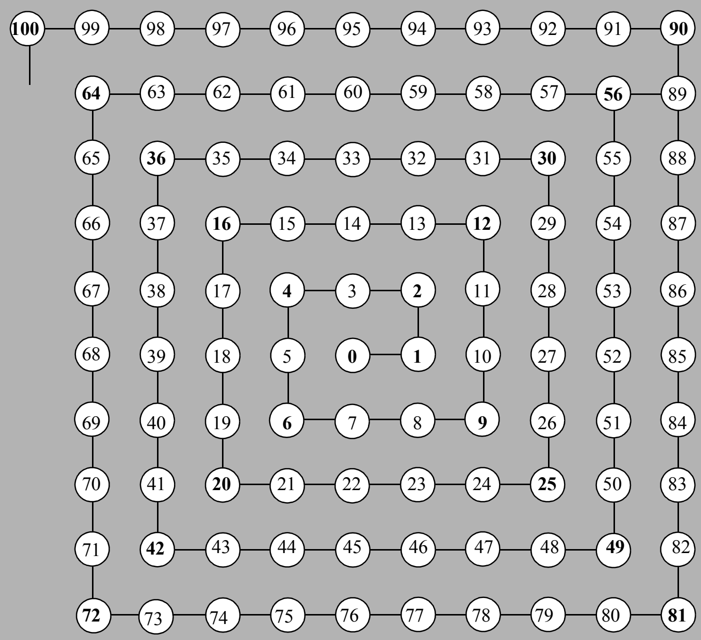
Natuurlijke Algebra



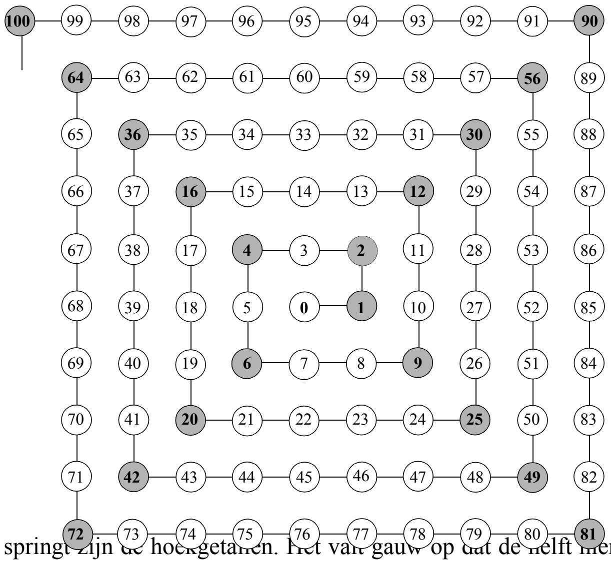
Ten geleide

Dit boekje bevat achtergrondinformatie en zestal lesideeën bij de poster 'Natural Algebra'. De titel slaat in de eerste plaats op de verzameling *natuurlijke getallen*, die op de poster wordt gerepresenteerd door een hoekige spiraal die in principe eindeloos is.
De wereld van de natuurlijke getallen is concreet voor leerlingen: het is een wereld die zij sinds hun kleutertijd vingertje voor vingertje hebben verkend. Bij het onderwijs in de algebra wordt nu, anders dan vroeger, veelal gezocht naar verhaaltjes om het manipuleren met variabelen te 'verkopen'. Helaas liggen de realistische contexten om algebra aan te leren niet voor het oprapen. Tenzij ... de wereld van de natuurlijke getallen realistisch genoeg wordt bevonden om als natuurlijke bron van contexten te dienen.
Het aardige van die bron is dat zij onuitputtelijk lijkt en dat zij de gelegenheid biedt de werkelijke kracht van de algebra, het *generaliseren* en het *bewijzen,* aan te boren.
Jammer genoeg hebben elementaire onderwerpen uit de getaltheorie - denk aan deelbaarheid en priemgetallen, eventueel ook modulorekenen - geen positie verworven in het huidige Nederlandse curriculum. Ervaringen leren echter dat juist deze onderwerpen leerlingen kunnen prikkelen en zelfs uitdagen tot wiskundig onderzoek.
Een aantrekkelijke kant van dit leerstofgebied is ook dat zij zo'n lange historie heeft. De Pythagoreeërs waren bijvoorbeeld al uitnemende vorsers naar bijzondere eigenschappen van natuurlijke getallen en ook de latere geschiedenis van de wiskunde geeft tal van rijke vondsten in die wereld te zien. Aan de maatschappelijke relevantie van de getaltheorie is vroeger nog wel eens getwijfeld, maar in deze tijd van toenemende codering en crypto-communicatie weten we beter. Mijn motto is dan ook, doe meer met natuurlijke getallen in het algebra-onderwijs. En de Nederlandse titel van de poster zou dan even goed kunnen luiden: *natuurlijk algebra* !

Martin Kindt

De getallenspiraal

Het voordeel van de spiraalvoorstelling van de getallenlijn is evident; er kunnen veel meer getallen worden zichtbaar gemaakt. Maar de vorm heeft hier meteen ook een inhoudelijk effect. Er ontstaan allerlei patronen die tot algebraïsche activiteiten kunnen uitnodigen.



Wat in het oog springt zijn de hoekgetallen. Het valt gauw op dat de helft hiervan kwadraten zijn. Daar aan ligt ten grondslag dat de verschillen tussen opvolgende kwadraten lineair toenemen; als 0 meegeteld wordt als kwadraat is die verschilrij juist de rij oneven getallen: 1, 3, 5, ... De verschilrij van de andere serie hoekgetallen (inclusief 0) is 2, 4, 6, ... Die hoek getallen, dus 0, 2, 6, 12, ..., worden in het Nederlands *rechthoeksgetalle*n genoemd.

