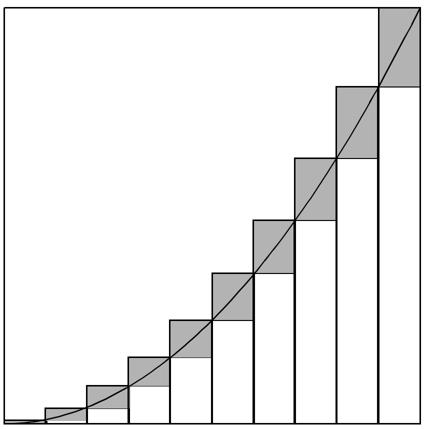
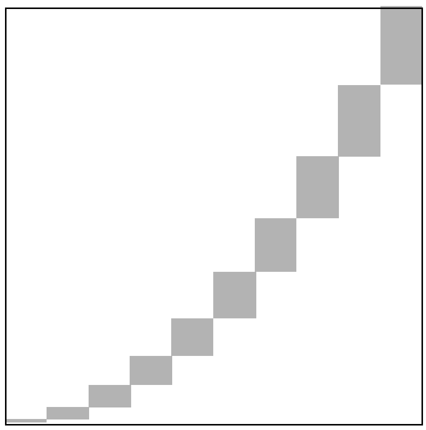
Som & Verschil
Afstand & Snelheid

Differentiaal- en Integraalrekening
deel 1





Nieuwe wiskunde tweede fase
Profiel N&G en N&T
Freudenthal instituut

Differentiaal- en Integraalrekening (deel 1: Som & verschil, afstand & snelheid))

Project:	Wiskunde voor de tweede fase
Profiel:	N&G en N&T
Klas:	vwo 5
Staat:	Tweede herziene versie
Ontwerp:	Martin Kindt

Freudenthal instituut, juni 1997

Inhoud

vooraf

toppers

De geschiedenis van de wiskunde en de natuurwetenschappen kent talrijke hoogtepunten. Van sommige wetenschappelijke prestaties bleek de draagwijdte echter veel groter dan van andere. Sprekende voorbeelden van absolute toppers zijn de evolutietheorie (Darwin) en de relativiteitstheorie (Einstein). Tot deze categorie-met-stip behoort ongetwijfeld een grote ontdekking in de wiskunde, namelijk die van de *differentiaal- en integraalrekening.*

Newton en Leibniz

Aan die ontdekking zijn de namen van Newton en Leibniz verbonden. Die uitvinding, door de twee onafhankelijk van elkaar tot stand gebracht (omstreeks het jaar 1680), betekende een sensationele stap vooruit in een eeuwenlange ontwikkeling die begint bij het werk van Archimedes (ca 250 voor Chr.). Newton deed zijn uitvinding vooral ten behoeve van de mechanica, maar in latere tijden is gebleken dat de differentiaal- en integraalrekening een sterk hulpmiddel is in veel wetenschappen, ook in wetenschappen die in Newton's tijd nog niet bestonden. Leibniz, die ook als filosoof grote invloed heeft gehad, leeft vooral voort in de notaties die hij ontwierp om de theorie hanteerbaar te maken.

Sir Isaac Newton (1642-1727)

Gottfried von Leibniz (1646-1716)

namen

Het vakgebied heeft in de loop van de tijd verschillende namen gekregen.
Behalve differentiaal- en integraalrekening spreekt men ook van:

- *calculus* (letterlijk: rekenmethode), vooral in de engelse taal;
- *infinitesimaalrekening*, een mooie naam die echter een beetje uit de mode is geraakt;
- *analyse*, eigenlijk een verzamelnaam voor de oorspronkelijke theorie tezamen met alle uitbreidingen die daar tot op heden bijgekomen zijn.

Het is misschien aardig te weten dat de differentiaal- en integraalrekening tot zo'n 40 jaar geleden ook nog werd aangeduid met 'hogere wiskunde'.

oriëntatie

In dit eerste deeltje van de differentiaal- en integraalrekening, bestemd voor de profielen Natuur en Gezondheid/Techniek van het vwo, vallen we niet met de deur in huis; we stellen de beginselen van de bewerkingen *differentiëren* en *integereren* eventjes uit.
Dit boek probeert vooral een oriëntatie van het vak te geven, met af en toe wat aandacht voor historische aspecten. In het veertiende hoofdstuk wordt in een notendop het perspectief geschetst van de uitvinding van Newton en Leibniz.

instap en theorie

De eerste dertien hoofdstukken zullen er hopelijk toe bijdragen dat je je een goed inzicht verwerft in de fundamentele ideeën en begrippen. Er zijn twee soorten hoofdstukken: korte aangeduid met *instap* en lange, meer theoretische hoofdstukken. Een instap bevat meestal een probleem of een onderzoeksgerichte opdracht, waarbij je weinig directe voorkennis nodig hebt. In het daaropvolgende, meer theoretisch getinte hoofdstuk, wordt dan al of niet stilzwijgend gebruik gemaakt van de ontdekkingen (succes daarmee!) die je zelf hebt gedaan.

GR

Behalve je gezonde (en ... kritische!) verstand, zal je voortdurend een hulpje in de vorm van een grafische rekenmachine (of computer) nodig hebben. Dat betekent dat je veelvuldig resultaten op een scherm ziet om die vervolgens (ongeprint) uit te wissen. Advies: leg belangrijke zaken van het scherm vast in je schrift door middel van een tekst of een plaatje.

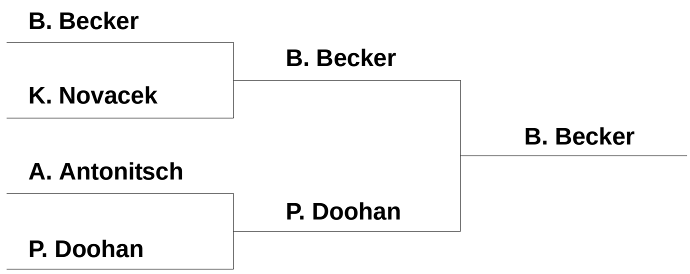
tips en antwoorden

Als je bij een opgave in de marge het woordje 'tip' ziet staan, dan betekent dit dat achterin het boek een tipje van de sluier wordt opgelicht. Het is de bedoeling dat je de 'Tips' pas raadpleegt wanneer je er geen gat inziet. Je oplossingen kun je *controleren* met behulp van het hoofdstuk 'Antwoorden', waarin van veel opgaven ook uitwerkingen staan.

1 Instap: twee telproblemen

De problemen die je in dit hoofdstuk krijgt voorgelegd, hebben een beetje het karakter van een onderzoeksopdracht. Ze doen meer een beroep op gezond verstand dan op wiskundige voorkennis. Je hoeft er niet perse in je eentje aan te puzzelen; samenwerking met één of meer klasgenoten wordt warm aanbevolen. Verder is het de bedoeling dat je een kort verslag maakt van de resultaten.

1 Tennistoernooi.
Waarschijnlijk het beroemdste tennistoernooi ter wereld is dat van Wimbledon in Engeland. Dit zogenaamde grastoernooi wordt elk jaar in het begin van de zomer gespeeld. Eigenlijk is er sprake van vijf toernooien: dames enkel(spel), heren enkel, dames dubbel, heren dubbel en gemengd dubbel. Hoewel de dubbelspelen zeer spectaculair kunnen zijn, gaat de meeste aandacht van krant en televisie uit naar de beide enkelspeltoernooien. Op de volgende pagina zie je het wedstrijdschema voor het herenenkelspel uit 1987 afgedrukt.
Het schema kan worden gebruikt als hulpmiddel om het verloop van het toernooi bij te houden. Een mogelijk verloop van de eerste twee ronden voor de eerste vier spelers in het schema is:



Je leest hieruit: Becker en Doohan winnen hun partij in de eerste ronde en schakelen daarmee Novacek en Antonitsch uit. Becker speelt in de tweede ronde tegen Doohan en wint. Nu volgen eerst twee vragen over het complete schema (bladzij 2).

a. Voor de organisatie is het natuurlijk belangrijk te weten hoeveel wedstrijden er in totaal moeten worden gespeeld. Hoe groot is het totale aantal wedstrijden in het herentoernooi van Wimbledon?

b. Om te voorkomen dat de sterkste spelers elkaar in het begin van het toernooi treffen, worden de 16 beste deelnemers 'geplaatst'. Zij krijgen een speciaal plekje in het wedstrijdschema. Als alles volgens verwachting verloopt ontmoeten de sterkste twee spelers elkaar pas in de finale. Bedenk een zo goed mogelijke manier om de 16 geplaatste spelers te verdelen over het schema.

Op het herentoernooi in Wimbledon zijn 128 deelnemers toegelaten.
Die 128 is voor een tennistoernooi een mooi getal (waarom eigenlijk?).

tip **c.** Maak een zo goed mogelijk plan voor een tennistoernooi van 50 deelnemers. (Denk er aan: een partij verliezen betekent uitschakeling). Hoeveel wedstrijden zijn er nu in totaal nodig?

tip **d.** Kun je een algemene regel bedenken voor het totaal aantal partijen dat nodig is om de winnaar aan te wijzen van een toernooi met *N* spelers?

HEREN
MAANDAG 22 JUNI 1987
AD SPORTWERELD
PAGINA 18
WIMBLEDON 1987
1 B. Becker (WDi)
2 K. Novacek (Tsj)
3 A. Antonitsch (Oos)
4 P. Doohan (Aus)
5 C. Panatta (Ita)
6 J. Grabb (VS)
7 M. Kures (VS)
8 L. Shiras (VS)
9 N. Odizor (Nig)
10 S. Giammalva (VS)
11 P. Fleming (VS)
12 J. Bates (GBr)
13 S. Zivojinovic (Joe)
14 M. Flur (VS)
15 S. Casal (Spa)
16 D. Pate (VS)
17 T. Mayotte (VS)
18 J. Fleurian (Fra)
19 T. Wilkison (VS)
20 J. Pugh (VS)
21 M. Pernfors (Zwe)
22 R. Seguso (VS)
23 C. Steyn (ZAf)
24 C. Limberger (Aus)
25 D. Goldie (VS)
26 K. Evernden (NZl)
27 D. Visser (ZAf)
28 L. Mattar (Arg)
29 T. Witsken (VS)
30 S. Shaw (GBr)
31 M. Davis (VS)
32 J. Connors (VS)
33 M. Wilander (Zwe)
34 G. Muller (ZAf)
35 M. Leach (VS)
36 J. Gunnarsson (Zwe)
37 J. B. Svensson (Zwe)
38 S. Youl (Aus)
39 I. Kley (Bra)
40 E. Edwards (ZAf)
41 C. van Rensburg (ZAf)
42 T. Hogstedt (Zwe)
43 C. Bergström (Zwe)
44 P. Lundgren (Zwe)
45 J. Yzaga (Per)
46 E. Jelen (WDi)
47 M. Bauer (VS)
48 E. Sanchez (Spa)
49 P. Cash (Aus)
50 M. Freeman (VS)
51 T. Nelson (VS)
52 P. McNamee (Aus)
53 L. Scott (VS)
54 G. Holmes (VS)
55 M. Schapers (Ned)
56 J. Sanchez (Spa)
57 P. Annacone (VS)
58 M. Sreiber (Tsj)
59 W. Masur (Aus)
60 C. Motta (Bra)
61 G. Forget (Fra)
62 T. Muster (Oos)
63 B. Drewett (Aus)
64 Y. Noah (Fra)
M. Mecir (Tsj) 65
M. Depalmer (VS) 66
M. Woodforde (Aus) 67
K. Jones (VS) 68
R. Osterthun (WDi) 69
A. Jarryd (Zwe) 70
D. Rostagno (VS) 71
B. Dyke (Aus) 72
B. Scanlon (VS) 73
T. Mmoh (Nig) 74
L. Stefanki (VS) 75
Sokol (Sow) 76
G. Donnelly (VS) 77
C. Bailey (GBr) 78
S. Bale (GBr) 79
B. Gilbert (VS) 80
Nyström (Zwe) 81
H. Sundström (Zwe) 82
T. Smid (Tsj) 83
D. Tyson (Aus) 84
A. Maurer (WDi) 85
C. Steeb (WDi) 86
J. Fitzgerald (Aus) 87
J. Hlasek (Zwi) 88
S. Colombo (Ita) 89
M. Anger (VS) 90
M. Westphal (WDi) 91
R. Krishnan (Indi) 92
S. Botfield (GBr) 93
M. Purcell (VS) 94
S. Eriksson (Zwe) 95
S. Edberg (Zwe) 96
A. Gomez (Ecu) 97
H. Skoff (Oos) 98
J. Canter (VS) 99
U. Stenlund (Zwe) 100
K. Flach (VS) 101
R. Saad (Arg) 102
J. Sadri (VS) 103
J. Carlsson (Zwe) 104
G. Bloom (Isr) 105
P. Kuhnen (WDi) 106
P. Vojtisek (Tsj) 107
M. Laurendeau (Can) 108
A. Mansdorf (Isr) 109
N. Fulwood (GBr) 110
A. Agassi (VS) 111
H. Leconte (Fra) 112
K. Curren (VS) 113
B. Testerman (VS) 114
J. Avendano (Spa) 115
Kriek (VS) 116
D. de Miguel (Spa) 117
S. Davis (VS) 118
D. Keretic (WDi) 119
V. Amritraj (Indi) 120
Olhovskiy (Sow) 121
A. Castle (GBr) 122
R. Stadler (Zwi) 123
R. Reneberg (VS) 124
P. Cane (Ita) 125
Arias (VS) 126
C. Saceanu (WDi) 127

2 De Witte Golf.
Hier volgt een fragment uit de roman “Het leven een gebruiksaanwijzing” van Georges Perec.

> De man die tegenover de drie anderen zit is een Japanner. Hij heet Ashikage Yoshimitsu. Hij behoort tot een sekte die in 1960 in Manilla door een zeevisser, een PTT-beambte en een slagersknecht gesticht is. De Japanse naam van de sekte is’Shira nami’, ‘De Witte Golf’; de Engelse naam ervan is ‘The Three Free Men”.
> In de drie jaren die op de stichting van de sekte volgde slaagde elk van ‘de drie vrije mannen’ erin drie anderen te bekeren. De negen mannen van de tweede generatie wijdden er in de loop van de drie dááropvolgende jaren zevenentwintig in. De zesde lichting telde in 1975 zevenhonderdnegenentwintig leden, onder wie Ashikage Yoshimitsu, die samen met enige anderen de opdracht kreeg het geloof in het Westen te gaan verbreiden. De inwijding in de sekte van De Drie Vrije Mannen is langdurig, moeilijk en buitengewoon kostbaar, maar kennelijk vond Yoshimitsu drie bekeerlingen die rijk genoeg waren om over tijd en geld te beschikken die voor een dergelijke onderneming onontbeerlijk zijn.
> (...)
> Smautf heeft berekend dat er in 1978 tweeduizendhonderdzevenentachtig nieuwe volgelingen van de sekte van De Drie Vrije Mannen zouden zijn, ervan uitgaande dat niet één van de gewezen discipelen gestorven is, een totaal van drieduizend tweehonderdzevenenzeventig gelovigen. Daarna zal het veel sneller gaan: in 2017 zal de negentiende generatie meer dan een miljard personen tellen. In 2020 zal de totale bevolking van de planeet, en zelfs ruimschoots meer dan dat, ingewijd zijn.

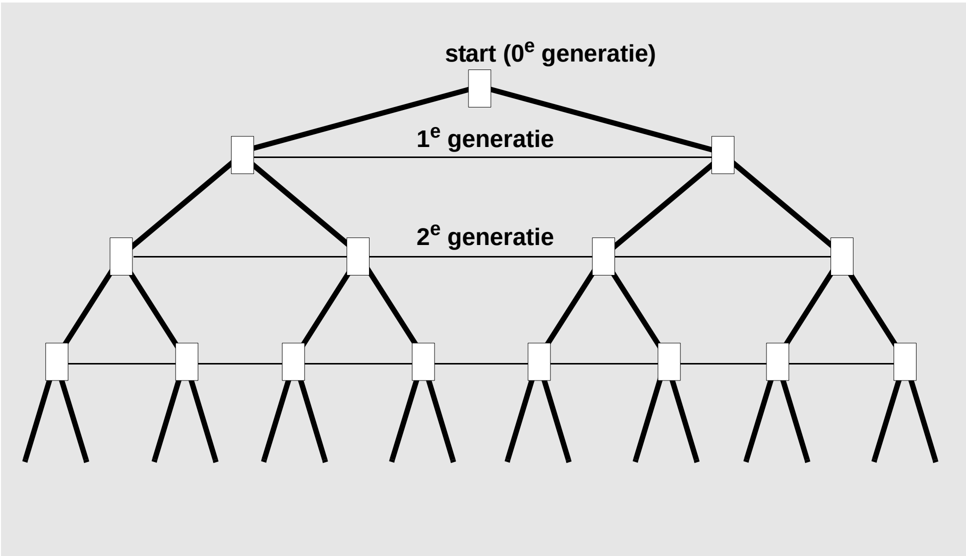
a. Lees het fragment nauwkeurig door en licht (het begin van) de verbreiding van de Witte Golf toe met een tekening.
b. Onderzoek of de berekeningen van Smautf kloppen.
tip **c.** Wat vind je van de allerlaatste conclusie? Waarom?

