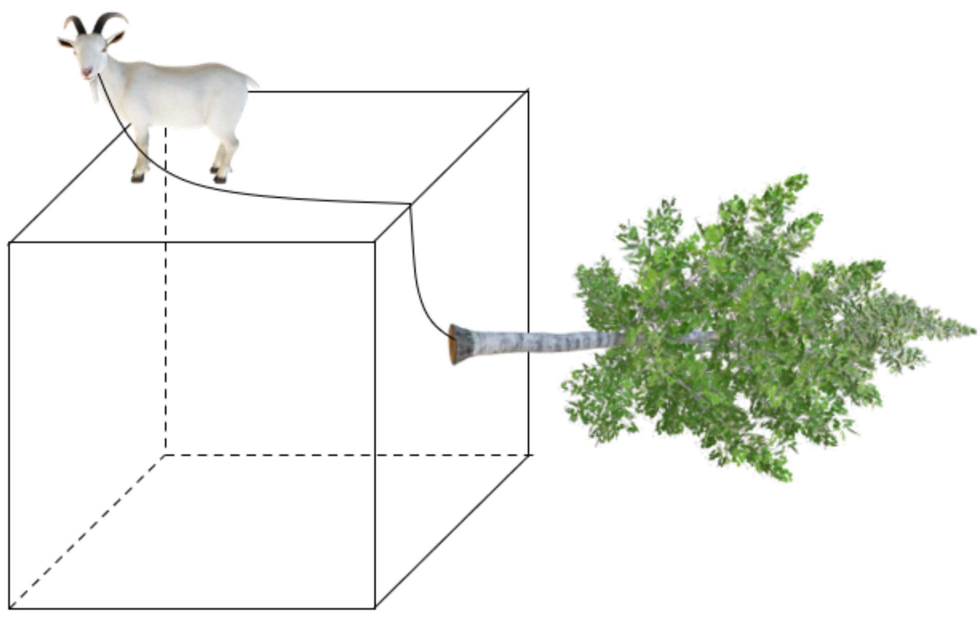
Oppervlakkige meetkunde



Wiskunde B-dag 2021

Universiteit Utrecht

Wiskunde voor teams

Freudenthal Institute

Inleiding

Over de opdracht

Meetkunde begint voor de meesten in twee dimensionale platte vlak. Daar snijden lijnen elkaar of ze lopen evenwijdig. De verzameling punten met gelijke afstand tot een ander punt is een cirkel. De hoekensom van een driehoek is 180 graden. Als het goed is, dan zijn dat bekende feiten voor jullie. Al sinds de Griekse oudheid onderzoeken wiskundigen dit soort eigenschappen ook op niet-platte (gekromde) oppervlakken. Zo hebben jullie misschien wel eens gehoord van bolmeetkunde – meetkunde op een boloppervlak, zoals het aardoppervlak. Dit is een tak van sport die relevant is voor satellietbanen en bij de verspreiding van trillingen van aardbevingen. Vandaag gaan jullie op een vergelijkbaar avontuur. Jullie gaan meetkunde doen op het oppervlak van bijvoorbeeld een kubus, een balk, of een ander veelvlak. Die wiskunde is belangrijk voor het begrijpen van trillingen over een gebouw of bij het berekenen van afstanden over het oppervlak. Op een bol kun je nog een cirkel tekenen, maar hoe gaat dat bij veelvlakken? Hier blijken dingen verrassend anders uit te pakken!

Structuur van de dag

Deze Wiskunde B-dag-opdracht bestaat uit inleidende opgaven en aanvullende, verdiepende opgaven. Anders dan bij de normale wiskundelessen, hoeven jullie bij de wiskunde B-dag zeker niet alle problemen op te lossen. Als jullie bij een probleem vastlopen of niet genoeg tijd hebben, dan kunnen jullie het even laten rusten of zelfs verder overslaan. Om jullie op weg te helpen staan bij ieder probleem suggesties van aanpak. Er zijn problemen variërend van makkelijk tot moeilijk, dus het is normaal dat jullie niet alles afkrijgen; maar **laat in ieder geval in het verslag zien wat jullie geprobeerd hebben en hoe ver jullie gekomen zijn bij de problemen 1 t/m 5 – bijvoorbeeld aan de hand van de suggesties**. Problemen 6, 7 en 8 zijn aanvullend. Hebben jullie voldoende tijd aan problemen 1 t/m 5 besteed, kies dan één of meer van de aanvullende problemen om dieper op een onderwerp in te gaan. Met succes op deze laatste problemen kan jullie team zich extra onderscheiden!

