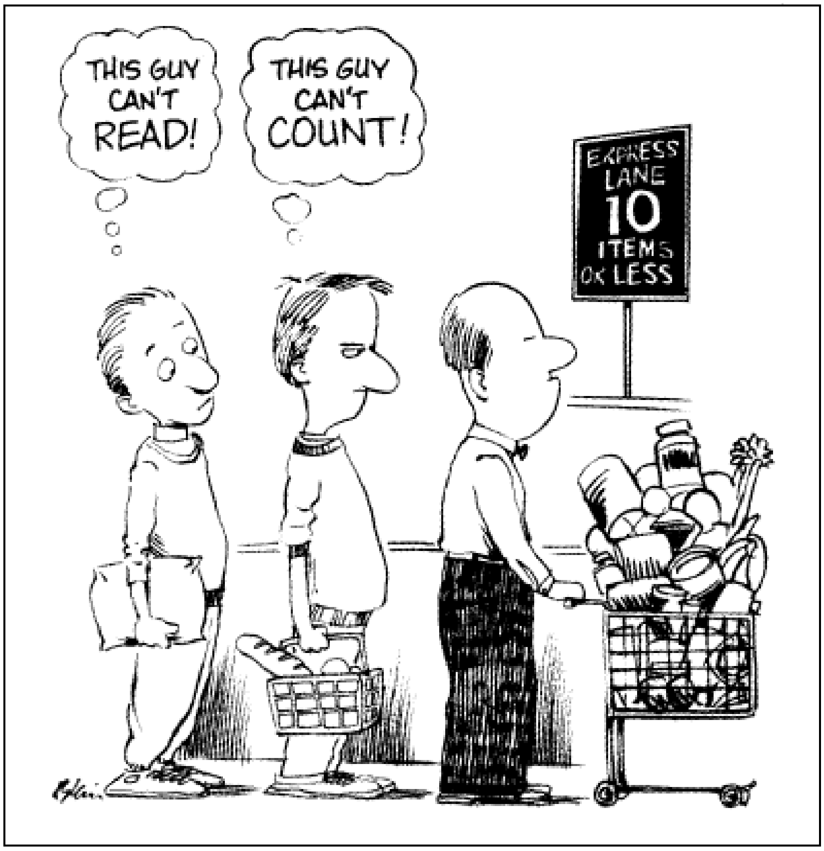
Rekenen met het hoofd



Module Reken VOort – havo

Titel	Rekenen met het hoofd
Onderdeel	Module 1 - leerlingentekst
Versie 2	25-08-2010 (gereviseerde versie)

Colofon

Rekenen met het hoofd
Auteurs: Lonneke Boels, Michiel Doorman, Swier Garst, Ruud Houweling, Luuk Koens, Henk van der Kooij, Wim Kremers en Theo-Jan van de Pol
Experimenteel materiaal: www.fi.uu.nl/experimenteel/rekenvoort/havo

www.nvvw.nl/page.php?id=7789

Module

Deze module richt zich op de basisbewerkingen en getalbegrip. Het is de eerste module van een serie van 4 modules. De studielast is 12 SLU.

Project

Het ministerie van OCW heeft in november 2008 een subsidie verstrekt aan de NVvW voor het ontwikkelen van rekenprogramma's voor:

- havo 4/5 profiel C&M
- vmbo 3/4 voor de sectoren Zorg & Welzijn en Economie

Deze programma's worden door de NVvW, in samenwerking met het Freudenthal Instituut en in overleg met andere belanghebbenden, ontwikkeld en getest in de schoolpraktijk tussen januari 2009 en juni 2011.

Projectscholen in 2009: Christelijk Lyceum Delft te Delft, Comenius College te Hilversum, Ichthuscollege te Veenendaal, Liemers College te Zevenaar, Pleincollege Bisschop Bekkers te Eindhoven, RGO Middelharnis te Middelharnis.

Projectscholen in 2010: Christelijk Lyceum Delft te Delft, Comenius College te Hilversum, Ichthuscollege te Veenendaal, Liemers College te Zevenaar, Pleincollege Bisschop Bekkers te Eindhoven, ORS Lek en Linge te Culemborg, Strabrecht College te Geldrop.

Inhoud

Rekenen

1. Basisbewerkingen

In deze eerste module komen de basisbewerkingen op getallen aan bod. Het meeste daarvan heb je al veel vaker gezien en ook gebruikt. Maar soms is het goed om wat je al weet (of niet goed meer weet) eens op een andere manier te verwerken.
Er volgen nu eerst een paar instapproblemen. Bedenk zelf hoe je op een handige manier de antwoorden kunt vinden.

Probleem 1 Vakken vullen

Thomas heeft een bijbaantje in de supermarkt. Woensdagavond moet hij vakken vullen. Hij is bezig met blikken kattenvoer. Op het schap dat hij moet vullen, passen 5 blikjes naast elkaar, 2 blikjes op elkaar en 4 blikjes achter elkaar.

\> Hoeveel blikjes passen er in totaal in dit schap?

Toen Thomas begon met vullen was de achterste rij helemaal gevuld. Daarnaast lagen er nog 3 losse blikjes.

\> Hoeveel blikjes moet Thomas erbij zetten?

De blikjes worden verpakt in plastic aangeleverd. Zo’n verpakking is 3 blikjes breed en 4 blikjes lang.

\> Hoeveel verpakkingen heeft Thomas nodig om het schap vol te maken?

Naast kattenvoer moet Thomas die avond ook soepblikken aanvullen. Bij de champignonsoep passen nog 13 blikken, bij de tomatensoep 24, bij de groentesoep 17 en bij de kippensoep 8.

\> Hoeveel soepblikken moet Thomas in totaal aanvullen?

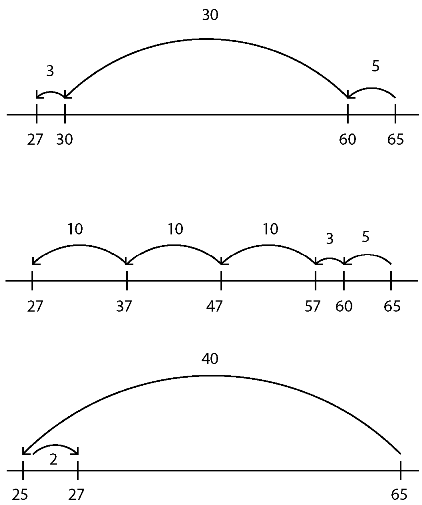
Aan het voorbeeld van Thomas is te zien dat berekeningen op veel verschillende manieren voorkomen. Iedereen komt ermee in aanraking en het is erg handig als je zelf vaardig bent in rekenen. De situatie van Thomas laat ook zien dat je niet altijd een rekenmachine tot je beschikking hebt. Toch is het in zijn geval erg handig als je niet met onnodig veel verpakkingen hoeft te zeulen, maar je van tevoren een inschatting kunt maken hoeveel je nodig hebt.

We beginnen deze module met de meest elementaire onderdelen van het rekenen. De bewerkingen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen worden besproken en geoefend. Ook het tafeldictee krijgt een plaats. Hoe beter je de tafels kent, hoe gemakkelijker het rekenwerk in de komende tijd is.

1.1 Bewerkingen in beeld 1: optellen en aftrekken

Onder basisvaardigheden verstaan we het rekenen tot 20 (twee getallen, beide kleiner dan 20, optellen of aftrekken) en de tafels tot 10. Ook de kwadraten tot 20 moeten tot je standaarduitrusting behoren.
Het rekenen tot 20 en de kennis van de tafels moet zodanig geautomatiseerd zijn, dat je snel de antwoorden weet op opgaven uit die categorieën.

Het rekenen tot 100 moet uit het hoofd gedaan kunnen worden met behulp van een strategie.
Bij het oefenen is het vaak handig om je berekeningen zichtbaar te maken met plaatjes (*visualisaties*). Later kun je die plaatjes wellicht in je hoofd maken in plaats van ze te tekenen op papier.
Hiernaast zie je 3 strategieën om de opgave 65 – 38 = ... uit te werken en hoe je die strategie met een getallenlijn kunt visualiseren:



Bewerkingen met getallen

De meest bekende bewerkingen zijn optellen en aftrekken.

Rekenstrategieën bij optellen en aftrekken

Optelstrategieën:

68 + 16 =
68 + 10 + 6 =
78 + 6 = 84
(door eerst een gemakkelijk getal erbij op te tellen, dus splitsing van 16 in 10 en 6)

68 + 16 =
68 + 2 + 14 =
70 + 14 = 84
(door splitsing van 16 in 2 en 14 tiental volmaken tot 70 en daarbij 14 op te tellen)

68 + 16 =
68 + 12 + 4 =
80 + 4 = 84
(door splitsing van 16 in 12 en 4 het tiental volmaken tot 80 plus de rest)

Aftrekstrategieën:

78 – 19 =
78 – 10 – 9 =
68 – 9 =
68 – 8 – 1 =
60 – 1 = 59
(eerst 10 aftrekken, dan 9 splitsen in een handig getal en de rest.)

78 – 19 =
78 – 18 –1 =
60 – 1 = 59
(een handig getal nemen om af te trekken en aanvullen wat er nog gedaan moet worden; hier nog één aftrekken)

78 – 19 =
78 – 20 + 1 =
58 + 1 = 59
(een mooi rond getal nemen en kijken hoe je dat moet herstellen; hier één teveel afgetrokken, dus weer één erbij opgeteld)

Natuurlijk zijn dit maar voorbeelden van strategieën. Belangrijk is dat je jouw eigen strategie gebruikt en eventueel verbetert. Over je aanpak praten met medeleerlingen en docent, bijvoorbeeld aan de hand van plaatjes, zal daarbij zeker helpen.

Opgaven

1. Rekenen in beeld gebracht 1

Kijk naar de drie plaatjes bij de opgave 65 – 38 = ...
a. Hoe wordt hier gerekend?
b. Bereken jij 65 – 38 = ... op een andere manier? Maak er een plaatje bij!

2. Rekenen in beeld gebracht 2

Bereken en maak, waar nodig, een plaatje:

a. 12 + 4	e. 17 – 5
b. 8 + 9	f. 23 – 8
c. 17 + 23	g. 47 – 17
d. 145 + 67	h. 137 – 58

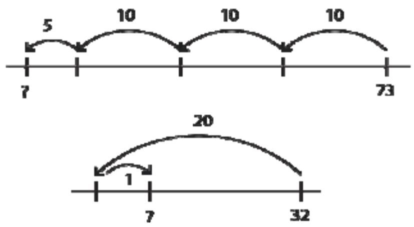
3. Rekenen in beeld gebracht 3

Bereken. Laat steeds met een plaatje zien welke strategie je hebt gebruikt.

a. 68 + 24	e. 44 + 29
b. 82 – 9	f. 18 + 83
c. 17 + 58	g. 141 – 77
d. 53 – 17	h. 234 – 67

4. Van plaatje naar berekening

Bekijk de plaatjes hiernaast waarmee twee berekeningen worden gevisualiseerd.
a. Bij welke opgaven passen deze plaatjes?
b. Welke uitkomsten hebben die opgaven?

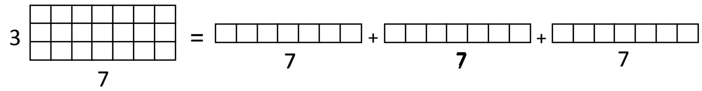


5. Doortellen of aftrekken?

Op de markt betaal je met een briefje van €50. De boodschappen kosten €26,80.
a. Hoe berekent de marktkoopman wat hij moet teruggeven?
b. Jij bent de klant. Hoe bereken jij wat je moet terugkrijgen?

1.2 Bewerkingen in beeld: Vermenigvuldigen, delen en machtsverheffen.

Een *vermenigvuldiging* is eigenlijk een verkorte schrijfwijze voor een herhaalde optelling:
3 x 7 betekent in feite 7 + 7 + 7 en
6 x 15 betekent 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15
Ook hier kunnen plaatjes helpen:

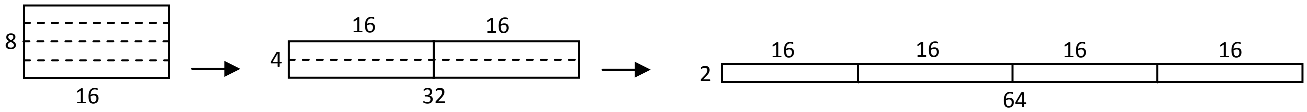


Een *deling* is eigenlijk een verkorte schrijfwijze voor herhaald aftrekken:
24 ÷ 3 vraagt naar “hoe vaak past 3 in 24”. Door herhaald 3 af te trekken kom je op het antwoord: “8 keer”. Controle: 8 x 3 = 24.
Bij 25 ÷ 3 kom je ook uit op “dat past 8 keer”, maar er is dan nog een rest, want je eindigt bij herhaald aftrekken bij 1 in plaats van bij 0.
Controle: 8 x 3 + 1 = 24 + 1 = 25.
Elke deling is dus te controleren met een vermenigvuldiging; vermenigvuldigen en delen zijn omgekeerde bewerkingen.

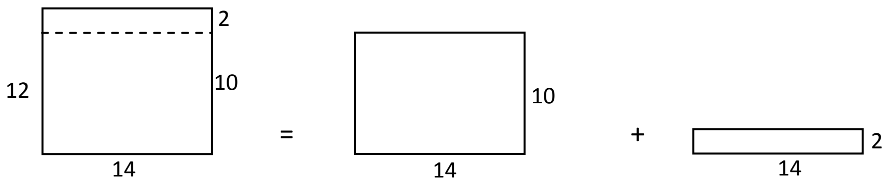
Machtsverheffen is een verkorte schrijfwijze voor een herhaalde vermenigvuldiging:
3 x 3 x 3 x 3 = 3^4 = 81; 10 x 10 x 10 x 10 x 10 x 10 = 10^6= 1 000 000 en dat is 1 miljoen.
Het *kwadraat* is een bijzonder geval van machtsverheffen: tot de macht 2
Bijvoorbeeld 13 x 13 = 13^2 = 169. 13^2 wordt het “kwadraat van 13” genoemd, met uitkomst 169.