Lesidee 1: kwadraten en rechthoeksgetallen in de spiraal

De poster hangt voor de klas.
De leraar vestigt de aandacht op de hoekgetallen (blauw en rood).
Een mogelijke vraag:
* *Stel je voor dat de spiraal voortgezet wordt met twee complete 'rondjes'. Welke hoekgetallen komen er dan?*

Er zijn verschillende mogelijkheden om de hoekgetallen te voorspellen.
Gewoon uittellen is een mogelijkheid, maar het kan bijna niet anders of dit vestigt de aandacht op de toenemende sprongen.
Startend in 1 leidt dit voor de blauwe hoekgetallen bijvoorbeeld tot:
$1 + (1 + 2) = 4$, $4 + (2 + 3) = 9$, $9 + (3 + 4) = 16$, enz.
Sommige leerlingen zullen in de uitkomsten de kwadraten herkennen.
Het stapsgewijs optelpatroon is terug te vinden in de stippenpresentatie van de kwadraten (zie ook de band op de poster).
De gedachtensprong naar de andere band met rechthoeksgetallen (sommen van even getallen) is nu niet zo groot meer.
Afhankelijk van de aanwezige voorkennis kan nu worden geformaliseerd en kunnen geschikte formules voor beide series getallen worden gevonden: $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$ of $\boldsymbol{n}^2$ versus $\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{n} + 1)$ of $\boldsymbol{n}^2 + \boldsymbol{n}$.

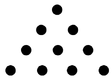
Een volgende vraag kan dan zijn:
* *In de spiraal is te zien dat ieder kwadraat precies midden tussen twee rechthoeks-getallen ligt. Hoe is dat te verklaren?*

De verklaring kan bestaan uit een paradigma.
Bijvoorbeeld; 8×8 ligt precies midden tussen 7×8 en 9×8.
Maar hier ligt ook een mooie kans om algebra te gebruiken:
$\boldsymbol{n}^2$ ligt precies midden tussen $(\boldsymbol{n} - 1) \times \boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}^2 - \boldsymbol{n}$ en $\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{n} + 1) = \boldsymbol{n}^2 + \boldsymbol{n}$.

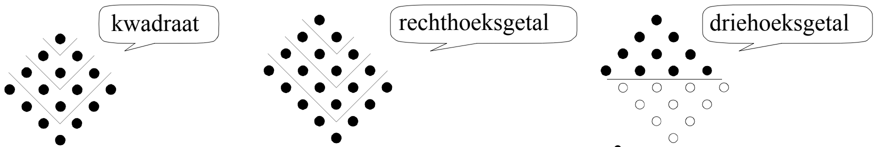
Stippenpatronen

Op de poster staan twee banden afgebeeld met rijen getallen, voorgesteld door stippenpatronen. Deze wijze van voorstellen werd al in de school van Pythagoras gebruikt.
Een beroemd voorbeeld is de driehoekige voorstelling van het getal 10, volgens de Pythagoreeers het meest volmaakte getal:

$$10 = 1 + 2 + 3 + 4$$



De Griekse wiskundige Nikomachos (omstreeks 100 na Chr.) schreef een boek over wat hij de goddelijke en wonderbaarlijke eigenschappen van de getallen noemde. Daarin behandelt hij onder meer de vierkantsgetallen, rechthoeksgetallen en driehoeksgetallen en hun onderlinge verbanden.



Een vierkantsgetal of kwadraat wordt 'modern' voorgesteld door $\boldsymbol{n^2}$.
Een rechthoeksgetal is 1 stip langer dan breed, in algebrataal: $\boldsymbol{n(n + 1)}$
Lettend op het verband tussen beide soorten, kan worden ontdekt: $\boldsymbol{n(n + 1) = n^2 + n}$
Een driehoeksgetal is de helft van een rechthoeksgetal, ofwel $\boldsymbol{\frac{1}{2}n(n + 1)}$
Met behulp van de winkelhaken kan worden ingezien dat:

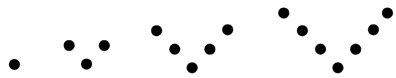
$$\mathbf{1 + 3 + 5 + ... + (2}\boldsymbol{n}\mathbf{ - 1) =} \boldsymbol{n^2} \qquad \text{en} \qquad \mathbf{2 + 4 + 6 + ... + 2}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n(n + 1)}$$

De driehoeksgetallen geven aanleiding tot de formule: $\mathbf{1 + 2 + 3 + ... +} \boldsymbol{n} = \boldsymbol{\frac{1}{2}n(n + 1)}$

Gauss heeft bewezen dat ieder natuurlijk getal te schrijven is als de som van ten hoogste *drie* driehoeksgetallen.

Lesidee 2: stippel-algebra

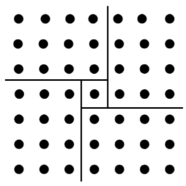
De aandacht gaat nu uit naar rijen stippenpatronen en hun algebraïsche voorstelling.
Een eenvoudig voorbeeld om mee te beginnen is de rij V-patronen:



Het eerste getal correspondeert met $n = 0$, het tweede met $n = 1$, etc.
Vragen in de trant van:
* Welk getal correspondeert met $n = 100$?
* Wat is de formule bij een willekeurig V-patroon?
* De vier patronen hierboven kunnen worden verenigd in een bekend patroon, hoe?
* Bereken 1 + 3 + 5 + ... + 99. Vervolgens: 2 + 4 + 6 + ... 100.

De rechthoeksgetallen 0 , 2, 6, 12, 20, 30, ... staan op de poster.
* Bereken 4 maal een rechthoeksgetal en tel daar 1 bij op. Wat valt je op als je naar de uitkomsten (dus 1, 9, 25, 49, 81, 121, ...) kijkt? Hoe kun je dat verklaren?