Werken in teams

Het bijzondere aan de wiskunde B-dag is dat jullie wiskunde doen in teamverband. Misschien is het een idee een planning en een taakverdeling te maken. Laat ieder doen waar die goed in is. Geef ieder de ruimte bij te dragen met ideeën en uitwerkingen. Jullie kunnen tegelijkertijd aan verschillende of dezelfde problemen werken en dan weer samen komen om te overleggen en te evalueren. Bij sommige problemen is het handig wat verschillende voorbeelden te bestuderen. Dat kan dan mooi verdeeld worden.

Benodigdheden

Jullie hebben vandaag nodig: een pen, voldoende (klad)papier, een schaar, plakband en/of lijm, deze opdracht, en een computer of laptop om jullie verslag op te maken. Gebruik van internet willen we ontmoedigen; als je het toch doet, neem dan een bronvermelding in het verslag op (url).

Wat leveren jullie in?

Jullie werken gedurende de dag aan een digitaal verslag. Begin daar niet te laat mee. Om 16:00 lever je dat in. Daarin beschrijven jullie je resultaten en redeneringen. Vertel je eigen, duidelijke en overtuigende verhaal. Wij waarderen goed geschreven, heldere, precieze, volledige, zorgvuldig geformuleerde, en zeker ook originele, creatieve en lyrische verslagen.

Tips:

- Het kan nuttig zijn om al in de ochtend te beginnen met het netjes uitschrijven van de uitwerkingen.
- *Wees begrijpelijk*: zorg dat de tekst voor iemand die niet aan de Wiskunde B-dag heeft meegedaan (maar wel voldoende wiskunde beheerst) leesbaar is, *zonder dat die de opdracht gelezen heeft*. Je hoeft niet letterlijk de opgaven uit de opdracht in het verslag te kopiëren. Maak er in plaats daarvan een lopend verhaal van.
- Als jullie onderbouwingen, uitleg of verklaringen geven, probeer dat dan zo veel mogelijk *met wiskundige argumenten* te doen.
- Gebruik *figuren* om jullie ideeën te illustreren. Gebruik hiervoor bijvoorbeeld kopieën van door jullie gemaakte plaatjes (screen captures of foto's van figuren op papier).
- Maak een *planning en verdeel de taken* over de groep.

Zowel de wiskundige inhoud van het verslag als de manier waarop het is opgeschreven tellen mee in de beoordeling!

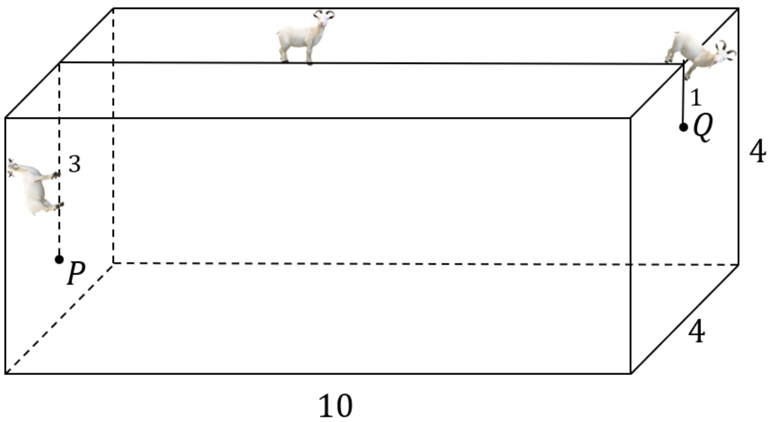
Inleidende problemen

Probleem 1 (Geitenpaadjes op een balk)

Op een balk met afmetingen $4 \times 4 \times 10$ liggen punten P en Q op respectievelijk het linker en het rechter 4×4 grensvlak. Het punt P ligt 3 onder het midden van een ribbe in het bovenvlak en punt Q ligt 1 onder het midden van ribbe in het bovenvlak (zie Figuur 1). Een geit wil over de grensvlakken van deze balk van punt P naar punt Q lopen. Het kortste pad is niet de route hieronder van lengte 14. Onderzoek: kunnen jullie een korter pad vinden? Hoe lang is het kortste pad dat jullie kunnen vinden? Waarom kan het niet korter volgens jullie?

