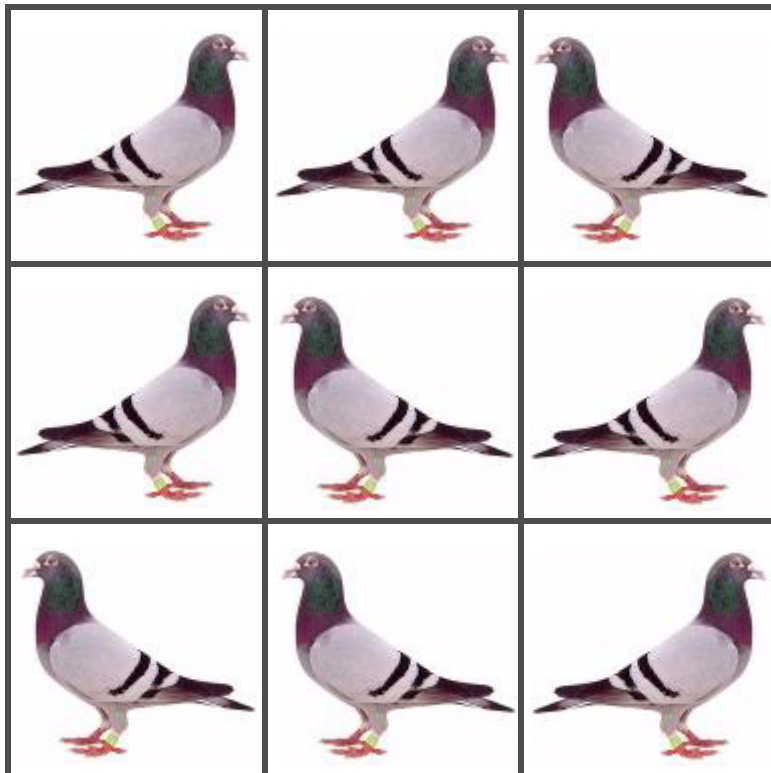


WISKUNDE B-DAG 2005

vrijdag 25 november



Daar is Duif Tien!



De Wiskunde B-Dag wordt gesponsord door **Texas Instruments**

Wiskunde B-dag 2005, werkwijze

Overzicht

Deze tekst bevat de opdrachten voor de Wiskunde B-dag, die op 25 november 2005 gehouden wordt.

De naam van de opdracht is ‘*Daar is duiftien!*’. Je komt er snel achter waar dat op slaat, maar je moet even de algemene gang van zaken weten voor deze Wiskunde B-dag.

In de **Inleiding** - een leestekst - wordt een bepaald wiskundig principe ter sprake gebracht, dat door de voorpagina (met die 9 + 1 duiven) in beeld is gebracht.

In **Deel A** werk je aan twee kleine problemen, waarbij dat principe te gebruiken is.

In **Deel B** ga je wat meer de diepte in, aan de hand van hetzelfde principe. Ook hier wordt je nog wel duidelijk de weg gewezen.

In **Deel C** staat één groot probleem ter discussie. Ook hier helpen opgaven en tips je op weg, maar er wordt meer initiatief en eigen onderzoek van je verwacht. Dit deel eindigt met twee grote onderzoeksopdrachten die over het probleem gaan. Daar zul je een forse kluif aan hebben. We zeggen erbij dat er vragen te onderzoeken zijn, waarbij nog *niet* op de wereld precies weet hoe het zit.

Wat wordt van je verwacht?

- Dat je in een goed afgerond werkstuk laat zien wat je op de hele dag onderzocht hebt en wat jouw resultaten zijn.
- Dat je bespreekt hoe de inleidende problemen kunnen worden opgelost.
- Dat je goed laat zien hoe je de grotere onderzoeksopdrachten hebt aangepakt. Hier kun je hoog scoren bij de wedstrijd van vandaag.

En verder, waar wordt op gelet?

