maart 1990

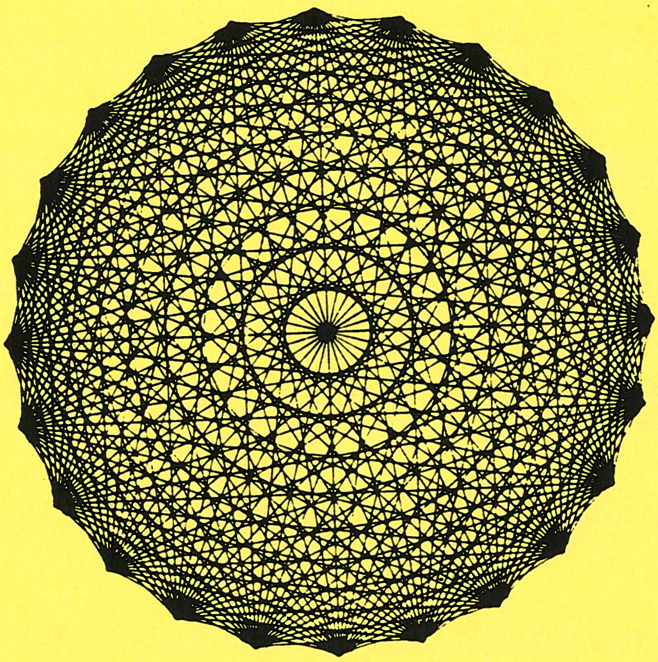
experimentele versie

W 12 16

Freudenthal instituut
Oerarchief

Combinatoriek en Voorspellen

Docentenhandleiding



**Combinatie-
Winstgrafiek**

Publikatie van het team W12-16
onder verantwoordelijkheid van de
Commissie Ontwikkeling Wiskundeonderwijs

ontwerpers: Gerrit van den Heuvel en Heleen Verhage i.s.m. Hans Krabbendam.

Deze publikatie is te bestellen bij
Instituut voor Leerplanontwikkeling (SLO), Enschede (053-840840)
onder vermelding van AN-nummer 3.315.6169

Combinatoriek en voorspellen docentenhandleiding

Dit pakket is onderverdeeld in twee hoofdstukken, met elk een eigen thematiek:
1. Tellen van allerlei combinaties.
2. Toekomstigheden in een boomdiagram.

Elk hoofdstuk start met een introducerend werkblad, waarmee de problematiek wordt aangekaart. De leerling probeert daar via zelf puzzelen aan de opdracht, haar of zijn oplosmanier te construeren. Vervolgens worden één of meer oplosmanieren uitgewerkt als voorbeeld. Deze kunnen worden vergeleken met de manieren, die de leerlingen zelf hebben geproduceerd. Het is niet de bedoeling, dat de beschreven oplosmanier als verplicht wordt voorgeschreven, alternatieve methoden zijn uitdrukkelijk toegestaan. Wel kan de beschreven oplosmanier dienen, als 'rugdekking' voor de leerling bij de serie oefenopgaven, waarmee elke module wordt afgesloten.
Het pakket bevat geen samenvatting. Daarvoor kunnen de uitgewerkte oplosmanieren dienst doen.
Er is gestreefd naar variatie in de aanbieding. De eerste module werkend vanuit een brede open opdracht, de tweede startend met een veel geslotener vraag. Dit vanuit de idee, daarmee verschillende groepen leerlingen aan te spreken.
Het pakket bevat een aantal specifieke vaardigheden, waarmee de leerling kennismaakt. Toch zijn de algemenere doelen hier minstens zo belangrijk:

- systematische aanpak
- werken met een model
- logisch redeneren en tellen

Tournooi

Achtergrondidee:

Eigen produktie , waarin de leerlingen hun ideeën en aanpakken kwijt kunnen. Het betreft een voorstelbare situatie, die naar gelang de eigen belangstelling kan worden ingevuld. De opgave vraagt ook enige creativiteit in de uitwerking, waarbij andere dan alleen mentale activiteiten een rol spelen. Belangrijk is verder, dat er gewerkt wordt aan het zelf modelleren van een wat complexere probleemsituatie.