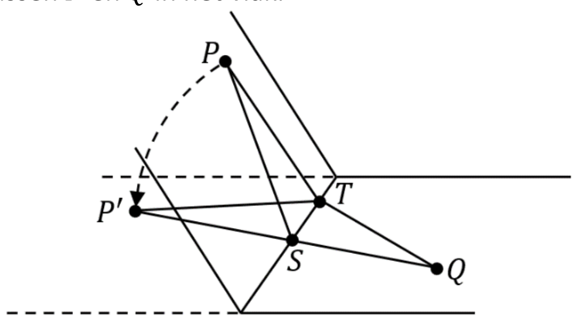
Suggesties

- Maak verschillende uitslagen van de balk en vouw deze in en uit elkaar. Zet de verschillende uitslagen in het verslag.
- Ga op zoek naar kortste paden op de opengevouwen uitslagen
- Lees eventueel alvast de tekst onder deze opdracht



Figuur 1. Een geit wandelt over een balk

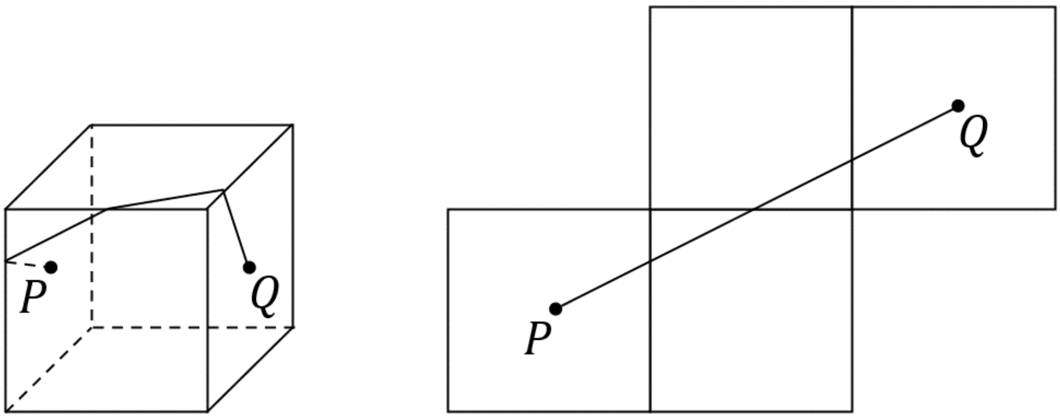
Terzijde: Pak een strookje papier en teken hierop twee punten P en Q, en het lijnstuk PQ. Vouw het blaadje langs een lijn die lijnstuk PQ snijdt, zoals in Figuur 2. Het snijpunt van lijnstuk PQ met de vouw noemen we S. Teken ook een ander punt T op de vouw. De lijnstukken PS en QS lijken samen korter dan PT en QT samen, toch? Natuurlijk is dat zo, want PS en QS liggen samen op lijnstuk PQ, en dat is de kortste pad tussen P en Q in het vlak.



Figuur 2. Een lijnstuk PQ dat een ribbe snijdt loopt recht ($P'Q$) als je het plat vouwt

Zelfs als een pad tussen twee punten bij elke ribbe recht is, als je het veelvlak daar openvouwt, dan is dat nog geen garantie dat het pad ook een **kortste** pad tussen die punten is. Dat was de les van probleem 1: er kunnen veel paden tussen twee punten zijn die recht zijn bij platvouwen bij elke ribbe (en recht zijn op ieder grensvlak), maar toch niet het kortste pad zijn.