Rekenstrategieën bij vermenigvuldigen

Verdubbelen en halveren: 16 x 8 = 32 x 4 = 64 x 2 = 128



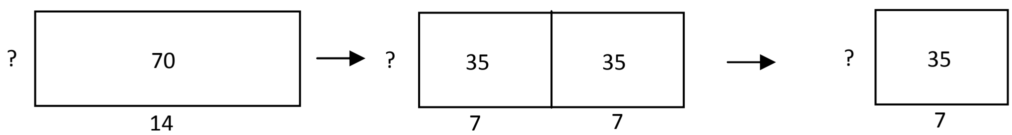
Handig splitsen: 12 x 14 = 10 x 14 + 2 x 14 = 140 + 28 = 168



De twee illustraties maken gebruik van de oppervlakte van rechthoeken. Dat is nog niet zo gek, want voor een rechthoek geldt: *Oppervlakte* = *lengte* x *breedte*. Dus een vermenigvuldiging kan goed met behulp van een rechthoek worden gevisualiseerd: de zijden zijn gegeven; wat is de oppervlakte?
Engelstalige landen gebruiken het idee van oppervlakte ook voor “kwadraat”. Ze zeggen:
The square (= vierkant) of 13 is 169.

Rekenstrategieën bij delen

Ook nu weer een rechthoek. Maar nu is de oppervlakte gegeven en de lengte van één zijde; wat is de lengte van de andere zijde?
Beide getallen evenveel keer zo groot of evenveel keer zo klein:
70 ÷ 14 = 35 ÷ 7 = 5 (beide getallen gehalveerd)
435 ÷ 5 = 870 ÷ 10 = 87 (beide getallen verdubbeld)



Opgaven

6. Vermenigvuldigen en delen: kies een strategie

Bereken de uitkomsten bij de volgende opgaven. Laat zien hoe je dit hebt aangepakt.
Gebruik eventueel een plaatje, maar beredeneren in woorden is zeker ook goed.

a. 5×6	d. $24 \div 6$
b. 7×12	e. $48 \div 3$
c. 5×83	f. $56 \div 8$

7. Vermenigvuldigings strategie

Bij 9×23 is het handig om te rekenen via 10×23, dus $9 \times 23 = 10 \times 23 - 1 \times 23 = 230 - 23 = 217$.
Bedenk handige strategieën bij de volgende opgaven.

a. 11×18	d. 32×9
b. 39×21	e. 72×11
c. 19×23	f. 13×29

8. Deelstrategie

Maak beide getallen bij een deling evenveel keer zo groot of evenveel keer zo klein, bijvoorbeeld:

$42 \div 3\frac{1}{2} = 84 \div 7 = 14$. Beide getallen zijn hier verdubbeld.

Maak de volgende opgaven op een handige manier.

a. $56 \div 14$	d. $168 \div 24$
b. $165 \div 15$	e. $135 \div 45$
c. $38 \div \frac{1}{2}$	f. $48 \div 5\frac{1}{3}$

9. Gegeven is het antwoord, wat was de vraag?

a. De uitkomst van een vermenigvuldiging van twee gehele getallen is 210.
Wat waren de twee getallen die zijn vermenigvuldigd? Zijn er meer mogelijkheden?

b. De uitkomst van een vermenigvuldiging van drie gehele getallen is 210.
Wat waren de drie getallen die zijn vermenigvuldigd? Zijn er meer mogelijkheden?

c. De uitkomst van een deling van twee gehele getallen is 5.
Wat waren de twee getallen? Kun je alle mogelijkheden vinden?

10. Het verschil tussen vermenigvuldigen en delen

Bij vermenigvuldigen mag je het ene getal 3 keer zo groot maken als je tegelijkertijd het andere getal 3 keer zo klein maakt. Bij delen moet je het andere getal ook drie keer zo groot maken als je het ene getal 3 keer zo groot maakt.

a. Wat gebeurt er met de uitkomst van een vermenigvuldiging als je allebei de getallen 2 keer zo groot maakt? Kun je dat uitleggen met een plaatje?

b. Wat gebeurt er met de uitkomst van een deling als je het eerste getal 2 keer zo groot maakt en het tweede getal 2 keer zo klein? Kun je dat uitleggen met een plaatje?

11. Machtsverheffen

Bereken:

a. 3^2 b. 6^2 c. 1^5 d. 3^3 e. 2^4 f. 4^2

1.3 De volgorde van bewerkingen

Tot nu toe heb je steeds berekeningen gemaakt met twee getallen.

Als er in een opgave meerdere bewerkingen voorkomen is de volgorde van berekenen van belang. Daarover zijn de volgende afspraken gemaakt:

1. eerst machtsverheffen (daarbij hoort ook worteltrekken),
2. vermenigvuldigen en delen, in de volgorde waarin het staat,
3. optellen en aftrekken, in de volgorde waarin het staat.

Dus: 23 + 7 x 8 = 23 + (7 x 8) = 23 + 56 = 79 en niet: (23 + 7) x 8 = 30 x 8 = 240
15 – 7 + 21 = (15 – 7) + 21 = 8 + 21 = 29 en niet: 15 – (7 + 21) = 15 – 28 = -13

Deze volgorde kan alleen gewijzigd worden door het gebruik van haakjes.
Wat tussen haakjes staat wordt eerst uitgerekend, ook weer in de bovengenoemde volgorde.

Voorbeelden:
$6 \times (3 + 5^2) = 6 \times (3 + 25) = 6 \times 28 = 168$
$5 + 3 \times (5^3 - 36) = 5 + 3 \times (125 - 36) = 5 + 3 \times 89 = 5 + 267 = 272$

Eigenschappen bij de basisbewerkingen

Er zijn twee eigenschappen die bij sommige bewerkingen wel en bij andere niet gelden. Dat zijn de *wissel* eigenschap: je mag twee (of meer) getallen van plaats verwisselen
en de
schakel eigenschap: je mag de volgorde van rekenen veranderen bij twee of meer getallen.

Je hebt vast al eens gebruikt: 35 x 11 = 11 x 35 = 385, omdat dit makkelijker rekent.
En ook: 37 + 75 + 25 = 37 + 100 = 137, ook vanwege het gemak.

Bekijk de volgende tabel met voorbeelden goed:

bewerking	**wisseleigenschap**	**schakeleigenschap**
Optellen	32 + 17 = 49 17 + 32 = 49	32 + 17 + 53 = (32 + 17) + 53 = 49 + 53 = 102 32 + 17 + 53 = 32 + (17 + 53) = 32 + 70 = 102
Aftrekken	32 – 17 = 15 17 – 32 = -15	(32 – 17) – 53 = 15 – 53 = -38 32 – (17 – 53) = 32 – (-36) = 4
Vermenigvuldigen	12 x 17 = 204 17 x 12 = 204	12 x 17 x 3 = (12 x 17) x 3 = 204 x 3 = 612 12 x 17 x 3 = 12 x (17 x 3) = 12 x 51 = 612
Delen	75 ÷ 5 = 15 $5 \div 75 = \frac{1}{15}$	(75 ÷ 5) ÷ 3 = 15 ÷ 3 = 5 $75 \div (5 \div 3) = 75 \div \frac{5}{3} = 45$

Conclusie:
de twee eigenschappen gelden wel voor optellen en vermenigvuldigen, maar niet voor aftrekken en delen!!

Opgaven

12. Volgorde van bewerkingen 1

Denk aan de regels voor de volgorde!

a. $17 + 58 - 5$
b. $8 - 3^2 \div 9$
c. $25 - 3 \times 15 : 5$
d. $5 - 3 \times (8 + 7)$
e. $(5 - 3) \times 8 + 7$
f. $72 : (13 - 2 \times 2) \times 2$

13. Volgorde van bewerkingen 2

Bereken

a. $12 - 3 + 5$
b. $8 + 3 \times 3$
c. $72 \div (13 - 2 \times 2)$
d. $(2 + 4^2) \times 3 + 3$
e. $36 \div 3 \times 3$
f. $23 - 2 \times 4 + 8$
g. $23 - 2 \times (4 \times 8)$
h. $2 + 4^2 \times (3 + 3)$

14. Wisselen of schakelen?

Bereken, maar bedenk eerst wat je wilt doen en of dat wel mag!
Probeer uit te leggen waarom jouw methode goed en handig is.

a. $13 + 43 + 17$
b. 39×11
c. $17 \times 8 \times 12\frac{1}{2}$
d. $83 - 47 - 13$
e. $19 \times 12 \times 5$
f. $25 \times 18 + 22 \times 25$

15. Waar staan de haakjes?

De uitkomsten bij de volgende opgaven zijn fout. Dat komt doordat er in de opgave haakjes zijn weggelaten. Waar moeten die staan?

a. $25 - 18 - 10 = 17$
b. $25 \times 20 - 15 \div 5 = 25$
c. $28 \div 7 - 3 = 7$
d. $7 + 3^2 - 80 + 20 = 0$
e. $12 - 3 \times 6 + 2 = 72$
f. $72 \div 6 \div 2^2 = 8$

16. Van alles wat

Bekijk de opgave eerst goed en bedenk een passende strategie.

a. $6798 + 1002 =$
b. $3425 - 998 =$
c. $88 \times 36 + 36 \times 12 =$
d. $3 \times 29 \times 33\frac{1}{3} =$
e. $6837 + 585 + 2163 =$
f. $(10 + 15 \times 6) \div 4 =$
g. $7 \times 3^2 + 1284 + 37 =$
h. $27 \div 0{,}09 =$
i. $11^3 =$
j. $18 + 81 \div 3^2 =$

17. Oefenen: maak 24 met vier getallen

Ga naar http://www.fi.uu.nl/wisweb/welcome.html en open de applet “Flippo”. Je krijgt steeds 4 getallen waarmee je door het zetten van haakjes of de bewerkingen +, -, x, ÷ zo dicht mogelijk bij de uitkomst 24 moet komen. Met 8, 8, 4 en 2 kan het bijvoorbeeld zo: (8 + 8 – 4) x

1.4 Contextopgaven

Bij de volgende serie opgaven moet je eerst bedenken wat voor soort berekeningen nodig zijn.

18. Voorraad op pallets

De buurtsuper krijgt een aantal pallets met wasmiddel om de voorraad aan te vullen. Men had nog 67 pakken en er worden 24 pallets afgeleverd met elk 36 pakken.
Hoe groot is de voorraad aan pakken wasmiddel van de buurtsuper na aflevering van de pallets?

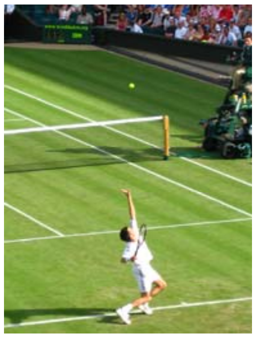
19. Darten

Bij darten start je met 501 punten. Elke keer als je gooit wordt je score afgetrokken tot je precies op 0 uitkomt. Bram staat op 378 en gooit met zijn drie pijltjes 17, 20 en 15.
Wat is zijn stand aan het begin van de volgende beurt?

20. Pepermunt

In een rol pepermunt zitten 15 pepermuntjes. Er gaan 320 rollen in een doos en er staan 60 dozen op een pallet. In een vrachtwagen staan 48 pallets.
Hoeveel pepermuntjes zitten er eigenlijk in zo'n vrachtwagen?

21. Tennis



Tijdens het tennistoernooi op Wimbledon doen 256 deelnemers mee. Er spelen telkens 2 spelers tegen elkaar; de verliezer valt af en de winnaar gaat naar de volgende ronde. Het laatste tweetal speelt de finale, waaruit de winnaar tevoorschijn komt.
a. Hoeveel wedstrijden zijn er in de eerste ronde van dat toernooi?
b. En in de tweede ronde?
c. En in totaal?

22. Loon naar werken

Aan het eind van de maand krijg ik mijn loon als vakkenvuller bij de buurtsuper. Ik heb deze maand 28 uur en een kwartier gewerkt. Mijn uurloon is € 4,30. Verder krijg ik deze maand als bonus een eenmalige uitkering van € 17,50.
Wat krijg ik aan het eind van die maand?

23. Brandstofkosten

Mijn scooter rijdt 1 (liter) op 28 (km). Ik heb in een week 425 km gereden. De benzineprijs was toen € 1,79 per liter.
Wat was ik die week kwijt aan de brandstof?

24. Telefoonkosten

Telefoonaanbieder Adios heeft een starttarief van € 0,36 en rekent per minuut (of gedeelte ervan) € 0,16.
Voor telefoonaanbieder Bellenmaar gelden de volgende bedragen: starttarief € 0,24 en per minuut of gedeelte ervan € 0,18.
Ik bel gemiddeld 840 minuten over 124 gesprekken.
Bij welke aanbieder ben ik het goedkoopste uit?

2. Positiestelsel en cijferen

In hoofdstuk 1 zijn strategieën bekeken die je kunnen helpen bij het handig rekenen.
We hebben steeds aangenomen dat die opgaven wel te doen waren zonder dat daarvoor een vaste methode werd gebruikt. Handig rekenen vanuit een eigen strategie was vaak mogelijk omdat je eerst goed naar de vorm van de opgave keek.

Er zijn ook vaste rekenmethoden die je altijd kunt toepassen en die zeker bij vervelende berekeningen uitkomst bieden. Je volgt daarbij gewoon een vast stappenplan.
Die manier van rekenen wordt *cijferen* genoemd.

Het cijferen is eigenlijk alleen maar een compacte manier van berekeningen noteren en die manier kan worden verklaard en begrepen met behulp van het *positiestelsel*.
Een getal, zoals 123456, wordt geschreven met cijfers. De positie van het cijfer in het getal bepaalt de waarde van dat cijfer. De 6 betekent 6 eenheden, maar de 4 staat voor 4 honderdtallen.
Voor de gehele getallen (die doen we eerst; kommagetallen volgen snel) kun je je voorstellen dat de cijfers van een getal in verschillende bakjes zijn gezet. Die bakjes zijn van rechts naar links opeenvolgende machten van 10. In die bakjes kunnen alleen de cijfers 0, 1, 2, ..., 9 voorkomen.

1 000 000-tallen	100 000-tallen	10 000-tallen	1000-tallen	100-tallen	10-tallen	eenheden (1-tallen)
0	1	2	3	4	5	6

Probleem 1

> Waarom kan in het 1000-tallen bakje bijvoorbeeld niet het getal 14 staan?