Dat de uitkomsten de rechtsonder-hoekgetallen in de spiraal zijn, dus juist de oneven kwadraten, is snel herkenbaar. De verklaring kan geometrisch zijn (paradigma!):

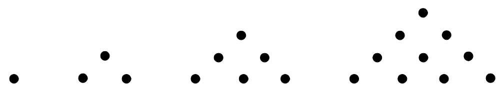


De algebraïsche pendant hiervan is:

$$4 \times n(n + 1) + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n + 1)^2$$

Lesidee 3: driehoeksgetallen

De leraar tekent een begin van de rij driehoekspatronen; de aantallen stippen vormen de rij 1, 3, 6, 10, ... (de zogenaamde driehoeksgetallen).

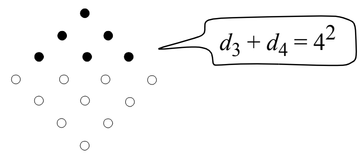


* Is er een verband tussen deze getallen en de kwadraten en/of rechthoeksgetallen?
  Hoe luidt de formule voor een willekeurig driehoeksgetal?

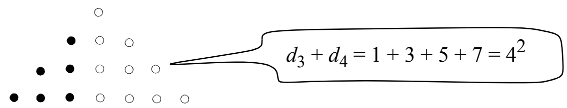
Door naar de getallen te kijken zullen er leerlingen zijn die zien dat de driehoeksgetallen gelijk zijn aan de helften van de rechthoeksgetallen. Vervolgens kan dit 'patroonmatig' worden verklaard.
Eventueel kan het verband gelegd worden met een combinatorische probleemstelling: hoeveel wedstrijden zijn er nodig voor een (halve) competitie van ***n*** clubs?

De rij driehoeksgetallen heeft allerlei mooie eigenschappen.
Hier is een hele bekende; tel steeds twee opvolgende driehoeksgetallen op.
* Welke bekende rij ontstaat er? Hoe kun je dit verklaren.

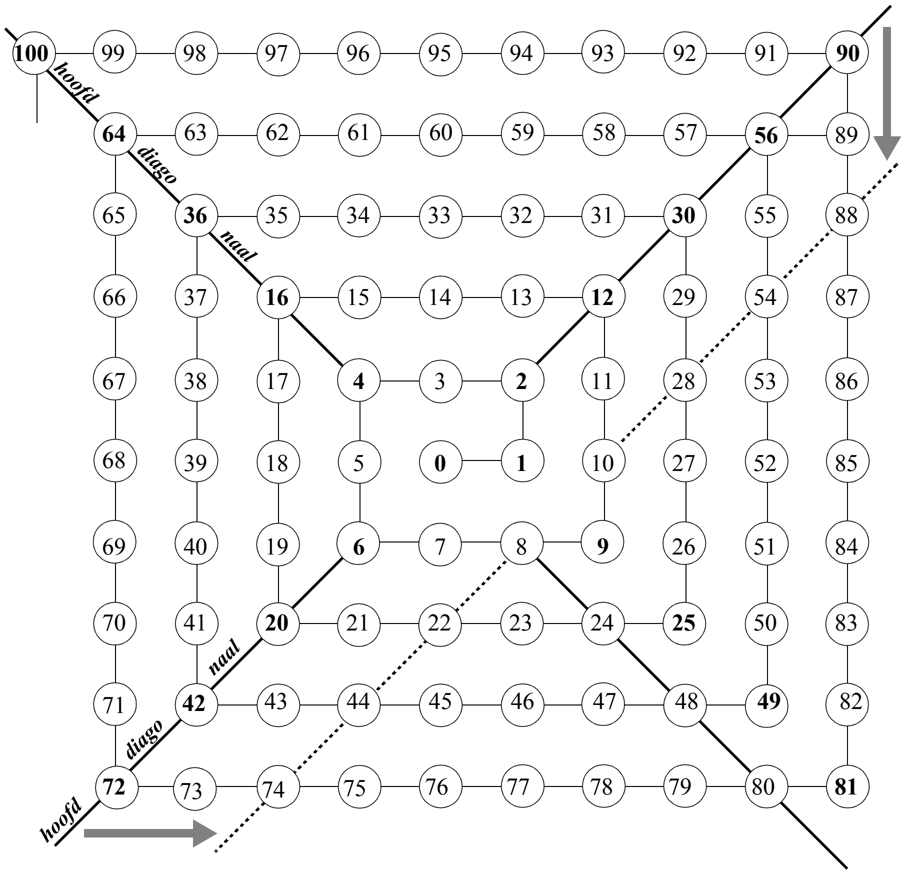
Een aanschouwelijke verklaring:



Nog een andere:



Met algebra komt er: $\frac{1}{2}(n-1)n + \frac{1}{2}n(n+1) \;=\; \frac{1}{2}(n^2 - n) + \frac{1}{2}(n^2 + n) \;=\; n^2$



100 99 98 97 96 95 94 93 92 91 90
hoofd
64 63 62 61 60 59 58 57 56 89
diago
65 36 35 34 33 32 31 30 55 88
naal
66 37 16 15 14 13 12 29 54 87
67 38 17 4 3 2 11 28 53 86
68 39 18 5 0 1 10 27 52 85
69 40 19 6 7 8 9 26 51 84
70 41 20 21 22 23 24 25 50 83
naal
71 42 43 44 45 46 47 48 49 82
diago
72 73 74 75 76 77 78 79 80 81
hoofd

Diagonalen en kwadratische rijen

De rechthoeksgetallen liggen op een hoofddiagonaal van de spiraal.
De andere hoofddiagonaal bestaat voor de helft uit kwadraten en voor de andere helft uit de viervouden van rechthoeksgetallen.
Er zijn ook diagonalen parallel aan de hoofddiagonalen.
Om te beginnen is in de spiraal te zien dat iedere diagonaal óf uitsluitend *even* óf uitsluitend *oneven* getallen bevat. De oneven kwadraten bijvoorbeeld liggen op een andere diagonaal dan de even kwadraten.
Iedere diagonaal uit twee helften met stijgende getalrijen. Al die rijen zijn kwadratisch van aard!! Het zal blijken dat de verschillen van opvolgende termen in zo'n rij steeds met 8 oplopen.
Dat kan natuurlijk eerst experimenteel worden onderzocht:

10 28 54 88 ...	8 22 44 74 ...
18 26 34 ...	14 22 30 ...
8 8 8	8 8 8

Deze eigenschap, en ook de eerder gesignaleerde bijzonderheid over het even dan wel oneven karakter van elke diagonaal, kan worden bewezen via transformaties van (delen van) de halve hoofddiagonalen. Gemakkelijk is na te gaan;
de rij 0,4,16, 36, ... correspondeert met de expressie $(2n)^2$ ofwel $4n^2$;
de rij 0, 8, 24, 48, ... correspondeert met $(2n + 1)^2 - 1$ ofwel $4n^2 + 4n$;
de rij 0, 2, 12, 30, 56, ... komt overeen met $2n(2n - 1) = 4n^2 - 2n$;
de rij 0, 6, 20, 42, 72, ... komt overeen met $2n(2n + 1) = 4n^2 + 2n$.

Alle halve diagonaalrijen zijn vbia een horizontale of verticale verschuiving terug te voeren tot een deelrij van een van deze vier rijenn.
Zo ontstaat de rij 10, 28, 54, 88, ... via een verticale verschuiving (2 omlaag) van de rij 12, 30, 56, 90, ... en ontstaat de rij 8, 22, 44, 74, ... via een horizontale verschuiving (2 naar rechts) van de rij 6, 20, 42, 72, ... (zie de figuur op de vorige bladzijde).
Het bouwen van formules bij halve diagonaalrijen is nu een niet al te lastige sport.

Lesidee 4: diagonalen in de spiraal

Er wordt doo de leraar gewezen op de diagonalen in de spiraal.
De diagonalen door 0 worden de hoofddiagonalen (eventueel centrale diagonalen) genoemd.
Eerste vraag is dan bijvoorbeeld;
* *de diagonalen bevatten óf alleen even óf alleen oneven getallen;*
weet je zeker dat dit zo blijft bij voortzetting van de spiraal?

Je zou je eerst kunnen afvragen waarom op de beide hoofddiagonalen slechts even getallen voorkomen. Dat de rechthoeksgetallen (produkten van twee opvolgende getallen) allemaal even zijn, is snel duidelijk. Op de andere hoofddiagonaal staan naar boven toe de even kwadraten en naar beneden toe de getallen die 1 kleiner zijn dan een oneven kwadraat.
De andere diagonalen ontstaan door door horizontale verschuiving van een deel van een hoofddiagonaal en verticale verschuiving over *dezelfde afstand* van een ander deel van diezelfde hoofddiagonaal en dat verklaart dan alles.

Elke diagonaal bestaat uit twee helften met stijgende getalrijen.
We gaan proberen formules bij die rijen te vinden.
Neem eerst de vier halve rijen op de hoofddiagonalen:

0, 4, 16, ... ; **0, 2, 12, ...** ; **8, 24, 48, ...** en **6, 20, 42, ...**

* *Welke formules horen hierbij ?*

Om te komen tot de formules is het eerst van belang dat de leerling weet (of ontdekt) dat een even en een oneven getal kan worden voorgesteld door respectievelijk $2n$ en $2n+1$. Met behulp van de eerder gevonden formules (lesidee 1) kunnen dan de gezochte formules worden gevonden via vervanging van n door $2n$ of $2n+1$.
Als de redenering bij de eerste vraag goed doorzien is, kunnen formules gevonden worden bij willekeurige andere halve diagonalen (kwestie van een constante optellen of aftrekken).

De som van derde machten

Eerder is opgemerkt dat elk kwadraat precies in het midden ligt van twee opvolgende rechthoeksgetallen.
Let nu op de sommen 1, 3 + 5, 7 + 9 + 11, ...
De termen van zo'n som passen precies tussen twee opvolgende rechthoeksgetallen! Immers, de (n + 1)-de som wordt voorgegaan door in totaal 1 + 2 + 3 + ... + n termen en zij begint dus met het getal $2\boldsymbol{k} + 1$ waarbij k het n-de driehoeksgetal is.
Kortom $2\boldsymbol{k} + 1 = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n} + 1) + 1$.
Evenzo is de laatste term gelijk aan $(\boldsymbol{n} + 1)(\boldsymbol{n} + 2) - 1$, de voorganger van het (n +1)-de rechthoeksgetal.
In verband met wat er hiervoor gezegd is over de onderlinge ligging van kwadraten en rechthoeksgetallen op de spiraal, volgt nu dat de gemiddelden van de termen in
1, 3 + 5, 7 + 9 + 16, ... steeds een kwadraat is. Zo komt er:

$$\mathbf{3 + 5 \ = \ 2 \times 4 \ = \ 2^3}$$

$$\mathbf{7 + 9 + 11 \ = \ 3 \times 9 \ = \ 3^3}$$

$$\mathbf{13 + 15 + 17 + 19 \ = \ 4 \times 16 \ = \ 4^3}$$

enzovoort.
Dit patroon, dat is ontdekt door Nicomachos, leidt nu gemakkelijk tot een formule voor de som van derde machten. Op de poster is te zien hoed dat kan gaan
In het algemeen geldt:

$$\mathbf{1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + \boldsymbol{n}^3 \ = \ (1 + 2 + 3 + \ldots + \boldsymbol{n})^2}$$

Het linkerlid is volgens de ontdekking van Nicomachos immers gelijk aan de de som van de eerste 1 + 2 + 3 + ... + n oneven getallen!
Het stippenpatroon rechtsboven op de poster geeft een aanschouwelijke verklaring.

Opmerking: het is niet bekend of Nicomachos de stap naar de som van de derde machten gemaakt heeft.

Lesidee 5: een hoogst merkwaardige formule

Vraag aan de leerlingen:
* Er bestaan ook kubusgetallen. Heb je enig idee welke getallen dat zijn?