Een **lijn(stuk) op een veelvlak** is een pad dat recht is op ieder grensvlak, en als het pad een ribbe snijdt, dan moeten de lijnstukken op de grensvlakken bij platvouwen langs die ribbe in elkaars verlengde liggen. Een lijn(stuk) op een veelvlak kan niet over de hoekpunten van het veelvlak gaan. Het kortste pad tussen twee punten op een veelvlak is een lijnstuk, maar andersom is niet ieder lijnstuk een kortste pad (en dat is dus heel anders dan in het platte vlak!)

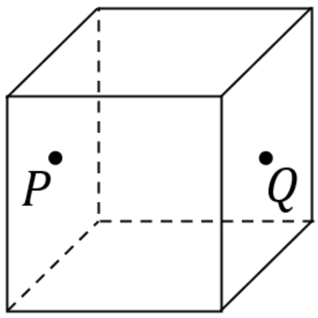


Figuur 3. Links: een lijnstuk op de kubus - maar niet het kortste pad. Rechts: hetzelfde lijnstuk in een deel van de uitslag

Probleem 2 (Onderzoek aan lijnstukken op een kubus)

a. Onderzoek: vind een lijnstuk op de kubus dat zichzelf doorsnijdt (suggesties op de volgende pagina).

b. Punt P ligt midden op het linker grensvlak van een kubus en punt Q daar recht tegenover op het midden van het rechter grensvlak. Onderzoek hoeveel lijnstukken er lopen van P naar Q. Let op: een lijnstuk hoeft niet een kortste pad te zijn (lees hierboven).



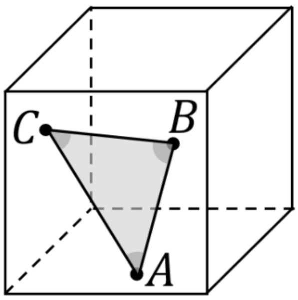
c. Waarom zouden we afspreken dat een lijnstuk niet door een hoekpunt kan gaan?

Suggesties:

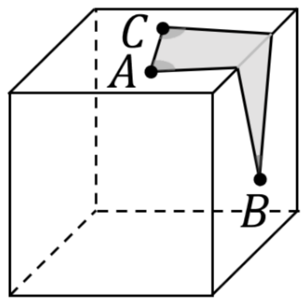
- Maak verschillende uitslagen van de kubus, leg die eventueel tegen elkaar aan, vouw ze open en weer dicht, en zoek naar verschillende mogelijkheden.
- Belangrijke vraag: kan een lijnstuk ook meer dan eens hetzelfde grensvlak oversteken?
- Als je een vermoeden hebt, probeer ook argumenten te geven waarom het vermoeden waar is; waarom er niet nog meer kunnen zijn.

Een driehoek op een kubus is, net als in het vlak, een gebied ingesloten door drie punten, verbonden door drie lijnstukken op de kubus (die zichzelf en elkaar niet doorsnijden).

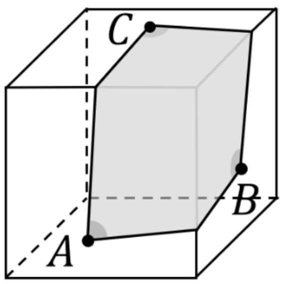
Hieronder zien jullie vier voorbeelden van driehoeken ABC (in Figuur 4), dat wil zeggen het grijze gebied ingesloten door lijnstukken op de kubus AC, AB en BC. Het is alsof je een rubberen zeil strak trekt over de kubus en vastmaakt in de punten A, B en C.



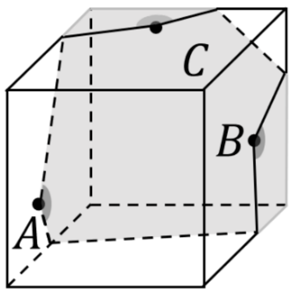
Driehoek op de voorzijde



Driehoek "gespannen om een ribbe"



Driehoek "gespannen om een hoekpunt rechtboven voor"



Driehoek "gespannen om **drie** hoekpunten van de achterzijde"

Figuur 4: Vier voorbeelden van een driehoek op de kubus

Jullie zien drie hoeken bij de punten A, B en C (de hoeken bij de ribben negeren we). Normaal is de som van de hoeken van een driehoek 180 graden. Bij de onderste twee driehoeken is dat duidelijk niet het geval, dus er is iets aan de hand.