De nul (0) speelt een belangrijke rol in het positiestelsel: bij 2010 mag je de nullen niet weglaten en ook niet bij 5000 of bij 5,0001. Maar als je het getal 5,0000 ziet dan lijken de nullen niet belangrijk omdat ze geen extra informatie toevoegen over het getal.

Probleem 2

> Wat betekenen de vier nullen in 50000? En de twee nullen in 2010?
> Waarom mag je de genoemde nullen niet weglaten? En waarom bij 5,000 misschien wel?

Als je weet hoe het positiestelsel in elkaar zit valt ook te begrijpen hoe rekenregels bij de basisbewerkingen werken.

Probleem 3

Klopt dit wel?
3009 + 15 = 4509
3009 - 15 = 1509
> Natuurlijk niet! Maar welke fout wordt gemaakt?
> En hoe vind je de goede uitkomsten dan wel?

2.1 Het positiestelsel: optellen en aftrekken

Dit herken je misschien nog wel: 8949 + 285 uitrekenen door de twee getallen onder elkaar te zetten:

8 9 4 9 2 8 5 + ———	*1* 8 9 4 9 2 8 5 + ——— 4	*1 1* 8 9 4 9 2 8 5 + ——— 3 4	*1 1 1* 8 9 4 9 2 8 5 + ——— 2 3 4	*1 1 1* 8 9 4 9 2 8 5 + ——— 9 2 3 4

Waarom die enen worden toegevoegd (hierboven cursief weergegeven boven het eerste getal) tijdens het uitrekenen valt te begrijpen door de getallen in bakjes te plaatsen zoals hieronder.

bewerkingen	**1000-tallen**	**100-tallen**	**10-tallen**	**eenheden**
eerste getal	8	9	4	9
tweede getal	0	2	8	5
opgeteld:	8	11	12	14

Zodra bij een optelling een getal in een bakje groter wordt dan 9, kan er worden overgeheveld naar het bakje links daarvan. Dus de 14 eenheden bevat één 10-tal dat kan worden overgeheveld naar de het 10-tallen bakje. De twaalf 10-tallen hebben één 100-tal dat kan worden overgeheveld naar het 100-tallen bakje en de elf 100-tallen hebben één 1000-tal dat kan worden weggeschreven naar het 1000-tallen bakje. Stapsgewijs zie je dat hieronder weergegeven.

bewerkingen	**1000-tallen**	**100-tallen**	**10-tallen**	**eenheden**
opgeteld:	8	11	12	14 (=10+4)
10-tal overhevelen	8	11	12+1 (=10+3)	4
100-tal overhevelen	8	11+1 (=10+2)	3	4
1000-tal overhevelen	8+1	2	3	4
uitkomst:	9	2	3	4

Bij aftrekken kun je de bakjes ook gebruiken om het verschil van twee getallen uit te rekenen.
Bijvoorbeeld 1842 - 861
In de korte notatie ziet dat er zo uit:

1 8 4 2 8 6 1 - ———	1 8 4 2 8 6 1 - ——— 1	*7* 1 ~~8~~ 4 2 8 6 1 - ——— 8 1	*0 7* ~~1~~ ~~8~~ 4 2 8 6 1 - ——— 9 8 1

Als je twee cijfers tussen 0 en 9 van elkaar aftrekt kan het gebeuren dat je tekort komt, zoals bij 4 - 6 hierboven. Je komt twee tientallen tekort en daarom leen je een honderdtal (dus 10 tientallen) van het bakje links om zodoende 14 - 6 = 8 te kunnen uitvoeren.

bewerkingen	**1000-tallen**	**100-tallen**	**10-tallen**	**eenheden**
getal 1	1	8	4	2
getal 2		8	6	1
aftrekken	1	0	2 tekort	1
100-tal overhevelen	1	1 tekort	8	1
1000-tal overhevelen	0	9	8	1

Opgaven

25. Optellen 1

a.	220	b.	253	c.	28	d.	351	e.	304	f.	347
	16 +		17 +		180 +		81 +		71 +		61 +

26. Optellen 2

a.	43	b.	793	c.	124	d.	231	e.	376	f.	723
	261 +		28 +		28 +		193 +		154 +		487 +

27. Aftrekken 1

a.	132	b.	132	c.	208	d.	208	e.	144	f.	144
	91 -		93 -		105 -		109 -		113 -		48 -

28. Aftrekken 2

a.	403	b.	723	c.	124	d.	231	e.	376	f.	723
	21 -		28 -		28 -		193 -		154 -		487 -

Cijferend optellen en aftrekken met kommagetallen.

In het positiestelsel staan na de komma eerst de tienden, dan de honderdsten, dan de duizendsten, enz.

duizendtallen	honderdtallen	tientallen	eenheden	,	tienden	honderdsten	duizendsten

Een voorbeeld: bereken 2735,023 + 36,508
We gebruiken de bakjes zoals hierboven getekend en vullen daar de cijfers in die zijn gegeven:

bewerkingen	**1000-tallen**	**100-tallen**	**10-tallen**	**eenheden**	**,**	**tienden**	**honderdsten**	**duizendsten**
getal 1	2	7	3	5	,	0	2	3
getal 2	0	0	3	6	,	5	0	8
optellen	2 + 0 = 2	7 + 0 = 7	3 + 3 = 6	5 + 6 = 11	,	0 + 5 = 5	2 + 0 = 2	3 + 8 = 11
overhevelen	2	7	7	1	,	5	3	1

Het antwoord is dus 2771,531

29. Verklaar ...

Waarom is die laatste extra regel 'overhevelen' nodig in het rekenschema hierboven?

30. Cijferen met kommagetallen

a. 243,8 + 58
b. 122,4 + 3,82
c. 372,91 + 1,3
d. 428,7 – 69,8
e. 231,04 – 168,22
f. 282,88 – 191,79
g. 3,24 – 1,38
h. 3,08 – 2,28
i. 1008,202 – 204,038

2.2 Het positiestelsel: vermenigvuldigen en delen

Vermenigvuldigen.

Bij het cijferend vermenigvuldigen gebruik je de strategie van het opdelen. Wanneer je 234 met 118 wilt vermenigvuldigen, doe je eerst 4 × 118, vervolgens 30 × 118 en tenslotte 200 × 118.
Dus het getal 234 is opgedeeld in 4 eenheden, 3 tientallen en 2 honderdtallen. Als laatste tel je de drie uitkomsten bij elkaar op. Je ziet dit hieronder voorgedaan.

3 1 1 8 4 × 4 7 2	*2* 1 1 8 3 0 × 3 5 4 0	*1* 1 1 8 2 0 0 × 2 3 6 0 0	1 1 8 2 3 4 × 4 7 2 3 5 4 0 2 3 6 0 0 + 2 7 6 1 2

Delen.

Bij het delen kan de *hapmethode* worden gebruikt.
Bij de deling 552 : 12 wil je weten hoe vaak het getal 12 past in het getal 552.
De hapmethode werkt als volgt. Wanneer je 552 moet delen door 12 en je weet niet direct het antwoord, dan haal je een veelvoud van 12, bijvoorbeeld het 40-voud (=480), van de 552 af. Je houdt dan nog 552 – 480 = 72 over. En dat is het 6-voud van 12. Het eindantwoord is dan 40 + 6 = 46.
De twee stappen in beeld:

```
12  / 552 \    40            12  / 552 \    40 + 6 = 46
      480   -                      480   -
       72                           72
                                    72   -
                                     0
```

Als je in plaats van meteen 40 keer hebt gekozen voor 10 keer of 20 keer 12, dan had je meer stappen nodig om het eindresultaat te krijgen. En dat is bij de 'hapmethode' ook toegestaan.

Voor het delen bestaat ook een verkorte methode: de *staartdeling.*
Je bekijkt het getal wat je deelt (hier 552) dan als volgt. Je ziet vooraan een 5 staan. Daar past 12 niet in. Je neemt de tweede 5 erbij en krijgt dus 55. Daar past 12 vier keer in. Aftrekken levert 7. Dan voeg je het laatste cijfer 2 toe aan de 7 en je bedenkt hoe vaak 12 daarin past: 6 keer.
In beeld:

```
12  / 552 \    4             12  / 552 \    46
      48    -                      48¦   -
       7                            72
                                    72
                                     0
```

Je maakt bij de staartdeling ook weer gebruik van het positiestelsel zonder dat je dat ziet in het opschrijven. Je deelt eigenlijk niet 55 door 12, maar 550 en het antwoord is dus niet 4, maar 40.
Voor zowel de hapmethode als voor de staartdeling is het belangrijk dat je de tafels goed kent.

Opgaven

31. Cijferend vermenigvuldigen

Gebruik het cijferen als je niet direct het antwoord weet.

a.	b.	c.	d.	e.	f.
14	25	8	103	33	40
8 ×	7 ×	28 ×	14 ×	44 ×	50 ×

32. Vermenigvuldigen, ook met kommagetallen

Bereken met cijferen. Maak een schatting van de uitkomst om je antwoord te controleren.

a.	b.	c.	d.	e.	f.
18	1,2	1,8	376	723	132,4
24 ×	15 ×	2,4 ×	154 ×	487 ×	0,85 ×

33. Delen: hoe vaak past ...

Hoe vaak past het? Als je niet op nul uitkomt, wat is dan de rest?
Kies zelf de meest geschikte methode.

a. 64 ÷8	e. 104 ÷ 13	i. 210 ÷ 25	m. 110 ÷ 15	q. 732 ÷ 3
b. 93 ÷ 3	f. 98 ÷ 14	j. 1515 ÷ 30	n. 9999 ÷ 99	r. 5555 ÷ 25
c. 68 ÷ 4	g. 100 ÷ 7	k. 993 ÷ 30	o. 100 ÷ 35	s. 720 ÷ 8
d. 121 ÷ 11	h. 430 ÷ 42	l. 1842 ÷ 60	p. 8888 ÷ 88	t. 1170 ÷ 20

34. Staartdeling of hapmethode?

Hoe vaak past het? Is er een rest?

a. 8 / 328 \	d. 33 / 1452 \
b. 7 / 364 \	e. 16 / 1440 \
c. 14 / 588 \	f. 234 / 62712 \

35. Nog meer ...

a.	b.	c.	d.	e.
121	331	865	741	441
321 ×	648 ×	13 ×	12 ×	125 ×

Tot nu toe stopte de deling als je op nul uitkwam of net niet. In dat laatste geval houd je een rest over. Maar je kunt ook doorwerken. Dan krijg je uitkomsten die kleiner zijn dan 1 (want het past minder dan 1 keer in de rest), dus cijfers die achter de komma verdwijnen.

36. Delen met kommagetallen

Voer de delingen uit. Ga door tot je drie decimalen (cijfers achter de komma) hebt gevonden.

a. 28 / 42 \	d. 123 / 3118 \
b. 16 / 340 \	e. 75 / 17,7 \
c. 20 / 250 \	f. 13 / 372,32 \

37. Van alles wat ...

a. 324,6 × 8,2	d. 34 × 3,05	g. 493 ÷ 22	j. 6,4 × 208,22
b. 834 ÷ 24	e. 244 + 1977	h. 1335 – 976	k. 1963 – 337 – 235
c. 5,28 – 2,74	f. 2009 – 33	i. 13,13 × 13,13	l. 8,35 + 3,56 + 3,88

2.3 Schattend rekenen

In sommige gevallen is het niet zo belangrijk om een uitkomst precies te weten. Je weet dan voldoende als je ongeveer het antwoord weet. Heb ik genoeg geld bij me om dit te kopen, heb ik voldoende behang voor deze kamer, heb ik genoeg nummers voor een avondje muziek. Bij deze berekeningen gebruik je het teken $\approx$ (dat betekent: “is ongeveer gelijk aan”).

Voorbeeld
Je bent in een winkel en hebt zojuist 2 DVD’s uitgezocht van €12,95 per stuk. Daarnaast heb je ook een leuke CD gevonden voor €4,99. Bij de kassa zie je nog een single liggen die je bij aankopen boven de €25,- kunt meenemen voor €3,-. Je hebt €35 euro bij je. Is dat genoeg om ook deze single nog te kunnen kopen?

Bij dit voorbeeld is het niet nodig om exact het totaalbedrag te weten. Je kunt net doen alsof de DVD’s €13,- kosten en de CD €5,-. Je bent dan ongeveer €34,- kwijt als je de single erbij neemt.
Berekening: $2\times 12{,}95+4{,}99+3\approx 2\times 13+5+3=26+5+3=34$.
Zelfs als je dus een beetje te ruim rekent, heb je nog genoeg voor de single. Het komt dus niet aan op die laatste paar centen.

Schattend rekenen kun je op verschillende manieren doen en komt meestal neer op het groter of kleiner maken van de getallen, bijvoorbeeld door handig af te ronden, of door een mooi getal te kiezen wat in de buurt ligt. Een derde manier is het handig groeperen van getallen.

Manier 1: Afronden
Wanneer het niet nodig is om een precies antwoord te geven, bespaar je jezelf een hoop rekenwerk wanneer je getallen afrondt. Je hebt dat gezien in het voorbeeld. Afronden hoeft niet alleen op helen, maar kan bijvoorbeeld ook op honderdtallen of tientallen, zoals in het product 79×81 .
Voor schattend rekenen kun je ook prima uit de voeten met het product $80\times 80=6400$.

Manier 2: Getal in de buurt
Soms zijn de getallen waar je mee moet rekenen onhandige getallen. Je gaat dus zoeken naar mooie getallen die in de buurt liggen. Zo is bij $0{,}49\times 14$ een redelijke schatting te maken door $0{,}5\times 14=7$ uit te rekenen.

Let op! Wanneer je twee getallen bij elkaar optelt of van elkaar aftrekt, heb je meestal wel door wat er gebeurt als je een getal groter of kleiner maakt. Bij vermenigvuldigen en delen is dat vaak lastiger en wijkt je schatting vaak meer af van het werkelijke antwoord.

Manier 3: Groeperen
Door op een handige manier groepjes getallen samen te nemen, kun je ook besparen op het rekenwerk.
$147{,}25-19{,}88-8{,}34+2{,}64$ gaat heel snel door eerst te groeperen en daarna af te ronden:
$147{,}25+2{,}64-19{,}88-8{,}34\approx 147+3-20-8{,}5=121{,}5$.

