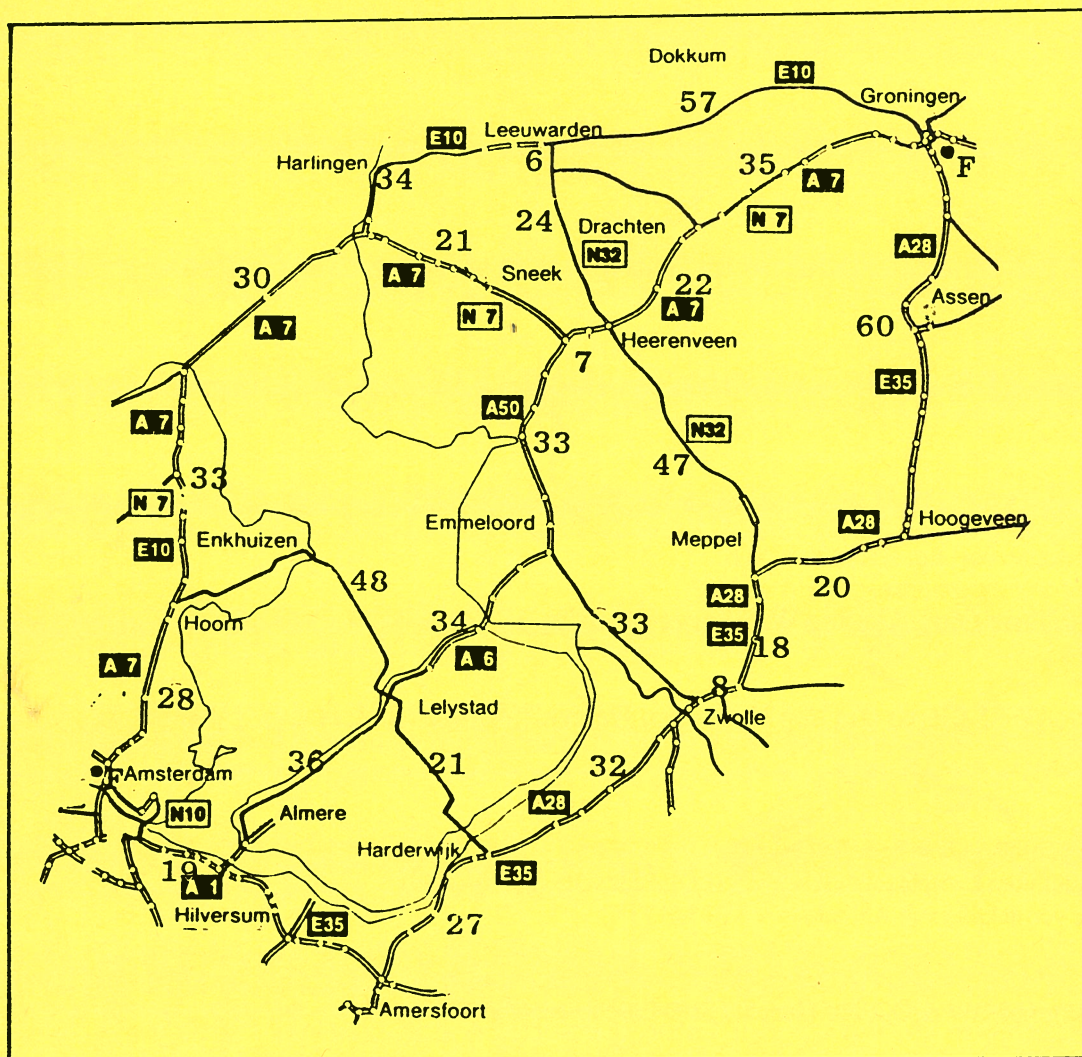




Freudenthal instituut

Routeproblemen

Leerlingenmateriaal



Publikatie van het team W12-16
onder verantwoordelijkheid van de
Commissie Ontwikkeling Wiskundeonderwijs

ontwerpers: Gerrit van den Heuvel en Heleen Verhage i.s.m. Hans Krabbendam.

Deze publikatie is te bestellen bij
Instituut voor Leerplanontwikkeling (SLO), Enschede (053-840840)
onder vermelding van AN-nummer 3.315.6173

© Vakgroep OW & OC, RU Utrecht / SLO Enschede, maart 1990

Inhoudsopgave

Vooraf

Hoofdstuk 1 - De Kortste weg

Hoofdstuk 2 - Op reis naar het Noorden

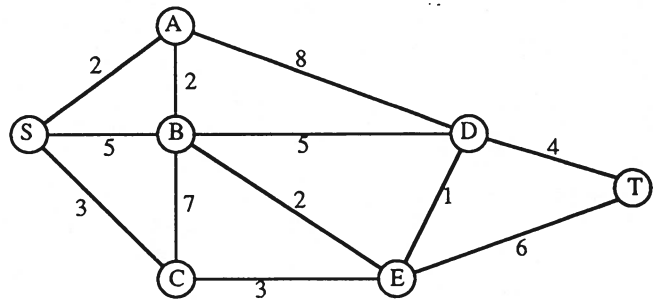
Hoofdstuk 3 - Rondreizen

Slotopdracht - Jeugdherbergen

Vooraf

Een *graaf*, wat was dat ook alweer?

Een graaf is een schema met *punten* en *verbindingen* daartussen. Bij de verbindingen kunnen getallen staan, in dat geval heet zo'n graaf ook wel een *netwerk*. De getallen kunnen afstanden zijn, maar bijvoorbeeld ook tijd of kosten.



In dit boekje komen twee typen problemen aan bod:

- * Hoe vind je in een netwerk de kortste weg tussen twee punten?
- * Hoe vind je in een netwerk de kortste rondreis langs alle punten?

Deze twee vragen lijken veel op elkaar.

De antwoorden die te geven zijn, zijn echter heel verschillend. Hoe dat precies zit, daar gaat dit boekje over.

Een voorproefje:

- >> Probeer in het netwerk hierboven de kortste weg van S naar T te vinden. Hoe lang is die weg?
- >> Kun je ook een zo kort mogelijke rondreis langs de zeven plaatsen vinden? (Dus eindigen in de plaats waar je begonnen bent.) Hoe lang is die rondreis?



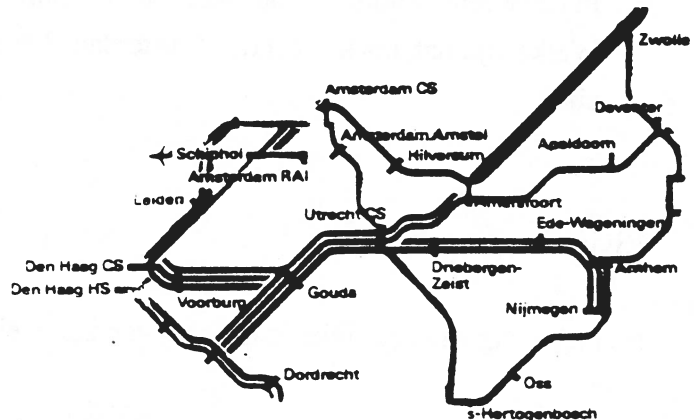
Hoofdstuk 1 - Kortste weg

Dit hoofdstuk gaat over 'kortste weg problemen'. Dat wil zeggen over de vraag hoe je het snelste van de ene plaats naar de andere kunt komen in een graaf. Het kan gaan om de kortste afstand, maar ook om de kortste tijd of het minste geld. Als de graaf niet al te ingewikkeld is, kun je door proberen de kortste weg meestal wel vinden. Maar er bestaat ook een voorschrift, dat gegarandeerd altijd het goede antwoord geeft.

Spoorkaart van Nederland

Hiernaast zie je een stukje van de spoorkaart van Nederland.

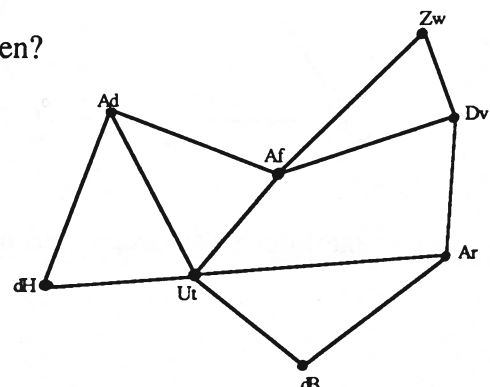
In de afstandstabel hieronder staan de afstanden tussen de belangrijkste Intercity stations van dit kaartje.



	Af	Ad	Ar	dB	dH	Dv	Ut	Zw
Amersfoort	-							
Amsterdam	45	-						
Arnhem	51	79	-					
Den Bosch	69	87	62	-				
Den Haag	81	63	118	108	-			
Deventer	58	113	45	107	139	-		
Utrecht	21	39	58	48	60	79	-	
Zwolle	66	111	76	135	147	31	87	-

- Hoe ver is het van Zwolle naar Den Bosch?
 - Er zijn verschillende routes mogelijk van Zwolle naar Den Bosch. Welke?
 - Welke route heeft de NS gekozen? Hoe kun je dat afleiden uit de tabel?
- Het spoorboekje geeft eigenlijk een halve afstandstabel, alleen de 'linkeronderdriehoek'.
Waarom zal dat gedaan zijn?
 - Hoe kun je de 'rechterbovendriehoek' erbij maken?

Een graaf met de belangrijkste Intercity stations:



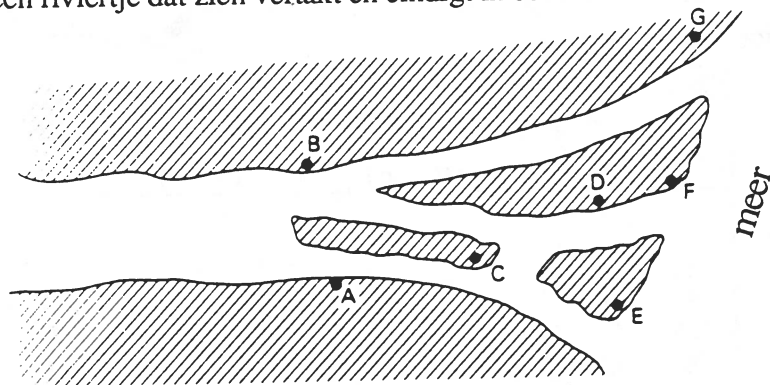
- Schrijf de bijbehorende afstanden uit de tabel bij de verbindingen.

Bij opgave 3 heb je lang niet alle getallen uit de afstandstabel gebruikt.

4. Wat bevat meer informatie, de tabel of het netwerk (graaf met afstandsgetallen)?
5. Leg uit hoe je de afstand Den Haag-Zwolle uit het netwerk kunt afleiden. Controleer of je antwoord klopt met de tabel.
6. In de tweede kolom van de tabel (Amsterdam) staan zes getallen. Daarvan zijn er twee fout. Welke zijn dat, als je weet dat Amsterdam-Utrecht en Amsterdam-Den Haag in elk geval goed zijn?

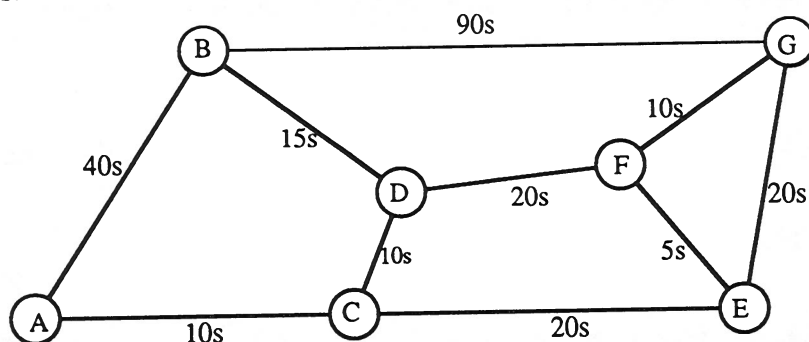
Rivier oversteken

Een tekening van een riviertje dat zich vertakt en eindigt in een meer:



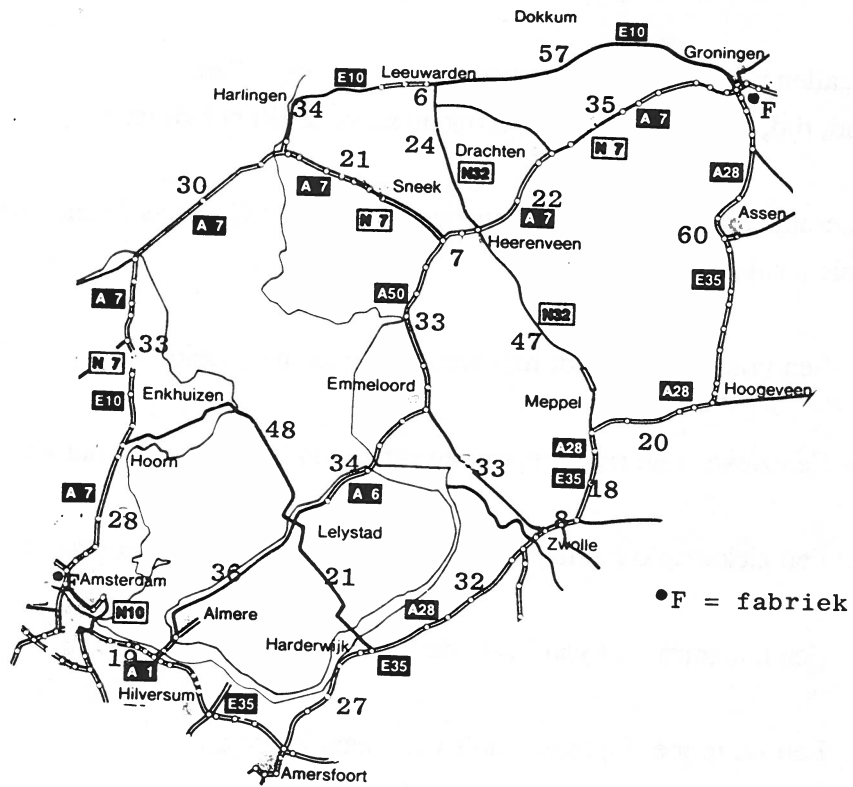
7. a. Er zijn een aantal doorwaadbare plaatsen.
Kun je een paar dingen bedenken die het oversteken makkelijk of moeilijk maken?