Voor de docent:

Maak de situatie voorstelbaar via een inleidend klassegesprek. Geef daarin aan, wat er ongeveer als eindprodukt van de leerlingen wordt verwacht. Bepaal zelf de grootte van de groepjes waarin wordt gewerkt. Dit kan per klas verschillen, de ene klas kan daarin wat meer aan dan de andere. Geef bij de uitwerking van de opdracht veel ruimte voor de leerling. Het is echt de bedoeling, dat ze het zelf uitpuzzelen, ook al lijkt dat in het begin een hele klus. Probeer, als er vragen zijn, niet direct de oplossing te geven, maar laat de vragenstellers meedenken en meezoeken naar de oplossing.

De opdracht zelf, kan op heel diverse manieren worden uitgevoerd. De leerlingen nemen daarin zelf het voortouw.

Een schaaktournooi

Achtergrondidee:

De leerling maakt kennis met een aantal oplosmanieren voor dit probleem en de nog volgende vragen. Naast de geschetste manieren blijven andere denkbaar en toegestaan. Naast de manieren zelf, is ook gepoogd om de beschrijving van een en ander op papier netjes aan te geven. Dit behoeft in de praktijk enige aandacht. Verder zijn informatieverwerking en reflectie de belangrijkste vaardigheden die hier aan bod komen.

Voor de docent:

Een manier die wel werkt voor deze opgave is, om de leerlingen eerst wat zelf te laten ontdekken in 2- of 3-tallen. Daarna kunnen de verschillende manieren klassikaal aan de orde komen, waarbij de groepjes hun verhaal terug vertellen.

De stof bevat veel aanknopingspunten om verder op door te gaan. Bijvoorbeeld: hoe kom je aan een speelschema; eerst dubbel tellen en dan halveren, waar wordt het gebruikt, etc. Ook de voor- en nadelen van de diverse manieren kunnen ter sprake komen.

Verwerkingsopdrachten bij combinaties

Achtergrondidee:

Op de eerste plaats gaat het hier om te oefenen met de stof, in diverse situaties. We starten heel eenvoudig, om de draad wat te pakken te krijgen. Vervolgens komen variaties aan bod. De riscowedstrijden (6.), waarbij het gaat om de uitwedstrijden van de genoemde clubs, breidt uit naar een situatie, waarbij twee verschillende groepen worden gekoppeld: alle clubs aan de risicoclubs. Daarmee wordt de tournooigraaf niet meer bruikbaar. De overige methoden echter wel. Prima bespreekpunt hier is de kosten die met risicowedstrijden gemoeid zijn. Het totaalbedrag is indrukwekkend!

Bij de verbindingslijnstukken is het zaak om de parallel te trekken met de tournooigraaf. Dat de omtreklijnstukken niet zijn getekend, doet daar niets aan af.

Het vraagstuk over de klerencombinaties, brengt weer twee verschillende verzamelingen in beeld. Het modelleren is hier best lastig voor de leerling. In het tweede vraagstuk (8b.) wordt het woord kans gebruikt. Dit preludeert een beetje op het tweede hoofdstuk. Het is niet de bedoeling, om hier uitvoerig in te gaan op de diverse kansbegrippen uit de wiskunde. De leerlingen mogen intuïtief te werk gaan. Daarbij komt dan vanzelf het opmerkelijke feit naar voren, dat alle 'rode situaties' te tellen zijn. Dat moet wel gebeuren hier. Bij de derde vraag (8c.) treedt het probleem op, dat een derde verzameling een rol gaat spelen. Een mogelijkheid om dit te omzeilen, is om uit te gaan van de combinaties uit 8a. en die te koppelen aan de vijf sokken. Maar een uitbreiding van de redenering van 2 naar 3 groepen, met een boom of uit het hoofd, ligt natuurlijk ook erg voor de hand.