2 Sommen bij meetkundige rijen

In de zomer van 1995 is er een storm van protesten geweest tegen de voorgenomen Franse kernproeven op het atol Mururoa in de Stille Zuidzee. De Franse president Chirac wist echter niet van wijken en de liet de proeven gewoon doorgaan.
Eén van de protesten vond plaats in de vorm van een kettingbrief. De initiatiefnemer schreef twee vrienden aan met het verzoek om
(a) een protest tegen de kernproeven te ondersteunen en
(b) aan twee nieuwe mensen per brief (of 'e-mail') te vragen precies hetzelfde te doen.
Veronderstel dat iedere aangeschreven persoon zou voldoen aan dit verzoek en dat er steeds nieuwe mensen worden bereikt.
Net als bij de verbreiding van de Witte Golf is de vraag die opkomt: hoe snel kan het leger protesterenden zich uitbreiden onder deze voorwaarde?

Om het probleem gemakkelijker bespreekbaar te maken, voeren we de term *generatie* in.
De eerste generatie wordt gevormd door de 2 mensen die de brief van de initiatiefnemer krijgen.
De tweede generatie wordt gevormd door de personen die een brief ontvangen van de mensen van de eerste generatie, dat zijn er dus $2 \cdot 2 = 4$.
De derde generatie ontvangt zijn brieven van de vier personen van de tweede generatie en bevat dus $2 \cdot 4 = 8$ mensen. En zo verder, en zo voort.

boom-diagram



Dit boomdiagram is in wezen hetzelfde als een deel van het wedstrijdschema van Wimbledon; wat daar de finale was, is hier het startpunt.

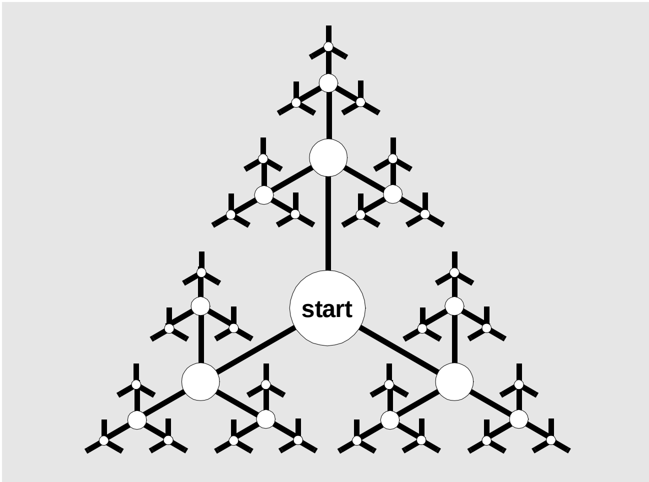
1 **a.** Bereken het totaal aantal protesterenden tot en met de tiende generatie (inclusief de initiatiefnemer, die we beschouwen als nulde generatie).

tip **b.** Bedenk een regel voor het berekenen van het totale aantal protesterenden bij een gegeven aantal generaties.

c. Na hoeveel generaties zou het (theoretische) aantal protesterenden de 6 miljard (ongeveer de grootte van de wereldbevolking) kunnen overschrijden?

machten van 3

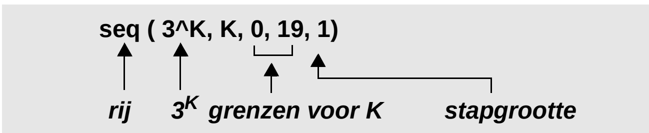
De initiatiefnemer van de ketting-protestactie had natuurlijk even goed kunnen besluiten om 3 mensen aan te schrijven met het verzoek om ieder 3 mensen aan te schrijven, enz.



Het totaal aantal personen dat na 20 generaties zou worden bereikt is:

$$1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + ... + 3^{19}$$

Het berekenen van zo’n som kun je op de TI-83 als volgt uitvoeren.
Ga naar het menu LIST en kies in OPS : seq (toets 5); seq staat voor sequence (= rij).
Op het scherm staat nu seq (
Toets achter het geopende haakje in 3^K, K, 0, 19, 1).
Er staat nu vertaald in nederlands:
de rij getallen 3^K, waarbij K loopt van 0 naar 19 met stapgrootte 1



Na ENTER komt het scherm {1 3 9 27 81 24...
Met de pijltjestoets naar rechts kun je het vervolg van de rij in beeld brengen.

Om de som van de getallen te krijgen ga je naar het LIST MATH menu; kies sum (toets 5)
Het commando ‘sum Ans ENTER’ geeft nu de som van de rij getallen: 1, 3, 3^2, ... , $3^{19.}$

Je kunt dit ook in één keer krijgen door sum seq (via de twee menus) op te roepen.
sum (seq (3^K, K, 0, 19, 1)) betekent dan:
de som van de rij getallen 3^K, waarbij K loopt van 0 naar 19 met stapgrootte 1.

2 **a.** Voer de instructies uit en stel vast dat er na 20 generaties in totaal bijna $1\frac{3}{4}$ miljard personen zijn aangeschreven.

b. Misschien had je gedacht dat zou gelden: $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + ... + 3^{19} = 3^{20} - 1$. Helaas. Vergelijk het resultaat met de uitkomst van $3^{20} - 1$. Welke correctie moet je hier blijkbaar op toepassen?

c. Ga ook na hoe het zit met bijvoorbeeld $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + ... + 3^9$.

d. Ook voor $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + ... + 3^{29}$. Waarom kun je nu niet helemaal zeker van de zaak zijn?

Het heeft er sterk de schijn van dat $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \ldots + 3^{29}$ gelijk is aan de *helft* van $3^{30} - 1$. Om zekerheid te hebben volgt nu een *bewijs*. Dit bewijs vraagt een kleine kunstgreep.
Stel de som van 3^k waarbij k loopt van 0 naar 29 met stapgrootte 1, voor het gemak gelijk aan S. Het idee is nu: vermenigvuldig S met het grondtal 3; daardoor worden alle exponenten opgehoogd met 1. De sommen S en $3S$ krijgen dan een grote overlap!

$$S = 1 + \boxed{3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 3^{29}}$$

$$3 \cdot S = \boxed{3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 3^{29}} + 3^{30}$$

3 Trek nu S af van $3 \cdot S$.
Laat zien dat hieruit volgt dat S exact gelijk is aan de helft van $3^{30} - 1$.

tip

4 **a.** Neem nu een kettingbrief die steeds naar 5 personen wordt gestuurd. Laat zien dat het aantal personen na 20 generaties gelijk is aan een *kwart* van $(5^{20} - 1)$, ofwel:

$$1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \ldots + 5^{19} = \frac{5^{20} - 1}{4}$$

b. Controleer dit resultaat ook met de GR.

het teken sigma

In de wiskunde wordt gestreefd naar een kort-en-bondige manier van opschrijven.
Dat maakt een wiskunde-tekst soms wat geheimzinnig. althans voor de lezer die daar niet aan gewend is. Jij zult nu moeten wennen aan zo'n beknopte notatie.
Hierboven heb je deze som uitgerekend:

$$3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{29}$$

Voortaan wordt dit ook zó geschreven:

$$\sum_{k=0}^{29} 3^k$$

Het symbool S (de Griekse hoofdletter S, spreek uit: *sigma*) staat voor '*som van een rij getallen*' (op de GR was dit 'sum sequence').
In de formule staat de variabele k. Die neemt achtereenvolgens de waarden 0, 1, 2, ..., 29 aan. Dat kun je lezen uit wat er onder en boven het sigma-teken staat. Dat de stapgrootte 1 is, wordt niet apart vermeld, maar wordt stilzwijgend verondersteld.
Vergelijk de S-schrijfwijze met de 'horizontale' notatie van de TI-83:

sum (seq (3^K, K, 0, 29, 1))

=

$$\sum_{k=0}^{29} 3^k$$

5 $\sum_{k=0}^{63} 2^k$ betekent: '*som van de getallen 2^k waarbij k loopt van 0 naar 63 (met stap 1)*':
anders gezegd: $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{63}$.
Wat is de uitkomst van deze som?

6 Bekijk de uitdrukking; $\sum_{k=0}^{100} 7^k$.

a. Schrijf drie uitdrukkingen op die precies hetzelfde betekenen (eentje in GR-taal).

b. Laat zien dat geldt: $\sum_{k=0}^{100} 7^k = \frac{7^{101} - 1}{6}$.

7 Verklaar:

$$\sum_{k=0}^{6} 10^k = 1111111$$

8 **a.** Schrijf met behulp van het S-teken:

$$1 + 13 + 13^2 + 13^3 + 13^4 + 13^5 + 13^6 + 13^7 + 13^8 + 13^9 + 13^{10}$$

b. Pas de notatie aan voor het geval dat de eerste twee termen niet 'meedoen', dus voor de som:

$$13^2 + 13^3 + 13^4 + 13^5 + 13^6 + 13^7 + 13^8 + 13^9 + 13^{10}$$

c. Schrijf met de sigma-notatie: de som van vijftien opeenvolgende (en oplopende) machten van 13, te beginnen met 13^8.

9 Wat is de uitkomst van: $\sum_{k=0}^{1997} 1^k$?

meetkundige rij

Een rij getallen, waarbij elk getal uit het voorgaande verkregen wordt door vermenigvuldiging met een vaste factor („ 0), wordt een *exponentiële rij* of *meetkundige rij* genoemd. De vaste factor heet de *groeifactor* of de *reden* van de rij.
Nemen we als beginterm *a* en als groeifactor *r*, dan komt er:

$$a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, ...$$

somformule

Zo'n meetkundige rij kun je zo ver door laten lopen, als je wilt: het is een *oneindige* rij. In het voorgaande heb je een manier gevonden om de som van een beginstuk van zo'n rij te berekenen, in het geval $a = 1$. De formule luidt dan:

$$\boxed{1 + r + r^2 + ... + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1}} \qquad (*)$$

Of, met het sigma-teken:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} r^k = \frac{r^n - 1}{r - 1}} \qquad (*)$$

Een voorwaarde hierbij is dat het getal *r* niet gelijk is aan 1.
Het bewijs van deze formule kijken we af van het voorbeeld met $r = 3$ en $n = 30$ (blz 7).

bewijs

Stel $S = 1 + r + r^2 + ... + r^{n-1}$ .... (1)

dan: $rS = r + r^2 + r^3 + ... + r^n$ .... (2)

Uit (2) en (1) volgt nu: $rS - S = r^n - 1$

Ofwel: $(r - 1)S = r^n - 1$

En dus: $S = \dfrac{r^n - 1}{r - 1}$, mits $r \neq 1$

10 a. Bestudeer dit bewijs. Verklaar de voorwaarde $r \neq 1$.
b. Waaraan is S gelijk, in het geval $r = 1$?

11 Hoe luidt de formule voor de som van de eerste $n + 1$ termen van de rij 1, r, r^2, ...?

12 Als de beginterm van de meetkundige rij gelijk is aan a en de groeifactor r, dan krijg je de rij:

$$a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, ...$$

a. Geef een formule voor de som van de eerste n getallen van deze rij.
b. Wat levert de formule op voor $r = -1$ in het geval dat n een even getal is? En in het geval dat n oneven is?

13 a. 3, 12, 48, 192, ... is een meetkundige rij.
Bereken de som van de eerste tien getallen van de rij.
b. Bereken ook de som van het vijfde getal tot en met het veertiende getal.

14 Wat betekent $\displaystyle\sum_{k=10}^{20} r^k$? Bewijs dat die som gelijk is aan: $\dfrac{r^{21} - r^{10}}{r - 1}$ (mits $r \neq 1$)

tip **15** Bereken: $\displaystyle\sum_{k=15}^{32} 2^k$; $\displaystyle\sum_{k=17}^{18} 3^k$; $\displaystyle\sum_{k=4}^{9} 10^{k+1}$; $\displaystyle\sum_{k=4}^{9} (10^k + 1)$.

tip **16** Laat zien dat geldt: $\displaystyle\sum_{k=0}^{9} 2^{0,1k} = \frac{1}{2^{0,1} - 1}$

17 Verklaar waarom geldt:

$$\sum_{k=0}^{n-1} 5^k = \sum_{k=1}^{n} 5^{k-1}$$

18 Bedenk zelf een som van oplopende termen van een meetkundige rij. Noteer die met het sigma-teken. Geef ook de uitkomst.

19 Terug naar de Witte Golf (zie hoofdstuk 1) . Gebruik de in dit hoofdstuk geleerde formule om het totaal aantal ingewijden te berekenen in het jaar 2017.

Samenvatting

sigma

Het sigma-teken wordt gebruikt om sommen met veel termen te noteren.
Als f een functie is gedefinieerd voor tenminste de natuurlijke getallen, geldt bijvoorbeeld:

$$\sum_{k=8}^{25} f(k) = \underbrace{f(8) + f(9) + \ldots + f(25)}_{\text{18 termen}}$$

Spreek uit: de som van de getallen $f(k)$, waarbij k loopt van 8 naar 25 (met stap 1).

meetkundige rij

Een *meetkundige* of *exponentiële rij* is een rij getallen, waarvan elk getal uit het voorgaande verkregen wordt door vermenigvuldiging met een vaste groeifactor r ($\neq 0$).
Als a het begingetal is, dan wordt de rij voorgesteld door:

$$a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, \ldots$$

De som van de eerste n getallen van de rij wordt bepaald door:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} ar^k = a \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}} \qquad (*)$$

Het linkerlid van deze formule kun je zó uitspreken:
de som van de getallen ar^k waarbij k loopt van 0 naar n-1 (stapgrootte 1).

extra opgave

In een tennistoernooi vinden matches met 2 tegenstanders plaats. Daarom is het handig om met machten van 2 te werken en zijn er op Wimbledon 128 (= 2^7) deelnemers voor het herenenkelspel. Bij een andere individuele sport, zeg hardlopen, kunnen de wedstrijden ook met andere aantallen deelnemers plaatsvinden.
Veronderstel een toernooi voor een zeer groot aantal hardlopers dat een macht is van 6, zeg 6^n.
De opzet van het toernooi is zeer regelmatig. In iedere wedstrijd (‘heat’) lopen 6 deelnemers tegen elkaar; alleen de winnaar gaat door naar de volgende ronde. Hetzelfde systeem wordt gehanteerd in de tweede ronde. Uiteindelijk wordt het toernooi beslist in een finale, ook weer met 6 deelnemers.

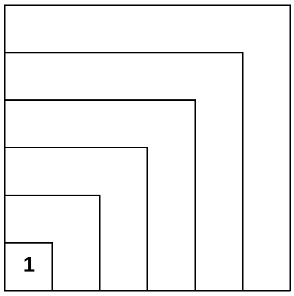
a. Hoeveel wedstrijden zijn er nodig voor de eerste ronde? En voor de tweede ronde?
b. Hoeveel ronden zijn er nodig om een winnaar aan te wijzen?
c. Hoeveel verliezers zijn er in totaal na afloop?
d. Waarom is het aantal verliezers hier niet, zoals bij een tennistoernooi, gelijk aan het totaal aantal wedstrijden?
e. Hoe kun je uit het wedstrijdschema concluderen dat: $\sum_{k=0}^{n-1} 6^k = \frac{6^n - 1}{5}$?

3 Instap: verschil in groei

Stel dat het oppervlak van een groot meer gedeeltelijk wordt bedekt door een zich snel uitbreidende soort kroos. Er is dan sprake van een *groeiproces*. Bij een dergelijk proces zijn bijvoorbeeld milieudeskundigen geïnteresseerd in het kwantitatieve verloop ervan; dat kan van groot belang zijn voor het ecologische evenwicht in het meer. Een te grote hoeveelheid kroos is ongewenst, vanwege het verstikkende effect. Bij de studie van groeiprocessen worden vaak computermodellen gebruikt en op basis daarvan worden conclusies getrokken en voorspellingen gedaan. Zulke modellen berusten op wiskunde. In de volgende opgave ga je twee sterk vereenvoudigde modellen van groei vergelijken.

model 1

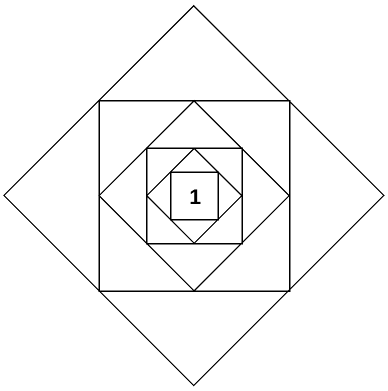
Op een zeker tijdstip is de kroos-oppervlakte gelijk aan 1 m^2
Die oppervlakte kan dus worden voorgesteld door een vierkant van 1 bij 1.
Iedere week groeit de oppervlakte zodanig, dat de zijden van het vierkant dat de totale oppervlakte voorstelt, 1 groter wordt.