Kubusgetallen kunnen worden voorgesteld door kubusvormige bouwsels van bolletjes of kleine kubusblokjes. De rij 1, 8, 27, 64, ... zal dan geen problemen opleveren.

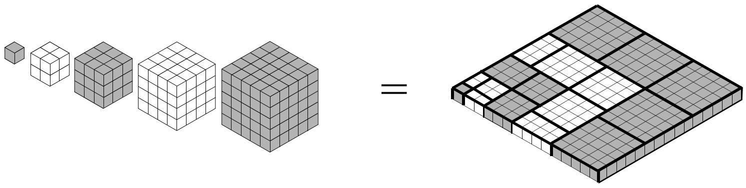
* Bekijk de sommen van opvolgende kubusgetallen. Wat valt op?

Dat het kwadraten zijn wordt spoedig duidelijk. Dat het juist kwadraten van driehoeksgetallen zijn, zal misschien door een enkeling worden opgemerkt.

De leraar schrijft nu bijvoorbeeld op het bord:

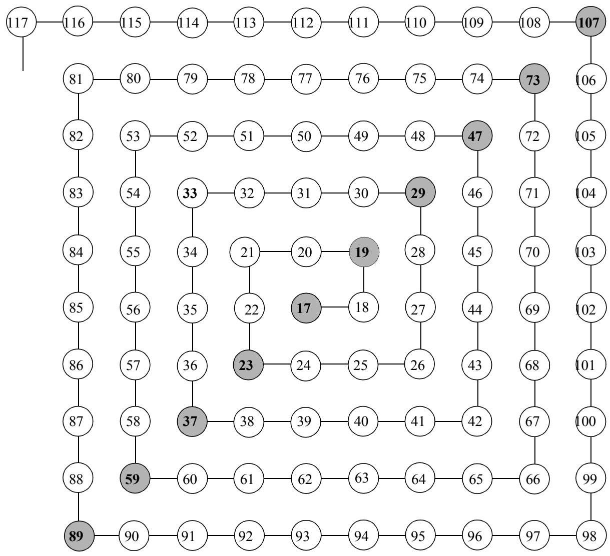
$$\mathbf{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = (1 + 2 + 3 + 4)^2}$$

Dat ziet er gek uit! Maar het klopt wel, ook voor langere sommen van derde machten.
Kunnen we dat bewijzen? Zonder hulp is dat lastig.
De leraar kan nu de ontdekking van Nicomachos presenteren en laten verklaren (waarbij de getallenspiraal nog eens goede diensten kan bewijzen.
Een andere mogelijkheid is een puur geometrische verklaring:



Priemgetallen en diagonalen

Op de poster zijn groene cirkeltjes gezet om de *priemgetallen*.
Wat opvalt is dat er twee diagonalen zijn die veel groene getallen bevatten:
71, 41, 19 , 5, 13, 31 liggen op één diagonaal; evenzo: 37, 17, 5, 7, 23, 47, 79.
Als we de spiraal met 17 in plaats van met 0 laten beginnen, komt er een hoofddiagonaal die helemaal uit priemgetallen lijkt te bestaan:



Dat is schijn. De bedoelde diagonaalgetallen zijn van de vorm $17 + \boldsymbol{r}_{\mathbf{n}} = 17 + \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n} + 1)$.
Gemakkelijk is te zien dat $\boldsymbol{n} = 16$ en $\boldsymbol{n} = 17$ getallen opleveren die deelbaar zijn door 17.
De spiraal kan nog met een paar windingen worden uitgebreid vant voor $\boldsymbol{n} = 0$ tot en met 15 zijn levert de expressie $17 + \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n} + 1)$ uitsluitend priemgetallen.

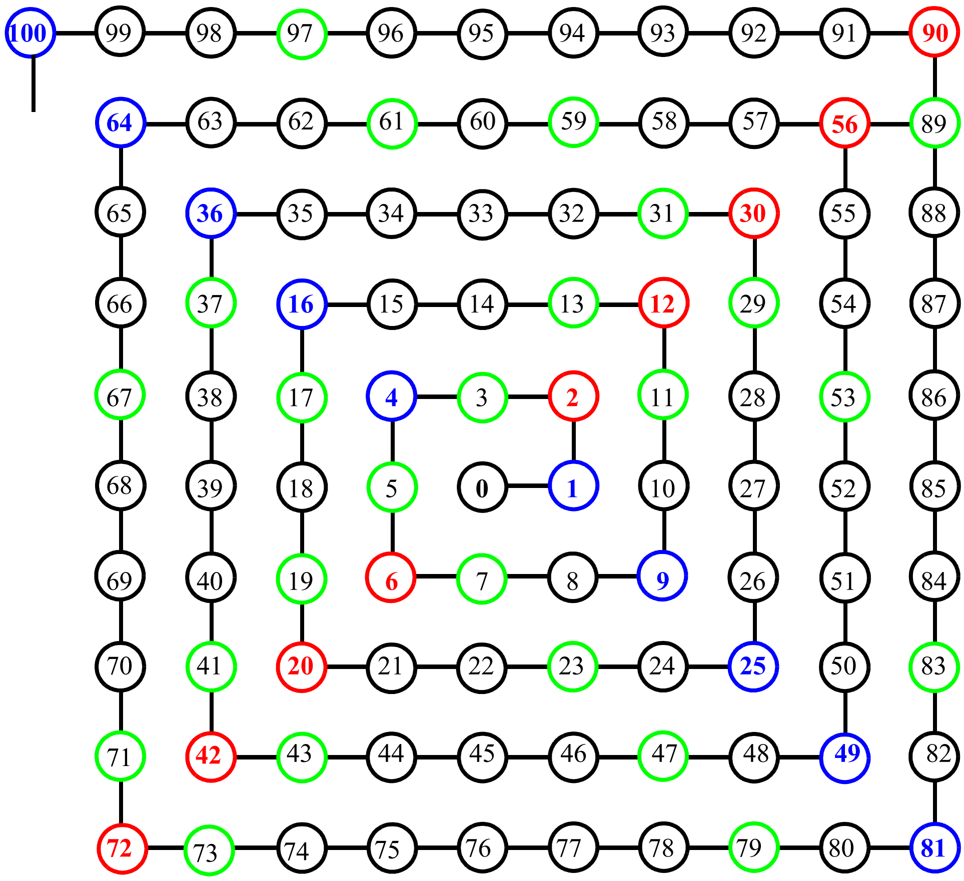
Priemgetallen en diagonalen (vervolg)