Bij de correspondentiecub (9) komen we weer terug op de oorspronkelijke probleemstelling, maar dan toegepast in een andere context (9a, 9b). Met name het herkennen van de analogie is hier het probleem. Bij de laatste vraag splitst de zaak zich weer op in twee verzamelingen, die worden gecombineerd.

Het is belangrijk om je als docent te realiseren, dat na afloop van dit hoofdstuk, de leerlingen niet 'alles' over dit onderwerp weten. Wel moeten ze een goed idee hebben van de aanpak van systematisch en ordelijk werken bij telproblemen.

Voor de docent:

Het verdient aanbeveling om de leerlingen echt zelf, individueel of in groepjes, aan de opgaven te laten werken. Probeer bij de aanwijzingen die U geeft, steeds terug te grijpen op de oplosmanieren, die zijn behandeld in het eerste deel. Laat de leerling zelf aangeven, welke manier hij of zij wil beproeven.

De uitwerking van de vragen op papier moet punt van aandacht zijn bij deze opgaven. Dit vraagt weliswaar wat werk van de leerling, maar het helpt uitdrukkelijk, om de stof beter onder de knie te krijgen.

Omdat er sprake is van verschillende oplosmanieren, kan het zinvol zijn, om uitwerkingen met die verschillende manieren voor de leerling ter inzage te hebben.
Interessant punt voor een bespreking achteraf met de klas, kan zijn om voor de verschillende opgaven nog eens na te gaan welke oplosmanieren kunnen (4. alles; 5. alles; 6. 1/2/3/5; 7. 2/3/4; 8a. 2/3/5; 8b. 2/3/5; 8c. 2/3; 9a. alles; 9b. alles; 9c. 2/3/5).Verder is het onderscheid alles binnen één verzameling vs. werken met verschillende verzamelingen van belang.

Wie gaat er verder?

Achtergrondidee:

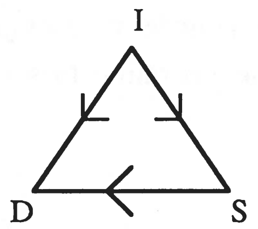
Na de inleidende vragen komt direct het thema aan de orde: bomen en voorspellen. Kern is, dat ten aanzien van een toekomstige situatie de mogelijkheden op een rij worden gezet, hier veelal in een boom, waarna bekeken wordt, wat dit overzicht oplevert ten aanzien van die toekomst. Geen theoretische kans, maar veeleer een reflectie op het model en de onderliggende factoren. Vandaar ook, dat we bewust gekozen hebben voor ongelijkwaardige alternatieven in de boom. Kern van dit hoofdstuk is, naast het in kaart brengen van de mogelijkheden, dat twee factoren een hoofdrol spelen bij voorspellingen: het aantal mogelijke alternatieven en de waarde van deze alternatieven ten opzichte van elkaar. We werken hier verder steeds kwalitatief, kwantificering is nog niet aan de orde.

Voor de docent:

Bespreek tevoren dat we hier te maken hebben met opgaven, waarin het gemotiveerd kiezen een belangrijke rol speelt: soms kun je twee geheel verschillende antwoorden toch waarderen, omdat ze beiden goed onderbouwd zijn. De grafen zelf vragen wel wat denkwerk, maar zijn op zich wel te volgen voor de leerling.

Kanttekeningen bij de vragen:

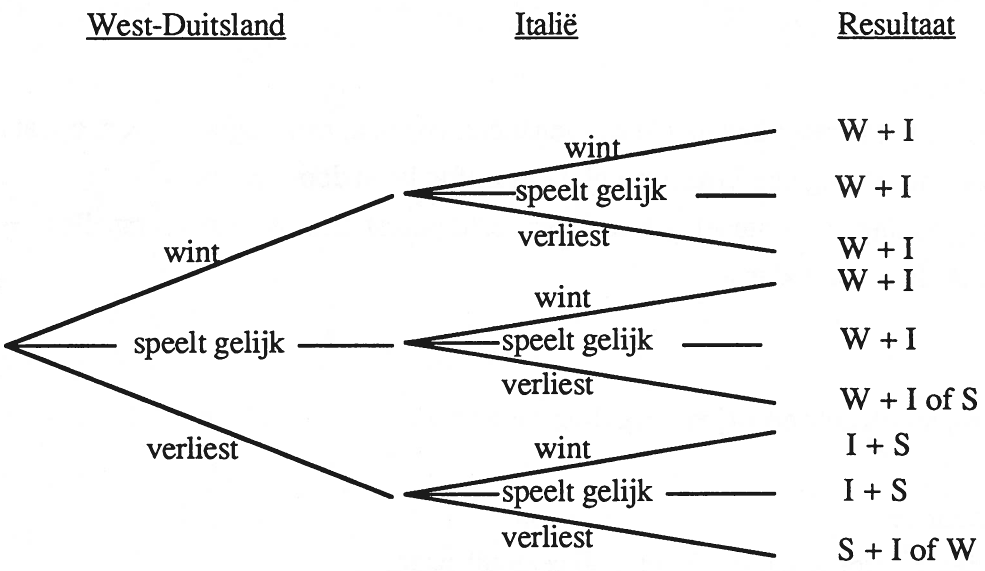
2. Volgens de graaf, wint Italië van Denemarken en West-Duitsland van Spanje. Het is goed om het waarom rustig door te nemen met de leerlingen. Er zit wel wat verrassends in: Italië wint van Spanje, Spanje van Denemarken, dus Italië van Denemarken (als alles conform het voorafgaande verdergaat). Maar niet dus Denemarken wint van Italië.
   In de graaf: Geen cycles!



Geef ook ruimte in de bespreking voor andere factoren. dat is hier uitdrukkelijk de bedoeling om mee te nemen. Geef er wel bij aan, dat bijvoorbeeld de vorm van de dag niet in de graaf te zien is, hoewel die wel kan meespelen in de praktijk.

3. Spreekt voor zich (winst + 2pt, gelijkspel + 1pt, verlies + 0 pt)

6.- 9. Het plaatje moet er zo uit komen te zien:



Bij 7. is het de bedoeling, dat de leerlingen zien, dat Spanje en Denemarken vanzelf worden meegenomen in het overzicht. Let er verder op, dat het tekenen van een boom technisch gezien voor veel leerlingen een hele klus is. Help ze zonodig een beetje om er iets moois van te maken.

10. Het mag duidelijk zijn,dat hier het woord kansen wordt gebruikt zoals in het spraakgebruik ('Nederland heeft nog een theoretische kans om zich te plaatsen'). Zij het dan, dat achtergronden aan het licht komen middels de boom.
Wat weten we: 100 % zeker is, dat Denemarken zich niet plaatst.Verder heeft italië, en in iets mindere mate West-Duitsland, een goede kans om zich te plaatsen. Spanje's kans is zo op het oog wat kleiner, maar opgemerkt kan worden, dat Spanje wel nog 'het lot in eigen hand' heeft: als ze winnen van West-Duitsland, dan zijn ze er door.

Zorg ervoor dat het onderscheid zeker en meer en minder waarschijnlijk boven tafel komt, dan heeft de opgave al prima gewerkt. Overigens ook hier ruimte toestaan voor andersoortige factoren die de leerlingen eventueel aandragen.

Wie ging er verder?

Achtergrondidee:

Hier hebben we minder met een oplosmanier van doen, dan met een aantal aandachtspunten. Er staan er hier een aantal bij elkaar, onzes inziens de meest belangrijke. Toch gaat het niet alleen om die aandachtspunten. Uitdrukkelijk wordt de afloop gemeld, om te laten zien, dat er iets bijzonders aan de hand is met dat voorspellen: vooraf gaat het om een scala van mogelijkheden, die elk kans maken, achteraf heeft er maar één het gehaald. Dit is een lastige notie voor de leerling, die aandacht vraagt.