In de figuur zie je de stapsgewijze ontwikkeling in 5 weken.

model 2

We gaan weer uit van een beginoppervlakte van 1 m^2.
Nu wordt aangenomen dat de oppervlakte wekelijks verdubbelt.
Een manier om dit proces met stappen van 1 week te tekenen is:



Onderzoek welke van de twee modellen op de wat langere termijn het meest verontrustende resultaat geeft.
Maak een verslag van dat onderzoek en licht je bevindingen toe op verschillende manieren; gebruik in ieder geval grafieken en tabellen.

4 Differenties

In hoofdstuk 3 heb je twee modellen van groei vergeleken; misschien heb je daarbij ook formules gebruikt.
De groei volgens model 1 laat zich beschrijven met de formule $y_1(t) = (t + 1)^2$;
hierbij is t de tijd (in weken) en y_1 de kroos-oppervlakte (in m^2).

Volgens model 2 komt er de formule $y_2(t) = 2^t$

Een manier om de groeiprocessen te vergelijken is: *bestudeer de toenamen (in beide modellen) bij gelijke stapgrootte.*

1 Als je dit nog niet gedaan hebt, maak dan op de GR tabellen van y_1 en y_2 voor achtereenvolgens $t = 0, 1, 2, ...$ en maak een lijst van de wekelijkse toenamen. Probeer de regelmaat in de lijst te verklaren vanuit de meetkundige figuren op bladzij 11.

De beide groeipatronen kunnen worden beschreven met ‘verschilformules’:

bij de stap van t naar $t + 1$ groeit y_1 met: $(t + 2)^2 - (t + 1)^2$;

bij de stap van t naar $t + 1$ groeit y_2 met: $2^{t+1} - 2^t$.

2 Laat met behulp van algebra zien dat deze verschillen respectievelijk gelijk zijn aan aan $2t + 3$ en 2^t .

differentie

De toename van een grootheid (of variabele) in een zeker (tijds-)interval is gelijk aan het verschil tusssen de eind- en de beginwaarde. Dit verschil wordt *differentie* genoemd.

delta

Differenties worden in de wiskunde (en andere wetenschappen) vaak aangeduid met het symbool D (de Griekse hoofdletter D, spreek uit: *delta*).

De differentie van $(x+1)^2$ voor x loopt van a naar b, kan zó worden genoteerd:

$$\underset{x=a}{\overset{b}{\mathrm{D}}}(x+1)^2$$

We noemen dit ook ‘*de differentie van* $(x + 1)^2$ *op het interval* $[a , b]$.
Als er geen misverstand kan zijn over de lopende variabele, mag het korter:

$$\boxed{\underset{a}{\overset{b}{\mathrm{D}}}(x + 1)^2 = (b + 1)^2 - (a + 1)^2}$$

en evenzo:

$$\boxed{\underset{a}{\overset{b}{\mathrm{D}}}2^x = 2^b - 2^a}$$

Dus bijvoorbeeld (reken even na):

$$\underset{9}{\overset{10}{\mathrm{D}}}(x+1)^2 = 121 - 100 = 21 \qquad \text{en} \qquad \underset{5}{\overset{9}{\mathrm{D}}}2^x = 512 - 32 = 480$$

en zoals bleek in opgave 2:

$$\underset{t}{\overset{t+1}{\mathrm{D}}}(x + 1)^2 = 2t + 3 \qquad \text{en} \qquad \underset{t}{\overset{t+1}{\mathrm{D}}}2^x = 2^t$$

3 Bereken:

$\underset{5}{\overset{6}{\Delta}}(x+1)^2$; $\underset{5}{\overset{6}{\Delta}}x^2$; $\underset{7}{\overset{8}{\Delta}}2^{x-1}$; $\underset{7}{\overset{8}{\Delta}}(2^x-1)$; $\underset{1}{\overset{10}{\Delta}}x^3$; $\underset{1}{\overset{10}{\Delta}}3^x$

tip

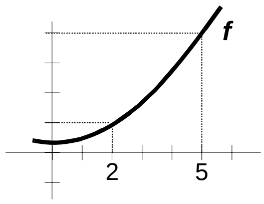
4 Druk de volgende differenties zo eenvoudig mogelijk uit in k:

$\underset{k}{\overset{k+1}{\Delta}}x^2$; $\underset{k}{\overset{k+1}{\Delta}}5x^2$; $\underset{k-1}{\overset{k}{\Delta}}x^2$; $\underset{k-1}{\overset{k}{\Delta}}(x^2-1)$; $\underset{k-1}{\overset{k+1}{\Delta}}x$; $\underset{k-1}{\overset{k+1}{\Delta}}x^3$

tip

5 **a.** Stel f is een of andere functie van x met:

$$\underset{2}{\overset{5}{\Delta}}f(x) = 3$$



Wat is de waarde van $\underset{2}{\overset{5}{\Delta}}(f(x)+7)$? En van $\underset{2}{\overset{5}{\Delta}}(4f(x))$?

b. Bij een functie wordt een constante opgeteld. Wat is het effect daarvan op de differenties van die functie ?

c. Dezelfde vraag voor het vermenigvuldigen met een constante.

rij van differenties

6 Op de GR kun je ook een tabel van differenties invoeren, zeg van $y_1(x) = x^2$.

> Op de TI-83: voer in $Y_1 = X^2$ en $Y_2 = Y_1(X+1) - Y_1(X)$.
> Dat laatste kan nog iets korter: $Y_2 = Y_1(X+1) - Y_1$.
> Hierin betekent $Y_1(X+1)$: in de formule van Y_1 wordt X vervangen door X+1.

a. De y_2 -tabel bevat de ‘rij van differenties’. Controleer of die rij klopt met wat je eerder gezien hebt.

b. Verander de x^2 in 2^x en controleer opnieuw de rij van differenties.

c. Verander 2^x in 3^x en bekijk de rij van differenties. Wat merk je op?

tip

d. Vind een de formule voor $\underset{k}{\overset{k+1}{\Delta}}3^x$ en bewijs met algebra dat die formule goed is.

e. Vervang het grondtal 3 door 5 en beantwoord de vraag **d** voor dat geval.

7 Bestudeer de differentietabel van $y = x^3$.
De regelmaat in de rij van differenties is hier iets moeilijker waar te nemen.
Toch is er een mooi patroon te ontdekken als je naar de *groei* in de rij van differenties kijkt.

a. Maak een tabel van de ’differenties van de differenties’ (ofwel: ‘differenties van de tweede orde’). Wat valt op?

b. Toon met algebra aan dat geldt: $\underset{k}{\overset{k+1}{\Delta}}x^3 = 3k^2 + 3k + 1$.

tip

c. Uit de formule van **b** kan de ontdekking bij **a** worden verklaard. Hoe**?**

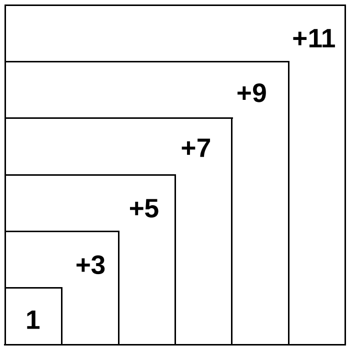
8 **a.** $\Delta_{k}^{k+1}\, x^4$ is gelijk aan een veelterm van de derde graad in k. Bereken die veelterm.

b. Hoeveel rijen van differenties heb je nodig om een regelmaat te zien als in **7a**?

tip

9 Bedenk een functie f waarvoor geldt: $\Delta_{x=k}^{k+1} f(x)$ is gelijk aan 4, onafhankelijk van k.

Bekijk nog eens het plaatje van het groeipatroon van $(t + 1)^2$, met t = 0, 1, 2, ...



Het plaatje leert niet alleen dat de differenties juist de oneven getallen zijn, maar ook dat de som van een aantal opeenvolgende oneven getallen (te beginnen met 1), gelijk is aan een kwadraat:

$1 + 3 = 2^2$
$1 + 3 + 5 = 3^2$
$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$
enz.

De oneven natuurlijke getallen kun je voorstellen als $2k + 1$ (met k = 0, 1, 2, ...).

tip

10 **a.** Hoe groot is de som van de getallen $2k + 1$ waarbij k loopt van 0 naar 9?

b. Schrijf die som met het sigma-teken.

Algemeen: $1 + 3 + 5 + ... + (2n + 1) = (n + 1)^2$

ofwel:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} (2k + 1) = (n + 1)^2}$$

11 Hoeveel termen heeft de som in het linkerlid?

12 **a.** Bereken met gebruikmaking van bovenstaande formule:

$$\sum_{k=0}^{10} (2k + 1)\ ;\ \sum_{k=1}^{20} (2k + 1)\ ;\ \sum_{k=20}^{30} (2k + 1)\,.$$

b. Controleer je resultaten met de GR.

Samenvatting

differentie

Als F een functie is van x, dan noemt men $F(b) - F(a)$ de *differentie* (of *toename*) van F op het interval $[a, b]$.
In delta notatie:

$$\underset{a}{\overset{b}{\Delta}} F(x) = F(b) - F(a)$$

rij van differenties

Bij een rij getallen $F(0), F(1), F(2), \ldots$ vormen de differenties

$$F(1) - F(0), F(2) - F(1), F(3) - F(2), \ldots$$

een rij die maatgevend is voor de groei.
We noemen dit wel de rij van differenties.

Voorbeeld 1:
Bij de rij van kwadraten wordt de rij van differenties gevormd door de oneven getallen.

0		**1**		**4**		**9**		**16**		**25**		**36**		**...**
	1		**3**		**5**		**7**		**9**		**11**		**...**	

Voorbeeld 2.
Bij de rij van machten van 3 is de rij van differenties evenredig met de oorspronkelijke rij (evenredigheidsfactor 2).

1		**3**		**9**		**27**		**81**		**243**		**729**		**...**
	2		**6**		**18**		**54**		**162**		**486**		**...**	

extra opgave

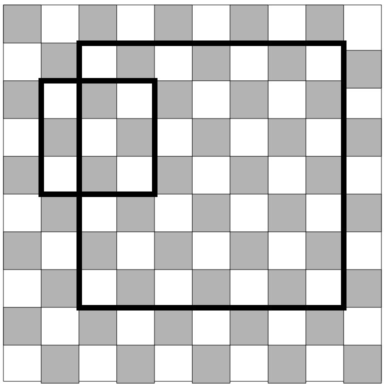
Gegeven de rij getallen $F(0), F(1), F(2), \ldots$ met $F(x) = {}^{2}\log x$.
Bekijk in een tabel deze rij getallen en de bijbehorende rij van differenties.
Het valt op dat de rij van differenties een *dalende* rij getallen is.
Anders gezegd: *het verschil tussen twee logaritmen van opvolgende natuurlijke getallen (zeg k en k+*1*) wordt kleiner naarmate k groter wordt.*

tip

Probeer deze uitspraak te bewijzen.

5 Instap: vierkanten en kubussen

Een dambord bevat 100 velden. Op zo'n bord kun je zogenaamde deelvierkanten vinden.

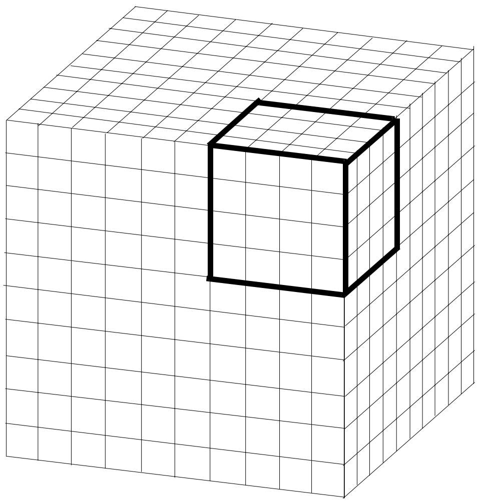


In de figuur zie je twee van zulke deelvierkanten getekend.
Een deelvierkant wordt gevormd door gehele velden.
Een veld is zelf ook een deelvierkant, evenals het dambord.

tip

1 Hoeveel deelvierkanten zijn er in totaal te vinden op het dambord?

Een variant op dit probleem heeft betrekking op kubussen.



De 1000-kubus is opgebouwd uit 1000 kubusvormige 'cellen'.
In de figuur is een deelkubus getekend. Voor de duidelijkheid is die deelkubus in een hoek getekend, maar net als bij het dambord kan zo'n deelkubus ook binnen in de kubus worden gemaakt. De enige voorwaarden is weer dat een deelkubus uitsluitend gehele cellen bevat.

2 Hoeveel deelkubussen, inclusief zichzelf en de afzonderlijke cellen, bevat de 1000-kubus?

6 Drie bijzondere sommen

In hoofdstuk 4 heb je gezien dat de som van een rij opvolgende oneven getallen, te beginnen met 1, gelijk is aan een kwadraat. In formule:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2}$$

1 Als je de som van een rij opeenvolgende oneven getallen weet, kun je ook die van een rij opeenvolgende even getallen vinden.
Je weet bijvoorbeeld: $1 + 3 + 5 + ... + 99 = 50^2 = 2500$.
a. Bereken hieruit: $2 + 4 + 6 + ... 100$.
b. Schrijf die laatste som met een sigma-teken.
c. Bereken vervolgens: $\sum_{k=1}^{50} k$.

2 **a.** Ga na dat geldt:

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = \sum_{k=0}^{n}2k + \sum_{k=0}^{n}1 = 2\sum_{k=0}^{n}k + \sum_{k=0}^{n}1$$

Die laatste som ziet er misschien een beetje gek uit; bedoeld is de som:

$$\underbrace{1+1+1+...+1}_{n+1 \text{ termen}}$$

tip **b.** Uit **a** kan de volgende somformule worden afgeleid. Leg uit hoe.

$$\sum_{k=0}^{n} k = \tfrac{1}{2}n(n+1)$$

Op deze laatste somformule gaan we nu wat nader in. Er is een mooi verhaal dat zich afspeelt in een schoolklas op het Duitse platteland, omstreeks het jaar 1785. De onderwijzer tracteerde de jongste klas op de volgende opgave: tel alle getallen van 1 tot en met 60 bij elkaar op, met het idee van ‘die zijn voorlopig zoet’. Inderdaad verstoorde slechts het gekras op de leitjes de stilte. Echter niet voor lang. De kleine Carl Friedrich leverde al na enige minuten zijn leitje met alleen het antwoord in: 1830. Het juiste resultaat! Meester wilde natuurlijk weten hoe hij dit had gevonden, want al was de kleine Karl een snelle rekenaar, het was onmogelijk dat hij het antwoord recht toe recht aan had uitgerekend in zo’n korte tijd. Hij kon het ook niet hebben afgekeken, want alle anderen waren nog aan het begin van hun ellenlange berekening. Carl wilde het wel uitleggen: het eerste en het laatste getal zijn samen 61; het tweede en het op-een-na-laatste ook; als je zo doorgaat krijg je 30 keer 61 en dat is 1830.
De onderwijzer was verbluft door zo’n helder intellect. Het verhaal gaat dat hij vanaf dit moment de jongen nauwlettend in het oog hield, hem voortdurend stimuleerde en er tenslotte voor zorgde dat de eenvoudige boerenzoon op de universiteit terecht kwam om wiskunde te studeren. Dit zou dan het begin van een schitterende wetenschappelijke carriere zijn van een groot wiskundige, Carl Friedrich Gauss.

Of dit verhaal op waarheid berust is niet zeker. Er bestaan ook verschillende versies van. Maar het geeft in ieder geval een mooie inzichtelijke methode om de som van een serie opvolgende getallen te berekenen. Omdat zich bij een oneven aantal getallen een complicatie voordoet (de middelste term blijft in zijn eentje over), wijzigen we de methode enigszins. Bijvoorbeeld:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots & + & 60 & + & 61 & \\
61 & + & 60 & + & 59 & + & \ldots & + & 2 & + & 1 & \\
\hline
\multicolumn{11}{c}{\underbrace{62 + 62 + 62 + \ldots + 62 + 62}_{\text{61 keer}}} & +
\end{array}
$$

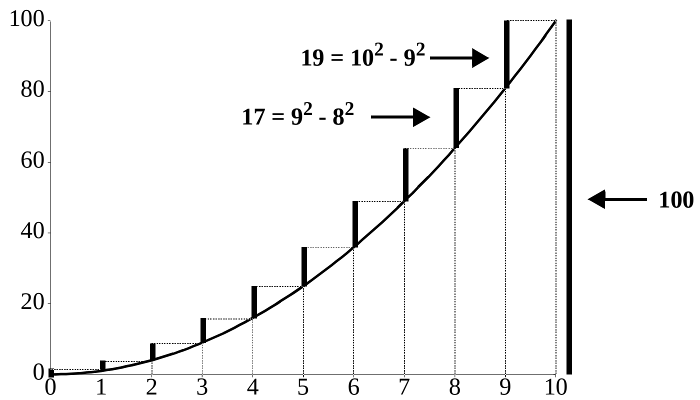
Hieruit volgt dan:

$$\sum_{k=1}^{61} k = \tfrac{1}{2} \cdot 61 \cdot 62 = 1891$$

3 Een variant op het verhaal is dat Gauss de getallen 1 tot en met 100 op moest tellen. Welke uitkomst geeft dat?

4 Ook wordt verteld dat Gauss de formule $\frac{1}{2}n(n+1)$ in een flits doorzag en deze toepaste (in deze versie zou hij dan 10 jaar geweest zijn). Bewijs de algemene formule volgens de methode die hierboven is geschetst.