Opgaven

38. Bereken schattend 1

Geef ook aan hoe je hebt gerekend.

a. 2,95 + 4,92 ≈
b. 3,05 + 5,98 ≈
c. 21,89 + 63,08 ≈
d. 22,91 – 19,03 ≈
e. 71 – 19 ≈
f. 302 + 894 ≈
g. 3021 – 89 ≈
h. 232 + 169 ≈

39. Bereken schattend 2

a. Geef op twee verschillende manieren een schatting voor 103 × 2,9
b. Welke van deze twee manieren komt het dichtst bij het preciese antwoord 298,7?
c. Geef ook twee verschillende schattingen voor 149 × 18
d. Welke van deze twee komt het dichtst bij het preciese antwoord 2682?

40. Bereken schattend 3

Schat de uitkomst. Let goed op handige groepjes.

a. 7,9 + 8,2 + 7,8
b. 3,4 + 2,7 + 6,3 +5,8
c. 38 + 24 + 78 + 61

41. Bereken schattend 4

Maak een schatting. Gebruik je rekenmachine om te zien hoeveel jouw antwoord afwijkt van de preciese waarde.

a. 6,02 × 6,91
b. 1,95 × 4,92
c. 3,2 × 14,95
d. 19,88 × 16,89
e. 18,3 ÷ 3,1
f. 160 ÷ 17
g. 345 ÷ 11
h. 673 ÷ 81

42. Schoolreisje

De schoolreiscommissie moet bussen gaan huren voor het schoolreisje. In totaal gaan er 9 klassen mee. Er zijn 3 klassen met 27 leerlingen, 2 klassen met 28 leerlingen, 2 met 29 leerlingen, 1 met 30 en 1 met 31 leerlingen.
Per bus mogen er naast de begeleiders nog 58 passagiers mee.
a. Hoeveel bussen zijn er nodig voor deze reis?

De leerlingen willen liever niet dat er een klas moet worden verdeeld over meerdere bussen.
b. Zoek uit of je dan meer bussen nodig hebt of niet.

Tijdens die reis gaan de leerlingen ook kanoën met een Canadese kano. In zo'n kano kunnen 6 personen. Behalve de leerlingen gaan er 18 begeleiders mee.
c. Hoeveel kano's moeten er worden gehuurd?

43. Meer of minder?

Vul in op de stippeltjes: > (meer) of < (minder)

a. 3,25 + 4,85 … 8
b. 8,21 – 3,15 … 5
c. 3,49 + 2,85 + 4,77 … 11
d. 2,35 x 8,15 … 20
e. 8,33 ÷ 3,1 … 3
f. 192 – 99 + 18 – 80 … 23

2.4 Keuzestof

Als je wat meer oefening wilt voor schattend rekenen dan kun je oefenen zoveel je wilt met de volgende drie applets die zijn te vinden op www.fi.uu.nl/wisweb/
Kies bij ‘onderwerpen’ voor ‘rekenen en schatten’.

In de lijst van applets die je dan ziet kun je deze drie vinden:
1. Schatten
2. Boodschappen schatten
3. Vallende sommen

Bij het applet 'Schatten' krijg je steeds een opgave waarvan je het antwoord (zo snel mogelijk als je mee wilt doen aan de wedstrijd om de snelste te worden) moet schatten. Als je er dicht genoeg bij zit stopt de tijd en kun je een volgende opgave maken.
Je kunt kiezen voor: optellen, optellen en aftrekken, vermenigvuldigen en delen, breuken en procenten, en: alles door elkaar.

'Boodschappen schatten' en 'Vallende sommen' zijn eenvoudiger. Maar misschien heb je daar wel behoefte aan…
Bij 'Boodschappen schatten' komen steeds 3 of 4 boodschappen langs met de prijs en je moet dan de totaalprijs schatten.
Bij 'Vallende sommen' komt er bovenin een opgave (optellen, aftrekken of een mix daarvan) binnen die naar beneden valt. Voordat hij op de bodem is moet je beslissen of de uitkomst onder de 100 ligt of erboven, of precies op 100 uitkomt.

3. Breuken

Het onderwerp Breuken behoort tot de moeilijkste onderwerpen van het rekenen.
Toch is het verstandig om er voldoende kennis over en vaardigheden in te hebben, want je komt ze, ook in het dagelijks spraakgebruik, veel tegen.

Probleem 1 Fietsroute

Een bericht op internet over de fietsroute langs de Donau.

“Inmiddels is ruim tweederde van de 588 kilometer lange route bewegwijzerd”

> Hoeveel kilometer is dat?
> Hoe heb je dat berekend?

16 februari 2009

Tweederde van Servische Donauroute bewegwijzerd

Veel fietsers kennen inmiddels het deel van de Donau tussen Passau en Wenen. Maar op drukke zondagen is het hier aansluiten in de file van fietsers. Veel rustiger is het langs het Servische deel van de Donau. Inmiddels is ruim tweederde deel van de 588 kilometer lange Donau fietsroute in Servië bewegwijzerd. Nog deze zomer volgt het laatste deel rond de hoofdstad Belgrado. Aldus meldt Bert Sitters van de Fiets en Wandelbeurs.

Probleem 2 Vakantieperikelen

Er worden in deze tekst een aantal breuken genoemd:
“ een kwart van de Nederlandse vakantiegangers”
“ vier op de tien Nederlanders”
“ een op de vijf Nederlanders”
“ bijna een kwart”

> Zet deze vier in een volgorde van groot naar klein.

> Klopt dit:
“vier op de tien Nederlanders” is twee keer zoveel als “een op de vijf Nederlanders” ?

Kwart vakantiegangers beroofd of mishandeld

Uitgegeven: 5 juni 2009 11:02
Laatst gewijzigd: 5 juni 2009 11:02

AMSTERDAM - Een kwart van de Nederlandse vakantiegangers wordt tijdens de vakantie beroofd of mishandeld. Dat meldt het ministerie van Buitenlandse Zaken vrijdag op basis van een onderzoek van BVH Dienstencommunicatie.

Het ministerie wil met een campagne bereiken dat Nederlanders beter voorbereid op reis gaan.

Zo maken vier op de tien Nederlanders voor hun vakantie geen kopieën van belangrijke documenten, zoals het paspoort.

Ongeveer evenveel Nederlanders gaan niet na of ze zijn verzekerd voor ongelukken tijdens bergbeklimmen of andere risicovolle sporten.

Daarnaast laat een op de vijf Nederlanders volgens de onderzoekers geen bereikbaarheidsgegevens achter bij het thuisfront.

Bijna een kwart maakt geen lijstje met belangrijke telefoonnummers voor als zijn portemonnee of reisdocumenten worden gestolen.

In dit hoofdstuk bekijken we wat een breuk nu eigenlijk is en hoe je er mee kunt rekenen.

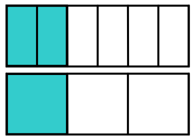
3.1 Wat is een breuk?

Teller en noemer

Een breuk bestaat uit een teller en een noemer: $\textit{breuk is } \dfrac{\textit{teller}}{\textit{noemer}}$

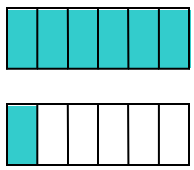
Zo is bij $\frac{1}{6}$ de teller 1 en de noemer 6 en bij $\frac{3}{5}$ is 3 de teller en 5 de noemer.
Als je een breuk bekijkt als "deel van het geheel", dan ***noemt*** de noemer het aantal gelijke delen waarin het geheel is opgedeeld en ***telt*** de teller hoeveel van die gelijke delen je hebt.
Dus bij $\frac{3}{5}$ is een geheel (bijvoorbeeld een pizza) in 5 gelijke stukken verdeeld en je hebt daarvan 3 stukken. Pizza's (cirkelvormen) en chocoladerepen (rechthoeken) worden vaak als visualisaties van breuken gebruikt.

Verschillende verschijningsvormen, vereenvoudigen.



Breuken kunnen verschillend lijken, terwijl ze precies hetzelfde resultaat opleveren.
Als je van een reep $\frac{2}{6}$ deel krijgt, dan heb je evenveel als wanneer je $\frac{1}{3}$ deel krijgt.
Als teller en noemer gemeenschappelijke delers hebben, dan kan de breuk worden vereenvoudigd. Vaak wordt dat gedaan. Dus $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, omdat zowel 2 als 6 deelbaar zijn door 2. In de meest eenvoudige vorm hebben teller en noemer geen gemeenschappelijke delers meer.
Elke breuk heeft ontelbaar veel verschijningsvormen. Zo geldt $\frac{1}{7} = \frac{2}{14} = \frac{5}{35} = \frac{10}{70} = \frac{12}{84} = \ldots$

Breuken groter dan 1



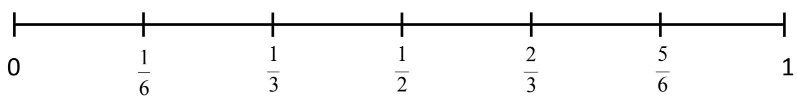
Bij "deel van het geheel" denk je vermoedelijk alleen aan een getal kleiner dan 1.
Maar ook $\frac{7}{6}$ is een breuk, hoewel je niet 7 delen van een totaal van 6 delen kunt tellen. Je hebt dan twee gehelen nodig, die beide in 6 gelijke stukken zijn verdeeld.
In het reep voorbeeld zijn dat twee repen elk verdeeld in 6 stukken. Nu kun je 7 gelijke delen tellen: 1 hele reep en nog $\frac{1}{6}$ deel.

Dus: $\frac{7}{6} = \frac{6}{6} + \frac{1}{6} = 1 + \frac{1}{6} = 1\frac{1}{6}$

En ook: $\frac{17}{4} = \frac{16+1}{4} = \frac{16}{4} + \frac{1}{4} = 4 + \frac{1}{4} = 4\frac{1}{4}$

Breuken als getallen op de getallenlijn

Breuken kunnen ook gewoon als getallen worden beschouwd. Dan vormen ze een uitbreiding van de gehele getallen waarmee we tot nu toe bijna uitsluitend zijn bezig geweest. Als je bijvoorbeeld het stukje getallenlijn tussen 0 en 1 in drie gelijke stukken verdeelt, dan komen in de twee tussenliggende posities de getallen $\frac{1}{3}$ en $\frac{2}{3}$ te staan. Bij 0 zou je dan $\frac{0}{3}$ kunnen zetten en bij 1 de breuk $\frac{3}{3}$. Maar als je breuken als getallen beschouwt, mag er maar één verschijningsvorm worden gebruikt: de meest vereenvoudigde vorm. Dus bij de verdeling van het stuk getallenlijn tussen 0 en 1 in zes gelijke delen krijg je de volgende getallen:



Opgaven

44. Breukvormen

Schrijf van de volgende breuken twee andere verschijningsvormen:

a. $\frac{3}{5}$

b. $\frac{7}{14}$

c. $\frac{11}{9}$

d. $3\frac{2}{3}$

e. $\frac{18}{5}$

f. $72\frac{1}{6}$

45. Vereenvoudigen

Schrijf de volgende breuken zo eenvoudig mogelijk.
Let op, het kan niet altijd eenvoudiger dan er al staat!

a. $\frac{8}{14}$

b. $\frac{27}{36}$

c. $\frac{25}{10}$

d. $1\frac{64}{72}$

e. $2\frac{25}{49}$

f. $\frac{88}{11}$

46. Breuken vergelijken

Welke is de grootste van de twee breuken?

a. $\frac{3}{5}$ en $\frac{3}{4}$ b. $\frac{2}{3}$ en $\frac{5}{9}$ c. $\frac{4}{10}$ en $\frac{5}{12}$ d. $\frac{7}{8}$ en $\frac{8}{9}$

Bekijk de twee breuken van onderdeel d en bijvoorbeeld $\frac{11}{12}$ en $\frac{12}{13}$. Bij de eerste breuk is de noemer 1 groter dan de teller. Dat geldt ook voor de tweede breuk, alleen zijn beide getallen daar 1 groter dan bij de eerste.

e. Kun je beredeneren waarom bij zulke gevallen de tweede breuk altijd groter is dan de eerste? (hint: hoe ver liggen de twee breuken af van 1?)

47. Breuken als getallen op de getallenlijn

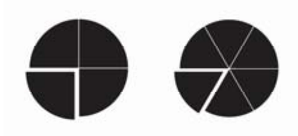
Breuken als getallen op de getallenlijn moeten in hun meest eenvoudige vorm worden geschreven. Doe dat voor de volgende gevallen en plaats ze op de getallenlijn:

a. $\frac{15}{25}$ b. $\frac{30}{15}$ c. $\frac{12}{28}$ d. $\frac{33}{27}$ e. $\frac{22}{7}$ f. $\frac{19}{5}$

3.2 Rekenen met breuken

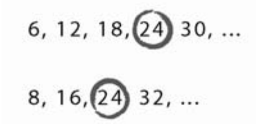
3.2.1 Optellen, aftrekken en vermenigvuldigen

Breuken met dezelfde noemer heten gelijknamig.
Alleen gelijknamige breuken kun je optellen en aftrekken.
Als twee breuken van eenzelfde verdeling komen is het eenvoudig: je hebt 1 stuk van een pannenkoek die in 8 gelijke stukken is verdeeld en je krijgt er nog 2 van die stukken bij; dan heb je 3 van die stukken. De bijbehorende som: $\frac{1}{8}+\frac{2}{8}=\frac{3}{8}$.



Als twee breuken verschillende noemers hebben, dan komen ze van twee verschillende verdelingen. De ene pannenkoek is in 6 gelijke stukken verdeeld en de andere in 4 gelijke stukken. Je neemt een stuk van elk. Welk deel van een hele pannenkoek heb je dan?
Om dat te berekenen moet je beide pannenkoeken in gelijke delen verdeeld denken. In dit geval is 12 een handige verdeling: snijdt elk vierde deel van de eerste pannenkoek in drie gelijke stukken en elk zesde deel van de tweede pannenkoek in twee. Dus:
$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{3}{12}+\frac{2}{12}=\frac{3+2}{12}=\frac{5}{12}$

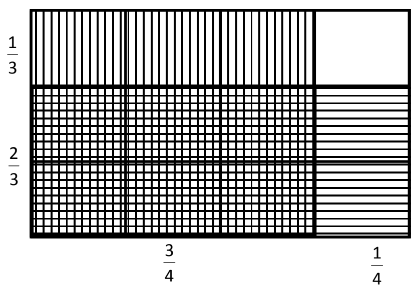
Nog een voorbeeld van optellen en een voorbeeld van aftrekken, waarvoor je natuurlijk ook gelijknamig moet maken.
$\frac{3}{5}+\frac{1}{7}=\frac{21}{35}+\frac{5}{35}=\frac{26}{35}$ en $\frac{5}{6}-\frac{5}{8}=\frac{20}{24}-\frac{15}{24}=\frac{5}{24}$



Bij het gelijknamig maken vind je de nieuwe noemer door de tafels van de noemers te bekijken. Het eerste veelvoud dat in beide tafels voorkomt, kies je als nieuwe noemer. Bij de tafels van 6 en 8 is dat dus 24.