- Dat de tekst van je werkstuk op zichzelf begrijpelijk is. Daarmee wordt bedoeld: ook voor wie niet zelf de opdracht van deze dag gezien heeft.
- Dat je niet alleen antwoorden opschrijft, maar vooral de kern waar het allemaal om draait helder op papier zet.

Inleveren

Je teamwerkstuk rolt bij voorkeur uit een tekstverwerker. Je levert dus zo mogelijk een duidelijk geprinte versie in. Je mag ook andere computerbestanden bijleveren (bijvoorbeeld Excel) maar die moeten dan zeker in je tekst vermeld en toegelicht zijn. Een print van zo'n bestand is een aanhangsel bij je verslag, uiteraard. Zorg dat al het ingeleverde werk met zwarte inkt is gedrukt of geschreven; het moet goed kopieerbaar zijn!

Applet voor Wiskunde B-dag 2005

Een andere vorm van computergebruik komt in deel C ter sprake.

Op het internet staat een programma dat behulpzaam kan zijn bij de grotere onderzoeksoopdrachten. Hoe je dat programma bereikt, staat in de tekst. Als het bij jou op school anders gaat, hoor je van je docent hoe je het programma vindt.

Tijdsplanning op de dag

Deel je dag in drie gelijke delen in:

- Fase 1: te besteden aan Inleiding, deel A en deel B. Je maakt aantekeningen die je bij je verslag kunt gebruiken.
- Fase 2: deel C en de grote onderzoeksvragen. Idem: aantekeningen maken die je bij je verslag kunt gebruiken.
- Fase 3: afwerking en verwerking. In deze fase maak je het werkstuk zelf. Je bent met een team, dus het kan zijn dat deeltaken nog uitgevoerd moeten worden. Hier ben je in het voordeel als je taken kunt verdelen en bij de uitvoering ervan op elkaar kunt vertrouwen.

Tot slot:

Succes, maar vooral: plezier bij het werk.

Inleiding

Het probleem van de voorpagina is snel opgelost: als je 10 duiven in 9 hokken wilt plaatsen, dan moet je in ten minste één hok twee duiven zetten.

Simpel, niet?

Duivenhok-principe

Toch kun je het *duivenhokprincipe* verrassend vaak en onverwachts toepassen.

Neem een stad als Amsterdam. Allemaal mensen, allemaal anders. Lang haar, rood haar, borstelkoppie, rasta, kaal.

Maar nu deze vraag:

Zijn er in Amsterdam twee mensen met precies evenveel haar op hun hoofd?

Die vraag kun je met JA beantwoorden en je hoeft niet eens naar Amsterdam te gaan om het absoluut zeker te weten.

Doe dit maar even in gedachten:

Stop alle kale Amsterdammers in	Hok 0.
Stop alle Amsterdammers met 1 haar in	Hok 1.
Stop alle Amsterdammers met 2 haren in	Hok 2.
Stop alle Amsterdammers met 3 haren in	Hok 3.

.....

Enzovoort

Hoeveel hokken zouden we nodig hebben?

Dit vonden we op <http://www.transhair.nl>:

Haren worden geproduceerd uit huidcellen in de haarfollikels of haarzakjes. Iedereen heeft bij de geboorte ongeveer 100.000 haarzakjes op het hoofd. Het aantal van die haarzakjes is genetisch bepaald. Blondharigen hebben bv. meer haarzakjes dan donkerharigen en dan rosharigen. Met het ouder worden vermindert het aantal haarzakjes lichtjes, en dus automatisch ook het aantal haren.

Veel meer dan 100.000 hokken gaat het dus niet worden.

Aha, Amsterdam heeft 750.000 inwoners ... In (minstens) één van die hokken is het dus behoorlijk druk, daar kan echt geen duif meer bij.....

Gek eigenlijk: je weet nu wel *dat* ze er zijn, die twee gelijkharigen, maar je weet niet *wie* het zijn en *hoeveel* haren ze hebben.

De opdracht van deze Wiskunde B-dag gaat over problemen die je in een of andere vorm met het duivenhokprincipe kunt oplossen.