Nog spectaculairder is het als de spiraal start met 41. Voor n = 0 tot en met 39 levert de expressie 41 + ***n***(***n*** + 1) allemaal priemgetallen op. De spiraal kan dan nog tien extra windingen krijgen zonder dat de droom 'priemdiagonaal' wordt verstoord. Dit beroemde voorbeeld is afkomstig van Euler.
Deze expressie geeft zeker geen priemgetallen voor ***n*** is 41-voud of ***n*** + 1 is 41-voud, kortom voor ***n*** = 41***m*** of ***n*** = 41***m*** - 1 (k = 1, 2, 3, ...).
De tot op heden onbeantwoorde vraag is of de rij die ontstaat door bij alle rechthoeksgetallen 41 op te tellen eindig, dan wel oneindig veel priemgetallen bevat.
Dat er oneindig veel niet-priemen in de rij zijn is inmiddels duidelijk.

De rij die wordt voortgebracht door de expressie ***p*** + ***n***(***n*** + 1), met ***p*** een of ander priemgetal, levert zeker geen priemgetallen op

Lesidee 6: diagonalen van priemgetallen

Idee:
centraal staat de zogenaamde getallenspiraal:



Een paar inhoudelijke notities:
Op de 'blauwe' diagonalen staan de kwadraten of vierkantsgetallen.
Op de 'rode' diagonal zijn de zogenaamde rechthoeksgetallen te vinden (bijbehorende formule: $n \times (n+1)$ of $n^2 + n$.
De getallen in groene cirkels zijn de priemgetallen.

De vierkantsgetallen en rechthoeksgetallen hebben een zeer lange historie.
De Pythagoreeërs beelden die getallen uit als configuraties van stippen.
Die stippenpatronen maken zichtbaar dat ieder kwadraat de som van opvolgende oneven getallen en ieder rechthoeksgetal de som van even getallen is.
Bijvoorbeeld: **25** = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 en **30** = 2 + 4 + 6 + 8 + 10.
Dat verklaart ook de plaatsen op de hoeken van die twee soorten getallen!

Later deed Nicomachos van Gerasa (100 na Chr.) dat met die stippenpatronen nog eens dunnetjes over. Hij schreef een boek over 'Aritmetica' en daarin staat o.a. de stelling dat elke derde macht de som van een aantal opvolgende oneven getallen is:
$1^3 = 1$, $2^3 = 3 + 5$, $3^3 = 7 + 9 + 11$, $4^3 = 13 + 15 + 17 + 19$ etc.
In de getallenspiraal is bijvoorbeeld te zien dat het gemiddelde van de vier getallen 13, 15, 17 en 19 een kwadraat is (nl. 16) zodat $13 + 15 + 17 + 19 = 4 \times 4^2 = 4^3$
Sommatie van opvolgende derde machten geeft zo een som van opvolgende oneven getallen

vanaf 1, dus een keadraat. Dit leidt tot een van de merkwaardigste / leukste formules uit de wiskunde:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$$

Er zijn twee applets op het wisweb die betrekking hebben op de stippelpatroon-representatie van getallen ('Stippelalgebra' met en zonder opgaven).

Al deze zaken kunnen de ingrediënten zijn van een kleurige poster.
Daarbij zou een klein boekje (A5 of A6-formaat) horen met opgaven cq. lesideeën.
Er zijn talrijke aardige eigenschappen te vinden, die je, al of niet met algebra, kunt beredeneren of aanschouwelijk maken.
Een paar voorbeelden van mogelijke opdrachten cq. achtergrondinformatie:

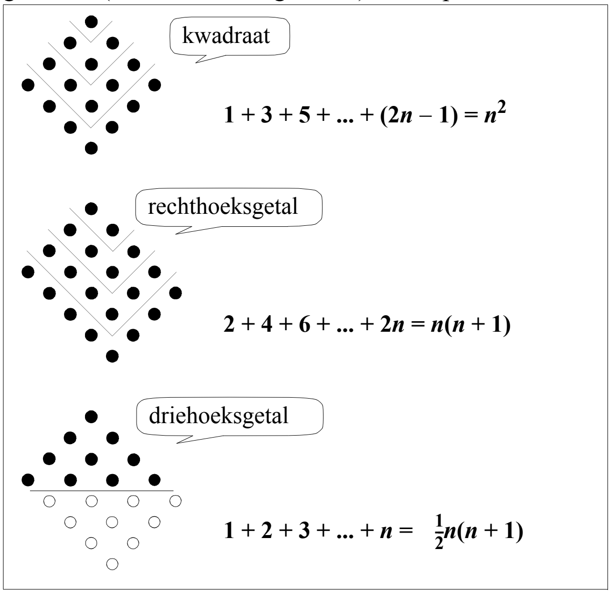
- diagonalen in de spiraal bevatten of uitsluitend even of uitsluitend oneven getallen
- vierkantsgetallen zijn beurtelings even en oneven, vandaar dat ze op twee schuine lijnen staan.
- rechthoeksgetallen zijn altijd even (namelijk even maal oneven)
- 4 maal een rechthoeksgetal plus 1 is en kwadraat (te zien met plaatje of met algebra)
- het produkt van twee opvolgende rechthoeksgetallen is weer een rechthoeksgetal (algebra: $(n-1)n \times n(n+1) = (n^2-1)n^2$
- rechthoeksgetallen zijn dubbele driehoeksgetallen (of 'enkele-competitiegetallen')
- de som van twee opvolgende driehoeksgetallen is een kwadraat (plaatje of algebra)
- er zijn twee diagonalen in de spiraal met veel priemgetallen
- als je bij de getallen van het rijtje 0, 2, 6, 12, 20, ... 90 (d.w.z. 0 plus de rechthoeksgetallen) het getal 17 optelt en als je de spiraal met 17 (i.p.v. 0) zou laten beginnen, dan zijn de getallen op de rode diagonaal priem. Dat houdt op als je de spiraal nog wat voortzet (het eerste niet-priemgetal is dan $16 \times 17 + 17 = 289$)
- Als je 17 in de voorgaande regel vervangt door 41 krijg je een rij van 40 priemgetallen op de rode diagonaal (Euler heeft dit voorbeeld , $n^2 + n + 41$, bedacht als priemrijk polynoom.
- er is bewezen dat van alle polynomen $n^2 + n + p($= priemgetal) dat van Euler het langste beginstuk van priemgetallen bevat.
- Of een polynoom van dit type oneindig veel priemgetallen genereert is hypothetisch.
  Oneindig veel niet-priemen is eenvoudig aan te tonen: neem n = veelvoud van $p,$ dan is $n^2 + n + p$ deelbaar door p; dit geldt natuurlijk ook voor n = veelvoud van p min 1.
- Nooit eerder gezien, maar wel waar: neem voor n een kwadraat plus p min 1 en $n^2 + n + p$ blijkt het produkt te zijn van twee opvolgende getallen uit de rij voortgebracht door dit polynoom (bewijs; kwestie van algebra). Voorbeeld met p = 41. Voor $n = 49$ (= 9 + 41 - 1) geldt $n(n + 1) + 41 = 2491$ $= 47 \times 53$ (= 41 + 6) x (41 + 12)

Een eerste idee over een mogelijke indeling van de poster is bijgevoegd (blz. 4).

Martin Kindt

Nikomachos' stippenpatronen

De Neopythagoreeër Nikomachos van Gerasa (100 na Chr.) is beroemd geworden om zijn 'veelhoeksgetallen’ (zoals driehoeksgetallen). Dit stipte ik al eerder aan in de Nieuwe Wiskrant (... de jaargang/ ...).

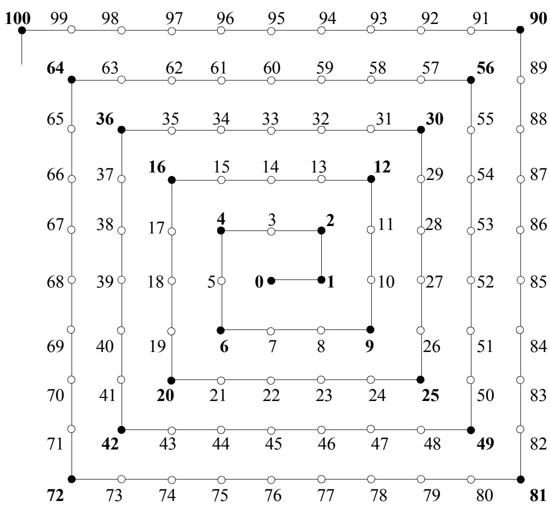


Kwadraten, rechthoeksgetallen en driehoeksgetallen laten zich respectievelijk schrijven als sommen van opvolgende oneven, even en natuurlijke getallen. Dat zijn mooie eigenschappen die uit de stippenpatronen direct te begrijpen zijn. Nikomachos ontdekte ook een merkwaardig verband tussen oneven getallen en ‘kubusgetallen’:

$$\begin{aligned}
\mathbf{1^3} &= \mathbf{1}\\
\mathbf{2^3} &= \mathbf{3+5}\\
\mathbf{3^3} &= \mathbf{7+9+11}\\
\mathbf{4^3} &= \mathbf{13+15+17+19}
\end{aligned}$$

enzovoort.

Dit kan tamelijk direct met stippenpatronen worden aangetoond, maar het is voor een bewijs ook aardig om de voorgaande theorie (in het kader) te gebruiken.
Daarbij gebruik ik een zogenaamde getallenspiraal:



De kwadraten en de rechthoeksgetallen liggen juist op de hoeken van de spiraal. Dat dit bij voortzetting zo blijft is gemakkelijk na te gaan, door naar de tussenliggende stappen te kijken. Het getal 0 is zowel kwadraat als rechthoeksgetal. Merk op dat elk kwadraat precies in het midden ligt van twee opvolgende

rechthoeksgetallen; dat volgt direct uit de stippenpatronen, maar is natuurlijk ook algebraïsch verifieerbaar.
Let nu op de sommen 1, 3 + 5, 7 + 9 + 11, ...
De termen van zo'n som passen precies tussen twee opvolgende rechthoeksgetallen! Immers, de $(n + 1)$-de som wordt voorgegaan door in totaal $1 + 2 + 3 + ... + n$ termen en zij begint dus met het getal $2k +1$ waarbij k het n-de driehoeksgetal is. Kortom $2k + 1 = n(n + 1) + 1$.
Evenzo is de laatste term gelijk aan $(n + 1)(n + 2) - 1$, de voorganger van het $(n +1)$-de rechthoeksgetal.
In verband met wat er hiervoor gezegd is over de onderlinge ligging van kwadraten en rechthoeksgetallen op de spiraal, volgt nu dat de gemiddelden van de termen in
1, 3 + 5, 7 + 9 + 16, ... steeds een kwadraat is. Zo komt er:

$$\mathbf{3 + 5 = 2 \times 4 = 2^3}$$

$$\mathbf{7 + 9 + 11 = 3 \times 9 = 3^3}$$

$$\mathbf{13 + 15 + 17 + 19 = 4 \times 16 = 4^3}$$

enzovoort.