Breuken vermenigvuldigen.

Vermenigvuldigen is, zoals je weet, herhaald optellen, maar bij breuken is dat moeilijk voor te stellen. De vermenigvuldiging $\frac{1}{2}\times 7$ is voor te stellen als “een half groepje van 7”. Let op: hier hoef je dus *niet* gelijknamig te maken. Je telt immers geen twee hoeveelheden bij elkaar op: $\frac{1}{2}\times 7=3\frac{1}{2}$.
Je kan deze vermenigvuldiging ook gewoon lezen als: "de helft van 7" of, als je de vermenigvuldiging omkeert ($7\times\frac{1}{2}$), als "7 groepjes van $\frac{1}{2}$" en dat geeft samen $3\frac{1}{2}$.



Nu twee breuken die worden vermenigvuldigd. Daarbij gebruiken we weer de rechthoek als visualisatie . Bij de vermenigvuldiging $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$ nemen we van de ene zijde het tweederde deel van de lengte en van de andere zijde het drievierde deel van de lengte (zie de figuur hiernaast). Je ziet dat door het drie-delen en het vier-delen de rechthoek in 12 gelijke rechthoekjes is verdeeld. Het deel dat dubbel gearceerd is omvat 6 van die rechthoekjes. Bij $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$ krijg je als uitkomst dus $\frac{6}{12}$ en je krijgt nog meer uitkomsten cadeau: $\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{12}$, $\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{12}$ en $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$
Breuken vermenigvuldigen doe je door de tellers met elkaar te vermenigvuldigen en ook de noemers met elkaar te vermenigvuldigen. De uitkomst kan soms nog vereenvoudigd worden, zoals hierboven:
$\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$ en verder: $\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$ en $\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

Opgaven

48. Optellen en aftrekken 1

Maak de volgende opgaven. Vereenvoudig het antwoord als dat mogelijk is.

a. $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}$ d. $\frac{2}{3}-\frac{1}{2}$ g. $\frac{7}{9}+\frac{7}{12}$ j. $\frac{7}{9}-\frac{7}{12}$

b. $\frac{3}{5}+\frac{1}{7}$ e. $\frac{3}{5}-\frac{1}{7}$ h. $1\frac{3}{5}+\frac{4}{5}$ k. $1\frac{3}{5}-\frac{4}{5}$

c. $\frac{5}{6}+\frac{5}{8}$ f. $\frac{5}{6}-\frac{5}{8}$ i. $3\frac{3}{8}+\frac{1}{2}$ l. $3\frac{3}{8}-\frac{1}{2}$

49. Optellen en aftrekken 2

Bereken en vereenvoudig het antwoord indien mogelijk.

a. $3\frac{3}{7}+\frac{1}{2}$ d. $5\frac{4}{5}+5\frac{3}{8}$ g. $3\frac{3}{7}-\frac{1}{2}$ j. $5\frac{4}{5}-5\frac{3}{8}$

b. $2\frac{3}{7}+2\frac{1}{4}$ e. $\frac{3}{8}+5\frac{2}{3}$ h. $2\frac{3}{7}-2\frac{1}{4}$ k. $5\frac{1}{6}-3\frac{3}{4}$

c. $7\frac{7}{8}+3\frac{1}{2}$ f. $8\frac{4}{5}+12\frac{3}{10}$ i. $7\frac{3}{8}-3\frac{1}{2}$ l. $5\frac{1}{4}-2\frac{2}{3}$

50. Samen 1

a. Laat zien dat $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$ als antwoord 1 heeft.

b. $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots=1$. Welk getal moet hier worden ingevuld bij de stippeltjes?

c. Welk getal past hier bij de stippeltjes: $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{5}{6}-\ldots=1$?

d. En hier: $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots=1$?

51. Vermenigvuldigen

Bereken en vereenvoudig als dat mogelijk is.

a. $12\times\frac{5}{6}$ d. $\frac{3}{5}\times\frac{1}{7}$ g. $\frac{3}{5}\times2\frac{1}{4}$

b. $\frac{2}{3}\times18$ e. $\frac{6}{11}\times\frac{2}{3}$ h. $3\frac{1}{3}\times5\frac{1}{4}$

c. $\frac{1}{7}\times35$ f. $\frac{2}{9}\times\frac{3}{8}$ i. $2\frac{1}{4}\times3\frac{4}{7}$

j. Bij welke uitkomsten kon je het antwoord nog vereenvoudigen?
Kun je zien dat het antwoord kan worden vereenvoudigd voordat je de berekening uitvoert?

52. Wat is meer?

Bekijk de twee sommen: $\frac{7}{8}\times\frac{5}{12}$ en $\frac{7}{8}+\frac{5}{12}$ maar reken ze niet uit!

a. Welke van de twee opgaven geeft de grootste uitkomst?
Geef een goede toelichting bij je keuze.

b. Bereken beide uitkomsten en kijk of dat wat je dacht bij a. klopt.

53. Reken je een breuk of wees verstandig en kijk goed ...

a. Wat is de uitkomst van $\frac{2}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{5}{7}\times\frac{4}{11}\times\frac{9}{4}\times\frac{7}{2}\times\frac{11}{5}\times\frac{8}{3}$?

b. Verzin zelf ook zo'n moeilijke opgave, maar dan met uitkomst 2.

3.2.2 Breuken delen

Bij de opgave $12 \div \frac{3}{4}$ kun je je wat voorstellen.

Stel: je hebt 12 liter wijn en die ga je verdelen over flessen met een inhoud van $\frac{3}{4}$ liter; hoeveel van die flessen heb je dan nodig?

Je ziet het voor je: de eerste fles wordt volgegoten, je hebt nog $11\frac{1}{4}$ liter over. Dan de tweede fles: $11\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = 10\frac{1}{2}$, enzovoort. In totaal heb je 16 flessen nodig, dat zie je als je zo blijft doorgaan. Je kunt dat wel wat verkorten. In plaats van elke keer 1 fles te vullen kun je ook bedenken dat je in 4 flessen 3 liter kwijt kunt (want $4 \times \frac{3}{4} = 3$). Voor 12 liter heb je dus 16 flessen nodig. Je hebt nu gevonden dat de breuk $\frac{3}{4}$ dus 16 keer past in het getal 12, ofwel: $12 \div \frac{3}{4} = 16$

Toevallig geldt ook: $12 \times \frac{4}{3} = 16$.

Zou de volgende “regel” voor het delen van breuken gelden?

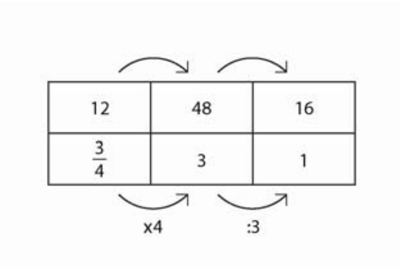
> “Delen door een breuk geeft hetzelfde antwoord als vermenigvuldigen met het omgekeerde van die breuk”.

Het omgekeerde van een breuk vind je door teller en noemer te verwisselen, dus $\frac{4}{3}$ is het omgekeerde van $\frac{3}{4}$.

Laten we dat eens nader bekijken. Daarvoor gebruiken we de verhoudingstabel.
In een verhoudingstabel mag je beide getallen met hetzelfde getal vermenigvuldigen, en ook door hetzelfde getal delen.

De deling $12 \div \frac{3}{4}$ kan dan als volgt worden uitgevoerd:

Het getal 12 wordt eerst vermenigvuldigd met 4 en daarna gedeeld door 3 (of keer $\frac{1}{3}$).



In totaal is dus 12 vermenigvuldigd met $\frac{4}{3}$.

In feite komt het er op neer dat je bij een deling altijd beide getallen evenveel keer zo groot of evenveel keer zo klein mag maken. Daarmee kun je delingen waarin breuken voorkomen altijd veranderen in een deling van gehele getallen.

Twee voorbeelden:

$6 \div \frac{3}{5} = 30 \div 3 = 10$. Eerst zijn beide getallen vermenigvuldigd met 5 en dan is door 3 gedeeld (:3).

Dus eigenlijk doe je $6 \div \frac{3}{5} = 6 \times 5 \div 3 = 6 \times 5 \times \frac{1}{3} = 6 \times \frac{5}{3}$

$\frac{6}{11} \div \frac{2}{3} = \frac{18}{11} \div 2 = \frac{18}{11} \times \frac{1}{2} = \frac{18}{22}$. Eerst zijn beide getallen met 3 vermenigvuldigd en daarna gedeeld door 2 (of vermenigvuldigd met $\frac{1}{2}$)

Dus eigenlijk doe je $\frac{6}{11} \div \frac{2}{3} = \frac{6}{11} \times 3 \div 2 = \frac{6}{11} \times 3 \times \frac{1}{2} = \frac{6}{11} \times \frac{3}{2}$

Maar in plaats van deze regel te onthouden kun je natuurlijk ook werken met vergroten of verkleinen.

Opgaven

54. Delen door breuken

Bereken; bedenk eerst welke manier je handig vindt.

a. $12 \div \frac{3}{2}$

b. $35 \div \frac{1}{5}$

c. $\frac{3}{4} \div 12$

d. $\frac{4}{5} \div \frac{1}{3}$

e. $\frac{5}{9} \div \frac{2}{3}$

f. $\frac{18}{36} \div \frac{4}{8}$

g. $1\frac{5}{9} \div \frac{2}{7}$

h. $5\frac{4}{7} \div 4\frac{1}{3}$

i. $9\frac{3}{8} \div 6\frac{1}{4}$

55. Een handige strategie voor het delen van breuken?

Misschien vind je deze manier wel handig. Maar beredeneer eerst waarom deze methode goed is: $\frac{4}{5} \div \frac{1}{3} = \frac{12}{15} \div \frac{5}{15} = 12 \div 5 = 2\frac{2}{5}$

56. Van alles wat

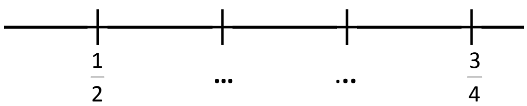
a. $\frac{3}{4} + \frac{1}{6} = \ldots$ b. $\frac{2}{3} - \frac{1}{5} = \ldots$ c. $\frac{4}{7} \times \frac{3}{4} = \ldots$ d. $\frac{1}{3} \div 5 = \ldots$ e. $4 \div \frac{1}{4} = \ldots$

57. Meer of minder?

Zonder berekening! Is de uitkomst van $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$ meer of minder dan 1?
Maak een tekening van een vierkant van 1 bij 1 en arceer daarbinnen gebieden in.

58. Breuken op de getallenlijn

Het stukje getallenlijn tussen een half en drievierde wordt in drie gelijk stukken verdeeld.
Welke breuken staan er bij de stippen? Leg uit hoe je dat hebt gevonden.



3.3 Context vraagstukken met breuken.

Schrijf telkens de breukenopgave erbij.

59. Voldoende

Havo 4 bestaat uit 80 leerlingen. Hiervan had driekwart een voldoende voor het proefwerk rekenen; het vijfzesde deel van de voldoendes was een 8 of hoger.

a. Hoeveel leerlingen hadden een voldoende?
b. Hoeveel leerlingen hadden minstens een 8?
c. Kun je vraag b. beantwoorden zonder eerst a. uit te rekenen? Zo ja, hoe dan?

60. Vervoer naar school

Van een school komt drieachtste deel van de leerlingen op de fiets; een kwart komt met de scooter; de rest komt met het openbaar vervoer.
Welk deel van de leerlingen komt met het openbaar vervoer?

61. Bloedbank

Sanquin bloedbank heeft op een dag 350 donoren, die elk een halve liter bloed geven.

a. Hoeveel liter bloed is er die dag in totaal gegeven?

Bloed bestaat voor $\frac{11}{20}{}^{e}$ deel uit plasma.

b. Hoeveel liter plasma is er die dag binnengekomen?

Het bloed wordt in buisjes met een inhoud van eentwintigste (0,05) liter liter gedaan.

c. Hoeveel buisjes worden er op die manier gevuld?

4. Breuken, kommagetallen en procenten

Je rijdt over de rijksweg vanaf Utrecht. Tenminste... reed. Want het gaat weer eens erg langzaam doordat je in 4 km file bent terechtgekomen. Dan valt je oog op een groen bordje langs de weg. Er staat op
A 28 Re 44,1 .
Enig idee wat dat betekent?
A 28 en Re geeft aan dat je op Rijksweg A 28 bent en wel op de rechterweghelft.
Maar nu die 44,1. Dat is het aantal km dat je verwijderd bent van Utrecht waar de A 28 begint. Je bent iets meer dan 44 km van Utrecht af.
Dergelijke bordjes heten kilometerbordjes.

Probleem Kilometerbordjes

> Welk getal staat op het volgende bordje langs de A28?
> Hoeveel bordjes kom je nog tegen na 44,1 voordat je bij bordje 50,0 aankomt?

Je moet naar Hattemerbroek. De afslag is bij kilometerbordje 78,5.
> Hoeveel km moet je nog rijden op de A 28 vanaf bordje 44,1?

Hiernaast zie je ook een kilometerbordje. De grote vette 3 staat voor kilometer.
> Hoe zou dat getal op een Nederlands kilometerbordje worden geschreven?