Onderdelen

De opdracht bestaat uit drie onderdelen:

Deel A: zelf oplossingen zoeken voor wat kleinere problemen, als verkenning.

Deel B: het *duivenhokprincipe* als een manier om dergelijke problemen aan te pakken

Deel C: een speciaal probleem tackelen.

Deel A: Het duivenhokprincipe leren kennen

Probleem 1 >> *Waarom zijn de drie volgende uitspraken waar?*

- In een groepje van 9 mensen zijn er altijd twee op dezelfde dag van de week jarig.
- In een groepje van 15 mensen zijn er altijd twee van hetzelfde geslacht op dezelfde dag van de week jarig.

maandag 3 oktober 2005 08:56

Nederlands jeugdelftal wint brons op WK

Het Nederlands elftal voor voetballers onder de 17 jaar heeft brons gewonnen bij het Wereldkampioenschap (WK) in Peru. In de troostfinale won het Nederlandse jeugdteam met 2-1 van Turkije.

- In het Nederlands jeugdelftal zitten zeker twee spelers van dezelfde leeftijd.

>> *Is de volgende uitspraak ook waar?*

In een groep van 12 mensen zijn er altijd twee die in dezelfde maand jarig zijn.

>> *Toon aan, vanuit de gegevens in de inleiding:*

In Amsterdam zijn zeker 8 mensen met hetzelfde aantal haren op hun hoofd.

Probleem 2 Je hebt de gehele getallen 1 tot en met 10 tot je beschikking. Uit deze 10 getallen kies je er 6 zoals je wilt.

Bewering:

Welke 6 getallen je ook kiest, er zijn zeker twee getallen bij die het getal 11 als som hebben.

>> *Toon aan dat deze bewering juist is.*

Tip: Hoeveel paren getallen kun je vormen die som 11 hebben?

Het principe nader belicht

Het *duivenhokprincipe* is goed bruikbaar in allerlei situaties.

In plaats van *hokken* kun je ook denken aan *vakken*, *laden*, *dozen*, *kamers*, *soorten*. Dat maakt niets uit, het gaat om *indelen*.

Het gebruik van het principe wordt duidelijk als we probleem 2 en enkele andere problemen er mee oplossen.

Dus eerst het probleem van de zes getallen uit 1 tot en met 10, waarbij je moest aantonen dat een paartje met som 11 ontstond.

De oplossing: *Maak vijf laden*.

lade 1: bevat de getallen 1 en 10,

lade 2: bevat de getallen 2 en 9,

lade 3: bevat de getallen 3 en 8,

lade 4: bevat de getallen 4 en 7,

lade 5: bevat de getallen 5 en 6.

Als je nu zes getallen kiest, is er zeker een lade die je twee keer kiest, want er zijn maar vijf laden. En de twee getallen uit die lade hebben som 11.

Zelfs als je slim probeert te zijn en vijf getallen kiest uit de vijf verschillende laden, ben je gedwongen om het laatste getal uit een van de al gebruikte laden te pakken.

Deze handige verdeling van de getallen 1 tot en met 10 over de laden was de sleutel naar de oplossing.

Probleem 3 Je hebt de getallen 1 tot en met 100 tot je beschikking. Daaruit kies je er willekeurig 51. Wat je ook gekozen hebt, de volgende drie uitspraken zijn nu waar.

- a. Er is een tweetal bij de gekozen 51 getallen waarvan de som 101 is.
- b. Er zijn twee getallen in de gekozen 51 die buurgetallen zijn.
[Buurgetallen zijn opeenvolgende getallen, zoals 34 en 35]
- c. Er is een tweetal getallen in de gekozen 51 die een verschil van 50 hebben.

>> *Gebruik bij elk van de drie uitspraken een handige ladenindeling om de waarheid van de uitspraak aan te tonen.*

Probleem 4 Schrijf acht gehele getallen op.

Bewering:

Twee van die getallen verschillen een 7-voud.

>> *Toon aan dat dit zo is, welke acht getallen je ook kiest.*

Tip: Als twee getallen een 7-voud verschillen, hebben ze dezelfde rest bij deling door 7. Gebruik dat om je vakken- of dozenindeling van de getallen te maken.