Probleem 3 (De hoekensom van een driehoek op een kubus)

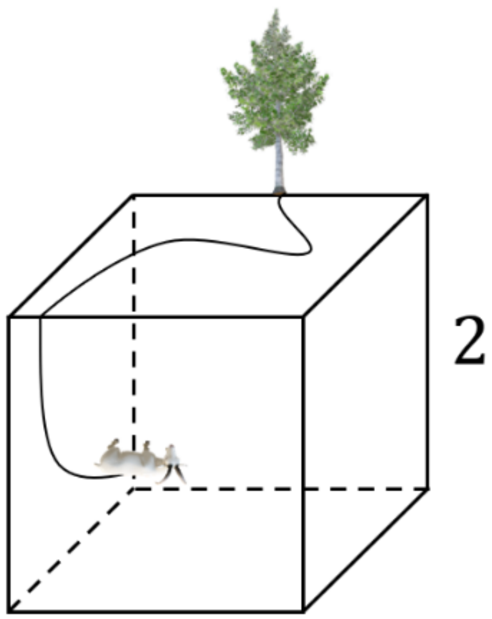
Onderzoek: wat is de hoekensom van een driehoek op de kubus? Leg uit! (suggesties op volgende pagina)

Suggesties

- De hoekensom is niet altijd hetzelfde. Toch is er een mooi verband te formuleren.
- Onderzoek minstens zes zo verschillend mogelijke voorbeelden van driehoeken op de kubus met behulp van verschillende uitslagen
- Vorm hypothesen over de hoekensom en test die eventueel in nieuwe voorbeelden.
- Als je een verband hebt gevonden, geef dan argumenten waarom het zo zit. Voorbeelden en figuren kunnen helpen met uitleggen, maar je argumenten moeten wel algemener geldig zijn.

Probleem 4 (Kubische geitenweide)

Op alle grensvlakken van een kubus met ribbe 2 groeit heerlijk gras. Midden op een ribbe staat een boom. De boer heeft de geit met een touw aan de boom gebonden. Het kortste touw waarmee de geit bij al het heerlijke gras kan is langer dan $\sqrt{13}$ en korter dan $\sqrt{17}$. Wat is de kortste lengte voor het touw die jullie kunnen vinden? Waarom kan het niet korter volgens jullie?

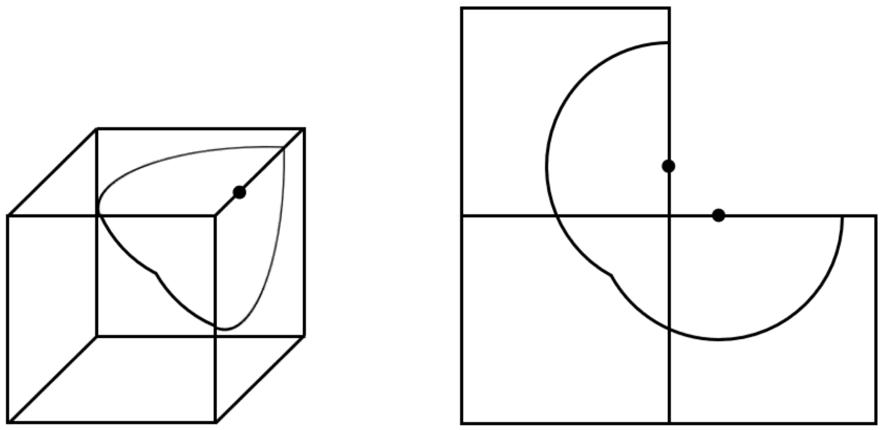


Figuur 5. Een geit aan een touw aan een boom op een kubus

Suggesties:

- Leg eerst eens uit waarom de verst weg gelegen punten **niet** hoekpunten van de kubus zijn, door tenminste één punt te zoeken dat verder weg ligt. Hierbij kunnen de volgende twee suggesties helpen.
- Teken de situatie ook eens vanuit een andere richting.
- Een verkennend onderzoek kan bestaan het touw steeds langer te maken en te kijken welke punten je met strak gespannen touw kunt bereiken. Met lengte 1 bereik je net de dichtstbijzijnde hoekpunten en bestaat je bereik uit twee halve cirkels. Daarna wordt het ingewikkelder…
- Een verst weggelegen punt is langs twee (even lange) kortste paden te bereiken vanaf de boom. Waarom?
- Heb je een vermoeden, noem dan een slim gekozen onbekende afstand x en ga verder met algebra.