De regel aan het begin van dit hoofdstuk laat zich ook illustreren met grafieken.
Neem het tekenvenster [0 , 10] bij [0 , 100] en bekijk de grafiek van $y = x^2$.



De differenties (dus 1, 3, 5, ..., 19) worden voorgesteld door dikke verticale lijnstukken. De som van al die lijnstukken is precies gelijk aan het hoogteverschil tussen beginpunt en eindpunt van de grafiek! Zo wordt dan : 1 + 3 + 5 + ... + 19 = 100 geïllustreerd.
In dit geval is er een interessant verband tussen differenties en sommen:

differentie van twee opvolgende **kwadraten** is een **oneven** getal	**som** van een aantal opvolgende **oneven** getallen (vanaf 1) is een **kwadraat**
$\underset{n=k}{\overset{k+1}{\mathrm{D}}}\, n^2 = 2k + 1$	$\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) = n^2$

Dat er altijd zo'n verband is, volgt aldus. Laat S een of andere functie van x zijn, en stel:

$$\underset{k}{\overset{k+1}{\Delta}} S(x) = V(k)$$

voor $k = 0, 1, 2, ...$
Dat betekent: $S(1) - S(0) = V(0)$, $S(2) - S(1) = V(1)$, $S(3) - S(2) = V(2)$, enz.
Al deze differenties onder elkaar gezet en opgeteld levert:

$$\begin{array}{rcll}
S(1) & - & S(0) & = V(0) \\
S(2) & - & S(1) & = V(1) \\
S(3) & - & S(2) & = V(2) \\
 & & \vdots & \\
S(n) & - & S(n-1) & = V(n-1) \\
\hline
S(n) & - & S(0) & = \sum_{k=0}^{n-1} V(k)
\end{array} \quad +$$

Hetgeen geïllustreerd kan worden met een plaatje zoals op de vorige bladzij.

5 Schets een grafiek van een fantasie-functie S op het domein [0 , 10] en geef aan waar de hierboven beschreven vormen zichtbaar zijn in het plaatje.

De conclusie uit het voorgaande:

Als	$V(k) = \underset{k}{\overset{k+1}{\Delta}} S(x)$,
Dan	$\sum_{k=0}^{n-1} V(k) = S(n) - S(0)$

6 Bekijk de grafiek van de functie $S(x) = 3^x$ op het interval [0 , 10].
Verklaar uit het bovenstaande principe:

$$\sum_{k=0}^{9} 2\ 3^k = 3^{10} - 1$$

Komt dit resultaat je bekend voor?

7 Bekijk de functie $S(x) = x^3$ op het interval $[0 , n]$.
Verklaar nu uit het resultaat van opgave **7b** van hoofdstuk 4 dat geldt:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (3k^2 + 3k + 1) = n^3$$

In het onderzoek van hoofdstuk 5 heb je (hopelijk) een som van opvolgende kwadraten en van opvolgende derde-machten berekend. Je gaat nu formules ontwikkelen voor zulke sommen, dus voor $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$ en $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$.

In de vorige twee opgaven heb je gezien hoe je een somformule kunt afleiden uit een differentie-formule.
Bij opgave **4** is het dan nog een klein stap om de formule voor $\sum_{k=0}^{n} 3^k$ te herontdekken (een kwestie van links en rechts delen door 2).

Opgave **7** geeft de mogelijkheid om een formule te vinden voor $\sum_{k=0}^{n} k^2$.

Dat geeft wel wat meer algebraïsch rekenwerk.

8 **a.** Verklaar dat uit **7** volgt:

$$\sum_{k=0}^{n} (3k^2 + 3k + 1) = (n+1)^3$$

b. Verklaar nu ook:

$$3\sum_{k=0}^{n} k^2 + 3\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 = (n+1)^3$$

tip

c. Omdat $\sum_{k=0}^{n} k$ en $\sum_{k=0}^{n} 1$ bekend zijn, kun je nu $\sum_{k=0}^{n} k^2$ hieruit berekenen.
Voer die berekening uit en bewijs dat het resultaat gelijk is aan:

$$\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

d. Test die formule voor $n = 10$ (de oplossing van het dambord probleem).

9 Nu de formule voor $\sum_{k=0}^{n} k^3$.

Omdat de som van kwadraten gevonden werd via een differentie van een derde macht, zou je kunnen vermoeden dat je hier de differentie van een een vierde macht nodig hebt. Inderdaad zal dit een goed plan blijken. In hoofdstuk 4 (opgave **7**) heb je gezien dat $\underset{k}{\overset{k+1}{\mathrm{D}}}\, x^4$ uitgedrukt in k een derde-graadsveelterm, zeg $V(k)$, oplevert.

a. Geef de formule voor $\sum_{k=0}^{n} V(k)$.

tip

b. Ga nu op een soortgelijke manier te werk als in opgave **8** en bewijs:

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

c. Test de formule voor $n = 10$ (het probleem van de deelkubussen in hoofdstuk 5).

recursie

Met het vinden van formules voor sommen van opvolgende eerste-, tweede-, derde-, enz. machten zijn wiskundigen vroeger intensief bezig geweest. In opgave **9** heb je gezien hoe je voor de som van de derde-machten de sommen kunt vinden als je de sommen voor de lagere machten weet. Een dergelijk proces noemt men *recursie*.

Recursie betekent letterlijk ‘’terugloop”: je moet als het ware teruglopen naar de vorige resultaten om een nieuw resultaat te vinden. Zo kun je de somformule van de vierdemachten uitrekenen als je de somformules kent voor de eerste-, tweede- en derde machten.
Er zijn in de loop der eeuwen verschillende *recursieve* methodes bedacht voor zulke sommen van machten. Hieronder zie je het resultaat van de Zwitserse wiskundige Jakob Bernoulli (1654-1705) die het probleem algemeen oploste.

10 Het is een beetje moeilijk lezen maar met wat puzzelen kom je wel een eind.
Bernoulli gebruikte geen sigma teken maar de letter S zoals die toen vaak werd geschreven: $\int$.
(Tegenwoordig wordt dit teken gebruikt in de integraalrekening, zie hoofdstuk 14).
Voor bijv. $\sum_{k=0}^{n} k^3$ schreef Bernoulli $\int n^3$. Let ook op het merkwaardige = teken.

a. Controleer of de eerste drie formules kloppen met wat je in dit hoofdstuk hebt ontdekt.
b. Wat zouden de sterretjes in de formules kunnen betekenen?
c. Wat valt je allemaal op als je de tien formules vergelijkt?
d. De tekst daaronder is moeilijk te lezen als je geen Latijn kent (en anders misschien ook wel). Wiskundige formules daarentegen zijn altijd leesbaar (voor ons zelfs in Chinese boeken). Wat stelt de grote formule (meer dan twee regels) hier voor?

Samenvatting

Van D naar S

Het verband tussen D en S wordt gegeven door:

$$\text{Als} \quad V(k) = \mathop{\mathrm{D}}_{k}^{k+1} S(x)\,,$$

$$\text{Dan} \quad \sum_{k=0}^{n-1} V(k) = S(n) - S(0)$$

Formules voor ‘sommen’ zijn lastiger te vinden dan formules voor ‘differenties’. Dat laatste is een kwestie van invullen en vereenvoudigen. Uit differentie-formules kunnen dan ‘moeilijke’ somformules worden gevonden. Drie bijzondere formules zijn:

somformule van Gauss

$$\sum_{k=0}^{n} k = \tfrac{1}{2}n(n+1)$$

som van kwadraten

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

som van derde machten

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

extra opgave

1	=	**1**
3 + 5	=	**8**
7 + 9 + 11	=	**27**
13 + 15 + 17 + 19	=	**64**

tip **a.** Welke regelmatigheden ontdek je in dit patroon?

tip **b.** Beschrijf die in een wiskundige wet.

c. Bewijs die wet.

7 Zelftoets

1 Bereken:

$$\sum_{k=4}^{14} 5^k \qquad \text{en} \qquad \sum_{k=4}^{14} (2^k + 3^k)$$

2 Bereken:

$$\underset{2}{\overset{7}{\mathrm{D}}} (x+3)^2 \qquad \text{en} \qquad \underset{2}{\overset{7}{\mathrm{D}}} (x^2+9)$$

3 Toon aan dat geldt:

$$\sum_{k=0}^{800} (800 - k) = \sum_{k=0}^{800} k$$

4 Van vier rijen getallen is het beginstuk gegeven:

1, 4, 7, 10, ...
3, 6, 12, 24, ...
4, 4, 4, 4, ...
3, 4, 7, 12, ...

De differenties bij elk van die rijen vertonen een regelmatig patroon. Neem aan dat dit patroon zich voortzet.

a. Schrijf bij elke rij het vijfde en het zesde getal op.
b. Schrijf bij elke rij de som van de eerste vijf-en-twintig getallen op met behulp van het sigma-teken.
c. Bereken de uitkomsten van die sommen.

5 Gegeven: $F(x) = \frac{1}{2}x(x+1)$

Bereken de differentie van F op het interval $[k - 1, k]$

6 Van een functie f is bekend: $\sum_{k=10}^{15} f(k) = 25$

Bereken: $\sum_{k=10}^{15} (4 + f(k))$ en ook $\sum_{k=10}^{15} (4 \quad f(k))$

7 Bereken:

$$\sum_{k=16}^{99} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)$$

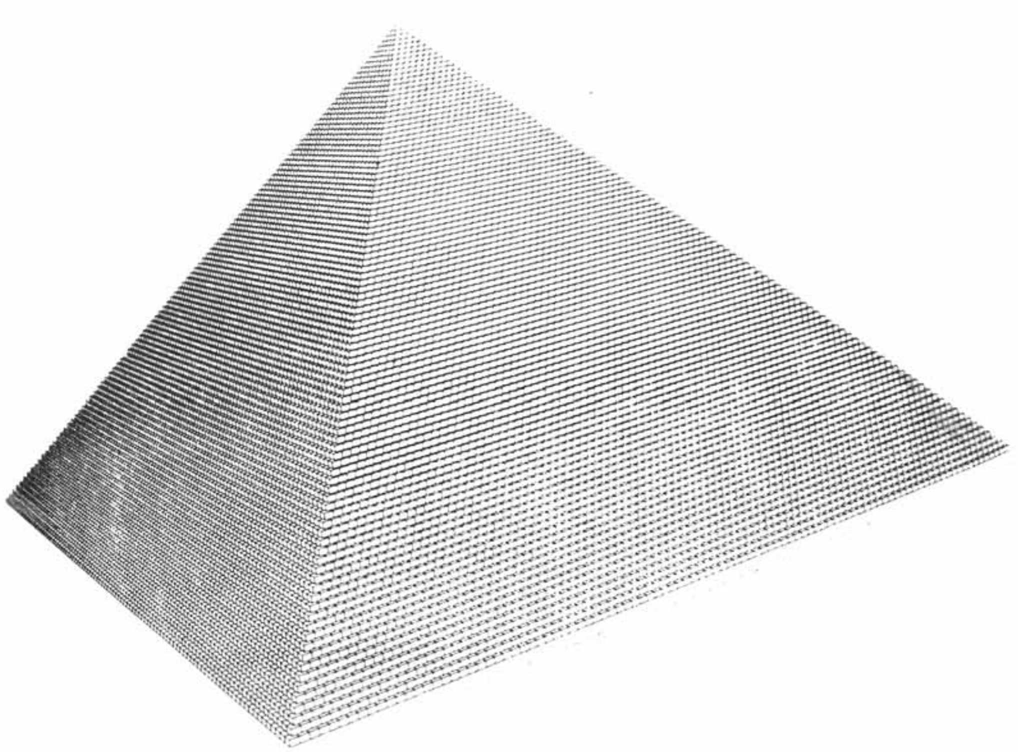
8 Uit de formules van hoofdstuk 6 kan de volgende verrassende formule worden afgeleid:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$$

Verklaar dit.

8 Instap: de inhoud van een piramide

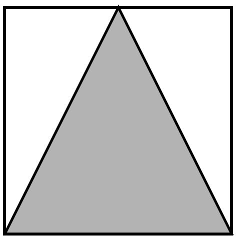
The Straight Pyramid. Agnes Denes 1974.

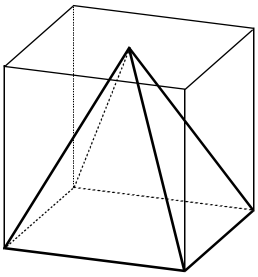


tip

1 Tekening van een vierzijdige piramide door een geduldige kunstenares. Nauwkeurig tellen leert dat er 100 kubusvormige bouwsteentjes langs elk van de de zijden van het grondvlak liggen en dat de piramide uit 100 lagen bestaat Stel dat elk bouwsteentjes 1 cm^3 is.
Bereken de precieze inhoud (in m^3) van de blokjespiramide?

2 In een vierkant kun je een driehoek tekenen door het midden van een zijde als top te nemen en de overstaande zijde als basis. Iets dergelijks kun je met een kubus doen en dat levert dan een piramide op.

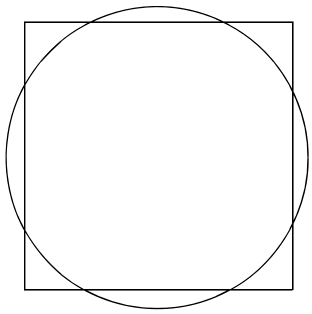




In het eerste geval is de oppervlakte van de driehoek natuurlijk precies gelijk aan de *helft* van het vierkant. Hoe zit dat met de inhouden van piramide en kubus?

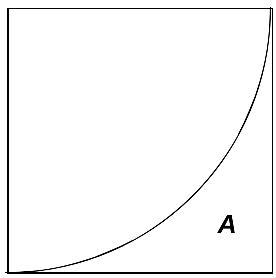
9 Kwadratuur

Misschien heb je wel eens gehoord van de uitdrukking ‘de kwadratuur van de cirkel’. In het woordenboek staat dat deze uitdrukking, figuurlijk gezien, betekent: ‘iets onmogelijks’, ‘iets onuitvoerbaars’.
In de letterlijke opvatting wordt er mee aangeduid het vraagstuk om een vierkant (‘kwadraat’) te *construeren met passer en liniaal*, waarvan de oppervlakte precies gelijk is aan de oppervlakte van een gegeven cirkel.



tip **1** Veronderstel dat de gegeven cirkel een diameter van 10 cm heeft. Hoe groot moeten de zijden van het vierkant zijn, willen cirkel en vierkant precies dezelfde oppervlakte hebben?

tip **2** Gegeven een vierkant met daarin een kwart cirkelboog.



Ga na dat de oppervlakte van het vlakdeel A ongeveer 21.5% van het vierkant beslaat.

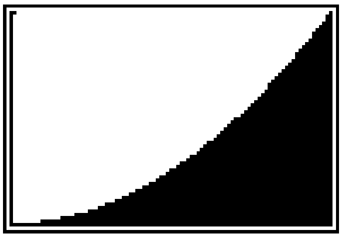
In 1882 is door Lindemann bewezen dat het onmogelijk is om met passer en liniaal een vierkant te construeren waarvan de oppervlakte gelijk is aan die van een gegeven cirkel.*
Dat de kwadratuur van de cirkel niet lukt, wil niet zeggen dat er geen vlakdelen zijn, begrensd door een of meer kromme lijnen, waarbij het wél gaat.
Als je bijvoorbeeld in bovenstaande figuur de cirkelboog vervangt door een stuk van een parabool, dan lukt de kwadratuur wèl. Archimedes, die wordt beschouwd als één van de grootste geleerden uit de Oudheid, en die vermoedelijk leefde van 287 tot 212 voor Chr., vond dit al uit! We gaan hier nu wat nader in op de ‘kwadratuur van de parabool’ waarbij we niet precies Archimedes’ vernuftige methode behandelen. De hier gebruikte aanpak is wel ‘archimedisch’ van karakter en is in feite door hem bij een andere kromme dan de parabool toegepast.

*Het getal p is weliswaar tot in elke gewenste nauwkeurigheid te benaderen, maar een lijnstuk van precies p cm kan niet meetkundig worden geconstrueerd.

tip

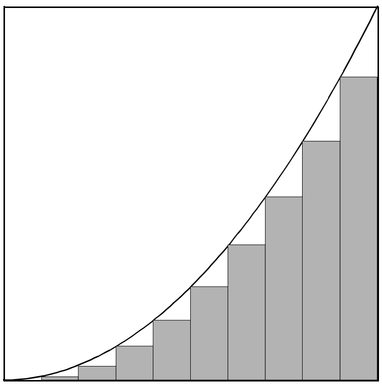
3 Maak met venster [0 , 1] bij [0 , 1] op de GR de grafiek van $y = x^2$.
Dit stuk parabool verdeelt het vierkant van 1 bij 1 (op het scherm opgerekt tot een rechthoek) in twee delen, waarvan we het onderste deel A noemen, net als in de figuur bij opgave **2** .