Deel B: Het duivenhokprincipe gebruiken Drie voorbeelden

Voorbeeld 1: Hoeveel dozen moet je hebben bij grote gezinnen?

Probleem 5



Vroeger kwamen grote gezinnen in Nederland heel veel voor. Nu heb je heel wat gezinnen met 'maar' twee kinderen.

Toch zijn ook die gezinnen niet allemaal hetzelfde: de kinderen kunnen zijn JJ, JM, MJ, MM. Jongen of meisje, en qua volgorde van leeftijd kan het ook verschillen. In principe heb je voor twee kinderen dus vier mogelijke jongens-meisjes structuren.

- >> *Hoeveel gezinnen met twee kinderen heb je nodig om er zeker van te zijn dat minstens twee van die gezinnen dezelfde jongens-meisjes samenstelling hebben?*
- >> *Dezelfde vraag voor gezinnen met 3 of 4 kinderen.*
- >> *In Nederland zijn ongeveer 2000 gezinnen met 8 kinderen of meer onder de 25 jaar.
Toon aan dat onder de 2000 gezinnen er zeker twee zijn met dezelfde jongens-meisjes structuur wat de 8 oudste kinderen betreft.*
- >> *Een TV-organisatie wil een uitzending maken over gezinnen met 10 kinderen. Ze willen twee gezinnen vergelijken die dezelfde jongens-meisjes structuur hebben. Denk je dat ze twee van die gezinnen zullen gaan vinden? Licht je antwoord goed toe.*

Voorbeeld 2: Wat is er zo bijzonder aan het getal 11?

Probleem 6 Je hebt (alweer) de beschikking over de getallen 1, 2, 3, ..., 99, 100. Uit die verzameling kiest iemand willekeurig 55 verschillende getallen.

Toon aan:

- >> *Er zijn twee getallen bij met verschil 9.*
- >> *Er zijn twee getallen bij met verschil 10.*
- >> *Er zijn twee getallen bij met verschil 12.*
- >> *Er zijn twee getallen bij met verschil 13.*

Je ziet dat ‘verschil 11’ in dit rijtje ontbreekt. Daarom nu deze opdracht:

- >> *Kies zelf weloverwogen 55 getallen uit 1, 2, 3, ..., 99, 100 en zó dat er geen twee getallen zijn met verschil 11.*

Voorbeeld 3: Kennissen tellen

Probleem 7 *Kennissen tellen*

In een zaal bevinden zich 50 mensen. Ze kennen allemaal wel één of meer van de anderen in de zaal, maar hoeveel precies is onbekend.

>> *Toon aan:*

Er zijn twee mensen in de zaal, die hetzelfde aantal kennissen in de zaal hebben.

Deel C: Het Kobusprobleem

In dit deel wordt één groot probleem aangepakt. Het bestaat uit twee hoofddelen. Het ene deel heeft te maken met een toepassing van het *duivenhokprincipe*. Daarbij gaat het erom een redenering te vinden.

Het andere deel is verwant aan het eerste. Daar zoek je de grenzen van het mogelijke op. Hier kun je echt zelf nieuwe dingen vinden. Maar nu eerst een oriëntatie op dit geheel.

Het Kobusprobleem; een eerste verkenning

Kobus werkt in het magazijn van een groothandel in ijzerwaren. Op zekere dag bestellen twee klanten tegelijk een grote hoeveelheid spijkers. Er is lang niet genoeg voorraad om aan beide klanten de gewenste hoeveelheid te leveren. Daarom geeft de baas Kobus de opdracht om voor beide klanten *evenveel* klaar te zetten. In het magazijn blijkt dat er nog tien zakken spijkers zijn, elk met gewichten in hele kilo's; in deze ijzerzaak worden de spijkers namelijk altijd per hele kilo verkocht.

De gewichten in de zakken variëren van 1 tot en met 100 kilo. Verder mogen de zakken niet opengemaakt worden.