Een netwerk met de mogelijkheden om over te steken en de tijd (in sec) die daarvoor nodig is:



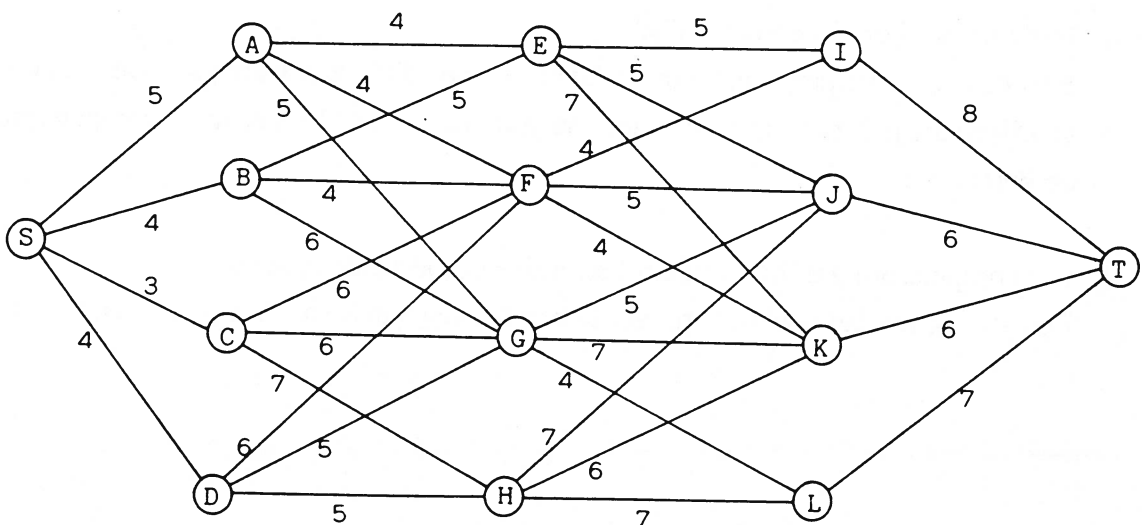
- b. Wat is de snelste weg van A naar G?

Machinefabriek



Een machinefabriek heeft twee vestigingen, één bij Groningen en één noordelijk van Amsterdam. Regelmatig rijden vrachtwagens met onderdelen van de ene fabriek naar de andere.

8. a. Wat is de kortste route tussen de twee fabrieken?
 b. Op zekere dag is de Afsluitdijk afgesloten wegens noodweer. Welke route zou je dan kiezen?
9. a. Kun je in het netwerk hieronder een weg van S naar T vinden met totale lengte 18?
 b. Probeer de langste weg tussen S en T te vinden (je moet wel steeds naar rechts gaan, dus niet terug).



Wat is belangrijk

De getallen in de netwerken kunnen van alles voorstellen: afstand, tijd, geld. Wat het belangrijkste is, verschilt per situatie.

10. Hieronder staan een aantal situaties beschreven. Geef steeds aan, wat jij denkt dat het belangrijkste is.
- a. Een vrachtwagen rijdt met verse groenten naar Oslo.
 - b. Een ziekenauto rijdt met een zwaargewonde patiënt naar het ziekenhuis.
 - c. Een ziekenauto brengt een patiënt met een gebroken heup weer naar huis.
 - d. Een telegram gaat van Rotterdam naar Sneek.
 - e. Een schip met Japanse auto's vaart naar Rotterdam.
 - f. Vier jongelui gaan samen op vakantie naar de Costa Brava.

Een strategie voor de kortste route

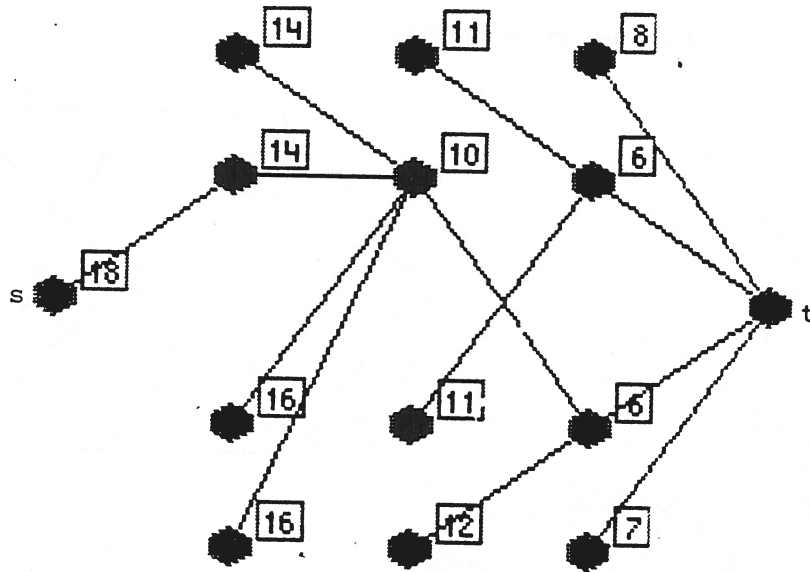
Als een netwerk wat groter wordt, is het een heel gepuzzel om de kortste route te vinden. Bovendien, hoe kun je *zeker weten* dat je de kortste route hebt gevonden? Eigenlijk is een *systematische aanpak* nodig. Zou er een methode zijn die altijd werkt en gegarandeerd het goede resultaat geeft?

Het antwoord op deze vraag is 'ja'.

Er is een computerprogramma om te laten zien hoe dit in zijn werk gaat. De methode is het beste te begrijpen als je het ziet gebeuren, kijk daarom met de hele klas naar het computerprogramma voor de kortste weg.

Het computerprogramma gebruikt hetzelfde voorbeeld als opgave 9. Een afdruk van het beeldscherm als de kortste weg van S naar T gevonden is:

De lengte van het kortste pad van s naar t via b = 18



f1 : stap voor stap; f2 : snel

11. a. Wat is de betekenis van de getallen op de schermafdruk?

Eigenlijk heeft het programma veel meer kortste wegen gevonden dan alleen van S naar T.

b. Welke kortste wegen nog meer?

12. In het programma werd van achteren naar voren gewerkt, van T terug naar S.

a. Zou het ook andersom kunnen, dus bij S beginnen?

b. Welke kortste wegen vind je dan?

Het voorschrift dat de computer uitvoert, is een voorbeeld van een *algoritme*.

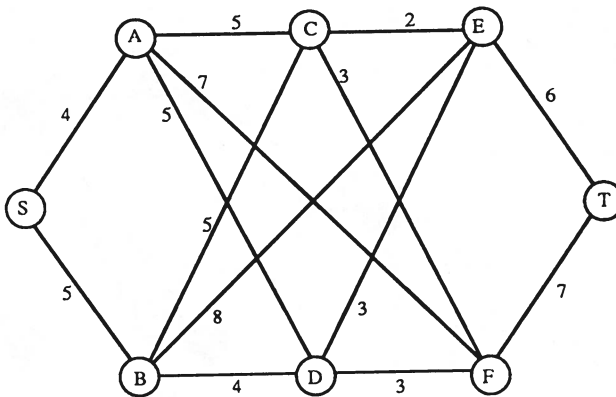
Een *algoritme* is een voorschrift met precies omschreven instructies dat gegarandeerd een bepaald resultaat geeft. Sommige algoritmen kunnen heel goed door computers uitgevoerd worden.

Daarvoor is natuurlijk wel een *computerprogramma* nodig.

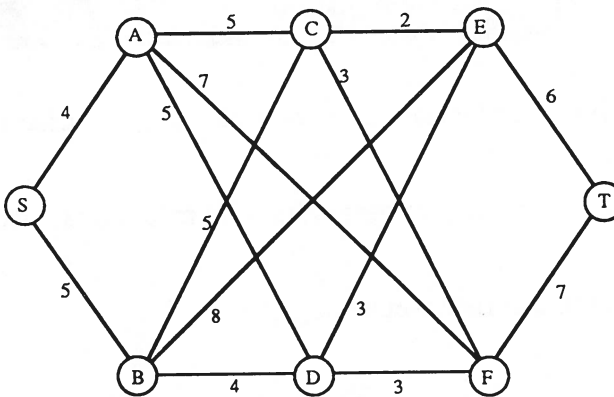
Het *kortste weg algoritme* kun je eventueel nog eens nalezen aan het eind van dit hoofdstuk.

Oefenen met het algoritme

13. a. Zoek de kortste weg in het netwerk.

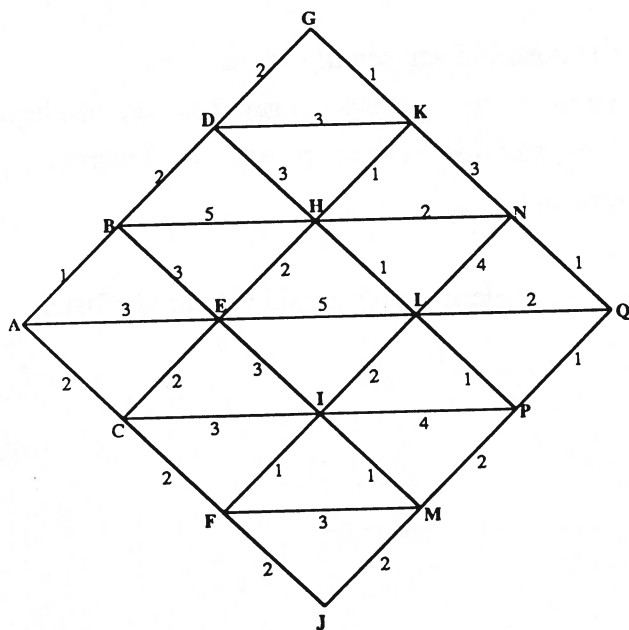


b. Zoek ook de langste weg.



14. De getallen stellen de kosten voor om van links naar rechts door het diagram te reizen.

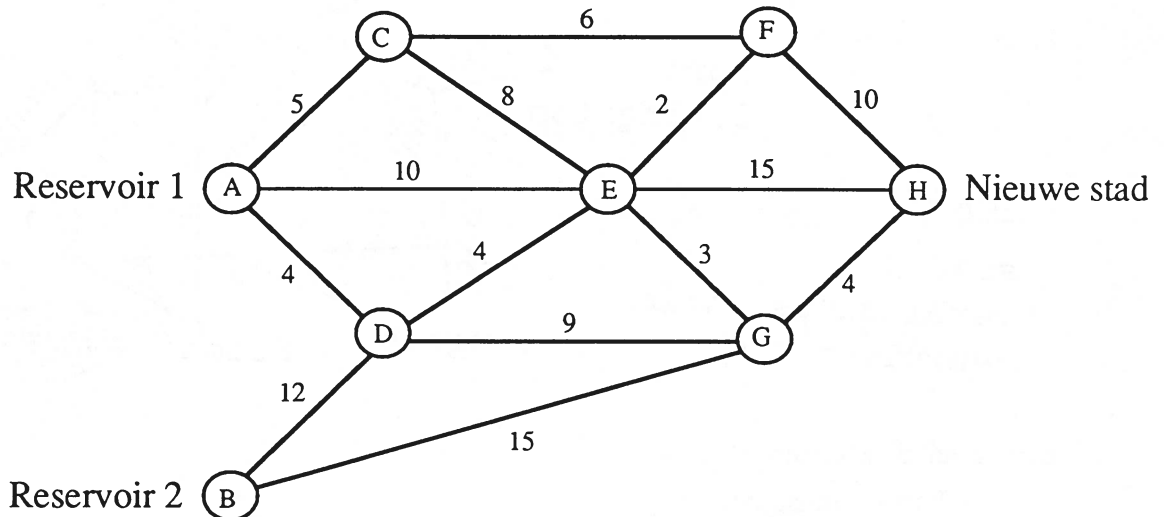
Zoek de goedkoopste weg van A naar Q en geef in het netwerk aan hoe die weg loopt.



Extra opgaven

Watervoorziening

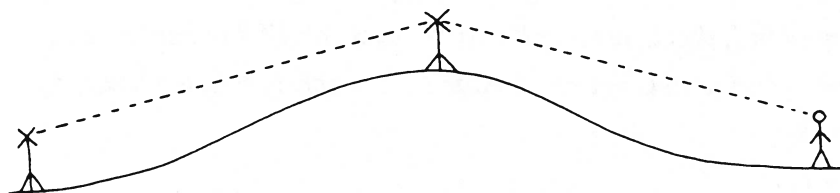
De watervoorziening voor een nieuwe stad (H) moet gebeuren via het aanleggen van een stelsel van pijpen vanuit reservoir 1 of 2. De kosten om deze pijpen te leggen tussen een aantal bestaande knooppunten staan hieronder aangegeven in miljoenen gulden. De pijpen geven de stroomrichting aan.



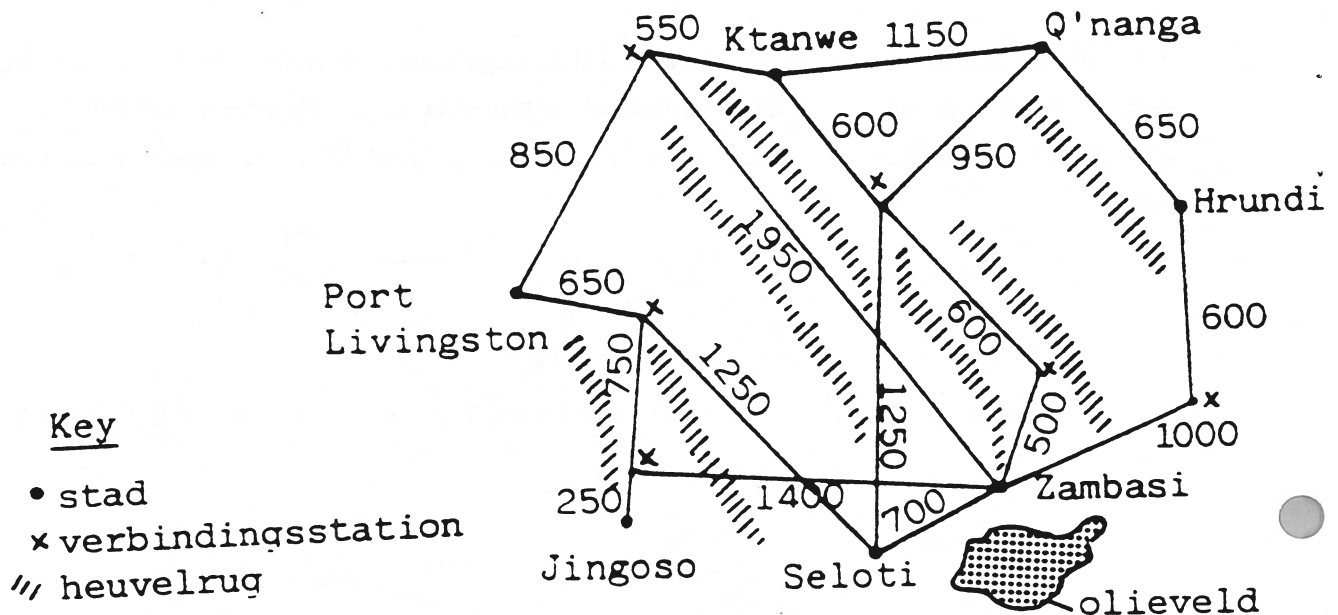
15. a. Wat is de beste keus, reservoir 1 of reservoir 2?
- b. Wat is het goedkoopste buizenstelsel om aan te leggen?

Straalverbindingen

De republiek Zingesi wil een deel van de opbrengsten van haar pas ontdekte olieveld investeren in een nieuw telefoonnet. Vanwege het ruige terrein worden geen kabels gelegd, maar werkt men met straalverbindingen. Deze verbindingen zijn alleen mogelijk tussen plaatsen waartussen geen grote obstakels zijn. Op de top van de heuvels zijn verbindingstations nodig, omdat de stralen niet door de heuvels heen kunnen.