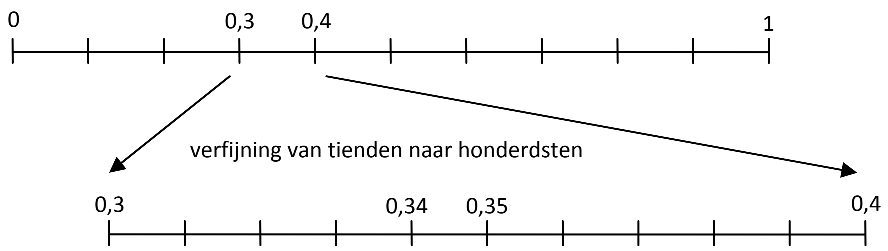
We noemen 44,1 een decimaal getal maar ook wel van een kommagetal, omdat er een komma in voorkomt (logisch toch?). 0,1 spreken we ook wel uit als ééntiende. En ziedaar het verband tussen kommagetallen en breuken: 0,1 = $\frac{1}{10}$
Daar gaan we het in dit hoofdstuk over hebben en daar gaan we ook mee oefenen.

4.1 Van breuken naar kommagetallen en omgekeerd

Net zoals we tussen 10 en 20 een verfijning kennen in 10 gelijke delen: 11, 12, 13, ..., 19, 20 kunnen we ook tussen 1 en 2 een verfijning aanbrengen. Dat doen we door de afstand tussen 1 en 2 in 10 gelijke stukken te verdelen. Na het eerste stukje komen we bij 1,1, dan bij 1,2 enz.
We hebben die verfijning best vaak nodig, vooral bij metingen, omdat we vaak niet op een heel aantal (meters, liters of kilogrammen) uitkomen.
Stel je voor: je meet iets en het is meer dan 1, maar nog lang geen 2; dan is het bijvoorbeeld 1,3. Net zoals 13 tussen 10 en 20 inzit, zo zit 1,3 in tussen 1 en 2. Het getal 1,3 spreek je uit als "één drietiende" en dan heb je weer de link naar de breuken: $1{,}3 = 1\frac{3}{10}$.

Zo'n verfijning kan nog verder gaan. Die kleine stukjes van 0,1 verdeel je telkens weer in 10 gelijke stukken; dat levert bijvoorbeeld een getal als 1,34. De 3 is van 3 tienden en de 4 is van 4 honderdsten. Je hoort telkens een breuk en dat klopt, want $0{,}3 = \frac{3}{10}$ en $0{,}04 = \frac{4}{100}$.

Opgeteld zijn deze twee breuken 0,34: kijk maar $\frac{3}{10} + \frac{4}{100} = \frac{30}{100} + \frac{4}{100} = \frac{34}{100}$ en dat is gelijk aan 0,34



Breuken waarvan de noemer een macht van 10 is, kunnen direct geschreven worden als decimale getallen. Voorbeelden zijn:

$\frac{7}{10} = 0{,}7$ $\qquad 3\frac{27}{100} = 3{,}27$ $\qquad 15\frac{11}{10000} = 15{,}0011$

Ook breuken waarvan de noemer te herleiden is tot (een macht van) 10 zijn eenvoudig te schrijven als kommagetallen. Herleiden tot een macht van 10 betekent dat je de noemer op een macht van 10 kunt krijgen (10, 100, 1000, 10 000, ...) door met een geheel getal te vermenigvuldigen.
Zo kun je de noemer 40 met 25 vermenigvuldigen om op de noemer 1000 te komen.
Voorbeelden:

$\frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 0{,}75$ $\qquad 12\frac{1}{8} = 12\frac{125}{1000} = 12{,}125$ $\qquad 14\frac{17}{20} = 14\frac{85}{100} = 14{,}85$

Er zijn echter ook getallen die niet te schrijven zijn als macht van 10. Probeer het maar eens om de noemer 3 of 7 of 11 of 33 zo te vermenigvuldigen dat je op een macht van 10 uitkomt...
Hoe kun je de breuk $\frac{2}{3}$ als decimaal getal schrijven? Je ziet in elke breuk ook een deling; hier de deling $2 \div 3$. Als je die deling uitvoert, dan is het antwoord 0,6666....; dit wordt een repeterende breuk genoemd. Deze is op twee decimale afgerond: 0,67 en op zes decimalen: 0,666667
Met behulp van delen kun je elke breuk omzetten naar een decimaal getal.

Samengevat
Elke breuk is te schrijven als decimaal getal en dat lukt altijd via een deling. Deze deling komt uit (dus de rest wordt ooit 0 (zoals bij $3 \div 4$) of de deling gaat repeteren (zoals bij $2 \div 3$).

Opgaven

62. Van breuk naar kommagetal

Zet de volgende breuken om naar kommagetallen.
Pas op! bij sommige kun je je weer een breuk rekenen, maar dat is niet de bedoeling. Stop op een verstandig moment met het doorrekenen.

a. $\frac{1}{40}$ b. $\frac{3}{40}$ c. $\frac{7}{75}$ d. $\frac{1}{7}$ e. $1\frac{5}{12}$ f. $\frac{4}{13}$

Bij een breuk die repeteert heet het stukje dat steeds terugkomt het *repeterende deel*.
Bij $\frac{2}{3}$ is dat "6" , bij $\frac{1}{7}$ is dat "142857". Soms is dat deel heel kort en soms veel langer.

63. Spelen met $\frac{1}{7}$ en met het repeterende deel

Hopelijk heb je bij 62 d. gevonden: $\frac{1}{7}$ = 0, 142857142857142857.....

Maar hopelijk ben je eerder gestopt dan degene die dit antwoord heeft gevonden.

a. Op welk moment kun je de deling stoppen omdat je zeker weet hoe het verder gaat? Waarom weet je dat zo zeker?

Heb je de berekening van $\frac{1}{7}$ nog bij de hand?

b. Welke resten kom je tegen tijdens het delen? Zou je nog andere resten kunnen krijgen?

c. Lastige vraag: waarom kan het repeterende deel van een decimale breuk nooit langer zijn dan de waarde van de noemer?

64. Kommagetallen bij één-negende

a. Je weet: $\frac{1}{3} = 0{,}33333...$. Kun je nu direct zeggen wat $\frac{1}{9}$ is als kommagetal?

b. En wat krijg je als je $\frac{2}{9}, \frac{3}{9}, ..., \frac{9}{9}$ schrijft als kommagetal?

Andersom: van kommagetal naar breuk

Als een kommagetal eindig is, kan dat getal eenvoudig worden omgezet in een breuk:

$0{,}7 = \frac{7}{10}$ $0{,}18 = \frac{18}{100} = \frac{9}{50}$ $3{,}456 = 3\frac{456}{1000}$

Maar wat te doen als je een repeterende breuk van kommagetal naar breuk moet omzetten?
Als het repeterende deel lengte 1 heeft kun je vermenigvuldigen met 10. Als het repeterende deel lengte 2 heeft vermenigvuldig je met 100, enzovoorts. Tenminste als dat deel direct achter de komma begint!

Twee voorbeelden:

$$\begin{array}{rl} 10 \times 0{,}3333... &= 3{,}3333... \\ 1 \times 0{,}3333... &= 0{,}3333... \quad - \\ \hline 9 \times 0{,}3333... &= 3 \end{array}$$

Dus $0{,}3333... = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$$\begin{array}{rl} 100 \times 0{,}454545... &= 45{,}454545... \\ 1 \times 0{,}454545... &= 0{,}454545... \quad - \\ \hline 99 \times 0{,}454545... &= 45 \end{array}$$

Dus $0{,}454545... = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}$

65. Probeer zelf eens ...

a. met 0,121212... b. met 0,585858... c. met 0,142857142857.... (het antwoord weet je!)

4.2 Kommagetallen, breuken en procenten

Een verschil tussen breuken en kommagetallen.

Elke breuk kan je op veel manieren schrijven, zoals bijv. $\frac{4}{7} = \frac{8}{14} = \frac{20}{35} = \ldots.$.

Dat kan bij een kommagetal niet, daar blijft 0,27 altijd 0,27.
En de bovengenoemde breuken hebben als kommagetal allemaal dezelfde weergave: 0,571428571428…

Een speciaal geval: procent

Procent betekent “per honderd”. Zo kun je dus 50% (vijftig procent) uitspreken als “50 per 100” en dat is hetzelfde als “de helft”.
Zo betekent 10% “10 per 100” en dat is hetzelfde als ééntiende deel.
Procenten zijn dus te zien als breuken waarvan de noemer 100 is.

Bij "een kwart van de bevolking" bedoel je "1 op de 4" of "1 per 4", dus $\frac{1}{4}$ deel.

Dat is gemakkelijk om te zetten naar een breuk met noemer 100:
$\frac{1}{4} = \frac{25}{100}$ en dus is "1 op de 4" hetzelfde als 25%.
Hoeveel procent is "3 op de 8"? Nu moet de 8 worden omgezet naar 100 en dus vermenigvuldig je met 12,5:
$\frac{3}{8} = \frac{3 \times 12,5}{8 \times 12,5} = \frac{37,5}{100}$. Dus "3 op de 8" is hetzelfde als 37,5%

Bij $\frac{1}{7}$ wordt het wel wat lastiger: 7 past niet goed in 100. Wel kun je zeggen dat het ruim 14% moet zijn, omdat 14 x 7 =98 en daarmee zit je dicht tegen de 100 aan.
Met je rekenmachine vind je: 100 = 14,2857142857... x 7.
Afgerond op twee cijfers achter de komma is dus $\frac{1}{7}$ hetzelfde als 14,29%.

Opgaven

66. Van breuk naar procent

Zet de volgende breuken om naar procenten. Als de noemer niet makkelijk is om te rekenen naar 100 kun je je rekenmachine gebruiken. Probeer dan wel eerst een goede schatting te maken van de uitkomst, zoals bij $\frac{1}{7}$ is iets meer dan 14% want 7 x 14 = 98.

a. $\frac{2}{5}$ b. $\frac{5}{8}$ c. $\frac{1}{25}$ d. $\frac{5}{12}$ e. $\frac{7}{15}$ f. $\frac{3}{11}$ g. $\frac{7}{4}$

Bij de laatste krijg je meer dan 100%. Dat vind je misschien wat vreemd, omdat je denkt aan "100% is alles". Net zoals je aan een breuk ook dacht aan "deel van het geheel".

67. Van kommagetal naar procent

Zet de volgende kommagetallen om in procenten. Als er niet een geheel percentage uitkomt, mag je afronden op twee decimalen.

a. 0,7 b. 0,32 c. 0,375 d. 1,32 e. 0,333.. f. 2 g. 100

Breuken, kommagetallen en procenten zijn nauw met elkaar verbonden. Als je één van de vormen hebt, kun je altijd de twee andere vormen berekenen.

68. Omschrijven van de ene naar de andere vorm

Vul in onderstaande tabel alle lege hokjes in.

breuken	kommagetallen	procenten
	0,5	
		20%
$\frac{1}{8}$		
		24%
	0,32	
$\frac{2}{7}$		
$\frac{11}{13}$		
		150%
	2,53	

69. Kaas snijden op de computer

Een hele kaas weegt 12 kilo, snij een stuk af van 3 kilo. Hoe doe je dat? Zie:
http://www.fi.uu.nl/toepassingen/03043/toepassing_rekenweb.html

5. Herhalingsopgaven

70. Getallen ordenen

a. Welk getal is het grootst: 9,9 of 9,12 ?
b. Welk getal ligt er midden tussen 5, 9 en 5, 10?
c. Zet de volgende getallen van klein naar groot: 0,16 ; 0,6 ; 0,017 en 0, 159
d. Welk getal ligt precies midden tussen $\frac{3}{8}$ en 1?

71. Op de getallenlijn

Het stukje getallenlijn tussen $\frac{3}{4}$ en $\frac{5}{6}$ wordt in drie gelijke stukken verdeeld.

Welke getallen moeten op de plaats van het vraagteken staan?

72. Breukvormen

Schrijf de breuk $\frac{3}{5}$ zo, dat

a. de teller door 7 gedeeld kan worden
b. de noemer een veelvoud is van 8
c. teller en noemer beide veelvouden zijn van 13

73. Verdienen

Er zijn twee keuzemogelijkheden voor de uitbetaling van Sander's zaterdagbaantje:

* Maandloon € 50 ,--
* Elke maand een verdubbeling van loon ten opzichte van de vorige maand, met het eerste maandloon van € 1,-.

Sander neemt het zaterdagbaantje voor één jaar.
Welke optie kan hij het beste kiezen en welk totaalbedrag levert hem dat op?

74. Een muur van blokken

Natasja wil een bijzondere muur bouwen. De onderste laag is 99 stenen lang, daarboven 98 stenen, de derde laag 97 stenen en ze gaat ermee door tot bovenaan de laatste steen komt.
Hoeveel stenen heeft ze in totaal nodig voor de hele muur?

75. Honger

“Een zesde deel van de wereldbevolking lijdt honger” kopte de krant.
En verder: "75% van de hongerlijders leeft in Afrika".
De wereldbevolking telt ruim 6 miljard mensen.
Hoeveel mensen in Afrika lijden honger?

76. Zomerkorting op meubels

Joshua gaat op kamers en wil in zijn nieuwe onderkomen de laatste trendy meubels hebben. Nu is er bij de winkel waar hij het gaat aanschaffen een mooie actie gaande deze zomer:
- Bij aankoop vanaf € 300,-- een kassakorting van 10%
- vanaf € 600,-- een kassakorting van 15%
- als je voor minstens € 1000,-- koopt, dan krijg je 20% kassakorting
- en je krijgt zelfs 25% kassakorting als je voor minstens € 2000,-- koopt.

a. Stel dat hij totaal voor € 1365,-- heeft uitgezocht, wat moet hij dan betalen?
b. Joshua besluit meubels te kopen voor € 1935,-- ; waarom is dat niet zo verstandig?

77. Verjaardag

Voor je verjaardag ga je boodschappen doen. Je koopt 1 krat bier à € 13,35 (incl. statiegeld), 5 zakken pinda's à € 1,39, 5 flessen cola à € 1,78 (incl. statiegeld) en 6 zakken chips à € 1,24. Je betaalt met € 50,--.
a. Hoeveel krijg je terug?

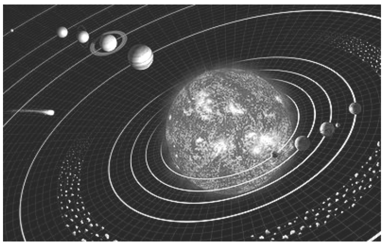
Je kunt cola in verschillende flessen kopen:
fles 1,5 liter kost € 1,53 ; fles 1 liter kost € 1,30 ; 4 flessen van 1,5 liter kost € 5,80
fles 2 liter kost € 1,95 ; blikje 0,33 liter kost € 0,61 ; fles 0,5 liter kost € 1,29
b. In welke verpakking is de cola het goedkoopst? En wanneer het duurst?