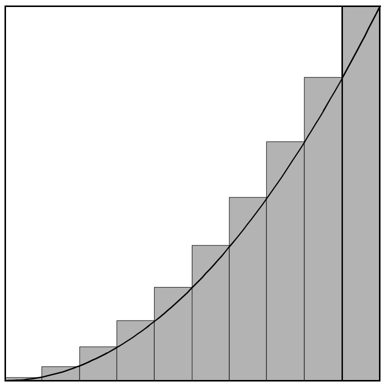
Gebied A kan nu op de TI-82 als volgt worden gearceerd. In DRAW kies je Shade en je maakt op het scherm de uitdrukking Shade(0 , Y_1).
Na ENTER komt er dan dit plaatje:



Om erachter te komen hoe groot ongeveer die oppervlakte is in verhouding tot de oppervlakte van de gehele rechthoek, zou je natuurlijk de 'pixels' kunnen tellen, maar ja ....Zonder dit heidens karweitje uit te voeren kun je toch wel iets zeggen van het percentage van het vierkant dat gearceerd is. Het is bijvoorbeeld duidelijk minder dan 50%. En als je Zsquare toepast, en je vergelijkt met het plaatje bij opgave **2**, dan lijkt het er op dat de oppervlakte meer moet zijn dan 21.5% van het vierkant.
Als je het leuk vindt, kun je proberen die kwartcirkel er bij te tekenen op het scherm van de GR.

De weg die we nu zullen bewandelen om een idee te krijgen hoe groot de in opgave **3** bedoelde verhouding is, lijkt wel een beetje op pixels tellen. In plaats van de pixel-vierkantjes gebruiken we smalle rechthoekige stroken en in plaats van tellen gaan we rekenen. Daarbij gebruiken we twee soorten stroken. De stroken van de eerste soort passen precies onder de parabool ('onderstroken'), terwijl de tweede er steeds met een puntje bovenuit steken ('bovenstroken'). In de volgende figuur kan je zien wat daarmee bedoeld wordt. De stroken hebben alle een breedte van 0.1.





ondersom en bovensom

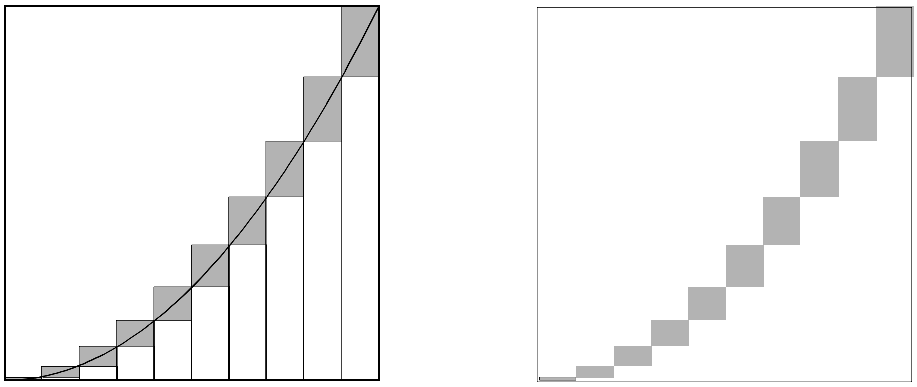
Het is duidelijk dat de oppervlakte van het gebied A groter is dan de gezamenlijke oppervlakte van de onderstroken en kleiner dan die van de bovenstroken.
Die beide oppervlakten, *ondersom* en *bovensom* genoemd, klemmen de oppervlakte van het gebied A als het ware in.

tip

4 **a.** Gebruik de ondersom en de bovensom van de tekening en reken na dat A meer dan 28.5% en minder dan 38.5% van het vierkant beslaat.
b. Hoe kun je nu een verstandige schatting geven voor de oppervlakte van A?

5 Om een meer betrouwbare schatting te maken, moeten de stroken smaller worden gemaakt, laten we zeggen met een breedte van 0.01.
Je hoeft het nu niet uit te rekenen, maar als je dat nauwkeurig zou doen, zou je een ondersom van 0.32835 en een bovensom van 0.33835 vinden.
Welke schatting kun je hieruit maken voor de oppervlakte van A?

De oppervlakte van A verschilt blijkbaar niet veel van een *derde* deel van het vierkant. Daar komen we straks op terug. Eerst letten we op het verschil tussen onder- en bovensom. In opgave **4** is dat verschil gelijk aan 0.1 (10%) en in opgave **5** is dat 0.01.
Het lijkt er op dat die verschillen kleiner worden naarmate de stroken smaller zijn! In de figuur hieronder is het verschil tussen onder- en bovensom zichtbaar gemaakt.



tip

6 Leg aan de hand van de figuur uit waarom bij een verdeling in smallere stroken het verschil tussen onder- en bovensom kleiner wordt.

Om nog een betere benadering te krijgen moeten dus nog smallere stroken genomen worden, bijvoorbeeld met breedte 0.001. Het zal dan blijken dat het gemiddelde van onder- en bovensom nog dichter bij $\frac{1}{3}$ zit dan in **5**.
Je raadt het al: *de oppervlakte van A is precies gelijk aan het derde deel van het vierkant*. Als we dat zeker weten, is daarmee de kwadratuur van het gebied A gevonden. Want een vierkant met oppervlakte $\frac{1}{3}$ is met passer en lineaal te vinden. Archimedes was hiervan ook op de hoogte en zijn bewijs was voor die tijd buitengwoon modern; in feite gebruikte hij methoden die pas in de 17^{e} eeuw (dus zo'n 1900 jaar later!) tot gemeengoed van de wiskundigen zouden gaan behoren.
Om te snappen dat de oppervlakte van A exact gelijk is aan $\frac{1}{3}$, bekijken we de berekening van onder- en bovensom bij 100 stroken. Bekijk onderstaande tabel.

strook met nummer	*onderstrook*	*bovenstrook*
1	$0.01 \cdot 0^2$	$0.01 \cdot 0.01^2$
2	$0.01 \cdot 0.01^2$	$0.01 \cdot 0.02^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
99	$0.01 \cdot 0.98^2$	$0.01 \cdot 0.99^2$
100	$0.01 \cdot 0.99^2$	$0.01 \cdot 1^2$

De bovensom is dus gelijk aan:

$$0.01 \cdot (0.01^2 + 0.02^2 + ... + 0.99^2 + 1^2)$$

Mooier is:

$$0.01^3 \cdot (1^2 + 2^2 + ... + 99^2 + 100^2)$$

Toepassing van de formule van hoofdstuk 6 geeft:

$$0{,}01^3 \cdot \tfrac{1}{6} \cdot 100 \cdot 101 \cdot 201$$

Dit produkt is gelijk aan:

$$\tfrac{1}{6} \cdot 1{,}01 \cdot 2{,}01$$

De laatste stap zou je een ‘luie manier van rekenen’ kunnen noemen.
Op dezelfde luie manier vind je voor de ondersom:

$$\tfrac{1}{6} \cdot 0{,}99 \cdot 1{,}99$$

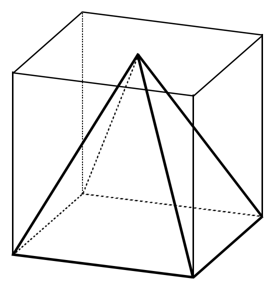
Zodat je weet:

$$\tfrac{1}{6} \cdot 0{,}99 \cdot 1{,}99 < \text{opp. }(A) < \tfrac{1}{6} \cdot 1{,}01 \cdot 2{,}01$$

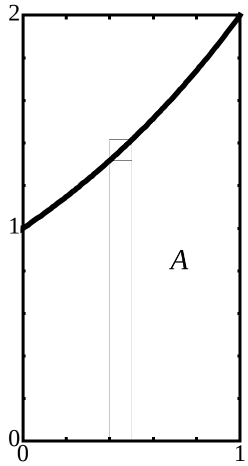
7 Het voordeel van deze manier van opschrijven is dat je makkelijker kunt zien hoe de ‘inklemming’ van opp. (A) wordt bij 1000 stroken (elk met breedte 0.001).
a. Schrijf die ongelijkheid op.
b. Zo kun je natuurlijk doorgaan: 10000 stroken, 100000 stroken, enz.
Hoe kun je nu begrijpen dat opp. (A) precies gelijk is aan $\frac{1}{3}$?

8 Maak met venster [0 , 1] bij [0 , 1] op de GR de grafiek van $y = x^3$.
De grafiek verdeelt het ‘vierkant’ van 1 bij 1 in twee delen. Het onderste deel noem je weer A. De vraag is weer: *wat is de exacte waarde van de oppervlakte van A?*
Beantwoord deze vraag met de ‘inklem-methode’. Daarbij heb je weer een formule nodig uit hoofdstuk 6. Het lijkt een hoop werk... , maar de luie manier biedt uitkomst.

9 Bekijk nog eens de tweede vraag over de piramide (hoofdstuk 7).
Hierbij kun je onder- en bovensommen maken die de vorm hebben van een trap-piramide (zoals de tekening van Agnes Denes).
Hoe kun je bewijzen dat de inhoud van de piramide exact gelijk is aan $\frac{1}{3} \cdot$ de inhoud van de kubus?



10 Tenslotte nog een oppervlakteberekening. In de figuur zie je de grafiek van $y = 2^x$ op het gebied [0 , 1] bij [0 , 2] Het deel van de rechthoek dat onder de grafiek ligt, noemen we weer A.



a. In de figuur is een onderstrook en bovenstrook getekend tussen $x = 0.4$ en $x = 0.5$. Bereken de oppervlakte van beide stroken.

b. Toon aan:

$$0{,}1 \sum_{k=0}^{9} 2^{0{,}1k} < \text{opp.}\ (A) < 0{,}1 \sum_{k=1}^{10} 2^{0{,}1k}$$

tip

c. Toon aan dat de ondersom gelijk is aan:

$$\frac{0{,}1}{2^{0{,}1} - 1}$$

d. Geef een soortgelijke uitdrukking voor de bovensom.

e. Wat verandert er in de uitdrukkingen als je de stroken 0.01 breed neemt? Bekijk onderstaande tabel en controleer in elke kolom één uitkomst:

aantal stroken	*onderstrook*	*bovenstrook*
10	1.393272617	1.493272617
100	1.437700817	1.447700817
1000	1.442195099	1.443195099
10000	1.442645041	1.442745041
100000	1.442690047	1.442700047
1000000	1.442694584	1.442695584

f. In hoeveel decimalen (achter de punt) ken je nu de oppervlakte van A?

Opmerking:
In dit geval is de oppervlakte van A niet gelijk aan een mooie breuk, zoals dat wèl het geval was bij $y = x^2$ en $y = x^3$.

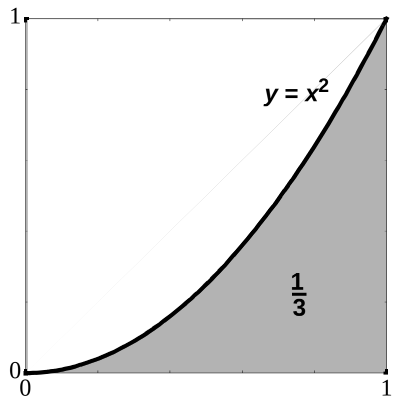
Met een computer zijn driehonderd decimalen van de uitkomst berekend:

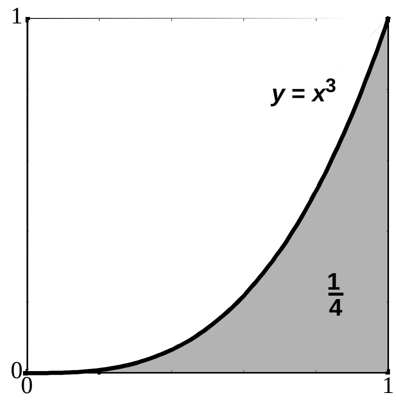
1.442695040888963407359924681001892137426645954152985934135449406931109219
181118507988552662289350634449699751830965254425559310168716835964272066215
8223479336274537369884718493630701387663532015533894318916664837643128615
4240474784222894979047950915303513385880549688658930969963680361105110756
3084414.

Dit is het begin van een *oneindige* decimale ontwikkeling. In deze ontwikkeling treedt geen ‘repetitie’ op zoals bij: 5/3 = 1.66666666.... of bij 4/33 = 0.12121212... Men spreekt van een *niet-repeterende oneindige decimale breuk*.

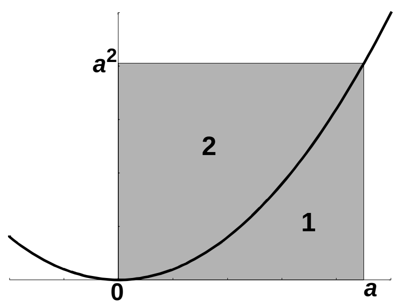
Samenvatting

De oppervlakte van een gebied onder een (stijgende) grafiek kan worden ingeklemd tussen paren van *ondersommen* en *bovensommen*. Je kunt de oppervlakte dichter (en zelfs willekeurig dicht) benaderen door de stroken smaller te maken. .
In sommige gevallen (bij $y = x^2$ en bij $y = x^3$) kun je aan de hand van de ontwikkeling van de uitkomsten van onder- en bovensommen, beredeneren hoe groot de exacte oppervlakte moet zijn.





Extra opgave Je hebt gezien dat de parabool $y = x^2$ het vierkant met hoekpunten (0 , 0), (1 , 0) , (1 , 1) en (0 , 1) in stukken verdeelt die zich verhouden als 1 : 2.
Onderzoek of, meer algemeen, geldt:
de parabool $y = x^2$ verdeelt de rechthoek begrensd door de lijnen $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ en $y = a^2$ in stukken met verhouding 1 : 2.

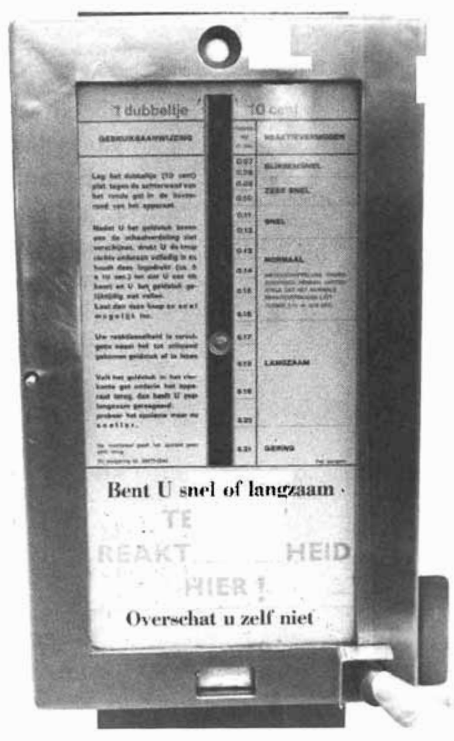


10 Instap: reactieautomaat

In het winkelcentrum Vredenburg (Utrecht) hingen (en misschien hangen ze er nog) automaten, waarmee je je reactiesnelheid kunt meten. De bedoeling is dat je een dubbeltje bovenaan in het ronde gat plaatst. Vervolgens moet je de knop rechts onderaan volledig ingedrukt houden totdat je een tik hoort en je het geldstuk ziet vallen. Je moet dan de knop zo snel mogelijk loslaten, waardoor het dubbeltje stopt met vallen. Je leest je reactiesnelheid af naast het tot stilstand gekomen dubbeltje.

1 **a.** Bekijk de kolom met de reactietijden. Vreemde schaalverdeling, of toch niet?

b. De fabrikant van de automaat verandert het toestel zó dat alleen een kwartje past. Moet hij de schaalverdeling veranderen?



Reaktie-tijd in sec.	REAKTIE-VERMOGEN
0.07	BLIKSEMSNEL
0.08	
0.09	ZEER SNEL
0.10	
0.11	SNEL
0.12	
0.13	NORMAAL wetenschappelijke onderzoekingen hebben vastgesteld dat het normale reaktievermogen ligt tussen 0,12 en 0,18 sec.
0.14	
0.15	
0.16	
0.17	LANGZAAM
0.18	
0.19	
0.20	
0.21	GERING

11 Van snelheid naar afstand: vallen en opstaan

Er bestaat een grap over een motorrijder die in plaats van een helm een wollen muts draagt. Hij wordt aangehouden door de politie en om uitleg gevraagd. Zijn verweer is dat er wetenschappelijk onderzoek is gedaan naar de veiligheid van motorhelmen, maar dat daaruit gebleken is dat de wollen muts toch het sterkst is. Op de vraag naar de aard van het onderzoek is het antwoord: men heeft enige helmen en een muts meegenomen naar het dak van een torenflat en vanaf daar naar beneden laten vallen...

