann Bernoulli, die een veel groter wiskundige was. De (niet zo rijke) Bernoulli had met de kapitaalkrachtige markies een contract afgesloten, dat l’Hôpital het recht gaf om alle wiskundige ontdekkingen van Bernoulli te publiceren. Zo leeft de naam van l’Hôpital dus nog steeds voort in de zogenaamde *stelling van l’Hôpital*, die bedacht is door Bernoulli...

Het volgende probleem is afkomstig uit ‘Analyse des infiniment petits’. Zoals je in het pakketje ‘Differentiaal- en Integraalrekening’ hebt gelezen, werd in de 17e eeuw de techniek van het differentiëren uitgevonden. Lang niet iedereen was direct overtuigd van het nut hiervan. Met het volgende probleem wilde l’Hôpital de kracht van de differentiaalrekening bij optimaliseringsproblemen duidelijk maken.

Aan een horizontaal opgestelde meetlat van 1 meter zit aan de linkerkant een touwtje van 40 cm lang. Aan het einde van het touwtje is een katrol bevestigd. Een gewicht zit aan het touw van 1 meter dat via de katrol verbonden is met het rechter eindpunt van de meetlat.



De vraag is nu, welke positie het katrol en het gewicht zullen innemen als het geheel in evenwicht is. In een schematische tekening is de opstelling als volgt:



Bij dit optimaliseringsprobleem verwaarlozen we het gewicht van de katrol en de touwtjes ten opzichte van het gewicht van het blok. Uit de natuurkunde is bekend dat het blok de laagst mogelijk positie zal innemen.

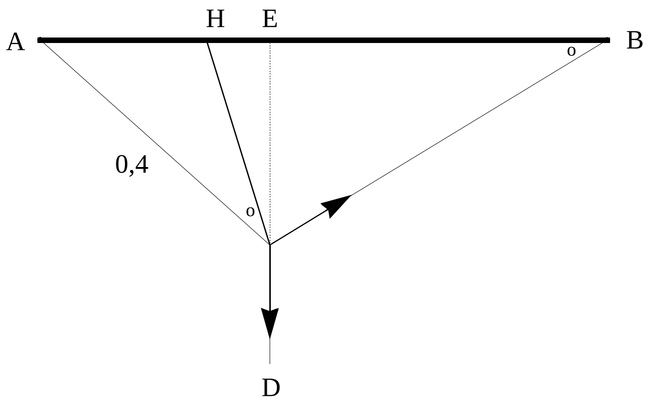
1 Misschien is er in de klas een proefopstelling beschikbaar.
Als dat het geval is, bepaal dan experimenteel de rustpositie van het gewicht.

2 Indertijd stelde l'Hôpital AE gelijk aan x.
Handiger is echter om EB als x te nemen.
Hoe kun je dit probleem met de grafische rekenmachine aanpakken?

3 L'Hôpital had geen grafische rekenmachine. Hij gebruikte dit probleem om de kracht van de differentiaalrekening aan te tonen. Doe hem dit na.

4 Wat verandert er, als de lengte van het linker touwtje niet 0,4 m is maar a m?

5 Zoals gezegd gebruikte l'Hôpital dit probleem om het voordeel te demonstreren van de differentiaalrekening. De meetkundige oplossing is inderdaad vrij lastig. Het volgende plaatje biedt enkele aanknopingspunten.



6 Antwoorden

1 Een klassiek probleem

1 **a.**
b. opp(A) = $4\frac{3}{4}$, opp(E) = 9, opp(D) = 16, opp(F) = $22\frac{3}{4}$, opp(C) = $24\frac{3}{4}$ en opp(B) = 25 (in cm^2).
c. Bijvoorbeeld een rechthoek van $9\frac{3}{4}$ bij $\frac{1}{4}$ cm. De oppervlakte is dan 2.44 cm^2.
d. Nee, het vierkant heeft de grootste oppervlakte, zoals blijkt uit de volgende pagina's.