78. Potters' laatste deel "Harry Potter and the deathly hallows"

In Amerika is in de eerste 24 uur na het verschijnen van deel 6 een aantal van 6,9 miljoen exemplaren verkocht.
a. Hoeveel zijn dat er gemiddeld per minuut geweest?

Van de eerste zes Harry Potter-boeken zag schrijfster J.K. Rowling al 325 miljoen exemplaren in 64 talen over de toonbank gaan. Het nieuwe boek is ook weer een groot succes.
(Uit De Pers van 27 juli 2007)
De gemiddelde afstand aarde – maan bedraagt 384.450 km
b. Kun je de afstand aarde-maan overbruggen als je al die Harry Potter boeken zou opstapelen?

79. Zonlicht



Als de zon opgaat zien we het zonlicht, maar door de afstand van de zon tot de aarde is dat licht al eerder uitgezonden. De afstand van de zon tot de aarde is ongeveer 150 miljoen kilometer en de snelheid van het licht is c = 299 792 458 m/s.
Hoeveel tijd doet het zonlicht er ongeveer over om de aarde te bereiken?

80. Verkiezingen

Bij de laatste gemeenteraadsverkiezingen in een kleine provinciestad was de opkomst 44%. Het totaal aantal stemgerechtigden was toen 12600.
a. Hoeveel mensen zijn gaan stemmen?

De grootste partij kreeg een derde deel van de stemmen.
b. Hoeveel mensen stemden er op de grootste partij?

Er waren 12 zetels te verdelen.
c. Hoeveel zetels gingen er naar de grootste partij?

81. Artikelen

a. In een schoenenwinkel zijn kinderschoenen te koop van maat 29 tot en met 38. Hoeveel verschillende hele maten kinderschoenen zijn er in deze winkel?

b. Dezelfde schoenenwinkel verkoopt damesschoenen van maat 36 tot en met 44. Bij de damesschoenen zijn ook de tussenliggende halve maten, bijvoorbeeld maat $39\frac{1}{2}$, aanwezig. Hoeveel verschillende maten damesschoenen kun je in deze winkel kopen?

c. "Voor elke prijs tussen € 5 en € 10 hebben wij een artikel" adverteert de winkelketen Diverta. Prijzen in deze winkels zijn afgerond op 5 eurocent. Voor een moederdagcadeau heeft Lieselot € 10 te besteden. Uit hoeveel artikelen kan zij zeker kiezen in een winkel van Diverta?

82. Van breuken naar kommagetallen

a. Schrijf als kommagetal: $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{100}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{12}{20}$, $\frac{11}{20}$.

b. Is iedere breuk als kommagetal te schrijven?

83. Van kommagetallen naar breuken

a. Schrijf als breuk: 0,75 ; 0,125 ; 0,6 ; 0,07.

b. Is ieder kommagetal als breuk te schrijven?

84. Getallen op de getallenlijn

Teken een getallenlijn van 0 tot 5 en laat daarop zien waar de volgende getallen liggen:

0,9 ; $\frac{3}{100}$; $\frac{20}{5}$; $3\frac{1}{3}$; 2,25 ; 3,09 ; 3,1 ; 4,75 ; anderhalf .

85. Verschillen van kwadraten

Reken na dat geldt: $2^2 - 1^2 = 3$ en $3^2 - 2^2 = 5$ en $4^2 - 3^2 = 7$

a. Wat is de uitkomst van $5^2 - 4^2$?

b. Zonder uit te rekenen: wat komt er uit $17^2 - 16^2$?
Controleer je vermoeden met de berekening.

c. Kun je, bijvoorbeeld met een plaatje, uitleggen waarom de regel die je hebt ontdekt klopt?

86. Bijna een kwadraat…

Bekijk de volgende vermenigvuldigingen: 9 x 11 = 99, 19 x 21 = 399, 29 x 31 = 899.
De uitkomst is in die drie gevallen steeds "een kwadraat min 1"

a. Welke kwadraten zijn dat?

b. Reken zelf eens uit: 39 x 41 en 49 x 51. Zijn die ook weer "een kwadraat min 1"?

c. Kun je, bijvoorbeeld met een plaatje, uitleggen waarom dit altijd zo is?

d. Bekijk nu eens 8 x 12, 18 x 22 enzovoort. Vind je hierbij ook een regel?

6. Keuzestof: getal en getalbegrip

In dit hoofdstuk wordt dieper ingegaan op stof van vorige hoofdstukken en er worden ook een paar nieuwe zaken behandeld.
De twee hoofdonderwerpen die aan de orde komen zijn: deelbaarheid en talstelsels.

Probleem 1 Deelbaarheid

Ik heb een bedrag van € 210 dat ik eerlijk wil verdelen in hele euro's over een groep mensen.
De twee uitersten zijn: alles voor 1 persoon of 210 personen met elk 1 euro.
> Welke groepgroottes komen nog meer in aanmerking? Als je het systematisch doet, vind je vast alle mogelijkheden.

Probleem 2 Vreemde talstelsels

Hieronder zie je een stukje van een tabel met ASCII codes (*American Standard Code for Information Interchange*). Daarin zijn alle letters, cijfers en leestekens met een cijfercode weergegeven. Op die manier kan een computer tekst 'lezen'. Je ziet bij elke code vier cijfercombinaties. De linkse gebruikt het tientallig stelsel (Dec) dus met de cijfers 0 t/m 9; dan volgen het achttallig stelsel (Oct) met alleen de cijfers 0 t/m 7, het zestientallig stelsel (Hex) met de cijfers 0 t/m 9 aangevuld met de letters A, B, C, D, E en F en het tweetallig stelsel (Bin) met alleen de cijfers 0 en 1.

Dec	Oct	Hex	Binair	Code
32	040	20	0100000	SP
33	041	21	0100001	!
34	042	22	0100010	"
35	043	23	0100011	#
36	044	24	0100100	$
37	045	25	0100101	%
38	046	26	0100110	&
39	047	27	0100111	'
40	050	28	0101000	(

Het uitroepteken "!" (het tweede leesteken in de rechterkolom) heeft achtereenvolgens de cijfercode 32 (het 'gewone' getal twee en dertig), 041, 21 en 0100001.
Net als het vertrouwde tientallig stelsel zijn Oct, Hex en Binair ook positiestelsels. Let maar eens op de regelmaat bij de oplopende cijferrijtjes.
De leestekens ")" en "*" hebben de tientallige code 41 en 42.
> Kun je bedenken hoe die twee tekens er uitzien in Oct, Hex en Binair?
> Het symbool "@" dat in emailadressen wordt gebruikt heeft de tientallige cijfercode 64.
Kun je bedenken wat de cijfercode van "@" is in Oct, Hex en Binair?

Beide problemen zijn makkelijker op te lossen als je eerst wat meer achtergrondinformatie hebt.
Die krijg je in de volgende twee paragrafen.

6.1 Deelbaarheid

Deler

Het getal 210 kan worden gedeeld door 2, door 3, door 5 en door 7. En als je die vier getallen met elkaar vermenigvuldigt, krijg je precies 210 als antwoord. Dus:

210 = 2 x 3 x 5 x 7

De getallen 2, 3, 5 en 7 worden *delers* genoemd van 210.

Een deler van een getal is een geheel getal dat precies een geheel aantal keer in het getal zelf past. Dus:

2 is een deler van 210, want 210 = 105 x 2 en 105 is een geheel getal.

4 is niet een deler van 210, want 210 = 52,5 x 4 en 52,5 is niet een geheel getal.

14 (=2 x 7) is ook een deler van 210, want 15 x 14 = 210

Ook andere combinaties van producten van de delers 2, 3, 5 en 7 zijn deler van 210.

Priemgetal

De getallen 2, 3, 5 en 7 zijn bijzonder: ze hebben geen andere delers dan de flauwe gevallen: 1 en het getal zelf. Zulke getallen heten *priemgetallen*.

Andere voorbeelden van priemgetallen (alleen maar deelbaar door 1 en zichzelf) zijn: 11, 13, 17, 19, 23, ...

De priemgetallen spelen onder andere een belangrijke rol bij het werken met breuken. Bij het vereenvoudigen van breuken zoek je delers die zowel in de getallen van de teller als van de noemer voorkomen. Bij het gelijknamig maken van breuken (om ze te kunnen optellen of aftrekken) zoek je een getal waar de noemers als delers in voorkomen.

Ontbinden in priemfactoren

Een bewering die waar is voor alle gehele getallen, maar die we niet gaan bewijzen, is:

Elk geheel getal is op één manier te schrijven als product van priemgetallen

Grootste gemene deler (ggd) en kleinste gemene veelvoud (kgv)

We bekijken de getallen 3850 en 420. Je kunt zelf nagaan (door steeds te delen door priemgetallen oplopend van klein naar groot, dus 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...) dat geldt:

3850 = 2 x 5^2 x 7 x 11

420 = 2^2 x 3 x 5 x 7

Als je nu de breuk $\frac{420}{3850}$ moet vereenvoudigen, dan zoek je getallen die als factor voorkomen in zowel de teller als de noemer. Je kunt zien dat de factoren 2, 5 en 7 in beide getallen voorkomen en dat er ook geen andere gemeenschappelijke factoren zijn. Maar dat betekent dat beide getallen deelbaar moeten zijn door 70 (= 2 x 5 x 7).

Dus: $\frac{420}{3850} = \frac{70\times 6}{70\times 55} = \frac{6}{55}$ en verder vereenvoudigen is niet mogelijk omdat er geen andere gemeenschappelijke delers te vinden zijn.

Het getal 70 heet de ***grootste gemene deler*** van de getallen 3850 en 420. "Gemene" is tamelijk oud Nederlands voor "gemeenschappelijke".

Deze grootste gemene deler wordt vaak genoteerd als **ggd(3850, 420) = 70**

Bij het gelijknamig maken van breuken zoek je een getal waarvan zowel de ene als de andere noemer een deler is. Ofwel: je zoekt een getal dat deelbaar is door beide noemers. Dan moet je alle priemfactoren die in het ene getal en ook alle priemfactoren die in het andere getal zitten meenemen.

Bij 420 en 3850 zijn dat dus: 2^2, 3, 5^2, 7 en 11. Het product van deze priemfactoren wordt het ***kleinste gemene veelvoud*** genoemd, met notatie **kgv(3850, 420) = 23100 = 2^2 x 3 x 5^2 x 7 x 11**

Opgaven

87. Delers van 210 en 3850

210 = 2 x 3 x 5 x 7

a. Vind alle delers van 210 (1 en 210 zelf zijn ook delers) door systematisch de priemfactoren van het getal te combineren. Het aantal delers van 210 is in totaal 16!

3850 = 2 x 5^2 x 7 x 11

b. Vind alle delers van 3850 (dus ook 1 en 3850 zelf) door systematisch alle priemfactoren van het getal onderling te combineren. Het zijn er in totaal 24!

88. Bereken de som van twee ongelijknamige breuken

a. Gebruik de informatie van bladzijde 38 om aan te tonen dat de volgende uitwerking klopt:

$$\frac{1}{420}+\frac{1}{3850}=\frac{5\times 11}{23100}+\frac{2\times 3}{23100}=\frac{61}{23100}$$

b. Waarom kun je zeker weten dat het resultaat niet nog verder kan worden vereenvoudigd?

Elk geheel getal kan worden geschreven als een product van priemgetallen.
De eenvoudigste manier om dat product te vinden is om na te gaan of het getal deelbaar is door opvolgende, steeds grotere priemgetallen, te beginnen bij 2. Natuurlijk kan het daarbij voorkomen dat er meerdere keren door hetzelfde priemgetal kan worden gedeeld. Als een getal deelbaar is door 25, dan kan het namelijk twee keer worden gedeeld door het priemgetal 5 (zoals in het getal 3850 voorkomt).
De priemgetallen tot 100 zijn:
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 91 en 97.

89. Een getal ontbinden in priemfactoren

Vind van de volgende getallen de priemfactorontbinding:

a. 24 b. 52 c. 75 d. 135 e. 924 f. 1023

90. deelbaarheid

a. Hoe zie je aan een getal of het deelbaar is door 25? En door 50?

Honderd is deelbaar door 4, want 4 × 25 = 100. Om na te gaan of een getal deelbaar is door 4 is het daarom voldoende om naar de laatste twee cijfers te kijken.

b. Welke getallen zijn deelbaar door vier: 28, 34, 82, 143, 576, 2898?

Ga voor elk getal na of het deelbaar is door 2, 3, 5, 7, 11:

c. 294, 2375, 45986, 12765490, 238964.

91. Bereken

a. ggd (28, 105) b. ggd (20, 45) c. ggd (54, 18) d. ggd (35, 81, 270)

92. Bereken

a. kgv (28, 105) b. kgv (20, 45) c. kgv (54, 18) d. kgv (35, 81, 270)

6.2 Talstelsels en het positiesysteem

Het tientallig systeem waaraan wij zo zijn gewend is maar één van de mogelijke manieren om getallen weer te geven. Hoewel er in het verleden andere interessante systemen werden gehanteerd (onder andere bij de Babyloniers, de Romeinen en de Maya's) , bekijken we hier alleen wat nader de moderne methoden die in het digitale tijdperk gangbaar zijn en die vergelijken we met ons tientallig stelsel.
Eerst het vertrouwde tientallig stelsel, maar dan een beetje anders bekeken.
Je weet (hopelijk):
1 000 000 = 10^6, 100 000 = 10^5, 10 000 = 10^4,1000 = 10^3, 100 = 10^2 en 10 = 10^1.
Als je dat patroon van afnemende exponenten voortzet naar de eenheden en de kommagetallen dan krijg je
1 = 10^0, 0,1 = $\frac{1}{10}$ = 10^{-1}, 0,01 = $\frac{1}{100}$ = 10^{-2} en 0,001 = $\frac{1}{1000}$ = 10^{-3}, enzovoort
Hier nog eens de bakjes, maar nu met de machten van 10 er in:

10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0	,	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}

Ons tientallig stelsel is dus gebaseerd op machten van 10, waarbij de afspraak is dat 1 gelijk is aan 10^0. Ook ken je nu de negatieve machten van 10 als schrijfwijze voor de tienden, honderdsten, ...
Het getal 37, 025 kan dus worden geschreven als $3\cdot10^1+7\cdot10^0+0\cdot10^{-1}+2\cdot10^{-2}+5\cdot10^{-3}$.
Bereken je nu 100 keer dit getal, dan worden de exponenten van alle voorkomende machten van 10 met twee opgehoogd en dat betekent dat elk van de cijfers 3, 7, 0, 2 en 5 twee bakjes naar links opschuift. Het resultaat is dat in het getal 37,025 de komma twee naar rechts verschuift:
100 x 37,025 = 3702,5

bewerkingen	10^3	10^2	10^1	10^0	,	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
getal			3	7	,	0	2	5		
100 x getal	3	7	0	2	,	5				

De talstelsels die eerder zijn genoemd (Oct, Hexa, Binair) werken op precies dezelfde manier, maar dan met machten van 8, 16 en 2. En met maar één groot verschil: de komma hoort bij het decimale stelsel en komt dus niet voor bij de andere talstelsels. We bekijken alleen de schrijfwijze van gehele getallen.