Op de kaart hieronder staat het geplande netwerk. De getallen geven de tijd (in microseconde) die het kost om van de ene naar de andere plaats te telefoneren.



16. a. Zoek de kortste weg tussen:

- Port Livingstone en Hrundi
- Jingoso en Q'nanga
- Jingoso en Ktanwe.

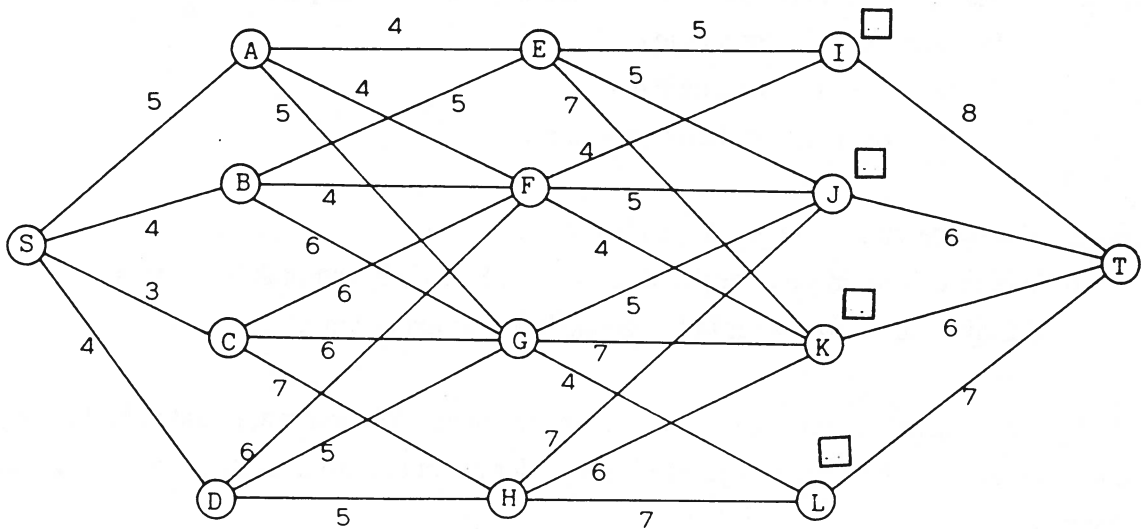
b. Bij elk verbindingstation (de kruisjes op de kaart) is 500 microseconden tijd nodig om het signaal door te geven. Hoe verandert je antwoord bij a. als je dit weet?

Het algoritme voor de kortste weg

In deze paragraaf kun je het algoritme voor de kortste weg nog eens nalezen. We bespreken het algoritme aan de hand van het voorbeeld van opgave 9.

Het is gebruikelijk om in een netwerk van achteren naar voren (van rechts naar links) te werken. De tussenresultaten worden in hokjes bij de knooppunten geschreven. De redenering gaat als volgt:

- stel je bent al in I, dan is het nog 8 naar T -->> schrijf 8 in het hokje bij I
- stel je bent al in J, dan is het nog 6 naar T -->> schrijf 6 in het hokje bij J
- idem voor K
- idem voor L



>> Schrijf de getallen in de hokjes bij I, J, K en L. Geef ook de verbindingen vanaf deze punten naar het eindpunt T een kleurtje.

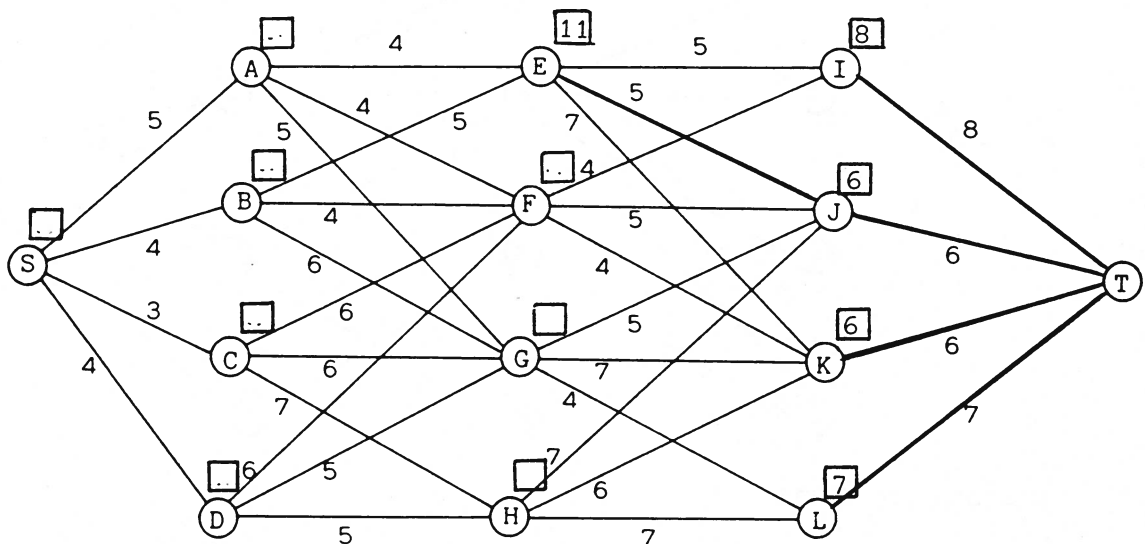
Nu komt de volgende stap:

- stel je bent al in E, hoever is het dan nog naar het eindpunt T?

Je kunt: over I met lengte $5 + 8 = 13$

over J met lengte $5 + 6 = 11$ <<-- de kortste, schrijf 11 in het hokje bij E en geef de verbinding EJ een kleurtje.

Het netwerk ziet er na deze stap zo uit:



- >> a. Welk getal moet er in het hokje bij F komen? Geef het bijbehorende traject een kleurtje.
 b. Doe hetzelfde voor de punten G en H.

Nu zijn de punten A, B, C en D aan de beurt.

- stel je bent al in A, hoever is het dan nog naar het eindpunt T?

Je kunt: over E, met lengte $4 + \dots = \dots$

over F, met lengte $4 + \dots = \dots$

over G, met lengte $5 + \dots = \dots$

>> a. Vul op de puntjes de goede getallen in.

- b. Welke van de drie mogelijkheden (over E, F of G) is vanuit A het kortste?

Schrijf de uitkomst weer in het goede hokje in het schema.

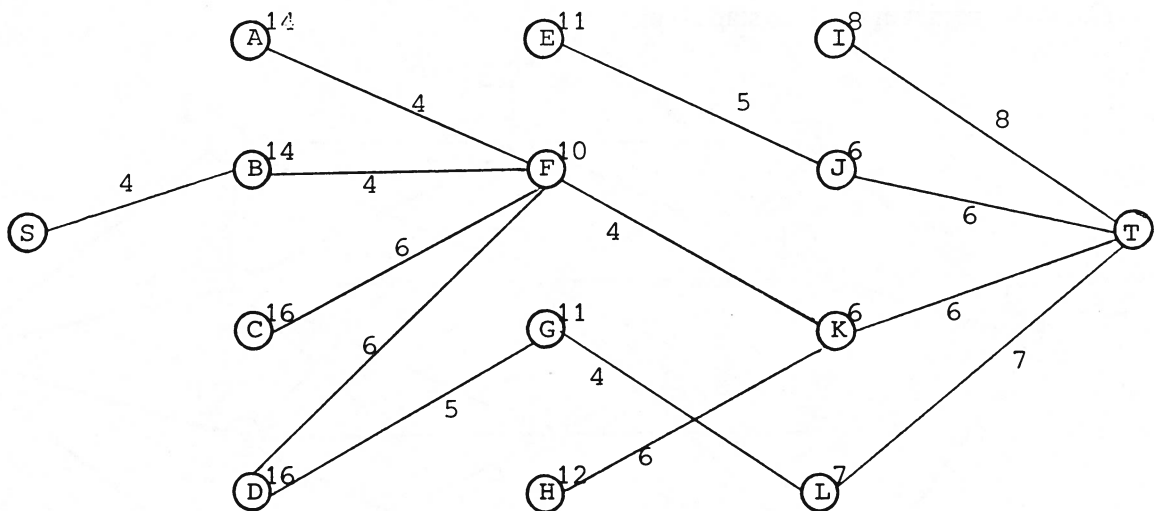
Zo kun je het schema van achteren naar voren helemaal doorwerken, totdat je bij het beginpunt S aankomt. Bij elke stap gebruik je steeds de eerder gevonden tussenresultaten die al in de hokjes staan.

>> a. Maak het schema verder af.

- b. Hoe lang is de kortste route van S naar T en langs welke punten gaat die?

Deze systematische aanpak geeft gegarandeerd het goede resultaat. Tenminste, als je geen fouten maakt. Helaas is een rekenfoutje of een verschrijving gauw gemaakt... Een voorschrift als dit, met precies omschreven instructies, is heel geschikt om door een computer gedaan te worden. Daarvoor is natuurlijk wel een *computerprogramma* nodig.

Hier zie je nog eens het eindresultaat:



Kortste weg SBFKT

Voor de duidelijkheid zijn de takken die voor de kortste weg naar T toch niet van belang zijn weggelaten. Alle wegen die zijn overgebleven, leiden nu naar T. Eigenlijk heb je niet alleen voor punt S, maar voor alle punten uit het netwerk de kortste route naar T gevonden. Dat is mooi meegenomen. Verder kun je zien dat er vanuit D twee kortste routes naar T zijn. Ze zijn allebei getekend.

Hoofdstuk 2 - Op reis naar het Noorden

Bij de kortste weg opgaven die je in het vorige hoofdstuk gemaakt hebt, was het netwerk steeds al gegeven.

In de praktijk is dat meestal niet zo. Je hebt wel allerlei gegevens, maar daar moet je zelf een netwerk bij maken. Je vertaalt de werkelijkheid dan in een *wiskundig model*.

Hoe het maken van zo'n wiskundig model verloopt, laten we zien in dit hoofdstuk.

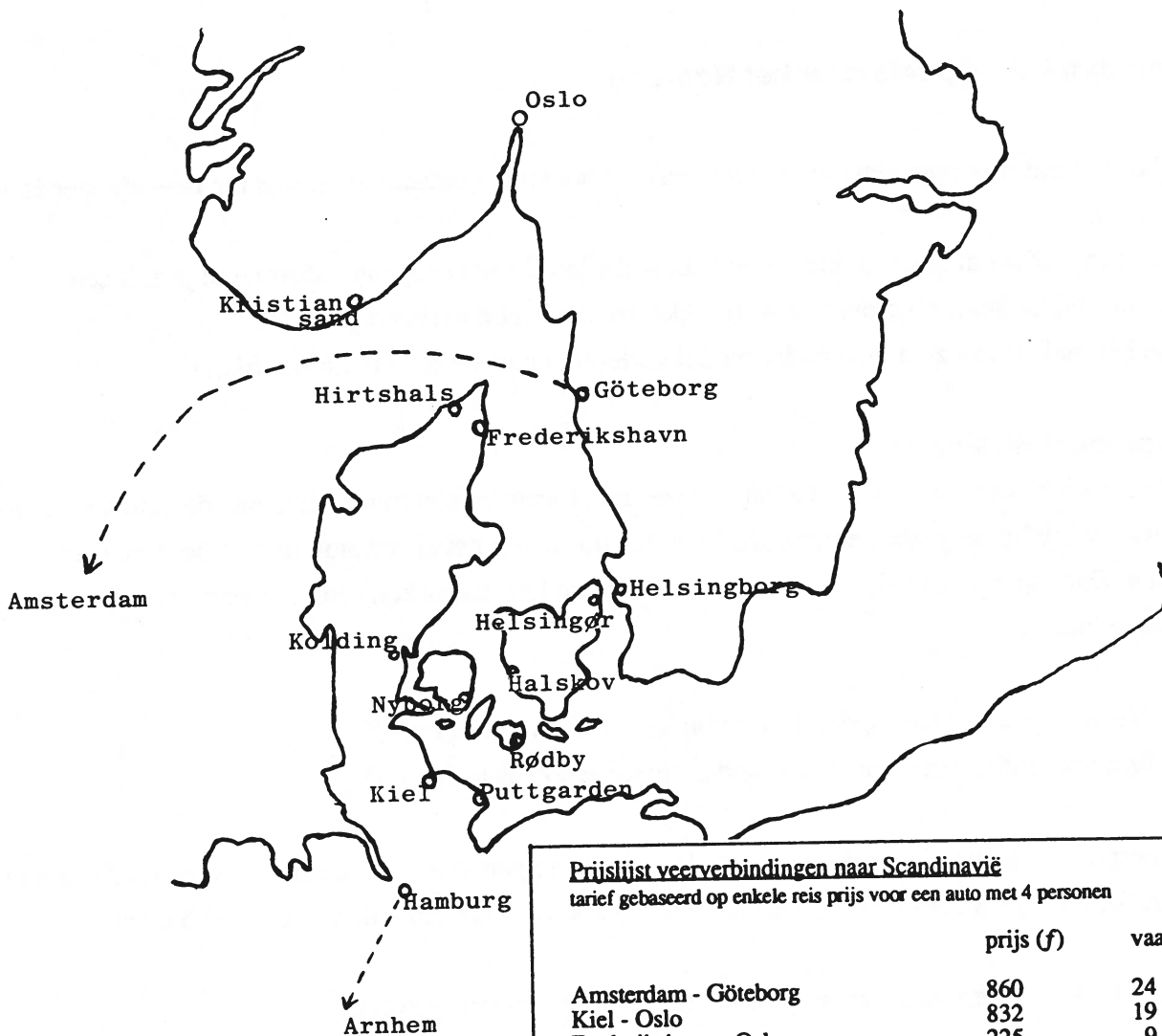
De probleemstelling

Marieke en Yvonne wonen in Arnhem. Deze zomer gaan ze met hun ouders met de auto naar Oslo, en waarschijnlijk nog wel verder ook. Ze zullen dus in elk geval een stuk met de boot moeten reizen. Dat kan op een heleboel manieren. Het is een hele uitzoekertje om de meest aantrekkelijke route te kiezen.

1. Welke overwegingen spelen een rol bij het kiezen van een route?
Wat voor informatie heb je zoal nodig om tot een keus te komen?

Je hoeft niet alle materiaal zelf te verzamelen. Op de volgende bladzijden staan gegevens die je kunt gebruiken. De gegevens over de veerverbindingen komen uit een gids van een reisbureau.

2. a. Welke landen staan op het kaartje? Ben je daar ooit zelf geweest?
- b. Teken alle veerverbindingen gestippeld in de kaart (netjes!).
- c. Teken de routes over land in de kaart met een lijn (netjes!).