Probleem 8 >> *Stel je voor dat de tien zakken de volgende aantallen kg spijkers bevatten:
1, 2, 5, 6, 11, 12, 17, 18, 50, 100.
Verdeel de zakken in twee groepen, waarbij beide klanten evenveel spijkers krijgen.*

Deze situatie komt in de ijzerzaak vaker voor en daarom doen we met Kobus een diepgaand onderzoek naar de mogelijkheden. Want het komt ook wel voor dat Kobus bij 10 zakken helemaal geen verdeling in twee groepjes kan vinden met gelijke totalen.

>> *Geef een voorbeeld van tien zakken, waarvoor dat inderdaad zo is. Dus: kies tien getallen uit 1, 2, 3, ..., 99, 100 die je zeker niet kunt splitsen in twee groepen waarvan de totaalgewichten gelijk zijn.*

Na een tijd proberen merkt Kobus dat het hem vaak lukt om uit de zakken twee stapels samen te stellen, die WEL hetzelfde gewicht hebben maar waarbij NIET de hele voorraad gebruikt wordt. Er blijven vaak zakken over, maar de baas had eigenlijk ook NIET gezegd dat de HELE voorraad weg moest.

Soms krijgt een klant maar één zak en de ander twee; dat kan ook.

>> *Probeer of je bij de volgende aantallen kg twee groepen met gelijke sommen kunt vinden:*

2, 7, 13, 35, 41, 59, 63, 72, 81, 95

>> *Idem bij de volgende aantallen kg:*

1, 5, 11, 23, 35, 48, 65, 69, 83, 97

Zet de computer maar vast aan

Het kan lastig zijn in die gevallen een oplossing te vinden, dus weet je niet zo snel zeker of die er wel of niet zijn. Er zijn ook heel veel mogelijkheden om een stel zakken uit de tien te kiezen en je weet dus niet zo heel gauw of er echt twee groepjes te maken zijn die dezelfde som hebben.

Daarom heb je een computerapplet tot je beschikking die het domme langdurige zoekwerk in een flits voor je uitvoert. Aan die applet kun je een aantal getallen opgeven. De applet zoekt dan voor je uit of er twee deelrijtjes zijn met dezelfde som. Zo ja, dan worden die getoond. Als er meer manieren zijn, zie je die ook.

Je vindt het applet op:

<http://www.fi.uu.nl/wisbdag>

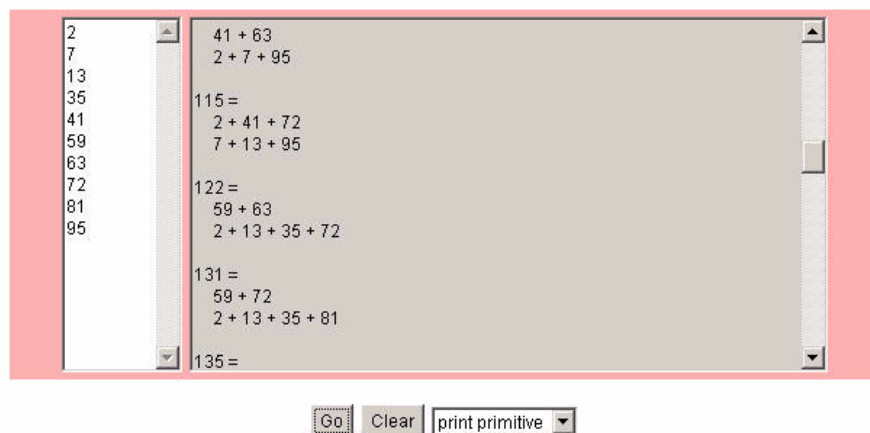
Klik op de button 2005 en klik daarnaar op KOBUS

[Als je het applet bij jou op school ergens anders moet starten, dan hoor je dat van je docent.]

Proberen maar

Een voorbeeld:

In de linkerkolom zie je een rijtje van 10 getallen die zijn ingetikt. In de rechterkolom zie je enkele van de 36 mogelijke tweetallen groepen getallen met gelijke som die de computer heeft gevonden.