2 **a.** (10+*iets*)(10-*iets*) = 100 - $iets^2$ en dit is nooit meer dan 100.
b. 625

3 **a.**
b. De grafiek van de oppervlaktefunctie is een parabool. De top hiervan ligt boven het snijpunt van de twee lijnen. Kennelijk wordt de optimale oppervlakte aangenomen als de lengte en de breedte gelijk zijn.
c. Als de lengte toeneemt, neemt de breedte af. De oppervlakte is maximaal als lengte en breedte gelijk zijn.

4 **a.** Als interval voor x is [0,8] geschikt. Voor y: [0,20].
b. De vergelijking van de kromme die door alle toppen gaat is $y = x^2$.

5 **a.** Als hoogte = 3, dan is de optimale inhoud $60\frac{3}{4}$ voor lengte = breedte = $4\frac{1}{2}$.
b.

z	*inhoud*	*max voor x*	*max inhoud*
1	$1 \cdot x \cdot (11 - x)$	5,5	$1 \cdot 5{,}5^2 = 30{,}25$
2	$2 \cdot x \cdot (10 - x)$	5	$2 \cdot 5^2 = 50$
3	$3 \cdot x \cdot (9 - x)$	4,5	$3 \cdot 4{,}5^2 = 60{,}75$
4	$4 \cdot x \cdot (8 - x)$	4	$4 \cdot 4^2 = 64$
5	$5 \cdot x \cdot (7 - x)$	3,5	$5 \cdot 3{,}5^2 = 61{,}25$
6	$6 \cdot x \cdot (6 - x)$	3	$6 \cdot 3^2 = 54$
7	$7 \cdot x \cdot (5 - x)$	2,5	$7 \cdot 2{,}5^2 = 43{,}75$
8	$8 \cdot x \cdot (4 - x)$	2	$8 \cdot 2^2 = 32$
9	$9 \cdot x \cdot (3 - x)$	1,5	$9 \cdot 1{,}5^2 = 20{,}25$
10	$10 \cdot x \cdot (2 - x)$	1	$10 \cdot 1^2 = 10$
11	$11 \cdot x \cdot (1 - x)$	0,5	$11 \cdot 0{,}5^2 = 2{,}75$

c.
d. Bij een gegeven waarde van z is de inhoud maximaal als x en (12-z-x) gelijk zijn, dus als $z = 12-2x$. De inhoud is dan gelijk aan $z \cdot x^2 = x^2 \cdot (12-2x)$. De kromme met vergelijking $y = x^2 \cdot (12-2x)$ gaat dus door alle toppen.
e. De maximale inhoud is 64.

6 **a.** De factoren 3 en 4 zijn beide veranderd in $3\frac{1}{2}$. Omdat bij een gelijke som het produkt maximaal is bij 'eerlijk verdelen', is het tweede produkt groter.
b. Door de factoren 4 en 5 beide te veranderen in $4\frac{1}{2}$.
c. $\left(\frac{18}{5}\right)^5$ » 604,7

7 Een leerling heeft de cijfers x_1, x_2, x_3 en x_4 gehaald, met gemiddelde m. Dan is de som van de vier cijfers gelijk aan $4m$. Het produkt is dan maximaal gelijk aan m^4, en de vierdemachtswortel hieruit is hoogstens m. Conclusie: het nieuwe systeem is nooit gunstiger dan het oude.

2 Waar komt het station?

1 **a.** $AS+BS = 20.6$
b. $AS+BS = 23$
c. $BS = \sqrt{100 + x^2}$ en $AS = \sqrt{(12 - x)^2 + 25}$
d. S ligt op ongeveer 2.77 km in de richting van A vanuit positie (2). $AS+BS$ is dan ongeveer 20.8 km.
e. Kwadrateren van de afstanden geeft: $100+x^2 = (12-x)^2 + 25$. Haakjes wegwerken: $24x = 69$.
Dus $x = \frac{69}{24} = 2{,}875$

f. Door de middelloodlijn van A en B met de spoorlijn te snijden.

2 **a.** De minimale waarde van y_3 is ongeveer 19.2 voor x=8.
b. De verhouding AS:BS is 1:2.