Prijslijst veerverbindingen naar Scandinavië

tarief gebaseerd op enkele reis prijs voor een auto met 4 personen

	prijs (f)	vaartijd (u)
Amsterdam - Göteborg	860	24
Kiel - Oslo	832	19
Frederikshavn - Oslo	225	9
Frederikshavn - Göteborg	130	3 1/2
Hirtshals - Kristiansand	209	4 1/2
Puttgarden - Rødby	78	1
Helsingør - Helsingborg	30	1/2
Nyborg - Halskov	50	1

Afstandstabel over land

afstanden via de gangbare autowegen gemeten

afstand (km)

Arnhem - Amsterdam	100
Arnhem - Hamburg	453
Hamburg - Kiel	87
Hamburg - Kolding	245
Hamburg - Puttgarden	145
Kolding - Frederikshavn	261
Kolding - Hirtshals	264
Kolding - Nyborg	94
Kristiansand - Oslo	339
Halskov - Helsingør	157
Rødby - Helsingør	203
Helsingborg - Göteborg	223
Göteborg - Oslo	321

Er zit nogal wat verschil in de prijs van de verschillende boottochten en ook het aantal kilometers over land verschilt veel. In het vervolg gaan we de kosten en de reistijden van de verschillende routes met elkaar vergelijken.

Je moet nog weten: De auto, een -Piep-424- kost alles bij elkaar 42 cent per kilometer. Op zo'n lange tocht rijd je gemiddeld 90 km/uur.

De route Arnhem-Amsterdam-Göteborg-Oslo (route A)

Als je het liefst zoveel mogelijk met de boot gaat, is deze route een goede keus.

3. Maak de tabel hieronder met gegevens over kosten en tijden af:

	vervoermiddel	afstand	kosten	reistijd
Arnhem - Amsterdam	auto	100	42	...
Amsterdam - Göteborg	boot	-	860	...
Göteborg - Oslo	auto
A. totaal				

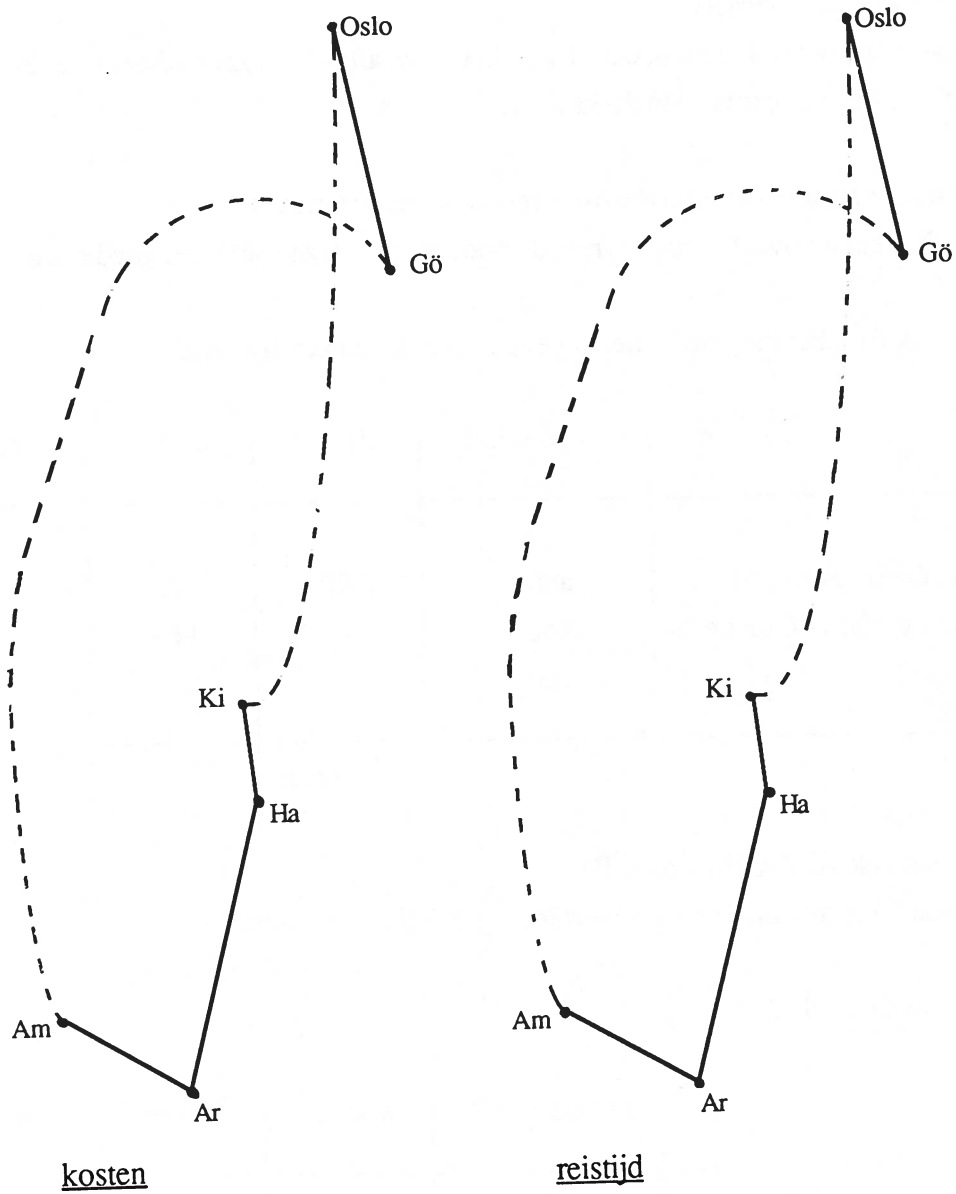
De oversteek Kiel-Oslo (route B)

Hoe moet je reizen als je de veerverbinding bij Kiel wilt nemen?

4. Maak de tabel af:

	vervoermiddel	afstand	kosten	reistijd
Arnhem -				
..... - Oslo				
B-totaal				

Een stukje netwerk met deze twee routes:



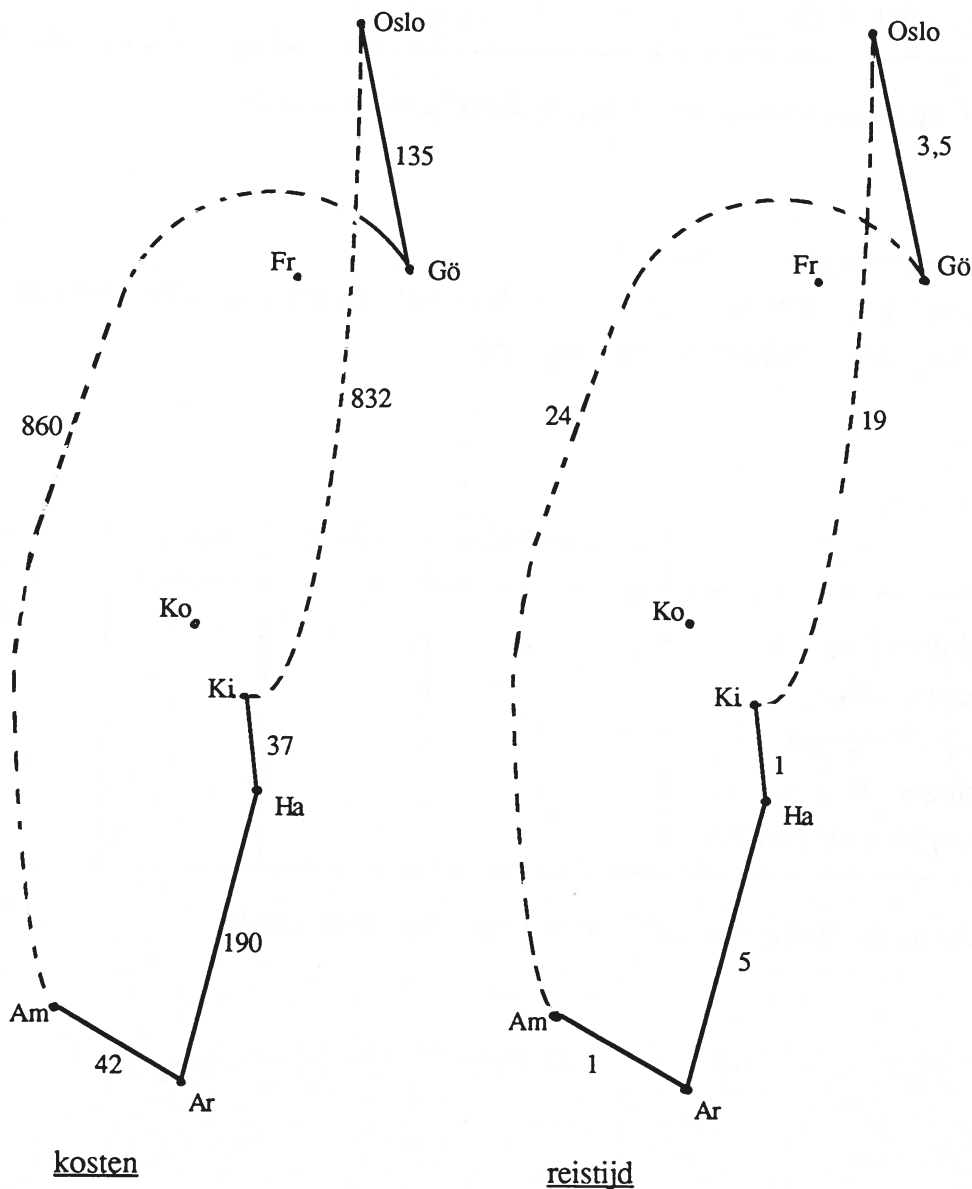
5. Schrijf in het linkerdiagram de kosten bij de trajecten, en in het rechter de reistijd.

Oversteken bij Frederikshaven (routes C en D)

6. a. Vanaf Frederikshaven kun je op twee manieren in Oslo komen. Teken daar een graaf van.
- b. Hoe kom je vanuit Arnhem in Frederikshaven?
7. Maak weer een tabel met alle gegevens (gebruik waar mogelijk de vorige tabellen!).

	vervoermiddel	afstand	kosten	reistijd
Arnhem -				
..... -				
..... - Freds.havn				
Freds.havn - Oslo				
Freds.havn - Göteborg				
Göteborg - Oslo				
C. totaal (F-O)				
D. totaal (F-G-O)				

8. Breid het netwerk uit met de nieuw gevonden trajecten.
Schrijf kosten en afstanden erbij.



9. Wat is vanaf Frederikshavn het goedkoopste naar Oslo? En wat is het snelste?
 Er blijven nog drie routes over om te onderzoeken. Stukken van die routes hebben we al gehad, dus dat scheelt in het werk.
 Verder kun je ook het rekenwerk voor de laatste drie routes onder elkaar verdelen.

Oversteken bij Hirtshals (route E)

Deze route is tot Kolding hetzelfde als de routes via Frederikshavn.

10. Maak daarom alleen een tabel voor het laatste stuk, vanaf Kolding:

	vervoermiddel	afstand	kosten	reistijd
Kolding - Hirtshals				
Hirtshals - Kristiansand				
Kristiansand - Oslo				

11. Schrijf de resultaten in de netwerken op de volgende bladzijde.

De route over Putgarden (route F)

Bij deze route ga je eerst naar Hamburg, en dan via Putgarden-Rødby-Helsingør-Helsingborg naar Zweden. Deze route gaat grotendeels over land.

12. De tabel:

	vervoermiddel	afstand	kosten	reistijd
Hamburg - Putgarden				
Putgarden - Rødby				
Rødby - Helsingør				
Helsingør - Helsingborg				
Helsingborg - Göteborg				

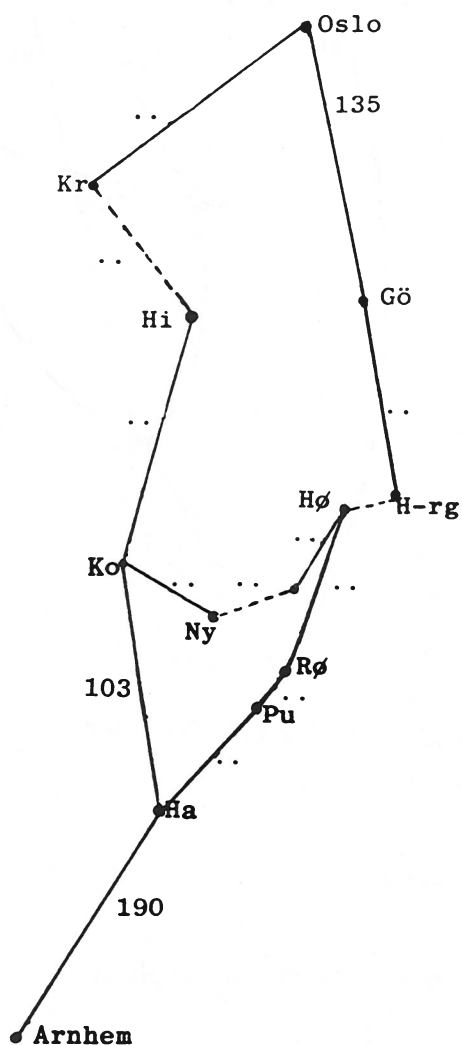
13. Schrijf de resultaten in de netwerken op de volgende bladzijde.

De route over Nyborg (route G)

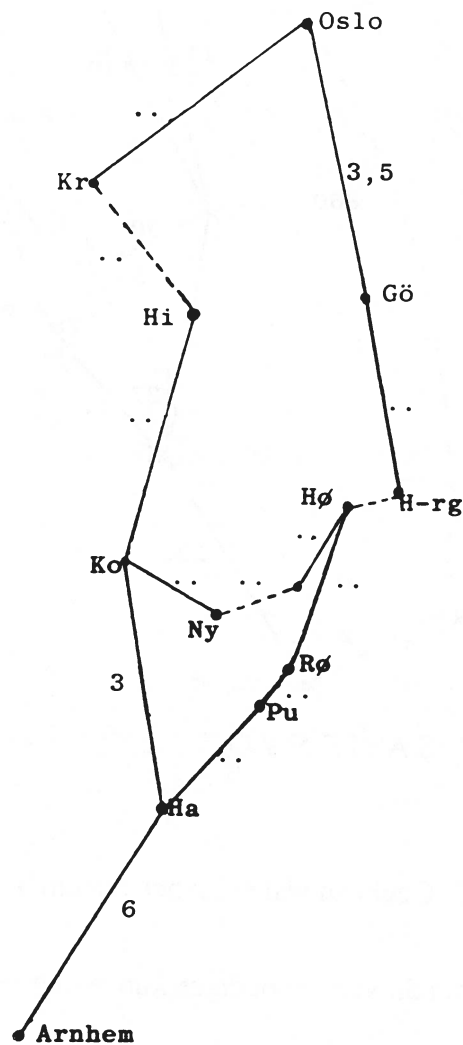
Vanaf Kolding is er ook nog een route naar Helsingør, over Nyborg en Halskov.