Voor de docent:

De tekst moet worden behandeld en toegelicht. Hij staat hier opgeschreven, opdat de leerling er nog eens naar terug kan kijken, en niet om zelf te laten doorwerken.
Laat de leerlingen eventueel ook een voorbeeld voorstellen, waarin voorspellen een rol speelt en bespreek dit met de klas.

Verwerkingsopdrachten bij voorspellen en bomen

Achtergrondidee:

Gevarieerd oefenprogramma, waarbij centraal staan:
- bomen opzetten/resultaten scoren
- aantallen alternatieven overwegen
- relatieve waarde van de alternatieven beredeneren

Voor de docent:

Belangrijk is, dat de achterliggende modellen op papier komen en dat er geredeneerd wordt op basis van die modellen. Dit is echter niet het enige: voor sommige alternatieven zullen ook ervaringen van de leerlingen uit de praktijk een rol spelen. Bijvoorbeeld " ik vind blauw met zwart geen combinatie die je met goed fatsoen aan kunt trekken". Bespreek dit ook!

Kanttekeningen bij de vragen:

<u>Fleur</u>

12: 9 mogelijkheden

13: a. 5 keer; b. 2 keer

14: het eerste is waarschijnlijker.

<u>Een spelletje voor kleuters</u>

Probleem is, dat niet bekend is waar de verrassing ziet.

Bij 15. kun je een boom geven met takken 1 t/m 5, maar hoe moet het dan verder bij 16? Een oplossing is om één tak 'raak' en vier takken 'mis' te noemen, en verder af te zien van bekernummers. Of om te werken als in 18.

17: zoals het hier staat wel.

<u>Een gokje wagen</u>

Dit is een erg ingewikkelde materie om precies uit te zoeken. Belangrijke factoren zijn:

- Hoeveel prijzen tegenover het totaal aantal loten.
- De hoogte van de prijzen
- De prijs van een lot.

Een aantal dingen op een rij:

	Staatsloterij	Duitsland	Oostenrijk
aantal loten	2.000.000	1.000.000	125.000
aantal prijzen	1.005.020	478.857	68.860
hoogste prijs	*f* 500.000,-- (1x)	DM 4.000.000,-- (2x)	öS 50.000.000,-- (1x)
laagste prijs	*f* 10,-- (200.000 x)	DM 144,-- (30.000 x)	öS 1.400,- of minder (25.000 x)
prijs per lot	*f* 25,-	DM 144,-- per klasse dus DM 864,-- voor alle trekkingen.	*f* 224 per klasse dus *f* 1.344,-- voor alle trekkingen.

Conclusie: Staatsloterij: goedkoop, met veel kleine en weinig grote prijzen.

Andere twee duur (klassesysteem is heel verradelijkl), maar wel met hele grote prijzen.

N.B. Aardige bijkomstigheid: geldrekenen.

<u>Dobbelen</u>

22. De boom (36 takken) zonodig op een apart blad.

23/24: A: 11x B: 15x C: altijd, dus...

<u>Wie gaat er verder</u>

Bedoeling is om de doelsaldi buiten beschouwing te laten. Dan zijn de mogelijkheden:
Sovjet Unie + Oostenrijk 2x
Sovjet Unie + Oost-Duitsland 2x
Sovjet Unie + Turkije 1x
Sovjet Unie + Oostenrijk of Oost-Duitsland 2x
twee van de drie Sovjet Unie, Turkije, Oostenrijk 1x
twee van de drie Sovjet unie, Turkije, Oost-Duitsland 1x.
Turkije heeft het moeilijk, zeker ook gezien de zware tegenstander.

<u>Rapport</u>

Factoren die een rol kunnen spelen zijn bijvoorbeeld extra motivatie op het eind van het trimester c.q. het niet meer zien zitten. Ook afronden voor het rapport speelt een rol. Hoe gebeurt het op uw school?

27: 16

28: 4,8 - 5,0 - 5,0 - 5,2 - 5,2 - 5,2 - 5,3 - 5,3 - 5,3 - 5,5 - 5,5 - 5,5 - 5,7 - 5,7 -5,8.

29: Hangt er sterk vanaf!