3 Neem bijvoorbeeld AC=100. Dan ligt de optimale plaats van het station midden tussen C en D. AS en BS verhouden zich dan inderdaad als AC en BD.

4 **a.** $y_1'(x) = \frac{x}{\sqrt{100 + x^2}} = \frac{SD}{BS}$ en $y_2'(x) = -\frac{(12 - x)}{\sqrt{(12 - x)^2 + 25}} = -\frac{CS}{AS}$

b. Als $y_1'(x) = -\ y_2'(x)$, dan geldt dat $\frac{DS}{BS} = \frac{CS}{AS}$.
c. $\frac{DS}{BS}$ is gelijk aan de cosinus van $-DSB$, en $\frac{CS}{AS}$ is de cosinus van $-CSB$.

Als beide cosinussen gelijk zijn, zijn de hoeken ook gelijk.

5 **a.** S is het snijpunt van $A\underline{B}$ met de spoorlijn.
b. Volgens de driehoeksongelijkheid geldt dat $AS'+S'\underline{B} < A\underline{B} = AS + S\underline{B}$, dus S' kan de optimale positie niet zijn.
c. Zie **b.**
d. ACS en $\underline{B}DS$ zijn gelijkvormige driehoeken.

6 **a.** De optimale plaats van S ligt op ongeveer $4\frac{1}{2}$ km van D.
b. Noem het aantal inwoners van A bijvoorbeeld n. Dan is $y_3 \quad n$ het totaal aantal kilometers dat afgelegd wordt als alle inwoners van beide stadjes een maal naar het station gaan.
c. De cosinus van $-DSB$ is het dubbele van die van $-CSB$.

3 Optimaliseren van omtrek, oppervlakte en inhoud

1 De oppervlakte is gelijk aan $x(16\text{-}2x)$. Zowel op de analytische manier als met de grafische rekenmachine vinden we: de oppervlakte is maximaal 32 als $x = 4$.
Meetkundige oplossingen worden gevonden door te spiegelen in de lijn PQ of in de lijn door R loodrecht op PQ.
Na spiegeling in de lijn PQ ontstaat een rechthoek waarvan de omtrek 32 is, en de zijde $2x$. . Volgens hoofdstuk 1 is de oppervlakte daarvan optimaal als het een vierkant is, dus als $x = 4$.

2 **a.** De minimale waarde van y_3 is 10 voor $x = 5$.
b. Als de ene zijde van de rechthoek x heet, is de andere zijde gelijk aan $\frac{25}{x}$.

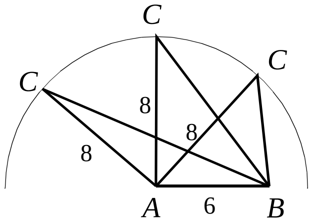
De halve omtrek is dan $x + \frac{25}{x}$. Dit is minimaal als $x = 5$, en dan is de rechthoek een vierkant.

3 Voor de inhoud I geldt: $I = x \quad u \quad w = x \quad \frac{x}{2} \quad (120 - 3x)$

De optimale inhoud is ongeveer 14222 voor $x = 26.7$ en $w = 40.0$

Differentiëren geeft: $I'(x) = 120x - \frac{9}{2}x^2 = 0 \qquad x = 0 \qquad x = \frac{240}{9}$

4 **a.** De omtrek varieert van 16 tot 28.
b. Als f varieert van 0^o tot 180^o, dan beschrijft C een cirkel met straal 8 om A:



De hoogte van C boven de basis AB is maximaal 8 (als de hoek bij A 90^o is).
De maximale oppervlakte is dus $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24$.
c. De maximale oppervlakte is $\frac{1}{2} \cdot a \cdot b$.