14. Maak weer een tabel met de trajecten die je nog niet gehad hebt:

	vervoermiddel	afstand	kosten	reistijd
Kolding - Nyborg				
Nyborg - Halskov				
Halskov - Helsingør				



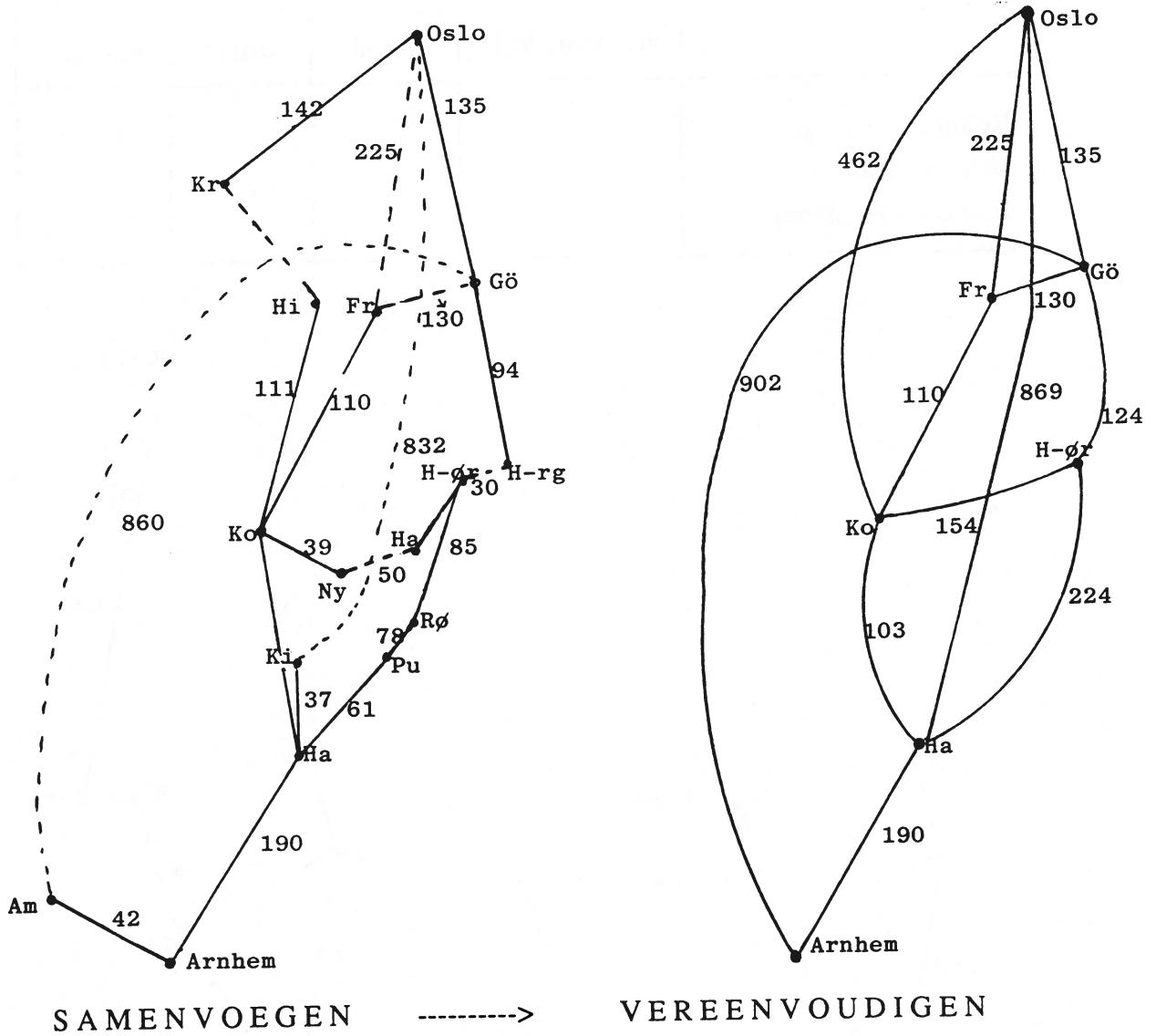
kosten



reistijd

Alle routes in één netwerk

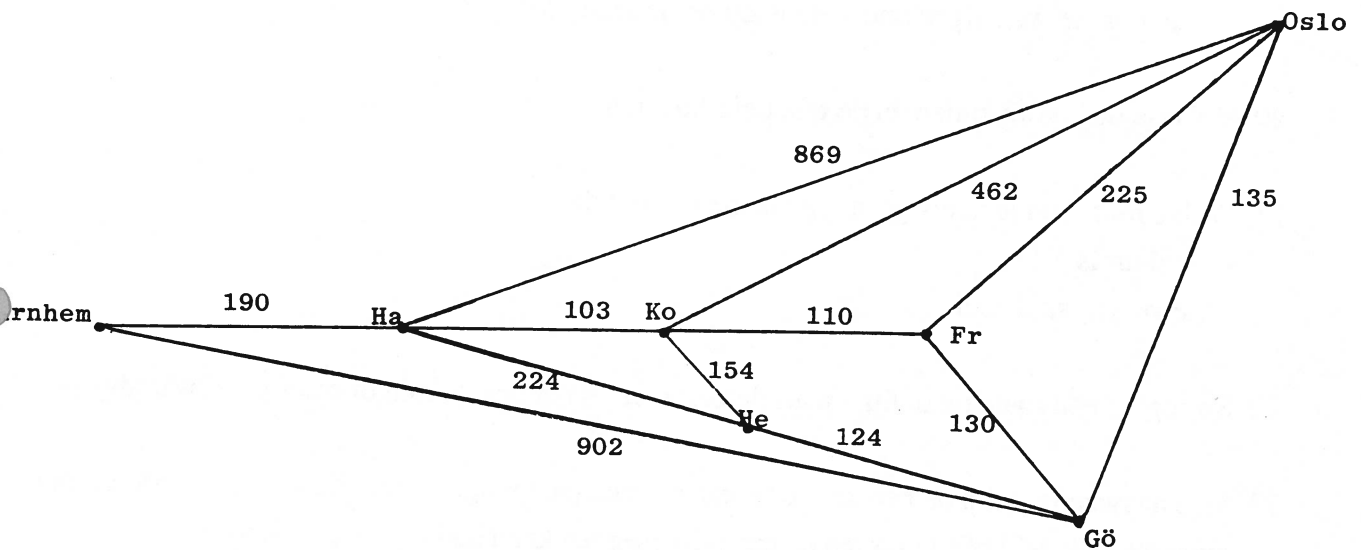
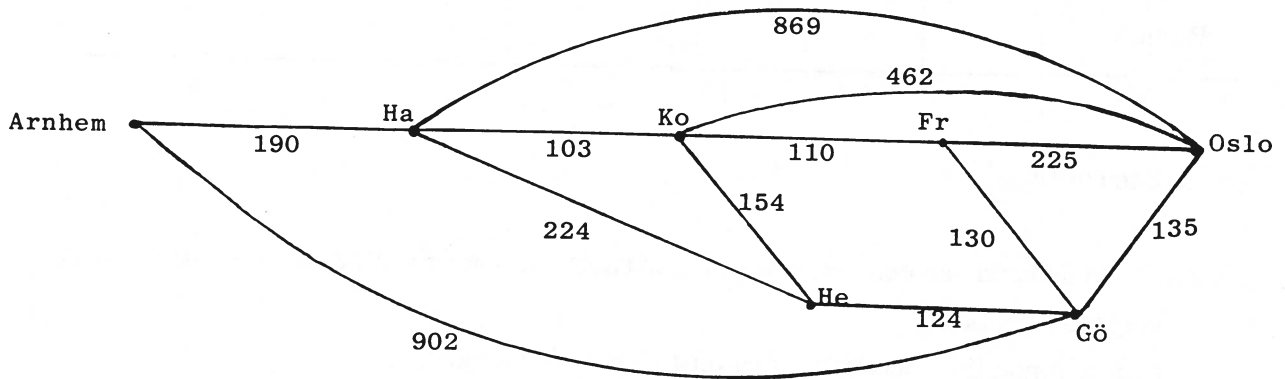
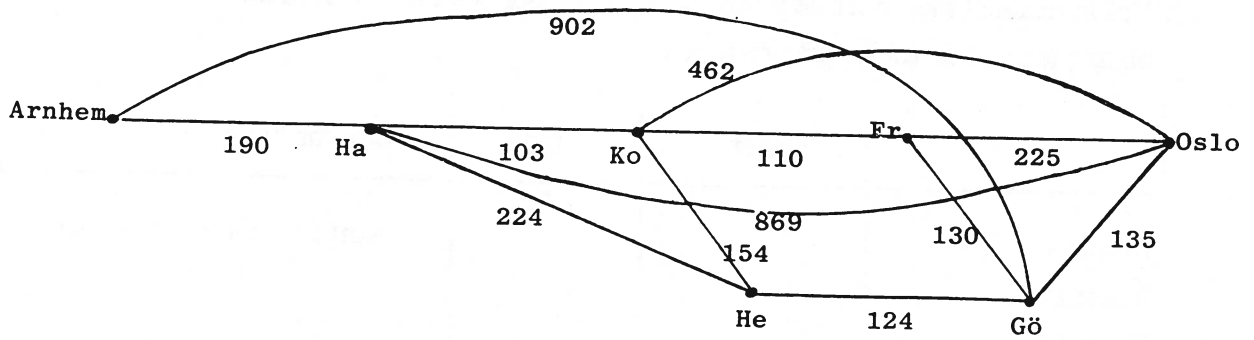
We hebben nu twee netwerken, met alles bij elkaar zeven routes. Om goed overzicht te krijgen, moet daar nog één geheel van gemaakt worden. Voor het kosten-netwerk laten we zien hoe dat in z'n werk gaat. De netwerken worden eerst samengevoegd en daarna vereenvoudigd.



15. Geef aan wat er bij het vereenvoudigen allemaal veranderd is.

Met dit vereenvoudigen kun je nog verder gaan, kijk maar naar de volgende plaatjes.

16. Geef van elk plaatje aan hoe het uit het vorige is ontstaan.



Zo krijg je uiteindelijk een mooi strak getekend netwerk.

17. Terug naar het probleem. Wat is nu de goedkoopste route?

Gebruik het algoritme voor de kortste weg om dit uit te zoeken.

Als je zo'n verre reis maakt, wil je eigenlijk van alle routes wel weten wat ze kosten. Als de prijzen niet ver uit elkaar liggen, zullen misschien andere overwegingen dan de kosten de doorslag geven.

18. Vul in de tabel hieronder de kolom 'kosten' in voor een totaaloverzicht. Kijk op de vorige bladzijden hoe de routes precies lopen.

	kosten	tijd	omschrijving
Route A			Arnhem - Göteborg - Oslo
Route B			
Route C			
Route D			
Route E			
Route F			
Route G			

De snelste route

19. Zoek aan de hand van een vereenvoudigd netwerk uit wat de *snelste* route is. Doorloop daarbij de volgende stappen:

- twee afzonderlijke netwerken met reistijden samenvoegen;
- het netwerk vereenvoudigen;
- het 'kortste weg algoritme' toepassen op de reistijden.

20. Vul ook de kolom 'tijden' in de tabel hierboven in.

21. Welke route zou je in elk geval niet nemen omdat die:

- te duur is
- te veel reistijd geeft.

22. Springt er een route duidelijk uit als de beste, of zijn er enkele min of meer gelijkwaardig?

23. Hoe nauwkeurig zijn de berekende kosten en reistijden volgens jou? Kun je zaken bedenken die eigenlijk ook geld of tijd kosten en eigenlijk meegerekend hadden moeten worden?

24. Welke overwegingen zullen bij het maken van de uiteindelijke keus nog meer een rol spelen?

Wat heb je nu geleerd?

Uit 'de reis naar het Noorden' blijkt dat het uitvoeren van het 'kortste-weg-algoritme' maar een heel klein onderdeelje is van het hele probleem.

Het werk dat er aan vooraf gaat is eigenlijk het belangrijkste en kost ook de meeste tijd. Dit voorbeeld laat zien hoe je van een 'stukje werkelijkheid' een '*wiskundig model*' maakt. Er zit heel wat reken- en schrijfwerk bij, dat moet gewoon gebeuren.

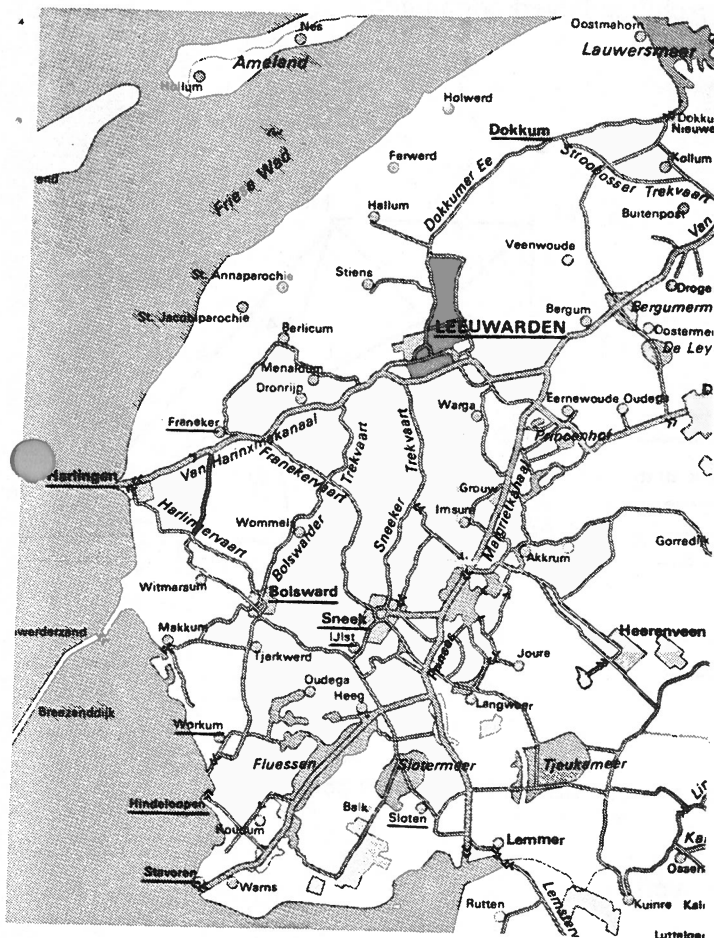
Het wiskundig model (hier het netwerk) gebruik je vervolgens bij het beantwoorden van de vragen waar het je om te doen is (goedkoopste en snelste route).

Omdat je bij de *modelvorming* van een aantal zaken afziet, is er altijd *kritiek* op het eindantwoord mogelijk. Die laatste stap, bespreken hoe goed of slecht het gevonden antwoord is, hoort er zeker bij!

Hoofdstuk 3 - Rondreizen

De elfstedentocht

De bekendste schaatstocht van Nederland is de elfstedentocht.



De tocht is tot nu toe 14 keer gehouden, voor het eerst aan het begin van deze eeuw en voor het laatst op 26 februari 1986. Hiernaast zie je een kaartje van Friesland waar de elf steden op staan. Achterin staat nog een preciesere waterkaart. Start en finish van de tocht zijn in Leeuwarden. De elf steden zijn onderstreept.

1. a. De eerste etappe is van Leeuwarden naar Sneek. Hoeveel km is dat?
- b. Teken in je schrift een schematisch kaartje met de elf steden en teken daarin de tocht zoals jij denkt dat hij loopt.
- c. Schat van elke etappe de lengte (in km) en schrijf die in het kaartje dat je bij b gemaakt hebt.
- d. Hoe lang is de totale tocht ongeveer?