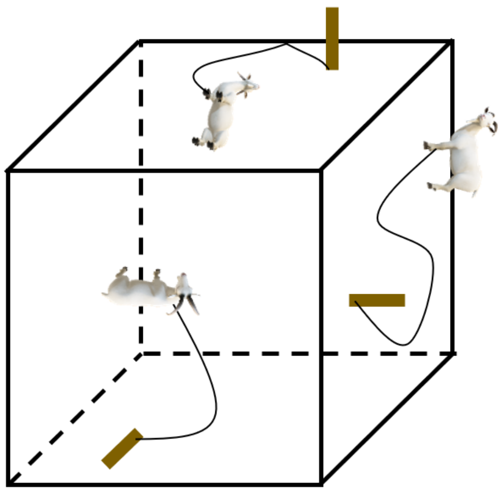
Als het touw gespannen blijft loopt de geit op een **cirkel op het veelvlak**, in de zin van “punten op een vaste afstand van het middelpunt”. Cirkels op een veelvlak blijken uit verschillende aan elkaar geplakte cirkelboogjes te bestaan.



Figuur 6. Een cirkel op een kubus. Zie de boogjes op de grensvlakken (links) en in (een deel van) de uitslag (rechts)

Probleem 5 (Drie grazende geiten)

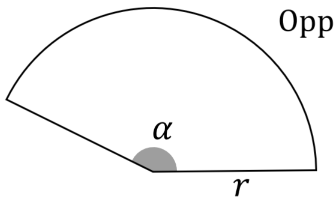
Een boer heeft drie geiten, die mogen grazen van het sappige gras op de grensvlakken van de kubus. De geiten zitten elk met een touw aan een paaltje vast. Elk touw is even lang. Ga op onderzoek uit: waar moet de boer de paaltjes slaan en hoe lang moeten de touwen zijn, zodat zo veel mogelijk gras kan worden bereikt, maar de geiten elkaar niet kunnen raken? Presenteer in het verslag de beste oplossing die jullie kunnen vinden; leg uit hoe je eraan gekomen bent; en leg eventueel uit waarom jullie denken dat het niet beter kan (suggesties op volgende pagina).



Figuur 7: drie geiten grazen op een kubus

Suggesties

- Probeer in ieder geval een aantal verschillende mogelijkheden te onderzoeken
- Kun je argumenten verzinnen waarom een oplossing aan bepaalde eigenschappen moet voldoen?
- Bereken uiteraard de lengte van het touw en de oppervlakte van het gebied. De oppervlakte van een cirkelsector met hoek α (in radialen) en straal r is $\frac{\alpha}{2\pi} \cdot \pi r^2$ (waarom?), wat versimpeld kan worden tot $\frac{\alpha}{2} r^2$.



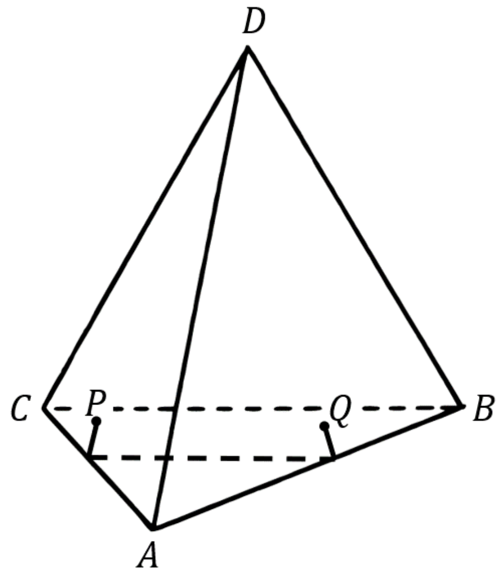
$$\text{Opp} = \frac{\alpha}{2} r^2$$

Om de oppervlakte van een cirkel op de kubus uit te rekenen moet je vaak de figuur opdelen in cirkelsectoren en driehoeken ($\text{Opp} = \frac{1}{2}\,\text{basis} \cdot \text{hoogte}$).