Zo zie je bijvoorbeeld dat de computer twee groepjes heeft gevonden die allebei som 115 hebben. Dat zijn 2, 41, 72 en 7, 13, 95.

Oriëntatie op Onderzoeksvraag 1

- >> *Tik nu zelf tien getallen uit 1, 2, ..., 100 in en Go, laat de computer maar zoeken. Je zult vast een oplossing vinden.
Herhaal het experiment een paar keer.
Je kunt trouwens ook in een gegeven rijtje één of meer getallen veranderen, toevoegen of weghalen en kijken wat daarvan het effect is.
Noteer je bevindingen bij het werken met de applet!*

Het eerste onderzoeksdeel richt zich op de vraag of er in elk mogelijk rijtje van tien ge-

tallen die uit de getallen 1, 2, ..., 99, 100 worden gekozen *zeker* twee groepjes van getallen zullen zijn met dezelfde som.

De computer kan jou die zekerheid niet geven. Om die zekerheid te krijgen moet je een redenering vinden die aantoont dat er altijd twee van die groepjes zijn.

Addertje

Kijken of er groepjes getallen zijn met dezelfde som komt ogenschijnlijk neer op het vinden van stapels zakken met hetzelfde gewicht.

Let op: Dit lijkt voor de hand liggend maar er zit een addertje onder het gras. Het is eigenlijk *niet* helemaal hetzelfde. Stel je maar voor dat het rijtje zakken is:

1, 2, 7, 13, 15, 17, 24, 28, 35, 99

en gevonden is de gelijkheid:

$$13 + 15 + 28 = 15 + 17 + 24.$$

Kobus kan dat niet gebruiken, want hij kan die ene zak met 15 niet naar twee klanten sturen. Toch heeft Kobus in dat geval wel een oplossing.

>> *Welke oplossing?*

Oriëntatie op Onderzoeksvraag 2

Het tweede deel van je onderzoek gaat een stapje verder.

Daar ga je kijken naar situaties met andere aantallen zakken dan 10 en een ander maximumgewicht dan 100.

Je gaat uitzoeken in welke gevallen het Kobusprobleem altijd oplosbaar is en in welke gevallen het soms niet oplosbaar is.

Bij het tweede deel hoort ook een oriëntatieprobleem.

Probleem 9

We laten de tien getallen even rusten en bekijken nu rijtjes met minder getallen. Of: situaties met minder zakken.

Als ze mogen worden gekozen uit de getallen 1, 2, ..., 100, dan is het niet moeilijk om een drietal of een viertal te vinden waarbij geen oplossing kan worden gevonden. Neem bijvoorbeeld aan dat de zakken zijn: 1, 25, 50, 100. Dat lukt nooit, in dit rijtje van vier getallen zijn geen twee groepjes te vinden met dezelfde som. Bij maximumgewicht 100 is ‘Kobus’ dus voor 4 zakken niet altijd oplosbaar.

>> *Gebruik het applet (gekoppeld aan je redeneervermogen!) om een zo laag mogelijke waarde van N te zoeken, waarbij je drie getallen uit 1, 2, ..., N kunt kiezen waarvoor er NIET twee deelrijtjes zijn met gelijke som.*

>> *Dezelfde opdracht voor vier getallen uit 1, 2, ..., N .*

Je redeneervermogen komt heel goed van pas bij de constructie van ‘handige’ rijtjes of misschien beter gezegd: bij het voorkomen dat je onhandige getallencombinaties kiest.

>> *Kun je al conclusies trekken over (on)handige getallencombinaties? Houd al je bevindingen goed bij en bespreek ze met elkaar.*

Groot onderzoek deel 1: Wanneer lukt het altijd?

Probleem 10 In dit deel moet beredeneerd worden waarom we altijd een oplossing vinden als de gewichten van de zakken gehele getallen uit 1, 2, 3, ... , 100 zijn en er tien zakken worden gekozen.

Dé tip is natuurlijk: het *duivenhokprincipe*.