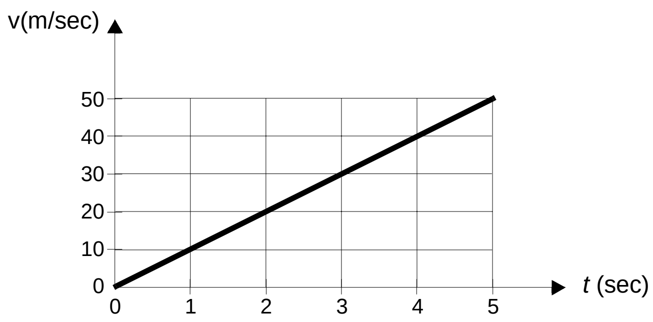
Als men de helmen van de eerste verdieping had laten vallen, hadden ze het waarschijnlijk redelijk overleefd. De snelheid waarmee ze de grond treffen is namelijk afhankelijk van de valhoogte (en dus ook van de valtijd). Daar kijkt niemand van op. Het is de wet van de 'vrije val', veroorzaakt door de aantrekkingskracht van de aarde. De remming door luchtweerstand is bij vallende helmen niet al te groot. Voor een wollen muts ligt dat natuurlijk anders.
Over vallende lichamen hebben verschillende theorieën bestaan. Volgens Aristoteles, om maar eens een beroemdheid te noemen, zouden zwaardere lichamen sneller moeten vallen dan lichtere.
De Italiaanse geleerde Galileï ontkrachtte vele eeuwen later deze stelling met het volgende gedachtenexperiment:

> Veronderstel dat twee lichamen L_1 en L_2 tegelijkertijd vanuit een ruststand beginnen aan een vrije val (zonder enige remming) en dat zij na bijvoorbeeld 1 seconde respectievelijk de snelheid v_1 en v_2 m/sec hebben. Als L_1 zwaarder is dan L_2 dan zou volgens Aristoteles v_1 groter moeten zijn dan v_2. Maar wat zal er gebeuren als beide lichamen aan elkaar worden vastgemaakt? Laat v^* de valsnelheid zijn na 1 seconde van dit nieuwe lichaam L^*. Omdat L_2 in zijn eentje langzamer valt dan L_1 , zal het L_2 -deel een zekere vertragende werking moeten hebben op het L_1-deel. Dus v^* zal kleiner zijn dan v_1. Maar omdat L^* zwaarder is dan L_1, moet v^* volgens de hypothese juist groter zijn dan v_1. Dit is met elkaar in tegenspraak, dus Aristoteles heeft ongelijk.

Aldus Galileï, die niet alleen kritisch was, maar ook creatief en die er zelf in slaagde een goed wiskundig model voor de vrije val te ontwikkelen. Zijn hypothese was dat de snelheid *v* van een ongeremd vallend object evenredig is met de valtijd *t*.
In formule:

$$v = constante \cdot t$$

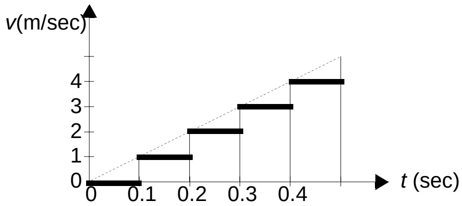
De grootte van de constante (meestal aangeduid als *g*) hangt slechts af van de gekozen eenheden voor *v* en *t*, niet van de massa van het vallend object.
Als we *t* in seconden meten en *v* in meters per seconden is een grove benadering voor *g* gelijk aan 10; wat minder grof is 9.8.
Met *g* = 10 ziet de grafiek van de valsnelheid als functie van de valtijd er dan zo uit:

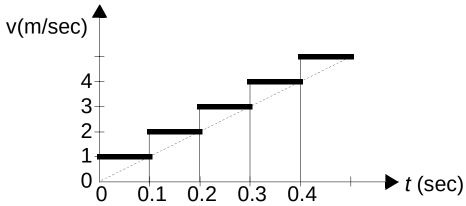


Galileï zocht naar een formule waarmee de *valweg* (= afgelegde afstand) uitgedrukt wordt in de valtijd. Daartoe verdeelde hij de valtijd in kleine tijdsintervallen, bijvoorbeeld van 0.1 sec.
Het begin van zijn redenering luidde ongeveer zó:

ik doe net of de snelheid in elk tijdsintervalletje *constant* is;
in de eerste 0.1 sec is de snelheid praktisch 0 , van t = 0.1 sec tot t = 0.2 sec neem ik de snelheid gelijk aan 1 m/sec (= 10 · 0.1) , van t = 0.1 sec tot t = 0.2 sec neem ik de snelheid gelijk aan 2 m/sec (= 10 · 0.2) enz.; tenslotte: van t = 4.9 sec tot t = 5 sec beschouw ik de snelheid als opgelopen tot 49 m/sec.

Zo ontstaat er een soort trapmodel van de veranderende snelheid; in de linker figuur (sterk uitvergroot ten opzichte van de grafiek op bladzij 37) zie je een begin van die trap.





tip

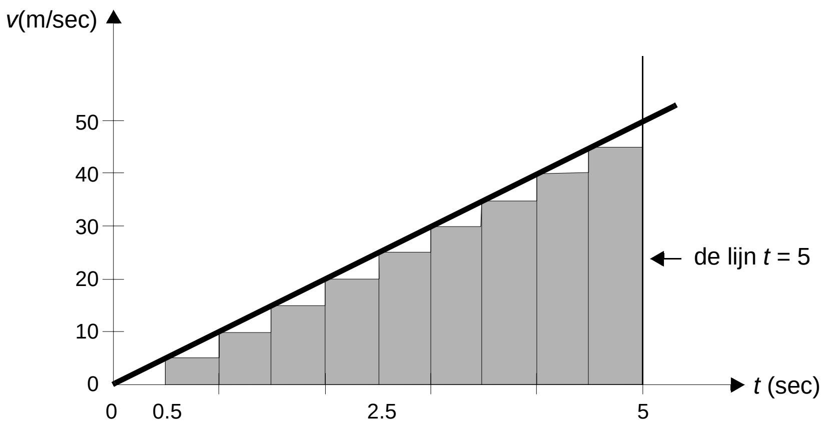
1 Met dit model kun je een (onder-)schatting maken van de valweg na 5 seconden.
In het eerste intervalletje is die weg nog 0 m, in het tweede intervalletje wordt 0.1 m afgelegd, in het derde intervalletje 0.2 m, enz. Steeds vermenigvuldig je de lengte van het interval met de snelheid. Zo komt er als totale afstand (in m) een som van 50 termen: 0 + 0.1 + 0.2 + 0.3 + ... + 4.9. Bereken deze som.

2 Evenzo kun je een (boven-)schatting maken, waarbij de rechtergrafiek hoort:

a. Bereken de totale afgelegde valweg voor het geval deze trapgrafiek de snelheid voorstelt.

b. Een betere benadering voor de valweg krijg je als je het tijdsinterval [0 , 5] verdeelt in tijdsintervalletjes van 0.01 sec. Bereken de ‘onderschatting’ en ‘bovenschatting’ voor deze verdeling.

3 Kijk met een meetkundig oog naar de grafieken. De schattingen van de opgaven **1** en **2** kun je opvatten als benaderende waarden voor de oppervlakte van het driehoekige gebied dat begrensd wordt door de schuine grafiek, de t-as en de verticale lijn t = 5.
Verklaar dit. Hoe groot is de oppervlakte van dat gebied precies?



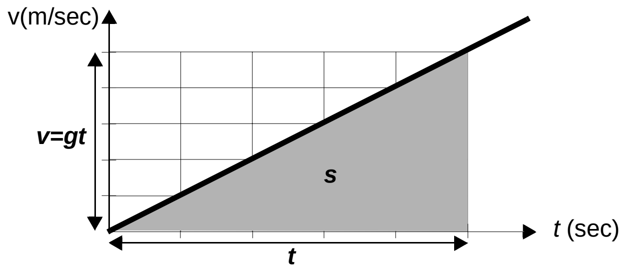
Galileï kwam zo op het idee dat de oppervlakte van het gebied ‘onder de snelheidsgrafiek’ precies gelijk is aan de valweg. Noemen we de valweg t, dan komt er een mooie en bekende formule:

$$s = 5t^2$$

Of wat algemener:

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

In overeenstemming met deze figuur:



$$s = \frac{1}{2}t \cdot gt = \frac{1}{2}gt^2$$

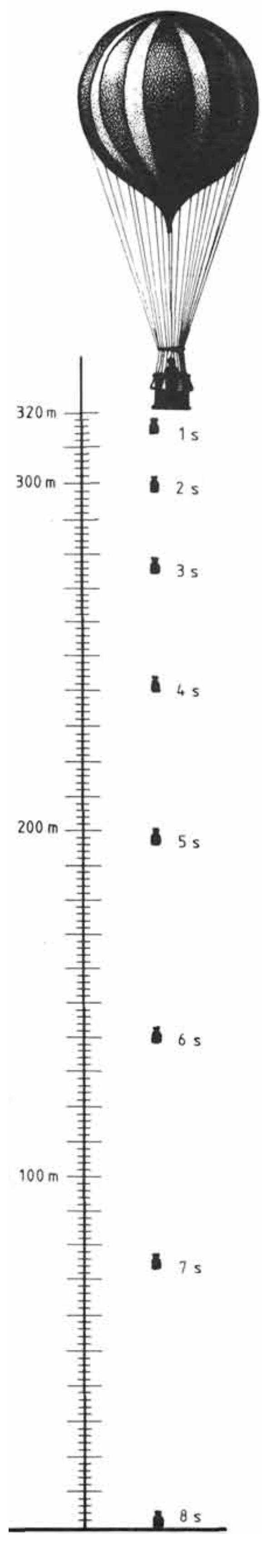
4 Bekijk het plaatje hiernaast. Uit een ballon op 320 m hoogte wordt een zandzakje geworpen. In de figuur kun je zien waar dit zakje is na 1, 2, ..., 8 sec.

a. Controleer of de tekening in overeenstemming is met de formule van Galileï.

b. Wat is de snelheid bij het neerkomen in km/uur?

c. Wat is de snelheid (in km/uur) halverwege, dus op een hoogte van 160 m?

d. Precies 1 sec na het loslaten van het eerste zakje laat men een tweede zakje vallen. De onderlinge afstand van de twee zakjes wordt tot het moment van neerkomen steeds groter.
Geef een formule voor het hoogteverschil uitgedrukt in t (voor 1 £ t £ 8)?



5 Je kunt dit valproces ook naspelen op de GR.

> Ga naar het menu MODE en zet de cursor in de vierde regel op Par.
> Druk op ENTER. Ga nu kijken bij Y=. Je ziet dan de variabelen X_{1T}, Y_{1T}, X_{2T}, Y_{2T}, enz.
>
> Vul nu in: X_{1T} = 1 en Y_{1T} = 320 - 5T^2. Dit betekent dat een punt een spoor maakt op het scherm waarbij de *x*-coördinaat op elk moment gelijk is aan 1, terwijl de *y*-coördinaat verandert volgens de gegeven formule.
> Kijk nu onder WINDOW.
> Maak Tmin = 0, Tmax = 8, Tstep = .05, Xmin = 0, Xmax = 5, Ymin = 0 en Ymax = 320.
> Druk tenslotte op GRAPH.
> En je ziet de vrije val... op het scherm!
> De formule voor Y_{1T} zorgt er voor dat aan de valwet wordt gehoorzaamd.

Verklaar dat laatste.

tip

6 Nu twee zandzakjes van verschillende hoogte.

> Toets verder in: X_{2T} = 2 en Y_{2T} = 245 - 5(T-1)^2.
> Ga naar MODE en maak op regel 6 Simul (= simultaan).
> Nu GRAPH. Je ziet twee vallende 'zakjes' die gelijk neerkomen.

Verklaar dit uit de formules voor Y_{1T} en Y_{2T}.

De wiskundige beschrijving van de vrije val is, strikt genomen, alleen geldig bij een val in het luchtledige. Met proeven kan dan worden aangetoond dat objecten van verschillend gewicht even snel vallen. Dat de theorie met vallen en opstaan tot stand is gekomen, betekent dat zij allerminst vanzelfsprekend is. We noemden al Aristoteles en zijn onhoudbare standpunt over de invloed van de massa op de valsnelheid. Ook Galileï heeft aanvankelijk een vergissing gemaakt. In navolging van Albert van Saksen koesterde hij een poosje het interessante idee dat de valsnelheid evenredig zou zijn met de *valweg*, hetgeen eveneens onhoudbaar is gebleken.

7 Laat zien dat volgens Galileï's latere (en correcte) theorie de valsnelheid *niet* evenredig is met de valweg *s*, maar met de vierkantswortel uit *s*.

8 Een andere interessante hypothese was afkomstig van Leonardo da Vinci. Deze wetenschapper-kunstenaar veronderstelde dat wegen in opvolgende gelijke tijden afgelegd zich verhouden als de natuurlijke getallen.

a. Hoe kun je die bewering corrigeren als je voor de gelijke tijden de intervallen [0 , 1], [1 , 2] enz. neemt?

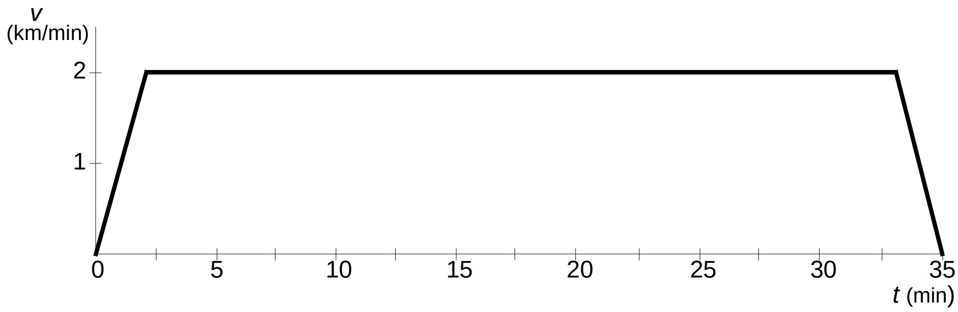
b. En hoe zit het bij de intervallen $[\frac{1}{2}\ ,\ 1\frac{1}{2}]$, $[1\frac{1}{2}\ ,\ 2\frac{1}{2}]$, enz.?

9 De intercity-trein van Amersfoort naar Zwolle sjeest met een vaartje van 120 km/uur over de Veluwe. De tijdsduur van de rit is precies 35 minuten; de eerste twee minuten heeft de trein nodig om op gang te komen en de laatste twee minuten om vaart te minderen. Op de volgende bladzij zie je een model van die rit in de vorm van een snelheidsgrafiek.
Omdat op de horizontale as de tijd in minuten is uitgezet, is op de verticale as de wat ongewone snelheidsmaat km/min gehanteerd.

a. Verklaar de vorm van getekende snelheidsgrafiek.

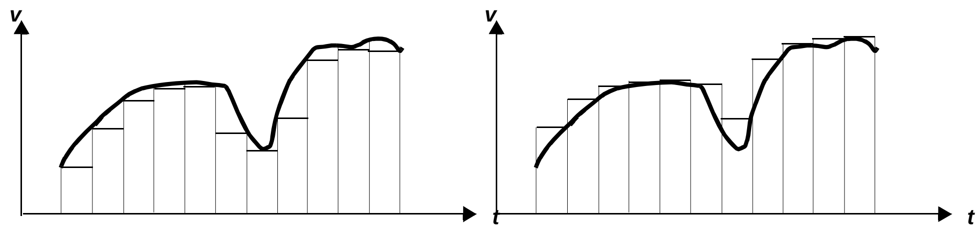
b. Welke kritiek kun je geven op die grafiek ?

c. Volgens het spoorboekje is de afstand van Amersfoort tot Zwolle per trein gelijk aan 66 km. Klopt dat met het model?



Je hebt nu gezien hoe uit de grafiek van de snelheid van een vallend voorwerp of een rijdende trein de afgelegde afstand kan worden bepaald. Als die snelheidsgrafiek rechtlijnig is, dan kan dit heel precies, namelijk door de oppervlakte onder de grafiek te berekenen.

Is de snelheidsgrafiek een kromme lijn, dan kan een benaderingsmethode worden gebruikt. Het idee is om de tijdsduur van de beweging te verdelen in een aantal deelintervallen. Daarbij wordt net gedaan alsof op die deelintervallen de snelheid gelijk is aan de laagste waarde op dat interval. Zo kom je aan een *onderschatting* van de afgelegde weg. Neem je op elk interval de hoogste snelheidswaarde, dan krijg je een *bovenschatting*.



Als je van onder- en bovenschatting het gemiddelde neemt, krijg je een redelijke benadering. Dit is net zo'n procédé als in hoofdstuk 9 werd gebruikt bij de bepaling van de oppervlakte onder de grafieken van $y = x^2$ en $y = x^3$.

Dit leidt dan tot het idee dat bij snelheidsgrafieken, krom of recht, de oppervlakte onder de grafiek de afgelegde afstand voorstelt.

10 Stel je voor de grafiek van de snelheid van een autoritje.

a. Als de auto een poosje stilstaat gedurende de rit, wat voor invloed heeft dat op de grafiek? Klopt de bewering 'afgelegde afstand = oppervlakte onder de grafiek' dan nog?

b. De snelheid kan ook een poosje negatief zijn. Wat kun je je daarbij voorstellen? Hoe zit het dan met de afgelegde weg en de oppervlakte? Maak een schets als toelichting.