5 **a.** Het snijpunt van PR en QS noemen we M. Dan is de afstand van elk van de punten P, Q, R en S tot M gelijk aan 1.
Dus liggen alle hoekpunten op een cirkel met middelpunt M en straal 1.
b. Stel $PS = x$. Dan geldt:
$SR = \sqrt{4 - x^2}$ en $Opp = x \quad \sqrt{4 - x^2}$ en $Omtrek = 2 \quad (x + \sqrt{4 - x^2})$.
c. Bij $x = 1.41$ is de oppervlakte maximaal 2 en de omtrek maximaal 5.6. Dit betekent dat de rechthoek een vierkant is.
d. Meetkundige verklaring: Punt S doorloopt een halve cirkel. De oppervlakte van PRS is maximaal als de hoogte van S boven PQ maximaal is. Dat is het geval als DPQS gelijkbenig is. Dan is $PQRS$ een vierkant.

6 **a.** De bodem heeft afmetingen x bij $2x$. Voor de hoogte h geldt dan: $h = \frac{18}{x^2}$.
De benodigde oppervlakte is dan:
$Opp = 2x^2 + 2 \quad 2x \quad h + 2 \quad x \quad h = 2x^2 + \frac{108}{x}$.
b. De minimale oppervlakte is 54 voor $x = 3$.

7 De lengte van de diagonaal in het grondvlak van de pyramide is 8 2. Hieruit volgt met Pythagoras dat de hoogte van de pyramide 4 2 is. We noemen de lengte van de zijde van de vierkante bodem van de balk x. Dan is de hoogte van het deel van de pyramide boven de balk gelijk aan $\frac{1}{2}\sqrt{2} \quad x$. De hoogte van de balk is dus $\frac{1}{2}\sqrt{2}\,(8 - x)$. De inhoud is dus $x^2 \quad \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad (8 - x)$. Met de grafische rekenmachine vinden we een optimale inhoud van ongeveer 53.5 bij een x-waarde van 53.5.
Differentiëren geeft een optimale inhoud van ongeveer 53.6 voor $x = \frac{16}{3}$.

8 De hoogte van de gearceerde driehoek noemen we y.
De schuine zijde is dan gelijk aan $\sqrt{x^2 + y^2}$.
Omdat $\sqrt{x^2 + y^2} + y = 21$, geldt dat $y = \frac{441 - x^2}{42}$.

De oppervlakte van de driehoek is gelijk aan $\frac{1}{2}xy$. De grafische rekenmachine geeft een optimale oppervlakte van ongeveer 42.4 voor $x = 12$.
Differentiëren van de oppervlakte functie geeft een optimale oppervlakte van $\frac{1}{2} \quad 7^2 \quad \sqrt{3}$ » 42,44 voor $x = \sqrt{\frac{441}{3}} = 7\sqrt{3}$ » 12,12 .

9 **a.** De inhoud is gelijk aan $x^2(10 - x)$.
b. Met de grafische rekenmachine: Na aflezen van het maximum van de grafiek van $f(x) = x^2 \cdot (10 - x)$, vind je ongeveer 148 cm^3.
Differentiëren van f geeft: $f'(x) = x \cdot (20 - 3x)$. Gelijkstellen aan nul en de vorm van de grafiek geeft een maximale inhoud voor $x = \frac{20}{3}$.
c. *Lengte* + *breedte* + *dubbele hoogte* = 20. Eerlijk verdelen geeft $x = x = 20 - 2x$. Dus $x = \frac{20}{3}$.

10 Bij opgave 6 zijn de GR-methode en de exacte methode geschikt.
Datzelfde geldt voor opgave 7.
Opgave 8 heeft wel een mooie meetkundige oplossing, maar die vind je waarschijnlijk niet zo makkelijk. Het voordeel van de exacte methode is hier, dat de ‘mooie’ uitkomsten hiervan je op het spoor van de meetkundige oplossing kunnen zetten.
Bij opgave 9 vormt het ‘eerlijk-verdeel-principe’ nog een extra mogelijkheid.

4 James Bond en de wet van Snellius

1 **a.** 30+20=50 minuten.
b. Ook 50 minuten.
c. De roeiafstand is dan $\sqrt{13}$ km. De totale tijd is dan $\frac{\sqrt{13}}{6} \quad 60 + \frac{2}{12} \quad 60 = 46$ minuten.
Een tijdwinst van ongeveer 4 minuten dus.