0 5 10

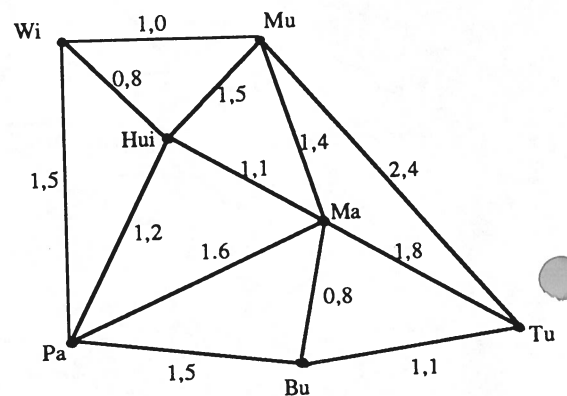
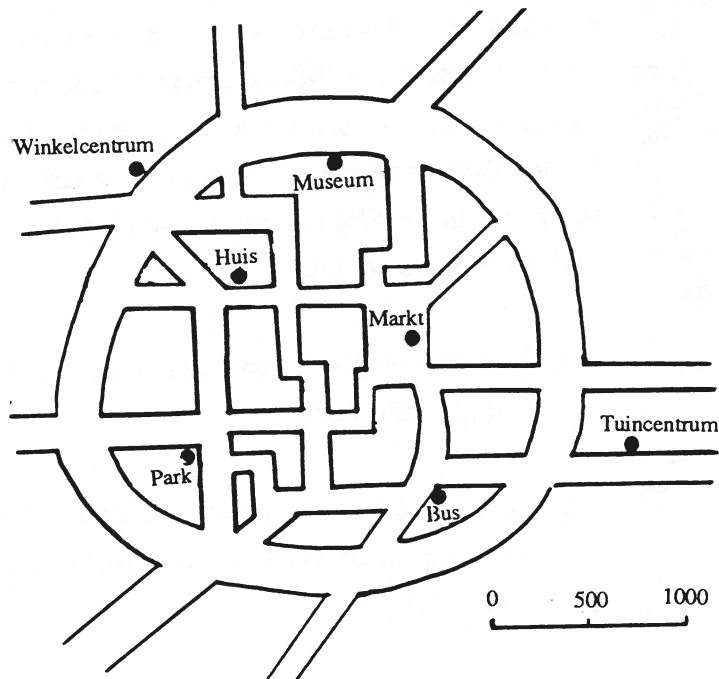
- e. Een reclamevlieger moet een rondvlucht maken langs de elf steden. Stippel een zo kort mogelijke rondvlucht uit en bepaal de lengte ervan. Gebruik de tabel hieronder.

Afstandstabel Friesland (hemelsbreed)

	Bo	Do	Fr	Ha	Hi	Le	Sl	Sn	St	IJ	Wo
Bolsward	-	42	14	13	16	23	20	10	23	8	11
Dokkum	42	-	34	41	58	19	53	39	64	42	53
Franeker	14	34	-	8	28	17	34	19	35	20	24
Harlingen	13	41	8	-	25	25	34	22	32	22	21
Hindeloopen	16	58	28	25	-	39	17	20	7	17	5
Leeuwarden	23	19	17	25	39	-	36	21	45	24	34
Sloten	20	53	34	34	17	36	-	16	18	13	17
Sneek	10	39	19	22	20	21	16	-	26	4	27
Stavoren	23	64	35	32	7	45	18	26	-	22	12
IJlst	8	42	20	22	17	24	13	4	22	-	13
Workum	11	53	24	21	5	34	17	16	12	13	-

IJs verkopen

Een ijsverkoopster verkoopt dagelijks ijsjes bij het museum, het park, het winkelcentrum, het busstation, de markt en het tuincentrum. Hieronder zie je een kaart en een graaf van de situatie. De verkoopster wil een route bepalen langs de verschillende verkooppunten.



2. a. Waar zou je allemaal rekening mee moeten houden bij het kiezen van een route?
- b. Bedenk een goede route als je weet dat de verkoopster:
 - alle verkooppunten wil aandoen,
 - zo min mogelijk heen en weer wil rijden met de ijscokar.
- c. Hoe lang is de route die je gevonden hebt ongeveer?
- d. Op zaterdag is het winkelcentrum de beste plaats om ijsjes te verkopen. Maak een route waar het winkelcentrum twee keer in voorkomt.
- e. Wat kun je handiger gebruiken bij deze opgave: de kaart of de graaf?

Rondreizen

De elfstedentocht en de routes van de ijsverkoopster zijn voorbeelden van *rondreizen* langs een aantal plaatsen. Bij het vinden van een rondreis kun je gebruik maken van een kaart of van een graaf.

Een belangrijke vraag bij rondreizen is:

hoe kun je een zo kort mogelijke rondreis vinden?

Dit probleem komt in de praktijk nogal eens voor. Bijvoorbeeld:

- je moet op een aantal adressen een tijdschrift bezorgen, welke route neem je?
- je wilt op vakantie een aantal bezienswaardigheden aandoen. Bedenk een route.
- een vertegenwoordiger moet een aantal bedrijven af. Wat is de kortste route langs die bedrijven?

3. Welke aanpak heb jij gekozen, om de kortste rondreis te vinden bij de vorige opgaven?

Voorals de afstanden wat groter zijn kan het een heleboel uitmaken welke route je kiest. De kortste route vinden is niet zo eenvoudig. Bovendien is de werkelijkheid ingewikkelder dan de kaarten en grafen van de vorige opgaven. In de praktijk heb je te maken met snelwegen en binnenwegen, files, verkeerslichten, enzovoort.

In de wiskunde wordt vaak gewerkt met een *vereenvoudiging* van de werkelijkheid.

Om het niet al te ingewikkeld te maken, worden bepaalde zaken dan buiten beschouwing gelaten. Zo'n versimpeling van de werkelijkheid heet ook wel een *model*. Een model kan de werkelijkheid meer of minder goed beschrijven.

Een vertegenwoordiger werd vroeger een handelsreiziger genoemd. Vandaar dat het vinden van een kortste rondreis langs een aantal plaatsen ook wel het *handelsreizigersprobleem* wordt genoemd. Het zal je misschien verbazen, maar in de wiskunde is het handelsreizigersprobleem nog nooit echt goed opgelost. In dit hoofdstuk gaan we kijken waar hem de moeilijkheid zit. Het blijkt dat het probleem *makkelijk te begrijpen*, maar *moeilijk op te lossen* is. Wie het probleem echt goed oplost, zal vast en zeker wereldberoemd worden!

Rondreizen in Europa

Bij rondreisproblemen reken je vaak met hemelsbrede afstanden.

In de tabel hieronder staan afstanden binnen Europa, hemelsbreed én over de weg.

	Amsterdam	Barcelona	Berlijn	Brussel	Hamburg	Milaan	München	Parijs	Wenen
Amsterdam	-	1180	780	160	380	800	640	420	910
Barcelona	1530	-	1440	1020	1450	700	990	790	1290
Berlijn	680	1950	-	640	250	820	510	860	530
Brussel	200	1340	890	-	510	700	610	260	910
Hamburg	430	1890	290	580	-	900	630	770	740
Milaan	1140	1020	1050	930	1200	-	320	630	610
München	860	1400	590	750	800	450	-	660	360
Parijs	500	1030	1060	300	880	870	820	-	1010
Wenen	1160	1840	660	1100	1120	820	440	1260	-

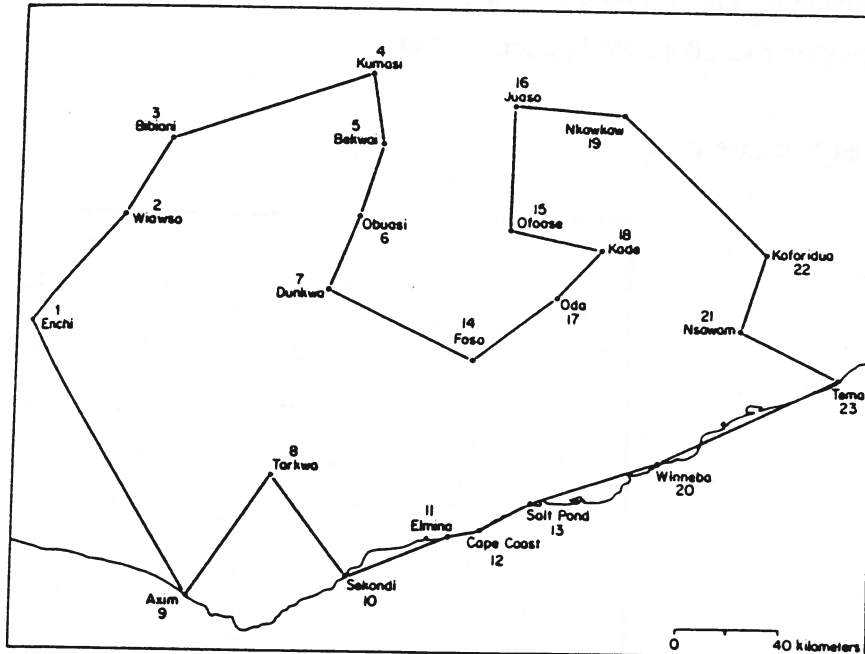
4. a. Wat betekent hemelsbreed?
- b. Hoever is het hemelsbreed van Amsterdam naar Barcelona? En over de weg?
- c. Onderstreep de hemelsbrede afstanden in de tabel hierboven.
- d. Bepaal de lengte van de volgende rondreizen langs alle steden hemelsbreed en over de weg.

Rondreis	hemelsbreed	over de weg
Am - Ba - Be - Br - Ha - Mi - Mü - Pa - We - Am		
Am - Be - Ha - Mü - We - Ba - Br - Mi - Pa - Am		
Am - Br - Mü - Ba - Ha - Pa - Be - Mi - We - Am		
Am - Ha - Be - Mü - We - Mi - Ba - Pa - Br - Am		

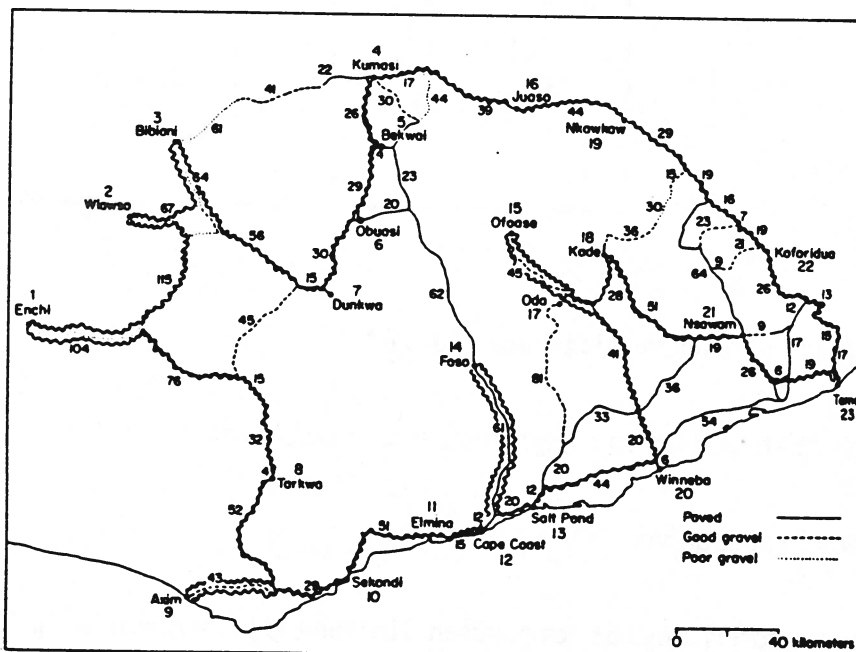
- e. Vul in: de afstand hemelsbreed is groter/gelijk/kleiner dan de afstand over de weg.
- f. Stel je wilt de *kortste* rondreis langs de negen steden weten. Vind je het wel/niet een goed idee om dan naar de afstanden hemelsbreed te kijken.

Vissersplaatsjes in Ghana

In Ghana (Afrika) liggen vissersplaatsjes aan de kust. De vissers verkopen de vis aan opkopers, die de vis zo snel mogelijk doorverkopen in plaatsjes in het binnenland. Omdat verse vis snel bederft, is het belangrijk dat ze de kortste rondreis nemen. Er moeten 23 plaatsjes aangedaan worden. Met een computer is uitgezocht dat hemelsbreed de kortste rondreis is:



In de praktijk rijden de vrachtauto's echter zoals aangegeven in de kaart hieronder.



5. Kun je enkele verschillen noemen tussen de twee routes? Verklaring?

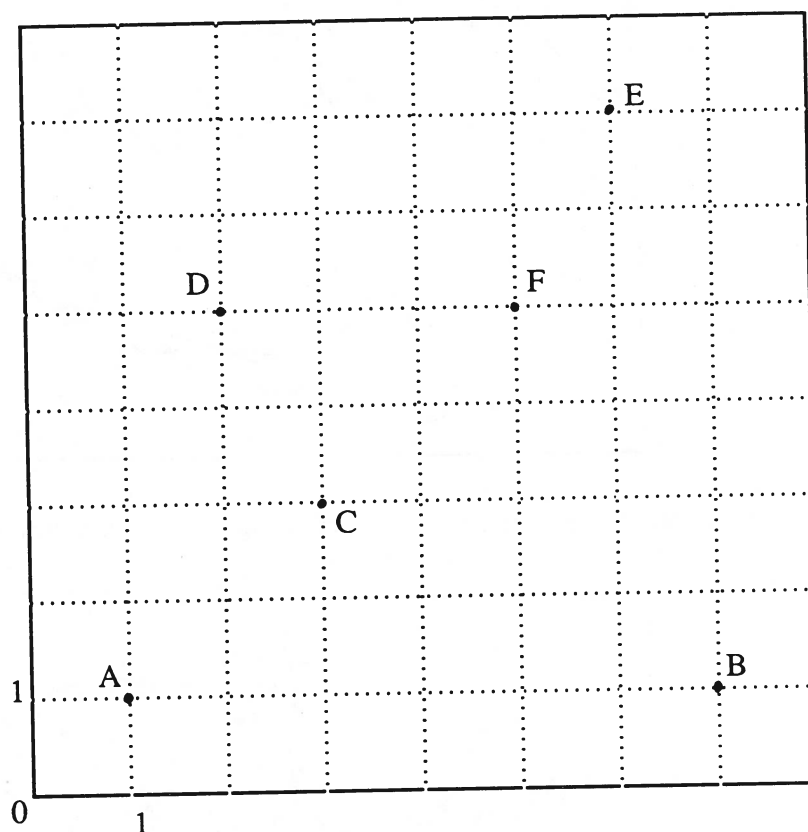
Rondreizen, modellen, computer

We lossen rondreisproblemen vaak op met de computer. Als model gebruikt de computer een graaf.

In die graaf:

- liggen alle punten op schaal;
- worden alle afstanden hemelsbreed gemeten;
- kunnen alle punten met elkaar verbonden worden.

Een voorbeeld met 6 plaatsen:



6. a. Wat zijn de coördinaten van de punten A t/m F?
- b. Hoe kun je de afstand tussen twee punten *precies* berekenen?
- c. Voer de berekening uit voor AD.
- d. Bedenk een rondreis langs de zes plaatsen. Hoe lang is jouw rondreis? (je kunt de afstanden opmeten in de tekening).