Samenvatting

formules vrije val

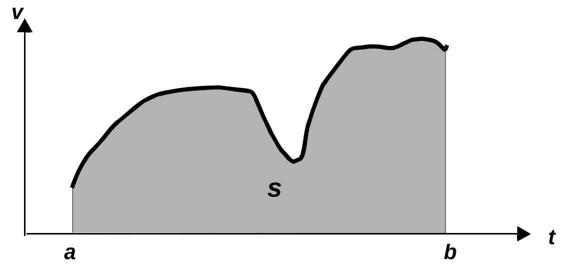
Bij een vrije val (= val zonder remmende factoren) is de valsnelheid evenredig met de valtijd. In formule:

$$v(t) = gt$$

g is de zogenaamde *gravitatie-constante*.
De valweg is evenredig met het kwadraat van de valtijd:

$$s(t) = \tfrac{1}{2}gt^2$$

van *v* naar *s*



Bij een tijd-snelheidsgrafiek wordt de afgelegde weg in een zeker tijdsinterval [*a* , *b*], voorgesteld door de oppervakte onder de grafiek tussen de verticale lijnen $t = a$ en $t = b$.

Extra opgave

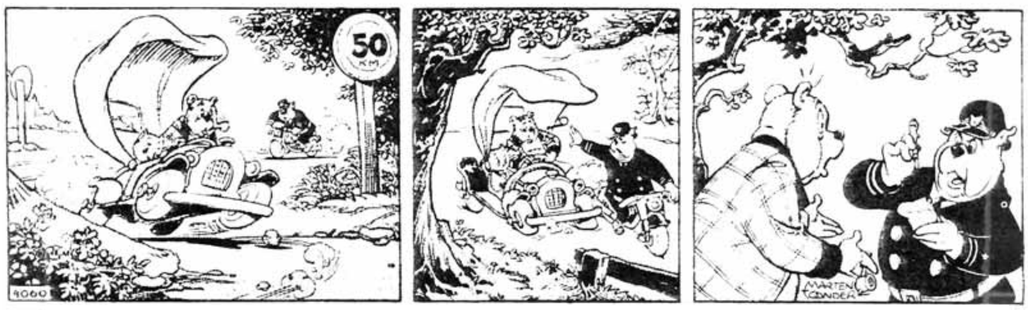
Bekijk de grafiek van de treinreis Amersfoort-Zwolle.
Om de afgelegde afstand als functie van *t* in formule te beschrijven, moet je drie intervallen onderscheiden.

a. Ga na dat voor de eerste ‘etappe’ (2 minuten) geldt: $s(t) = \frac{1}{2}t^2$.

b. Vind nu zelf een formule die geldt in het interval [2 , 33] en een die geldt in het interval [33 , 35].

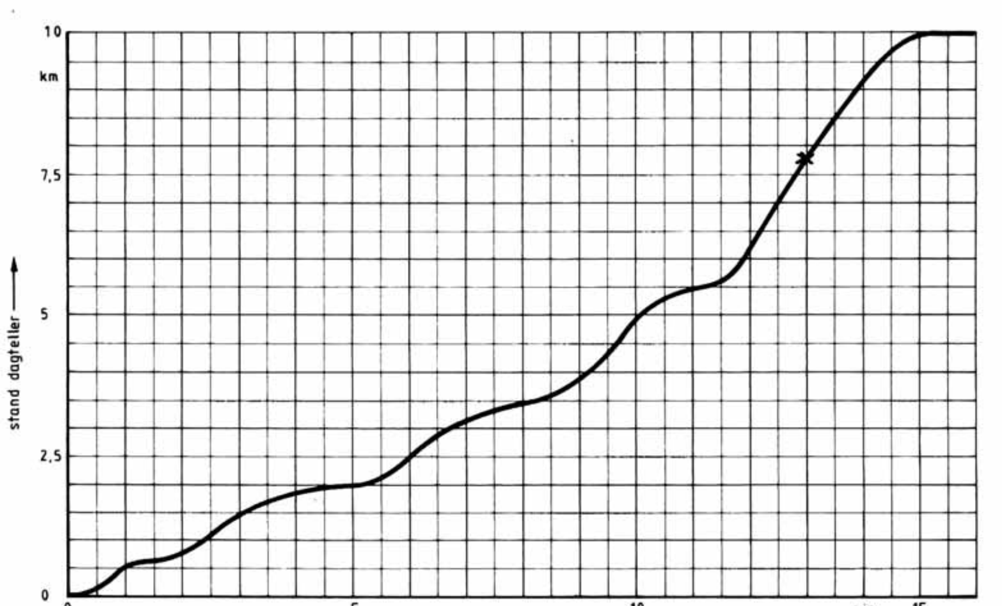
12 Instap: heer in het verkeer

Heer Bommel was danig uit zijn humeur. Het verkeer in Rommeldam had hem veel oponthoud bezorgd en toen hij zich buiten de bebouwde kom waande, trapte hij het gaspedaal geheel in, zodat de Oude Schicht gierend over de weg vloog. Helaas ontging het hem dat hij zich op een weg bevond waar snelheidsbeperking geboden was en dat wreekte zich. Want daar naderde de commissaris van politie reeds op een brullende motor en stak een hand op.



‘Hebt u zo’n haast, huh?’ vroeg Bulle Bas, een notitieboekje trekkend.
‘Hebt u de borden niet gezien? Kunt u niet lezen?
‘Maar ik reed niet te snel!’, riep heer Bommel op piepende toon. ‘In het afgelopen kwartier heb ik slechts 10 km gereden, dat is dus 40 km per uur’.
Inderdaad wees de dagteller van de Oude Schicht 10 km aan.
Maar meer informatie over Bommel’s autoritje geeft onderstaande grafiek.

1 **a.** Bedenk een mogelijk antwoord van Bulle Bas.
b. Stel je voor dat Bommel gelijk zou hebben. Hoe zou de grafiek er dan hebben uitgezien?



In de gemeente Rommeldam zijn de boetes bij overtreding van de snelheidswet bepaald niet mals.

Gemeente Rommeldam

Politieverordening.

De boetes die opgelegd dienen te worden bij overtreding van Artikel 243 uit het Wegenverkeersreglement zijn:
- bij een overschrijding van de toegestane snelheid met ten hoogste 10 km/uur bedraagt de boete 25 florijnen;
- bij een overschrijding van meer dan 10 km/uur maar ten hoogste 20 km/uur bedraagt de boete 50 florijnen;
- bij een overschrijding van meer dan 20 km/uur maar ten hoogste 30 km/uur bedraagt de boete 100 florijnen.

Bij elke volgende 10 km/uur boven de toegestane maximum snelheid, dient men de boete opnieuw te verdubbelen.

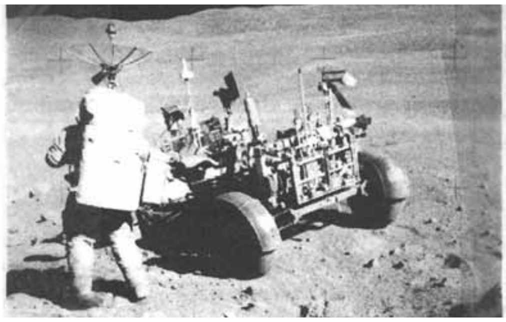
De burgemeester van Rommeldam

2 Bekijk de grafiek van Bommel's autoritje. Het aangekruiste punt geeft het moment (en de plaats) aan waar Bommels overtreding werd geconstateerd.

tip **a.** Hoeveel boete moest Bommel betalen?

tip **b.** Tom Poes die naast Bommel in de Oude Schicht zat, maakte later nog de bittere opmerking dat zij bijna de helft van de weg te snel hadden gereden.
Kun je het daar mee eens zijn? Verklaar je antwoord.

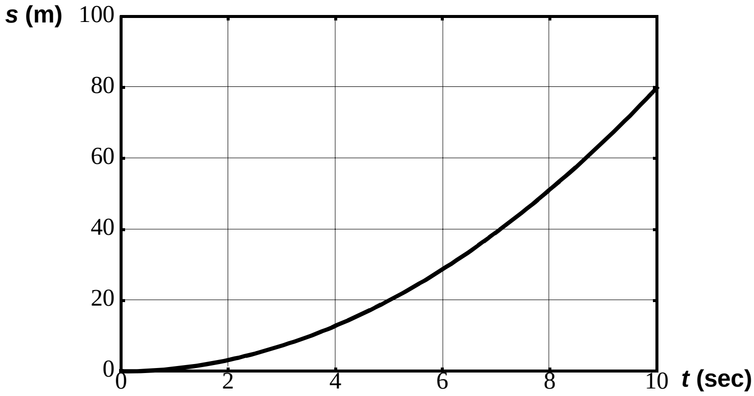
13 Van afstand naar snelheid



Op de maan val je zachter dan op de aarde, zoals Charles Duke (op de foto bij maanauto) aan de lijve ondervond in 1972. De valweg naar de maan is net als op aarde, evenredig met het kwadraat van de valtijd, maar de evenredigheidsconstante is aanmerkelijk kleiner.
De valtijd,valweg-functie beantwoord op de maan ongeveer aan de formule:

$$s(t) = 0{,}8\ t^2$$

Hieronder zie een grafiek van die functie op het interval [0 , 10].



1 Een ruimtevaarder laat van 80 m hoogte een maansteen vallen. Volgens de formule heeft die 10 seconden nodig om neer te ploffen. De *gemiddelde snelheid* gedurende de gehele val is dus 8 m/sec.

a. Hoe groot is de gemiddelde snelheid gedurende de eerste 5 seconden? En gedurende de volgende 5 seconden?

b. De eerste uitkomst van vraag **a** is een stuk lager dan de tweede. Hoe kun je dat zien in de figuur?

tip

2 **a.** Verklaar uit het de methode van Galileï dat de valsnelheid op de maan beantwoordt aan de formule:

$$v(t) = 1{,}6t$$

b. Voor $t = 5$ levert dat op: 8 m/sec. Kun je dat ook ‘zien’ in de grafiek?

3 Gegeven een beweging waarvan de *t*,*s*-grafiek een rechte lijn is.

a. Wat kun je zeggen over de snelheid van beweging?

b. Hoe zit dat als de *t*, *s*-grafiek horizontaal is?

momentane snelheid

4 Maak op de GR de grafiek van de valtijd, valweg-functie op de maan. Neem het zelfde venster als in bovenstaande figuur. Ga met de cursor naar het punt (5 , 20) en zoom een aantal keren in, net zo lang tot de grafiek vrijwel recht is.
Probeer nu de snelheid op het moment $t = 5$ te vinden met de GR.
Opmerking: de snelheid op een bepaald moment noemt men wel ‘momentane snelheid’; ook de term ‘instantane snelheid’ (Engels: instantaneous velocity’) wordt wel gebruikt.

Momentane snelheid.

Gemiddelde snelheid, topsnelheid, momentane snelheid,...
Wat betekent het precies: een snelheid van 180 km/u?
Zeker niet dat er een uur gereden is en daarin 180 km afgelegd.
Je kunt evengoed zeggen: 3 km/min of 50 m/sec.
Het is mogelijk dat die snelheid slechts één seconde is bereikt, of zelfs een fractie daarvan.

De gebruikelijke snelheidsberekening is: deel de afgelegde afstand (bijv. in km) door de daarvoor benodigde tijd (bijv. in uur) en je krijgt de snelheid in km/u.
Dit is typisch wat we *gemiddelde snelheid* noemen.

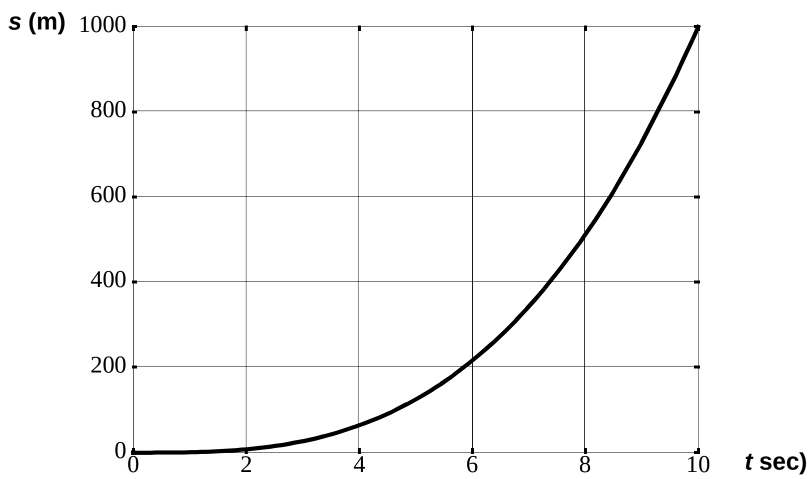
Neem je het tijds interval heel klein, een fractie van een seconde, dan is men geneigd te spreken van de 'snelheid op het moment' (momentane snelheid). Maar het is natuurlijk nog steeds een gemiddelde snelheid.

Het begrip 'snelheid op het moment' is een typisch voorbeeld van een model-begrip.
In een 'oneindig klein' tijdsintervalletje wordt een 'oneindig klein afstandje' afgelegd.
De grootte van de momentane snelheid is dan als het ware het resultaat van het delen van 'een oneindig klein afstandje' door een 'oneindig kleine tijdsduur'. Dat klinkt nogal onmogelijk. Maar de wiskunde zou geen wiskunde zijn als zij niet kans had gezien hier, een mooie en sluitende theorie voor te ontwikkelen: de zogenaamde differentiaalrekening.

Veronderstel dat een beweging voldoet aan de formule:

$$s(t) = t^3$$

waarbij t de tijd in sec is en s de afstand in m.
Dat wordt al gauw supersonisch snel. Na bijvoorbeeld 10 sec is al 1 km afgelegd.
Hieronder zie je de t,s-grafiek op het venster [0 , 10] bij [0 , 1000].



5 **a.** Hoe groot is de *gemiddelde* snelheid op het tijdsinterval [4 , 5]? En op [5 , 6]?
b. Hoe zou jij de snelheid op *het moment* $t = 5$ bepalen?

Stel dat je de snelheid wilt weten op het moment $t = 5$. Het ligt voor de hand dat die tussen de beide uitkomsten van vraag **5a** inligt. Misschien heb je als antoord van **5b** het gemiddelde van die twee genomen, dat levert op 76 m/sec. Dat is inderdaad niet zo'n gekke schatting, maar exact is het niet. Daarom gaan we het wat anders aanpakken. Het idee is om kleinere tijdsintervallen, rechts en links van het moment $t = 5$ te bekijken en daarin de gemiddelde snelheden uit te rekenen. Neem bijvoorbeeld het interval [5 , 5.1].
De afgelegde weg in [5 , 5.1] is gelijk aan:

$$\underset{t=5}{\overset{5.1}{\Delta}} s(t) = \underset{5}{\overset{5.1}{\Delta}} t^3 = \Rightarrow 5.1^3 - 5^3 = 7.651$$

De benodigde tijd hiervoor is:

$$\underset{5}{\overset{5.1}{\Delta}} t = 0.1$$

Noteren we de afgelegde weg in [5 , 5.1], kortweg als Δs en de gebruikte tijd als Δt, dan geldt voor de gemiddelde snelheid op dat tijdsintervalletje:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{7{,}651}{0{,}1} = 76{,}51$$

differentie-quotiënt

We noemen dit quotiënt van differenties een *differentiequotiënt*.
Op dezelfde manier kun je het differentiequotiënt (= gemiddelde snelheid) uitrekenen op het interval [4.9 , 5].

6 **a.** Reken na dat dit gelijk is aan 73.51
b. Wat kun je nu zeggen over de snelheid op het moment $t = 5$?

7 Door steeds kleinere intervallen rechts en links van $t = 5$ te nemen, klem je de snelheid op $t = 5$ als het ware in. Bekijk onderstaande tabel:

Δt	$\frac{\Delta s}{\Delta t}$ *(vóór t = 5)*	$\frac{\Delta s}{\Delta t}$ *(ná t = 5)*
0.1	73.51	76.51
0.01	74.8501	75.1501
0.001	74.985001	75.015001
0.0001	74.99850001	75.00150001

a. Als je goed kijkt, zie je een patroon in de beide kolommen. Wat zal de volgende regel in de tabel zijn? Als je het niet vertrouwt, reken maar na!
b. Hoe groot is de momentane snelheid op $t = 5$?

8 **a.** Maak de grafiek van $s(t) = t^3$ op de GR met venster [0, 10] bij [0 , 1000].
b. Stel je voor dat de snelheid die na na 5 seconden wordt bereikt niet meer verandert. Hoe zou de grafiek dan moeten worden aangepast?

tip

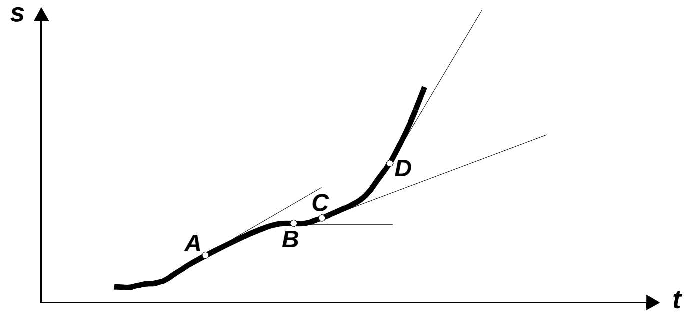
c. Je kunt op de GR de grafiek als volgt maken:

> Toets in: Y_2 = (X≤5)(X^3) + (X>5)(75X - 250) en bekijk de grafiek.
> De tekens ≤ en > vind je onder TEST.