Aanvullende problemen

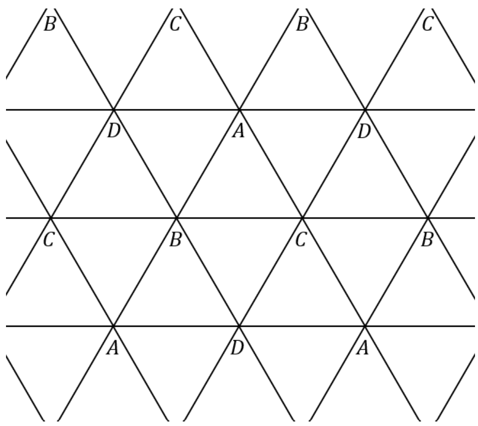
We nodigen jullie uit één (of meer) van de onderstaande problemen te kiezen, die een verdieping vormen van de inleidende problemen.

Bij Probleem 1 hebben jullie geworsteld met het vinden van een kortste pad tussen twee punten op een veelvlak. Misschien was de zoektocht toen wat inefficiënt en chaotisch. Laten we nu eens naar hetzelfde probleem kijken op een regelmatig viervlak (veelvlak met vier gelijkzijdige driehoeken als grensvlakken, een zogeheten tetraëder).



Figuur 4: Een regelmatig viervlak. Is het gestippelde pad de kortste verbinding tussen P en Q?

De kortste verbinding kan efficiënt gevonden worden met behulp van een driehoeksrooster dat kan worden gezien als een veld aan elkaar geplakte uitslagen.



Figuur 5: een veld aan elkaar geplakte uitslagen van een regelmatig viervlak

Probleem 6

a. Leg uit hoe je het rooster in Figuur 9 kunt gebruiken om efficiënt en doelmatig de kortste verbinding tussen P en Q te vinden.

Voor andere veelvlakken kun je de uitslagen niet zo eenvoudig aan elkaar plakken helaas. De uitdaging nu is om daarvoor andere efficiënte en gestructureerde manieren te vinden om lijnstukken en de kortste verbinding tussen twee gegeven punten te vinden en te beschrijven.

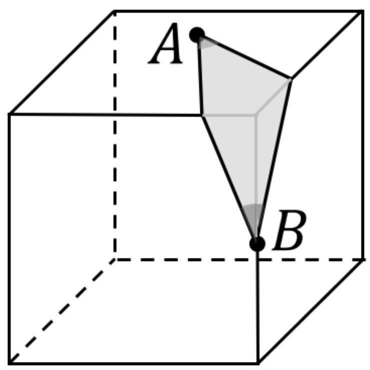
b. Probeer dit eerst voor de kubus. Breid jullie methode daarna eventueel uit naar andere veelvlakken.

Probleem 7

Bij Probleem 5 probeerden jullie drie geiten op een kubus te plaatsen. Kunnen jullie ditzelfde probleem oplossen op een ander veelvlak en/of met een ander aantal geiten? Zoek zelf een combinatie van veelvlak en aantal geiten waarbij het probleem interessant en uitdagend is.

Probleem 8

Bij probleem 3 heb jullie de hoekensom onderzocht van een driehoek op een kubus. Hoe zit dat met de hoekensom van andere veelhoeken? Er bestaan zelfs zogeheten tweehoeken op een kubus (met twee hoekpunten en twee zijden) en eenhoeken (met één hoekpunt en één zijde). Probeer jullie inzichten uit te breiden naar alle veelhoeken op de kubus. Bovendien kunnen jullie proberen hoekensommen van veelhoeken te bestuderen op andere veelvlakken (naar keuze, bijvoorbeeld het regelmatig viervlak uit Probleem 6).



Figuur 6: Een tweehoek op een kubus