Een rondreis maken langs punten op een rooster is natuurlijk niet hetzelfde als een *echte* reis langs *echte* plaatsen.

7. a. Noem twee verschillen tussen de werkelijkheid en het model.

b. Zijn deze verschillen een groot bezwaar?

Licht je antwoord toe.

Computerpraktikum

Met het computerprogramma 'De Handelsreiziger' kunnen rondreizen worden bepaald. De computer werkt daarbij volgens een voorschrift, waarin staat hoe de computer moet zoeken. Soms geeft dat voorschrift de kortste rondreis, soms iets wat er aardig op lijkt en soms ook helemaal niet zo'n korte reis.

We gaan een aantal voorschriften bekijken, om te ontdekken hoe ze werken en hoe goed ze zijn. Je maakt een deel van de opgaven met de computer en een deel op papier.

Punten neerzetten:

Met de computer:

7. a. Start het programma 'De Handelsreiziger' tot je bij het menu 'Zet steden neer' bent:

```
----- Zet steden neer -----  
1   Info  
2   Random  
3   Zelf plaatsen  
4   Van bestand lezen  
5   Stop
```

Je kunt op verschillende manieren een plattegrond op het scherm krijgen. Wij laten de computer willekeurig steden neerzetten.

b. Kies, met de pijltjestoetsen '2 random' (engels woord, spreek uit réndum; random betekent willekeurig) en je ziet:

```
----- Aantal steden -----  
Geef het aantal steden ( $\leq 20$ ) :
```

Je kunt nu het aantal steden kiezen dat je wilt. Wij nemen er 8.

c. Typ in: <8>

Je ziet nu 8 willekeurig gekozen steden verschijnen. Druk nu op de toets <ESC> (linksboven) en het spel kan beginnen.

Je ziet nu het menu 'Rondreis maken'

Rondreis Maken	
1	Random rondreis
2	Eigen rondreis
3	Dichtste buur benadering
4	Grootste hoek benadering
5	Exacte methode
6	Terug naar vorige menu

De Buurmethode

Om te beginnen gaan we kijken hoe de 'Buurmethode' werkt.

9. a. Kies, met de pijltjestoeten '3 Dichtste buur benadering' uit het menu.

b. Geef een beginplaats op, en druk steeds op de <ENTER> toets als de computer daar om vraagt.

De computer bepaalt nu volgens de Buurmethode een rondreis, kijk goed wat er gebeurt! Als je rond bent, drukt de computer onder op het scherm de totale lengte van de rondreis af.

c. Probeer de lengte van de rondreis ook zelf te schatten. Klopt je schatting met het getal dat de computer geeft?

d. Enig idee hoe de Buurmethode werkt? Probeer het zo goed mogelijk in je schrift te schrijven. Als je het niet meteen ziet, kun je het nog eens met een andere beginplaats proberen.

Op de volgende bladzijde kun je het voorschrift van de Buurmethode nalezen.

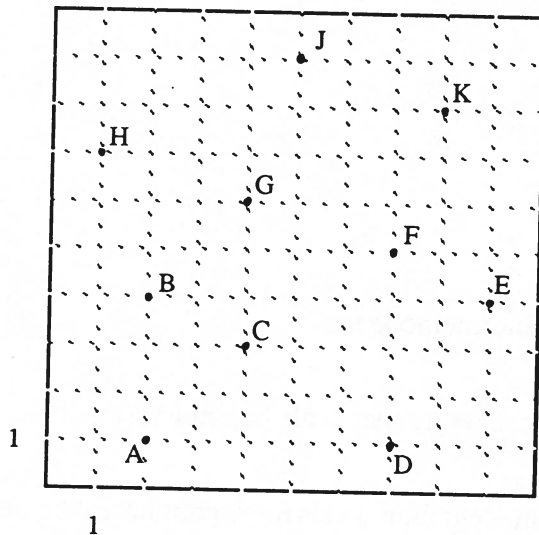
Op papier:

10. a. Je kunt zelf voor computer spelen en de Buurmethode met de hand toepassen op de punten hieronder. Begin bij punt A.

b. Schat de totale lengte van de rondreis.

Is die: minder dan 20/tussen 20 en 40/meer dan 40?

c. Doe het nog eens, maar nu met F als beginpunt.

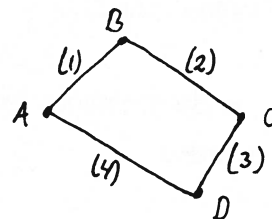
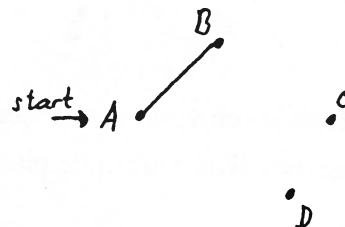


d. Wat is het bezwaar van deze methode?

Het voorschrift van de Buurmethode

- stap 1: neem een beginpunt
- stap 2: ga van het punt waar je zit naar het dichtstbijzijnde punt (het buurpunt) dat je nog niet gehad hebt
- stap 3: herhaal stap 2 totdat je alle punten gehad hebt
- stap 4: verbind tenslotte het laatste punt weer met het beginpunt.

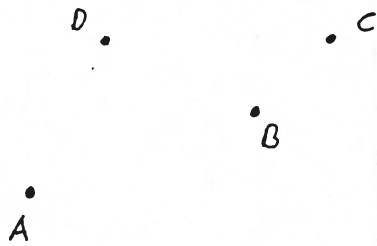
Voorbeeld



Om de Dichtste buur benadering toe te kunnen passen, is het nodig de onderlinge afstanden tussen de punten (plaatsen) te weten.

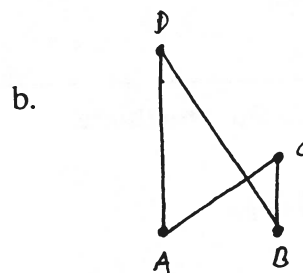
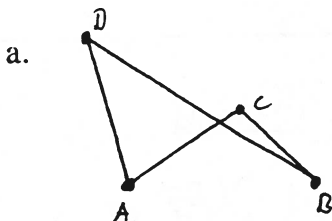
Voor de opgaven hieronder heb je de computer niet nodig.

11.



- Neem A als beginpunt en pas de Buurmethode toe.
- Pas de Buurmethode nog eens toe, maar nu met B als beginpunt.
- Maakt het voor het eindresultaat uit welk punt je als beginpunt neemt bij de Buurmethode?

12. Kunnen onderstaande routes gevonden zijn met de Buurmethode?
Wat kan het beginpunt geweest zijn?



- Kun je een voorbeeld bedenken waarbij de Buurmethode zeker de kortste rondreis zal geven? Hoe zouden de plaatsen dan moeten liggen?
- Waarom geeft de Buurmethode soms een slecht resultaat? Kun je daar een voorbeeld van bedenken?
- De Buurmethode wordt wel een *gulzige* methode genoemd. Wat zou daarmee bedoeld worden?

Deukmethode

Een andere methode om een redelijke route te vinden is de *Deukmethode*. In het computerprogramma heet deze methode 'Grootste hoek benadering'.

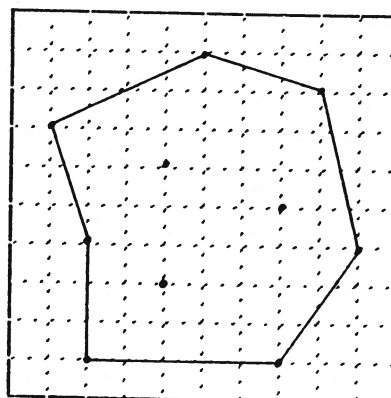
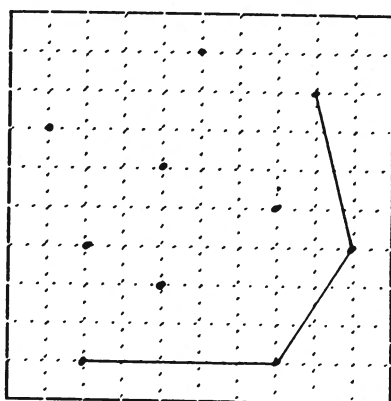
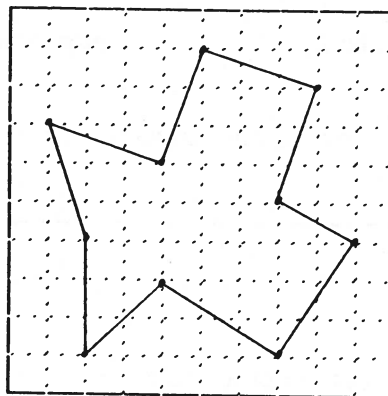
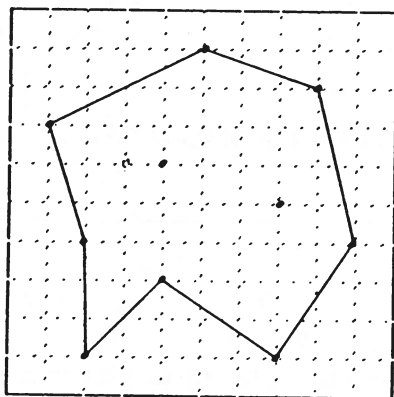
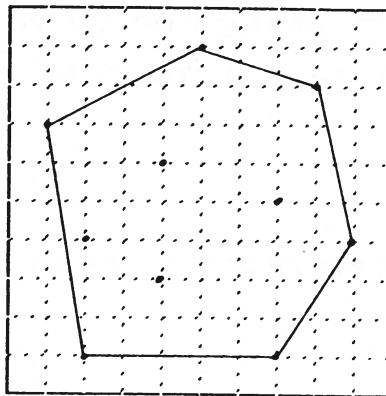
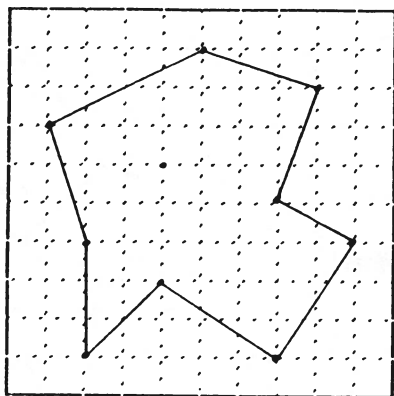
Met de computer:

14. Je kunt wat experimenteren met de **Grootste hoek benadering** uit het

computerprogramma. Probeer aan de hand daarvan het voorschrift te begrijpen.
Je kunt het voorschrift op de volgende bladzijde nalezen.

Zonder computer:

15. De plaatjes hieronder vormen samen een 'film' van de deukmethode.
Kun je de plaatjes in de goede volgorde zetten?



Het voorschrift van de Deukmethode

Begin met een rondreis langs de buitenste punten.

Neem de plaatsen die binnenin liggen één voor één op door de route steeds een stukje 'in te deuken'.

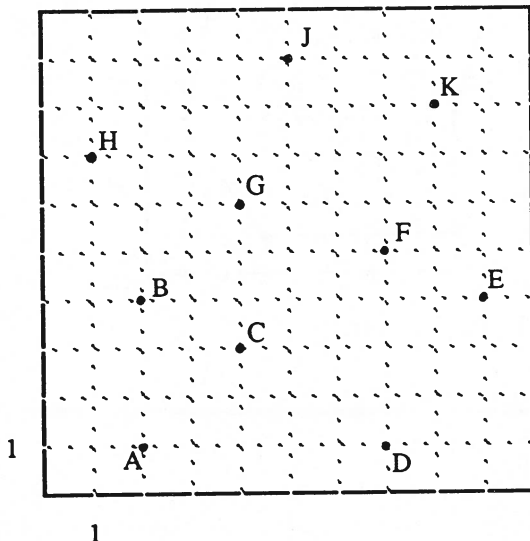
Kies steeds die plaats, waarbij de deuk zo klein mogelijk is:



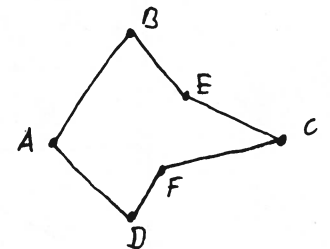
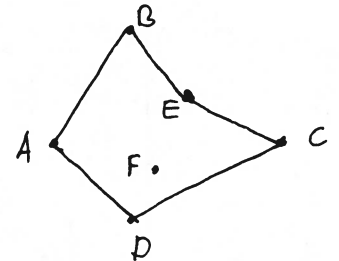
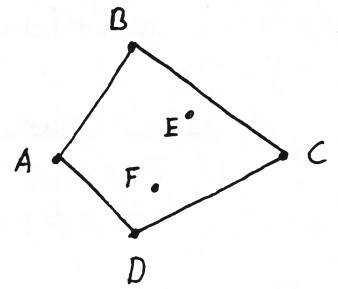
Om de deuk-methode goed te kunnen toepassen, is het nodig hoeken uit te rekenen of op te meten.

Op papier:

16. a. Probeer voor computer te spelen en pas de deukmethode toe op de punten hieronder.
- b. Vergelijk de uitkomst met de rondreis die je bij opgave 10 hebt gevonden. Welke lijkt je het kortst.



Voorbeeld



Controle met de computer:

De tien punten zitten ook in de computer.

17. a. Haal ze te voorschijn door uit het menu *Zet steden neer* te kiezen: *4 van bestand lezen*.
Druk op de toets <F7> en kies met de pijltjestoetsen het bestand OEF.PNT.
 - b. Voer de Buurmethode en de Deukmethode uit en vergelijk de antwoorden van de computer met wat je zelf gevonden had (bij opgave 10 en opgave 16).
18. Vergelijk de Buurmethode en de Deukmethode eens met elkaar.
- a. Welke methode lijkt je beter en waarom?
 - b. Welke vind je het makkelijkste om uit te voeren?

Studiemateriaal voor de OU

Bij de Open Universiteit kan iedereen studeren, je hoeft er geen diploma's voor te hebben. Op de kaart hieronder staan de achttien studiecentra van de Open Universiteit getekend. De studenten van de Open Universiteit zitten door het hele land en kunnen gebruik maken van zo'n studiecentrum. De hoofdvesting is in Heerlen.