2 **a.** $y_1 = \quad (x^2 + 9)/6$
$y_2 = (4 - x)/12$
$y_3 = y_1 + y_2$
b. Hij moet op ongeveer 1.77 km van punt A aan land gaan. Differentiëren geeft: $x = \sqrt{3}$ km.
c. De benodigde tijd is dan ongeveer 46 minuten. Exact: $15\sqrt{3} + 20$ minuten.

3 **a.** $\tan(x) = \frac{AB}{3}$ en $\cos(x) = \frac{3}{RB}$.

Hieruit volgt: $RB = \frac{3}{\cos x}$ en $BS_{38} = 4 - 3 \quad \tan x$.

De totale tijd is dan $\frac{1}{2\cos x} + \frac{1}{3} - \frac{\tan x}{4}$

b. Uit de grafiek lees je af dat de optimale waarde voor *x* ongeveer 30° is.
c. Nee. In de formule voor de totale tijd verandert slechts het getal 1/3.
Bij het differentiëren valt dit getal echter toch weg.
De snelste route naar een verder gelegen paal heeft dus dezelfde landingsplaats.

4 a. De totale tijd is gelijk aan $\dfrac{\sqrt{x^2+9}}{v_1} + \dfrac{4-x}{v_2}$.

We stellen de afgeleide gelijk aan 0: $\dfrac{1}{v_1} \cdot \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}} - \dfrac{1}{v_2} = 0$.

Dan volgt: $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}} = \dfrac{v_1}{v_2}$.

Anderzijds geldt: $\sin\alpha = \dfrac{AB}{RB} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$

b. Dat $v_1 > 0$ spreekt voor zich.
Verder is ook vanzelfsprekend dat Agent 007 ergens tussen *A* en S_{38} aan land moet gaan. Als hij rechts van S_{38} zou landen, maakt hij een omweg. Hoek *ARB* is dus maximaal als *B* het punt S_{38} is. In dat geval is sin*x* gelijk aan 4/5, waaruit volgt dat $v_1 \le 0{,}8 \cdot v_2$.

5 a. $RB = \sqrt{9+x^2}$ en $BT = \sqrt{9+(4-x)^2}$. De totale tijd is gelijk aan $\frac{RB}{6} + \frac{BT}{12}$ uur.
Met behulp van de grafische rekenmachine vinden we: $x \approx 1{,}13$.

b. De totale tijd is gelijk aan $\dfrac{\sqrt{9+x^2}}{v_1} + \dfrac{\sqrt{9+(4-x)^2}}{v_2}$.

Differentiëren en gelijk aan 0 stellen leidt tot:

$\dfrac{x}{\sqrt{9+x^2} \cdot v_1} = \dfrac{(4-x)}{\sqrt{9+(4-x)^2} \cdot v_2}$, dus $\dfrac{AB}{RB \cdot v_1} = \dfrac{BS38}{BT \cdot v_2}$.

Omdat $\dfrac{AB}{RB} = \sin\alpha$ en $\dfrac{BS38}{BT} = \sin\beta$ volgt nu dat $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{v_1}{v_2}$.

6 a. De situatie is analoog aan die van opgave 5. De voortplantingssnelheden zijn ditmaal 3.10^8 en 2.10^8 in plaats van 6 respectievelijk 12.

b. *A'B* noemen we *x*. Dan: $AB = \sqrt{1+x^2}$ en $BC = \sqrt{1+(1-x)^2}$.
De tijd die nodig is om van *A* naar *C* te komen, is gelijk aan

$\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{3 \cdot 10^8} + \dfrac{\sqrt{1+(1-x)^2}}{2 \cdot 10^8}$.

Op een vergelijkbare manier als bij opgave 5 vinden we dat $x \approx 0{,}62$.
Dat de verhouding tussen de beide sinuswaarden gelijk is aan die van de voortplantingssnelheden, volgt eveneens uit opgave 5.