Een fantastische formule

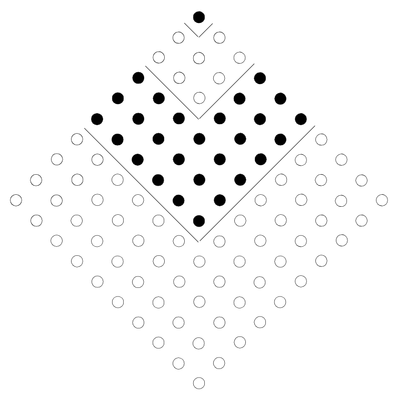
Een wiskundige formule waar je warm van wordt, is: ,

$$\mathbf{1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + \mathit{n}^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + \mathit{n})^2}$$

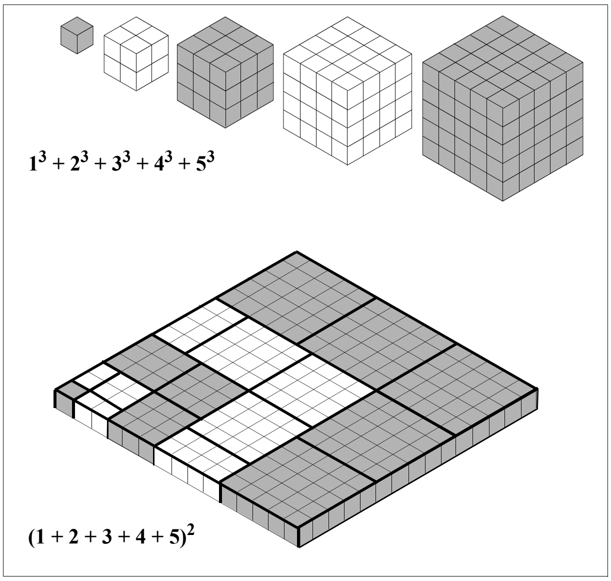
Die houdt direct verband met de ontdekkingen van Nikomachos! Uit het voorgaande volgt bijvoorbeeld dat de som van de eerste vier derde-machten gelijk is aan de som van de eerste tien oneven getallen en dat is juist het kwadraat van vierde driehoeksgetal:

$$\mathbf{1 + 3 + 5 + \ldots + 19 = 10^2 = (1 + 2 + 3 + 4)^2}$$

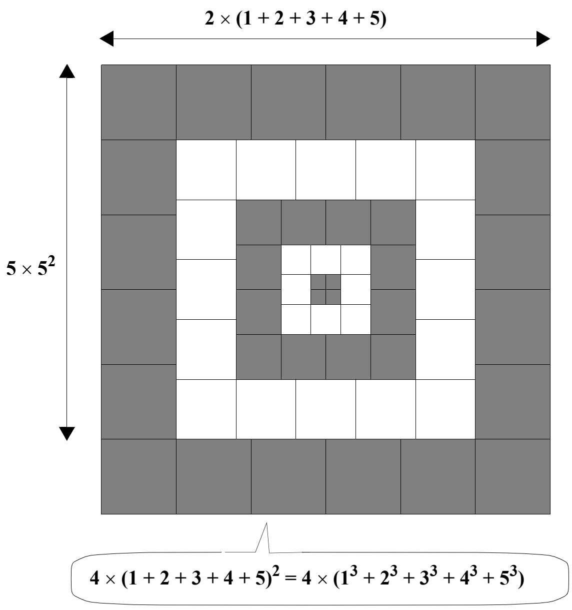
Je ziet dit ook mooi in onderstaand stippenpatroon:



Van die formule bestaan tal van 'plaatjesbewijzen'. Een met 'echte' kubusgetallen' staat op een poster die Harrie Broekman ooit uit Polen meebracht:

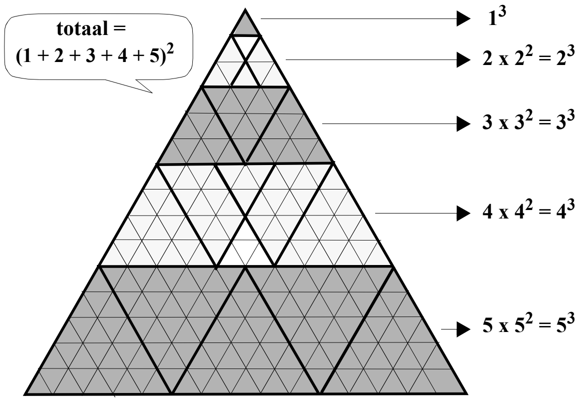


Hier komen nog een paar plaatjesbewijzen:



Merk op dat hierbij op grappige wijze gebruik wordt gemaakt van de commutativiteit van de vermenigvuldiging (5 vierkantjes van 4 bij 4 maken bijvoorbeeld dezelfde lengte als 4 vierkantjes van 5 bij 5).

Waar je niet zo gauw aan denkt is dat het ook met tegeltjes in de vorm van gelijkzijdige driehoeken kan:



De tegels in de oneven (donkergrijze) stroken doen het mooier dan die in de even (lichtgrijze). In een even strook wordt de overlap van de driehoeken in het midden gecompenseerd door een met de overlap congruent driehoekige 'gat'.
Nikomachos heeft een 'Inleiding tot de Aritmetica' geschreven. Van der Waerden zegt daarover in zijn 'Ontwakende Wetenschap' dat dit werk over de 'wonderbaarlijke en goddelijke eigenschappen van de getallen' zeer onderhoudend is, maar dat nuchtere bewijzen ontbreken. Die zouden de lezers maar vervelen en bovendien zou dan veel van het geheimzinnige verloren gaan!
Ook komt de formule voor de *som* van kubusgetallen niet voor in het boek, zelfs niet zonder bewijs. Vreemd genoeg, want het lijkt vrijwel ondenkbaar dat Nikomachos die niet zou hebben gekend.
Martin Kindt, martin@fi.uu.n