Met een vrachtauto moet geregeld studiemateriaal naar de achttien centra gebracht worden.



op papier:

19. Wat is een redelijke rondreis langs de achttien plaatsen? Je kunt tekenen op de kaartjes hieronder.

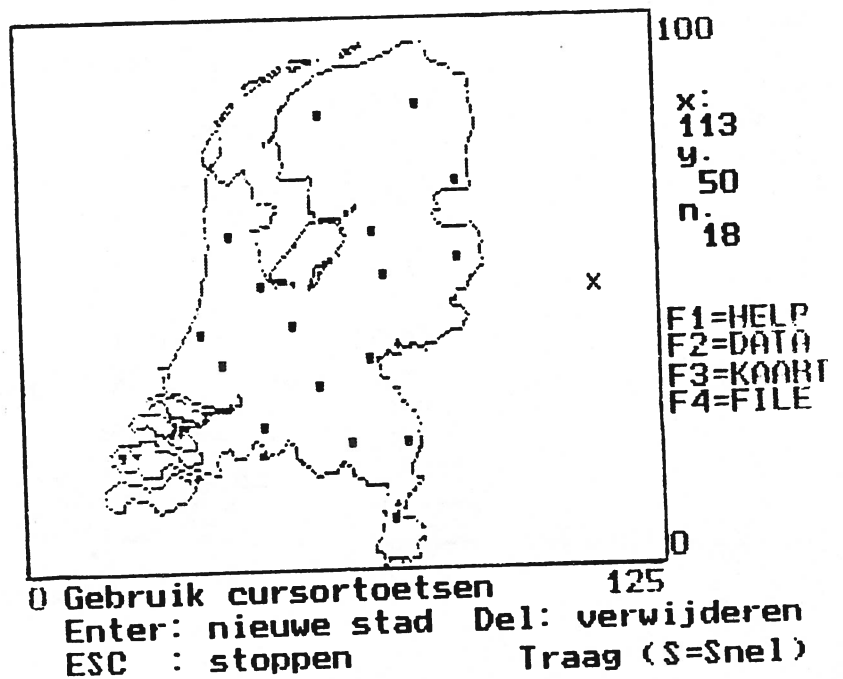


Met de computer:

De achttien plaatsen zijn ook opgeslagen in het computerprogramma.

20. a. Je krijgt ze op het scherm door in het menu *Zet steden neer* te kiezen: 4 *Van bestand lezen*.
- > Toets in <F7> en kies met de pijltjestoetsen voor het bestand OU.PNT. De steden worden neergezet.
 - > Toets daarna <F3> in, om de kaart van Nederland er bij te krijgen.

Je ziet nu dit beeld:



b. Laat de lengte van je zelfgekozen rondreis uitrekenen met 2 *eigen rondreis*.

c. Wat is de lengte van de rondreis in werkelijkheid? Probeer een schatting te maken als je weet dat de afstand van Pieterburen (Noord-Groningen) tot Maastricht hemelsbreed ongeveer 300 km is.

21. a. Onderzoek met de computer welke rondreizen je krijgt met de Buurmethode en de Deukmethode.

Zet de resultaten in een schema:

methode	lengte	lengte in werkelijkheid	route
Eigen rondreis			
Buurmethode			
Deukmethode			

b. Geef commentaar op de resultaten.

Zou één van deze rondreizen ook echt de allerkortste zijn?

Receptenblad Programma Handelsreizigersprobleem

Het programma Handelsreizigersprobleem staat op de schijf ORSTAT. Op deze schijf staan meer programma's die onderwerpen uit de Besliskunde betreffen. Het programma is gemaakt door Erwin Kalvelagen en Henk Tijms, Vrije Universiteit, Amsterdam.

Programma starten:

- Start de schijf nadat DOS geladen is met: orstat <ENTER>
- Druk daarna twee keer op de <ENTER> toets, tot het Hoofdmenu verschijnt.
- Kies met de pijltjestoetsen uit dit menu het Handelsreizigersprobleem <ENTER>

Structuur van het programma:

Het programma bestaat uit twee menu's. Het eerste menu (Zet steden neer) is om de steden neer te zetten, het tweede menu (Rondreis maken) is om rondreizen mee te maken. Nadat met het eerste menu de steden geplaatst zijn, springt het programma vanzelf naar het tweede menu.

Zet steden neer		Rondreis Maken	
1	Info	1	Random rondreis
2	Random	2	Eigen rondreis
3	Zelf plaatsen	3	Dichtste buur benadering
4	Van bestand lezen	4	Grootste hoek benadering
5	Stop	5	Exacte methode
		6	Terug naar vorige menu

Bijzondere toetsen

Belangrijke toetsen bij de bediening van het programma zijn:

- de pijltjestoetsen, daarmee kun je door menu's lopen
- de <ENTER>toets, daarmee kun je o.a. de keus uit een menu bevestigen
- de <ESC>-toets, daarmee kun je iets afbreken of terug naar een menu
- soms vraagt de computer *Geef Enter*, doe dat dan voor het vervolg
- de toetsen T en S: je kunt rondreizen *Traag* en *Snel* laten maken, standaard is *Traag*, met *Snel* kun je het tekenen versnellen.

Zelf steden invoeren

Op een rooster van 125x100 kun je zelf steden invoeren. Met de pijltjestoetsen stuur je het kruisje over het rooster, met een druk op de <ENTER>-toets wordt de plaats echt neergezet. Het invoeren komt erg nauwkeurig, want als je eenmaal op <ENTER> hebt gedrukt, is veranderen/ verbeteren niet meer mogelijk! Je kunt de resultaten bewaren als bestand.

Van bestand lezen

Er zijn enkele bestanden opgeslagen in het programma. Dit voor event. gezamenlijke activiteiten.

Functietoetsen:

- <F1>: toelichting bij het programma,
- <F2>: geeft een tekstschermd met de coördinaten van de ingevoerde steden en een overzicht van de gemaakte rondreizen met hun lengtes,
- <F3>: tekent de kaart van Nederland, waar vervolgens steden in gezet kunnen worden.

Slotopdracht - Jeugdherbergen

In dit boekje heb je wat geleerd over twee typen routeproblemen:

- het zoeken van de kortste weg in een netwerk;
- het zoeken van een korte rondreis langs alle punten van een netwerk.

De problemen lijken haast hetzelfde, maar zijn als je beter kijkt, toch heel verschillend.

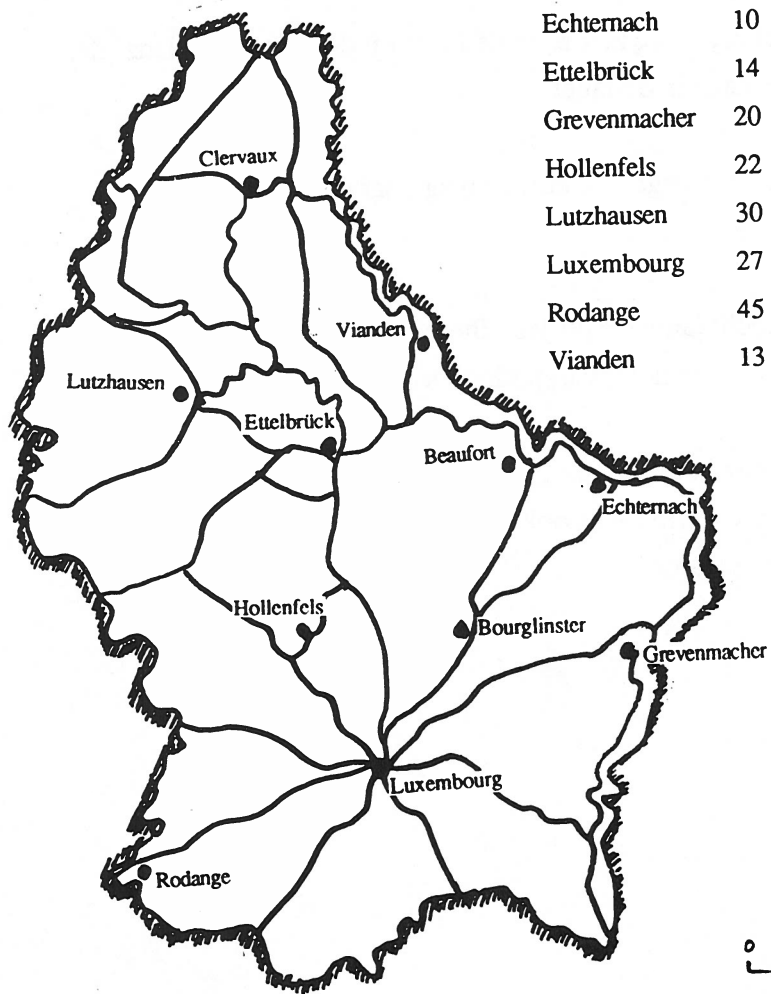
1. Waarom staat er '*de kortste weg*' en '*een korte rondreis*'?

In Luxemburg zijn in totaal elf jeugdherbergen. Je ziet ze in de kaart op de volgende bladzijde. De afstanden tussen die jeugdherbergen staan in de tabel.

2. Wat is vanuit de verschillende jeugdherbergen de kortste weg naar de hoofdstad Luxemburg?
3. Stippel een zo kort mogelijke fietstocht langs de elf jeugdherbergen uit. Gebruik alle hulpmiddelen die je denkt te kunnen gebruiken; van potlood tot en met computer.
4. Maar een kort verslag waarin staat hoe je de vragen 2 en 3 hebt gedaan en wat het resultaat is. Geef ook aan, of je zelf, als je op vakantie was ook de tocht van vraag 3 zou kiezen, of dat je liever een andere route nam en waarom.

afstandstabel Luxemburg hemelsbreed en over de weg:

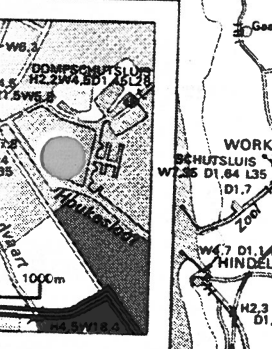
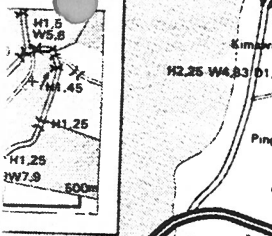
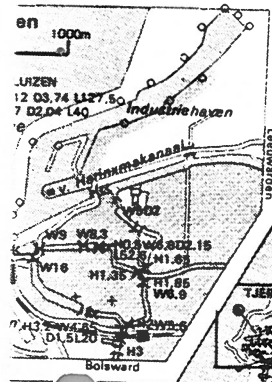
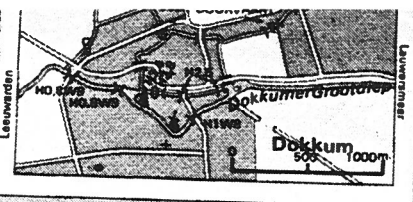
	Beaufort	Bourglinster	Clervaux	Echternach	Ettelbrück	Grevenmacher	Hollenfels	Lutzhausen	Luxembourg	Rodange	Vianden
Beaufort	-	19	49	17	24	41	45	49	36	59	21
Bourglinster	16	-	62	24	27	22	26	52	17	40	43
Clervaux	31	42	-	58	35	85	56	43	64	87	41
Echternach	10	19	39	-	33	27	49	58	35	58	33
Ettelbrück	14	18	24	24	-	57	21	25	29	52	16
Grevenmacher	20	16	51	15	31	-	42	82	28	51	54
Hollenfels	22	12	38	28	15	28	-	46	14	37	37
Lutzhausen	30	33	19	39	16	47	25	-	59	82	41
Luxembourg	27	12	50	30	26	24	12	37	-	23	45
Rodange	45	32	58	51	38	45	24	40	22	-	68
Vianden	13	26	19	21	12	33	27	23	36	50	-



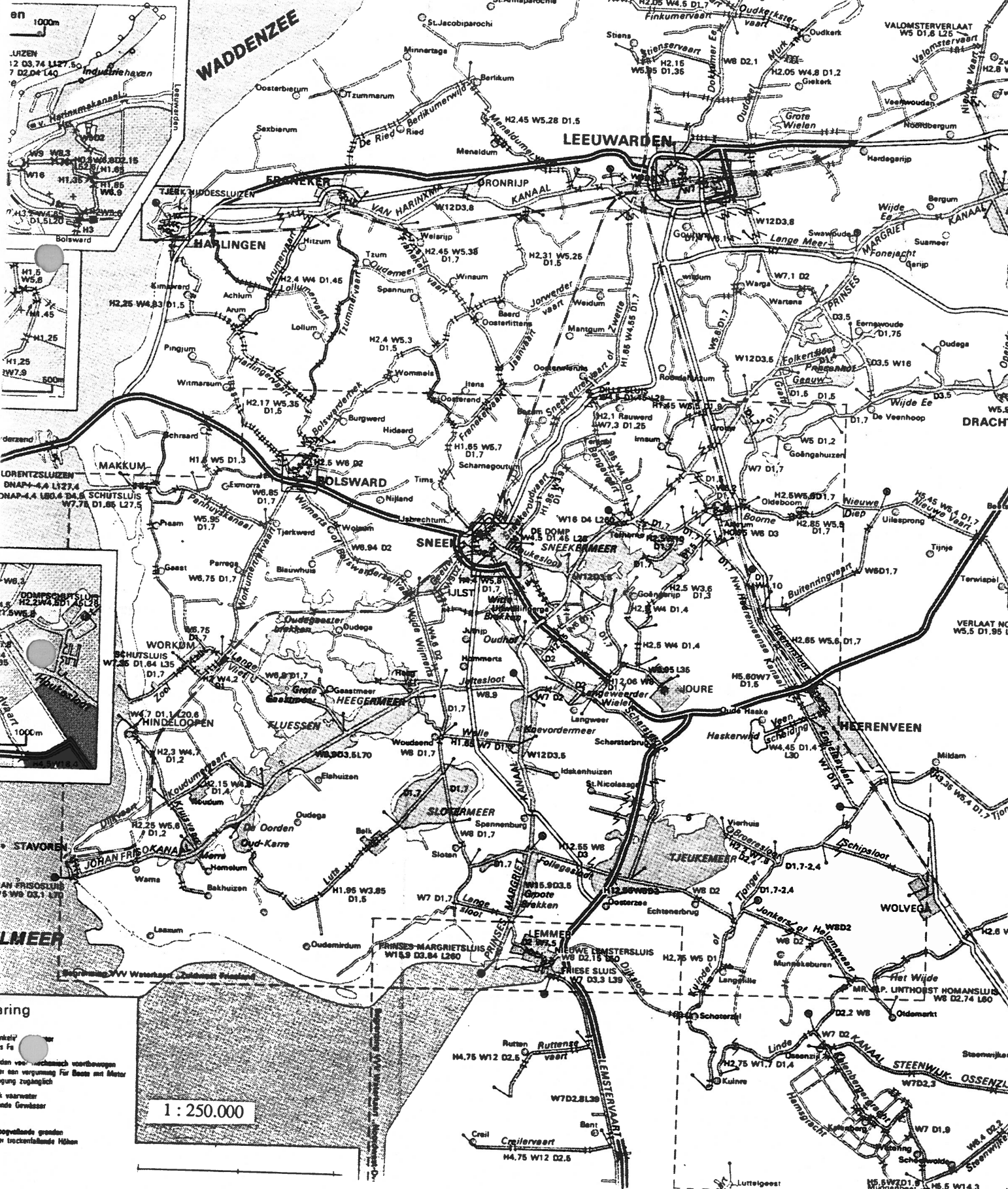
Kaart Groningen, Drenthe

Historische

1:250.000
De Boer Maritiem



De Boer Maritiem
1:250.000
Aankoop van de kaart is gelijk aan een vergoeding voor de kosten van de kaart en de aflevering van de kaart.
De kaart is vervaardigd door de Boer Maritiem.
De kaart is vervaardigd door de Boer Maritiem.



1 : 250.000

archieff FI
Routeproblemen

02.01.14

Leerlingenmateriaal
Heuvel, G. van den , H. Verhage i.s.m. H.