Dat betekent dat je enerzijds moet uitvinden op hoeveel manieren Kobus een keuze uit de zakken kan maken en anderzijds moet kijken hoeveel mogelijke aantallen kilo's hij dan pakt.

>> *Op hoeveel manieren kan Kobus een keus uit de 10 zakken maken?*

>> *Som 0 kan nooit ontstaan en som 1000 ook niet. Leg dat uit.
Welke sommen kunnen eventueel wel ontstaan?*

Door gebruik te maken van het duivenhokprincipe en de antwoorden op de twee hierboven gestelde vragen kun je bewijzen dat het Kobus-probleem altijd een oplossing heeft.

>> *Bewijs dus nu dat bij elk tiental zakken met spijkers (uit 1, 2, 3, ..., 100 kg) er een tweetal groepen te maken is met hetzelfde totaalgewicht.*

Uitbreidingen bij dit probleem liggen voor de hand. Neem een ander aantal zakken, een ander maximumgewicht. Maar 11 zakken bij maximumgewicht 100 is niet meer zo interessant.

>> *9 zakken bij maximumgewicht 100 weer wel. Blijft de redenering 'lopen'?
Of moet je bij 9 zakken een lager maximum nemen dan 100 om zeker te zijn dat er altijd een oplossing is?*

>> *Probeer een algemeen verband aan te geven tussen aantal zakken en het maximumgewicht waarbij het bewijs met het duivenhokprincipe nog uitsluitend geeft.*

Groot onderzoek deel 2: De speurtocht naar de kleinste ontsnapper

De computer vindt bij het rijtje

12, 34, 45, 67, 69, 70, 84, 154, 198, 200

vlot en veel oplossingen zoals:

$$\begin{aligned} 421 &= \\ &69 + 154 + 198 \\ &67 + 70 + 84 + 200 \end{aligned}$$

En bij verder proberen lijkt het erop dat het maximumgewicht van 100 toch veel te streng is. Misschien kan het wel *altijd* met 10 getallen met maximum 200, dat weten we eigenlijk nog niet. Het is dus helemaal niet onmogelijk dat de bewering:

Bij elke 10 getallen uit de rij 1, ... , 200 is er altijd een oplossing voor het probleem van Kobus.

wél juist is, ook al geeft het *duivenhokprincipe* geen positief uitsluitend daarover. Maar we weten het (nu) niet.

Willen we deze bewering ontkrachten, dus laten zien dat hij *niet* waar is, dan moeten we één rijtje van 10 getallen uit 1, ... , 200 aangeven, waarbij het onmogelijk is twee deelrijtjes met dezelfde som te maken.

We bestuderen eerst een eenvoudig geval.

het makkelijke geval van drie zakken.

Stel je voor: Kobus heeft steeds maar drie zakken waar hij uit kan kiezen.

Als de zakken niet meer dan 3 kilo mogen bevatten, heeft Kobus altijd succes.

Er kan dan alleen maar 1, 2 en 3 kilo in de zakken zitten en het is dan raak, want $1 + 2 = 3$.

Als de grens voor de inhoud van de zakken 4 is, gaat het al mis bij de rij 1, 2, 4.

Alle zeven mogelijke sommen zijn immers verschillend: 1, 2, 4, 1+2, 1+4, 2+4, 1+2+4.

Daarmee is vastgesteld: bij drie zakken is de gewichtsgrens waarvandaan het mis kan gaan gelijk aan 4.

Bij het rijtje 1, 2, 4 komt elke som van getallen uit het rijtje precies één keer voor en niet meer. Sommen komen niet *dubbel* voor.

Definitie: dubbelsom-vrije rijen

Een rijtje waarin geen twee deelrijtjes te vinden zijn met gelijke som, heet een *dubbelsom-vrij rijtje*.

1, 2, 4 is een *dubbelsom-vrij rijtje* van 3 getallen met maximum 4.

Probleem 11

Wat we dus zoeken zijn

dubbelsom-vrije rijen van een bepaalde grootte met een zo klein mogelijk maximum.