Het binaire stelsel geven we hier als voorbeeld. De bakjes met machten van 2 en daaronder de waarde in het tientallig stelsel.

macht van 2	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
waarde 10-tallig	64	32	16	8	4	2	1
een binair getal		1	1	0	0	1	1

Het binaire getal 110011 heeft in het tientallig stelsel dus de waarde
1 x 32 + 1 x 16 + 0 x 8 + 0 x 4 + 1 x 2 + 1 x 1= 51.

Hoe schrijf je het getal 57 (tientallig) als binair getal? Eigenlijk heel eenvoudig te vinden als je de machten van 2 kent: trek steeds een zo hoog mogelijke macht van 2 af:
57 = 32 + 25 = 32 + 16 + 9 = 32 + 16 + 8 + 1 = 1 x 32 + 1 x 16 + 1 x 8 + 0 x 4 + 0 x 2 + 1 x 1
dus 57 (10-tallig) = 111001 (binair).

Opgaven

93. Tientallige, binaire en octale getallen

Een getal zoals 99 999 (een getal dat uitsluitend uit negens bestaat) in het tientallig stelsel is bijzonder: alle bakjes, in dit geval de bakjes van 10^0 tot en met 10^4, zijn tot de rand gevuld.
a. Wat gebeurt er als je daarbij het getal 1, dus een extra bijdrage aan bakje 10^0, optelt?
b. Waarom betekent dit dat 99 999 + 1 = 100 000?

Bekijk nu een binair getal dat uitsluitend uit enen bestaat, bijvoorbeeld 11111.
c. Wat gebeurt er als je hierbij het binaire getal 1 optelt?
d. Waarom geldt: 11111 + 1 = 100000?
Controleer je antwoord door de som te vertalen naar het tientallig stelsel.

Het octale talstelsel werkt met machten van 8, dus in de bakjes komen alleen de cijfers 0 tot en met 7 voor.
e. Wat is de waarde van 77 in het tientallig stelsel?
f. Waarom geldt (octaal): 77 + 1 = 100

94. Hexadecimaal

Het hexadecimale talstelsel werkt met machten van 16. De cijfers 0 tot en met 9 worden aangevuld met de hoofdletters A, B, C, D, E en F. In totaal dus 16 'cijfers'.
a. Waarom kunnen niet gewoon '10' tot en met '15' worden gebruikt als extra cijfers?
b. Welk hexadecimaal getal volgt op 12CFF?
c. En wat is het getal dat na FFFFF komt?

Op bladzijde 30 werden breuken omgeschreven naar kommagetallen. Die kommagetallen konden eindig zijn (zoals bij $\frac{3}{8}$ = 0,375) of repeterend (zoals bij $\frac{1}{9}$ = 0,111111...). Op bladzij 30 werd beweerd dat alleen noemers die zijn om te schrijven naar een macht van 10 een eindig kommagetal opleveren.
Nu weten we : 10 = 2 x 5, 100 = 2^2 x 5^2, 1000 = 2^3 x 5^3, ... , $10^7 = 2^7$ x 5^7, enzovoorts.
Iedere macht van 10 bestaat dus alleen uit de priemfactoren 2 en 5.

95. Breuken als eindige kommagetallen

De breuk $\frac{3}{80}$ is te schrijven als eindig kommagetal. Bedenk dat $80 = 2^4 \cdot 5$
a. Met welk getal moet 80 worden vermenigvuldigd om een noemer te krijgen die een macht is van 10?
b. Verklaar dit: $\frac{3}{80} = \frac{3\times 125}{80\times 125} = \frac{375}{10000} = 0,0375$

96. Eindige kommagetallen

Hier zie je de noemers van een aantal breuken. Welke breuken zijn te schrijven als eindige kommagetallen?
1 25 400 30 125 35 64

6.4 Afronden

Afronden is een manier om een getal met veel cijfers kleiner te schrijven zonder dat belangrijke informatie verloren gaat. Bijvoorbeeld, op 1 januari 2009 telde Nederland, volgens het Centraal Bureau voor de Statistiek (CBS), $16\ 486\ 587$ inwoners. Zo'n getal wordt meestal afgerond: Nederland telde 16 miljoen inwoners, of 16,5 miljoen inwoners. Let op dat je afgeronde getallen niet nog eens mag afronden: 16,5 miljoen nog eens afgerond op een heel aantal miljoenen wordt 17 miljoen, en dat is niet juist.
De meest gebruikelijke manier van afronden is als volgt. Zet een streepje achter het laatste cijfer dat je wilt behouden. Staat daar een 5 of hoger achter, dan rond je af naar boven door 1 op te tellen bij dat laatste cijfer. Vervolgens mag je de cijfers die achter de stippellijn of het streepje staan door nullen vervangen (of je laat ze weg als ze achter de komma staan). Bijvoorbeeld: $14\ 587{,}86\ 531$ op 2 decimalen afgerond is $14\ 587{,}87$ en afgerond op een honderdtal $14\ 600$.

Oplossing van de rapportcijfers

Het gemiddelde cijfer is (4,1 + 6,4 + 5,1 + 6,3) : 4 = 5,475. Afgerond op één decimaal is dit een 5,5 en dat krijgt Joice op haar rapport te zien. Tijdens de rapportvergadering wordt haar cijfer voor Duits wel als een tekortpunt geteld, want afgerond op een geheel getal is haar cijfer een 5. Echter, op sommige scholen wordt de 5,5 afgerond naar een 6 en dan niet als een onvoldoende geteld. Dit is rekenkundig onjuist omdat het oorspronkelijke getal (5,475) dichter bij 5 is dan bij 6.
Let op: men spreekt hier van 'cijfers' omdat het vroeger gebruikelijk was met gehele getallen van 1 tot en met 10 te beoordelen (een 'tien' was een hoge uitzondering). De beoordeling werd dus meestal in een enkel cijfer uitgedrukt. In bijvoorbeeld het Engels heeft men een ander woord voor deze afwijkende betekenis van het woord 'cijfer' (*figure* in plaats van *digit*).

Opgaven

97. Afronden

Rond de volgende getallen af op 3 decimalen.

a. 0,43726
b. 43,72694
c. 0,00084
d. 23,8995

98. Afronden

a. Rond de volgende getallen af op een duizendtal: 43726, 4372694, 379925.
b. Rond de volgende bedragen af op 5 cent: 0,43 ; 12,36 ; 24,68 ; 8,256 ; 9,376.

99. Altijd netjes afronden?

Een goederenlift heeft een draagvermogen van 370 kg. Een metselaar wil zoveel mogelijk zakken cement van 25 kg met de lift naar boven brengen. Hoeveel zakken cement kunnen er in de lift?

6.5 Wetenschappelijke notatie

Voor heel erg grote (of kleine) getallen is er de *scientific* of **wetenschappelijke notatie**. Daarvoor worden machten van 10 gebruikt.
In de wetenschappelijke notatie wordt een getal geschreven als een kommagetal met maar één cijfer (geen nul, dus het meest significante cijfer) voor de komma. Zo nodig wordt dit kommagetal vermenigvuldigd met een macht van tien.
Bijvoorbeeld, in de wetenschappelijke notatie wordt 2345 geschreven als $2{,}345 \times 10^3$.
Op een rekenmachine kan dit er zo uitzien:

```
2345
          2.345E3
```

Praktisch gezien betekent 'E3' dat de komma 3 plaatsen naar rechts moet schuiven. Het kan ook voorkomen dat de komma naar links moet:

```
.00068
           6.8E-4
```

Hier zie je dat 0,00068 gelijk is aan $6{,}8 \times 10^{-4}$ (de 'E-4' betekent dat de komma 4 plaatsen naar links moet).
Een groot aantal cijfers kan een verkeerde indruk geven van de nauwkeurigheid. Bijvoorbeeld, op een verkeersbord staat dat de afstand Apeldoorn – Vaassen 6 km is, de snelheidsmeter op je fiets laat zien dat je vrijwel constant 24 km/uur fietst. Dan kun je berekenen dat je 15 minuten over de fietstocht zult doen. Maar de afstand van 6 km had ook 6,4 km kunnen zijn (verkeersborden geven geen cijfers na de komma) en dan komt je berekening uit op $\frac{6{,}4}{24} \times 60 = 16$ minuten. Dit verschijnsel heeft te maken met **significantie**. Het gaat daarbij om het aantal significante (betekenisvolle) cijfers in getallen. "Nederland heeft 16,5 miljoen inwoners" betekent niet dat er precies 16 500 000 mensen in Nederland wonen. Het aantal is afgerond op 0,1 miljoen en daardoor zijn er drie significante cijfers (1, 6 en 5).

Opgaven

100. Hoe precies?

a. Een auto heeft een gewicht van 967 kg. De vier banden wegen elk 6,2 kg. Bereken het gewicht van de auto zonder de banden.
b. Het aantal inwoners in Apeldoorn op 1 januari 2008 is 155 108. Hiervan is 43,7 % ongehuwd. Bereken het aantal ongehuwde Apeldoorners op 1 januari 2008.

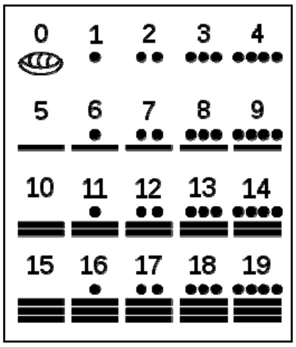
101. Herschrijven

a. Schrijf de volgende getallen, die hier in wetenschappelijke notatie staan, als een kommagetal: $5{,}8977\times10^3$; $2{,}9\times10^{-2}$; $-1{,}23\times10^{-4}$; $7{,}458\times10^5$.
b. Schrijf de volgende getallen in wetenschappelijke notatie: 987654321 ; 0,0098 ; 7985,5431 .

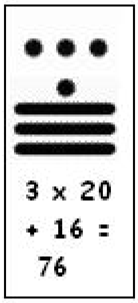
102. Engineering

Veel rekenmachines kennen naast de normale en *scientific* notatie ook de *engineering* (ingenieurs)notatie, die iets afwijkt van de wetenschappelijke notatie. Zoek uit waar dit verschil in zit.

6.6 Andere talstelsels

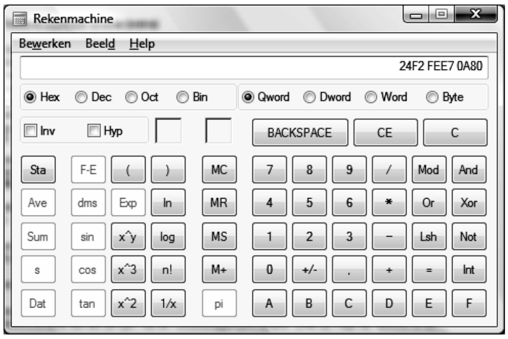


De Maya's vormden vóór Columbus een van de grootste culturen in Centraal Amerika. Tegenwoordig leven ongeveer 8 à 9 miljoen Maya's in Mexico en Midden Amerika, de meesten in Guatemala. De Maya cultuur kent een positioneel talstelsel met grondtal 20.
Zij hadden dus 20 cijfers die op zich weer opgebouwd waren twee soorten symbolen: liggende streepjes en punten.
Een speciaal symbool was er voor de nul: een lege schelp.
De Maya's noteerden getallen in een positioneel stelsel, zoals wij dat ook doen. De cijfers schrijven ze niet achter elkaar, maar boven elkaar: het cijfer met de hoogste waarde staat boven. Zie de figuur hiernaast.



Van enkele andere oude culturen is eveneens bekend hoe men getallen noteerde en hoe er gerekend werd. Er is hierover veel te lezen in bibliotheken en op internet, zie bijvoorbeeld www.math4all.nl/Wiskundegeschiedenis.

In de informatica wordt veel gerekend in andere positionele talstelsels dan ons decimaal stelsel. Sommige rekenmachines, bijvoorbeeld, de rekenmachine die met het softwarepakket MS Office geleverd wordt (zie hiernaast), kennen een instelling voor deze talstelsels. Het meest elementaire talstelsel is het tweetallig of binaire stelsel, dat maar twee cijfers kent: 0 en 1.
Het cijfer 1 in het binaire getal 100, betekent dan dus niet 1×10^2, maar 1×2^2 (en het binaire 100 is dus vier).
Voor het getal tien zijn in het tweetallig stelsel vier cijfers nodig: tien = acht+twee = $1{\times}2^3{+}0{\times}2^2{+}1{\times}2^1{+}0{\times}2^0 = 1010$.



"Er zijn 10 soorten mensen, mensen die wel en mensen die niet binair kunnen tellen."

Opgaven

103. Mayarekenen

Schrijf in de Maya notatie de getallen 37 en 29. Tel deze getallen bij elkaar op en schrijf de som in de Maya notatie.
Hoe zou een Maya de som hebben uitgerekend?

104. Cijfers en letters

In het zestientallig stelsel is er een tekort aan symbolen voor de cijfers. Hoe heeft men dit opgelost? (zie de afbeelding van de rekenmachine)

105. Andere talstelsels

Het rekenen met hoeken werd vroeger gedaan in een zestigtallig stelsel, waarbij een graad was verdeeld in 60 minuten en een minuut in 60 seconden. Noem een andere toepassing van dit talstelsel. Ken je meer situaties waarin een afwijkend grondtal wordt gebruikt?