>> *Is er een dubbelsom-vrij rijtje van vier getallen met maximum 8?*

>> *Is er ook een dubbelsom-vrij rijtje van vier getallen met een kleiner maximum dan 8?*

Bij *dubbelsom-vrije rijtjes* van vier getallen zijn die met het kleinste maximum goed te vinden, dus hier moet je echt wel het wereldrecord evenaren. Dat betekent: aantonen dat het *onder* dat door jou bepaalde maximum niet lukt een dubbelsom-vrij rijtje van vier getallen te vinden.

dubbelsom-vrije rijen uitbreiden

3, 5, 9 is een dubbelsom-vrije rij; dat is makkelijk na te gaan.

Door deze drie getallen met 2 te vermenigvuldigen en er een 1 (of een ander oneven getal) bij te zetten, maken we een nieuw dubbelsom-vrij rijtje: 1, 6, 10, 18.

>> *Toon dit aan door deelrijtjes met de 1 en zonder de 1 te onderscheiden.*

Probleem 12

Algemeen:

Stel we hebben een dubbelsom-vrije rij van n getallen. We maken een nieuwe rij van $n+1$ getallen door alle getallen van de oude rij te verdubbelen en het getal 1 (of een ander oneven getal) aan deze rij even getallen toe te voegen. Dan is de nieuwe rij een dubbelsom-vrije rij.

>> *Toon dit aan.*

>> *Toon aan dat de rij 1, 2, 4, ..., 2^{n-1} voor elke n een dubbelsom-vrije rij van n getallen is.*

Inklemmen van $G(n)$

We vonden dat er een dubbelsom-vrije rij van 3 getallen is met maximum 4 en dat die 4 daarbij niet verlaagd kan worden, want dan is dit niet meer waar.

We noteren dat als:

$$G(3) = 4$$

Met $G(n)$ bedoelen we het *kleinste getal* dat als maximum kan optreden van een dubbelsom-vrij rijtje van n getallen.

Je hebt zelf misschien $G(4)$ al gevonden.

>> *Probeer ook $G(5)$ en $G(6)$ te bepalen.*

Wereldfaam verwerf je als je een precieze omschrijving, met formules bijvoorbeeld, geeft voor $G(n)$.

Maar iets minder is ook goed voor de Wiskunde B-dag. Daarover nu meer.

Probleem 13 De aanpak van het Kobusprobleem (met het *duivenhokprincipe*) hielp je aan getallen die zeker niet de gezochte $G(n)$ zijn, want daar vond je juist wél oplossingen. Zo heb je, door te bewijzen dat Kobus bij 10 zakken met maximumgewicht 100 altijd wel succes heeft, bewezen dat

$$100 \leq G(10)$$

Van de andere kant heb je mogelijk wel een dubbelsom-vrij rijtje van lengte 10 gevonden via het proces van probleem 12. Dat rijtje had als hoogste getal $2^9 = 512$.

Je weet dus ook

$$G(10) \leq 512$$

Samengeschreven:

$$100 \leq G(10) \leq 512$$

Ja, dat ziet er mooi uit, maar tussen de ongelijktekens zit nog wel een erg groot gat! 100 is hier een *ondergrens*, 512 is hier een *bovengrens* voor $G(10)$. Tussen die twee grenzen ligt $G(10)$.

De grote vraag is of je die grenzen (of een van de twee) kunt verbeteren, zodat het gat kleiner wordt. Hier is dan het probleem van dit tweede deel:

>> *Zoek (voor zover nog niet gelukt) zo goed als je kunt onder- en bovengrenzen voor $G(5)$, $G(6)$, $G(7)$, $G(8)$ enzovoort.*

Zoek formules met een n erin die onder- en bovengrens zijn voor $G(n)$. Natuurlijk moeten de formules algemeen kloppen en zo scherp mogelijk grenzen geven als je kunt!

Je mag hierbij alles in de strijd gooien wat je in het voorgaande geleerd hebt. Misschien kom je zelf nog op nieuwe ideeën om de grenzen nog beter te maken.