Dat betekent dat je op [0 , 5] en op [5 , 10] met verschillende formules werkt.
Verklaar de formule op [5 , 10].

raaklijn en koorde

De rechte lijn die je in opgave **8c** hebt gezien, heeft 75 als *hellingsgetal* (of *richtingscoëfficiënt*). Dat hellingsgetal is gelijk aan de momentane snelheid op $t = 5$. We noemen die lijn de *raaklijn* aan de grafiek in het punt bij $t = 5$.
Met een gemiddelde snelheid, bijvoorbeeld op het interval [5 , 6] correspondeert ook een hellingsgetal, namelijk dat van de verbindingslijn van de punten bij $t = 5$ en $t = 6$. Zo'n verbindingslijn wordt een *koorde* van de grafiek genoemd.



9 In de tijd-afstand-grafiek hierboven is op vier tijdstippen (corresponderend met de punten *A*, *B*, *C* en *D*) de raaklijn getekend; dat wil dus zeggen de lijn die aangeeft, hoe de grafiek zich zou voortzetten als vanaf dat moment de snelheid niet meer zou veranderen.

a. Wat betekent het voor de beweging dat de raaklijn in *B* horizontaal is?
b. Je kunt uit de grafiek aflezen dat na het tijdstip dat correspondeert met het punt *D*, de snelheid nog groter wordt. Verklaar.
c. Stel je voor dat de snelheid na dat tijdstip onmiddellijk zou gaan afnemen. Hoe moet je de grafiek rechts van het punt *D* veranderen?

10 Wat in de tabel bij opgave **7** voor één tijdstip ($t = 5$) is berekend, kan op de GR in één klap voor een heleboel momenten tegelijk worden uitgevoerd.

Toets in: Y_1 = X^3, $Y_2 = Y_1$(X + 0.0001) - Y_1 en $Y_3 = Y_2$, 0.0001

X staat voor t, Y_1 staat voor s, Y_2 staat voor Δs en Y_3 staat voor $\frac{\Delta s}{\Delta t}$.

Omdat Y_2 alleen een 'hulpfunctie' is, ga je die functie 'uitzetten'. Zó: ga met de cursor op het =-teken van Y_2 staan en druk op ENTER. Toets nu TABLE in en je ziet de waarden van Y_1 en Y_3 op de momenten t = 0, 1, 2, ...

Merk op: de uitkomsten in de Y_3-kolom zijn minder nauwkeurig dan je zou mogen verwachten, maar dit komt door de kolombreedte van de tabel.

tip

a. In de Y_3-kolom heb je benaderingen van gemiddelde snelheden (of differentiequotiënten), waarbij het tijdsintervalletje volgen op het moment. Om dit ook te krijgen voor tijdsintervalletjes voorafgaand aan het moment, hoef je slechts twee keer 0.0001 te vervangen door -0.0001. Doe dit en bekijk de uitkomsten.
b. Verander het tijdsprongetje -0.0001 in 0.00001 en je ziet nu dat de GR afrondt op gehele getallen. (behalve voor $t = 0$). Dit zijn de exacte snelheden.

tip

c. Ga na dat de snelheden in de tabel evenredig zijn met de kwadraten van de tijden. Neem aan dat dit verband voor alle waarden van t geldt. Door welke formule wordt v dan uitgedrukt in t?

11 Het kost heel weinig moeite om met de GR een paar andere wiskundige modellen van tijd, afstand en snelheid te onderzoeken.

a. Verander in het functiebestand alleen Y_1, en wel in $Y_1 = X^4$ en bekijk weer de tabel van Y_3.

b. De resultaten mag je weer beschouwen als de exacte snelheden op de bijbehorende tijdstippen. Nu lijkt de snelheid evenredig te zijn met de derde macht van *t*. Neem aan dat dit het geval is en geef een formule die *v* rechtstreeks in *t* uitdrukt.

12 Maak nu $Y_1 = 2^X$ en kijk weer naar de tabel. De getallen in de Y_3-kolom zijn nu niet van die mooie gehele getallen.

a. Maar als je op de verhouding tussen opvolgende uitkomsten let, kun je toch iets moois zien. Wat?

b. Dit lijkt op een beweging, waarbij de snelheid evenredig is met de afgelegde weg (dus zoiets als Galileï zich aanvankelijk voorstelde bij de vrije val). Hoe groot ongeveer is de evenredigheidsconstante?

c. Hoe zit dat in het geval $Y_1 = 3^X$?

We vatten samen wat de resultaten zijn van de voorgaande opgaven.
Je wist al dat als de beweging van een object gegeven wordt door de formule $s(t) = 5t^2$,

de snelheid op het moment *t* gegeven is door: $v(t) = 10t$.

Wijziging van de afstandsformule geeft natuurlijk ook een andere snelheidsformule.
In opgave **10** heb je kunnen ontdekken:

$$\text{als } s(t) = t^3 \text{, dan } v(t) = 3t^2$$

De ontdekking van opgave **11** is:

$$\text{als } s(t) = t^4 \text{, dan } v(t) = 4t^3$$

Opgave **12** levert op:

$$\text{als } s(t) = 2^t \text{, dan } v(t) = 0{,}69315 \quad 2^t$$

en

$$\text{als } s(t) = 3^t \text{, dan } v(t) = 1{,}0986 \quad 3^t$$

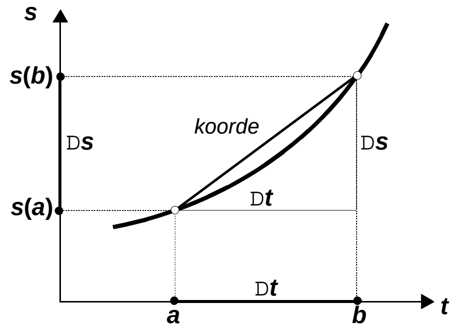
De constante factoren in de laatste twee formules, dat wil zeggen 0.69315 en 1.0986 zijn echter niet exact. Het zijn irrationale getallen: ze corresponderen met oneindige niet-repeterende decimale breuken.
De exacte waarden zullen we voorlopig aangeven met c_2 en c_3 .
De indices 2 en 3 zijn de respectievelijke grondtallen van de machten, want daar hangt die constante van af.

13 Evenzo geldt: als $s(t) = 5^t$, dan $v(t) = c_5 \quad 5^t$.
Geef een benadering van c_5.

samenvatting

gemiddelde snelheid en koorde

Het plaatje stelt de t,s-grafiek voor van een bewegend voorwerp.
We beschouwen het tijdsinterval $[a\ ,\ b]$ en stellen $b - a = \mathrm{D}t$ en $s(b) - s(a) = \mathrm{D}s$.

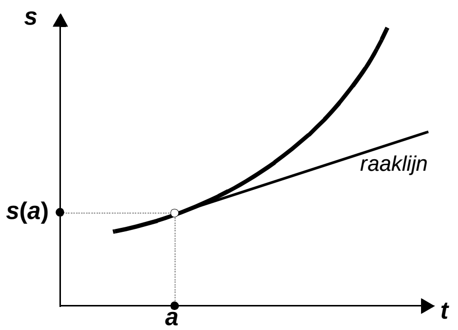


De gemiddelde snelheid op $[a\ ,\ b]$ is dan gelijk aan $\dfrac{\mathrm{D}s}{\mathrm{D}t}$.

Dit getal is juist het hellingsgetal (richtingscoëfficiënt) van de rechte lijn die de punten $(a\ ,\ s(a))$ en $(b\ ,\ s(b))$ verbindt. Die lijn wordt wel een *koorde* van de grafiek genoemd.

momentane snelheid en raaklijn

De snelheid op het moment $t = a$ kan worden benaderd door op zeer kleine tijdsintervallen rechts en links van a de gemiddelde snelheid te berekenen.
De exacte waarde van de snelheid, zeg $v(a)$, is het getal wat op deze wijze via een inklemproces wordt gevonden.



De momentane snelheid $v(a)$ is gelijk aan het hellingsgetal van de raaklijn aan de grafiek in het punt $(a\ ,\ s(a))$. De raaklijn geeft aan hoe de grafiek zou verlopen als vanaf het moment $t = a$ de snelheid niet meer zou veranderen.

Extra opgave

De afstand s van een bewegend object is als functie van de tijd t gegeven door:

$$s(t) = t\sqrt{t}$$

Nu geldt dat v^2 evenredig is met t .
Controleer dit met de GR en druk vervolgens $v(t)$ uit in t.

14 Terugblik en vooruitzicht

som en verschil

De eerste helft van dit boekje (tot en met hoofdstuk 7) ging over sommen en verschillen *(differenties)*, of bondig gezegd, over S en D. Je hebt je, misschien na enige moeite, vertrouwd gemaakt met het gebruik van die symbolen en ontdekt dat zij veel met elkaar te maken hebben.
Hoofdstuk 6 bevat de kern van het verband tussen S en D.

1 Zoek de formule op die deze kern weergeeft. Welke rol heeft die formule gespeeld in hoofdstuk 6?

oppervlakte

De tweede helft van het boekje laat allereerst zien hoe je somformules kunt gebruiken bij het bepalen van een oppervlakte onder een grafiek. Zo’n oppervlakte heeft een speciale betekenis als die grafiek het verband aangeeft tussen tijd en snelheid.

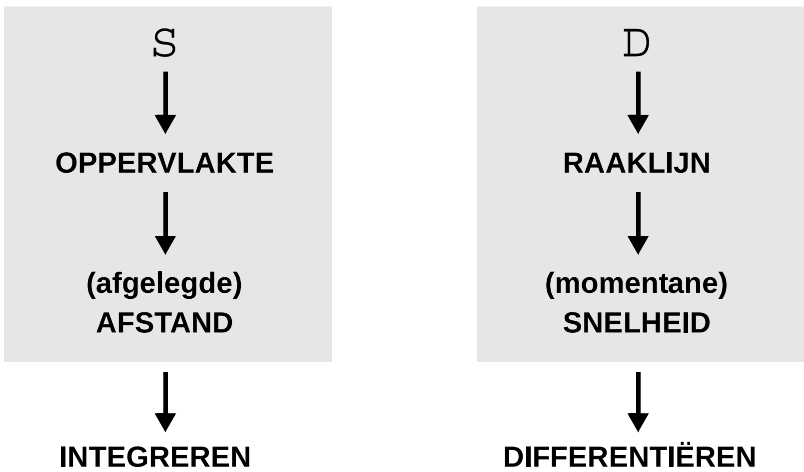
2 Wat is die betekenis?

raaklijn

In de hoofdstukken 12 en 13 heb je gewerkt met tijd,afstand-grafieken en gezien hoe je gemiddelde en momentane snelheden kunt berekenen. Daarbij spelen differenties en vooral *differentiequotiënten* een vooraanstaande rol. Grafisch gezien gaat het daarbij om het hellingsgetal (de richtingscoëfficiënt) van *koorde* en *raaklijn*.

3 Schets een tijd,afstand grafiek waarbij de snelheid afneemt met het verstrijken van de tijd. Hoe kun je dat aan de raaklijnen zien?

Zo zijn er als het ware twee rode draden in dit boek.

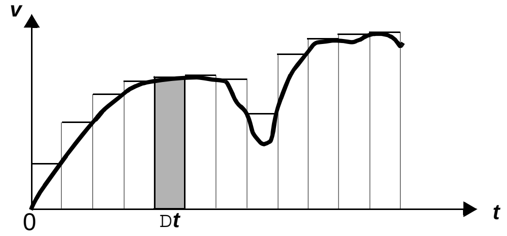


integraal en differentiaalrekening

De ‘som-oppervlakte-afstand-draad’ is het begin van wat in de wiskunde *integraalrekening* wordt genoemd. Die draad begint in de oudheid bij Archimedes. Na een heel lange periode van stilte wordt zij in de zeventiende eeuw pas goed gesponnen en de rekenmethoden die toen zijn ontdekt, worden nog steeds overal ter wereld geleerd en gebruikt.
Met de ‘verschil-raaklijn-snelheid-draad’ start de *differentiaalrekening*. In de meeste leerboeken gaat de differentiaalrekening vooraf aan de integraalrekening, maar in de geschiedenis van de wiskunde is het eigenlijk andersom. Newton en Leibniz vonden, onafhankelijk van elkaar, de huidige differentiaalrekening uit zo rond het jaar 1680.

snelheid
$\Downarrow$
afstand

We blikken terug op de eerste rode draad.



In de figuur zie je hoe de oppervlakte onder een tijd,snelheidsgrafiek word benaderd met een bovensom van rechthoekige stroken.
De breedte van zo’n rechthhoekje correspondeert met een tijdsintervalletje, zeg met een duur van Δt.
De hoogte van zo’n rechthoekje correspondeert met de (hoogste) snelheid op dat intervalletje, zeg v_{max}.
De oppervlakte van zo’n rechthoekige strook (= $v_{max}\ \Delta t$) correspondeert met de in dat tijdsintervalletje afgelegde afstand, als... de snelheid constant gelijk zou zijn aan v_{max} .
De som van alle oppervlakten geven nu een bovenschatting van de afgelegde weg in het totale tijdsinterval. Die som noteren we globaal zó: $\sum v_{max}\ \Delta t$

Op soortgelijke manier kom je aan een onderschatting: $\sum v_{min}\ \Delta t$

Zo krijg je een inklemming van de afgelegde weg s:

$$\sum v_{min}\ \Delta t < s < \sum v_{max}\ \Delta t$$

Die inklemming kan ‘supernauw’ gemaakt worden, door de strookbreedte (= Δt) ‘superklein’ te nemen. Bij zo’n superklein tijdsintervalletje (bijna een moment) benaderen v_{max} en v_{min} elkaar en zijn ze vrijwel gelijk aan de momentane snelheid v op dat moment.

Vandaar dat we (globaal) kunnen schrijven:

$$\sum v\ \Delta t \approx s$$

voor kleine waarden van Δt.

Er is hierbij sprake van een voortschrijdend proces van benadering. Voorbeelden daarvan kun je vinden in hoofdstuk 9 (kwadratuur). In die voorbeelden heb je gezien hoe via dit proces soms een exacte waarde van de oppervlakte wordt gevonden. Denk maar aan de oppervlakte onder een parabool (bladzij 34).
De overgang van zo’n benaderingsproces naar een exacte waarde, is de kern van de integraal- en differentiaalrekening.
Leibniz bedacht voor het exacte resultaat deze notatie:

$$\int v\mathrm{d}t = s$$

Het eerste symbool (de ‘ouderwetse’ S) wordt het integraalteken genoemd. Het geeft aan dat de som gebaseerd is op een ‘oneindig fijne’ verdeling in ‘oneindig dunne’ strookjes. Om dezelfde reden is Δt vervangen door dt: de lengte van een ‘oneindig klein’ tijdsintervalletje.

integreren De bewerking die bij een snelheidsfunctie de afstandsfunctie oplevert, heet *integreren.* Nu volgen een paar voorbeelden van integreren.

– Je weet: bij $v = at$ hoort $s = \frac{1}{2}at^2$.

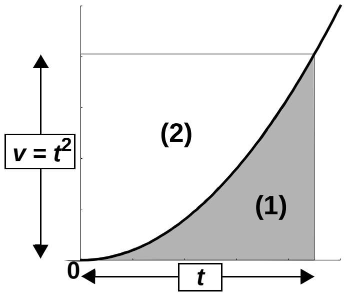
Met de notatie van Leibniz geeft dat:

$$\int at\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}at^2$$

Met $a = 2$ krijg je:

$$\int 2t\,\mathrm{d}t = t^2$$

– Stel je nu voor een beweging waarbij $v = t^2$.
De afgelegde weg s in de tijd die verloopt van 0 tot t wordt gegeven door een oppervlakte onder de parabool die de grafiek is van v.



In hoofdstuk 9 heb je gezien dat in het geval $t = 1$ die oppervlakte precies gelijk is aan $\frac{1}{3}$ deel van de oppervlakte van de rechthoek (= vt). Als je de extra opgave (bladzij 34) hebt gemaakt, weet je dat dit ook geldt voor andere waarden van t.
Bij $v = t^2$ hoort blijkbaar $s = \frac{1}{3}vt = \frac{1}{3}t^3$.

Of in de integraalnotatie van Leibniz:

$$\int t^2\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{3}t^3$$

Als je de snelheidsfunctie met een constante vermenigvuldigt, moet je de afstandsfunctie met dezelfde constante vermenigvuldigen. Dat volgt direct uit de oppervlaktebeschouwing op de vorige bladzij. Zo geldt dan bijvoorbeeld:

$$\int 3t^2\,\mathrm{d}t = t^3$$

4 Als vervolg op opgave **8** van hoofdstuk 9 kunnen we beredeneren dat bij $v = t^3$ hoort $s = \frac{1}{4}vt$. Druk s uit in t; beschrijf je resultaat met de integraalnotatie.

De integraalnotatie wordt meestal gebruikt in combinatie met de grenzen van een zeker interval. Om de afgelegde weg in het tijdsinterval $[t_0\,, t_1]$ aan te geven, schrijft men:

$$\int_{t_0}^{t_1} v\,\mathrm{d}t = s(t_1) - s(t_0)$$

Men noemt dit een (*bepaalde*) *integraal.*

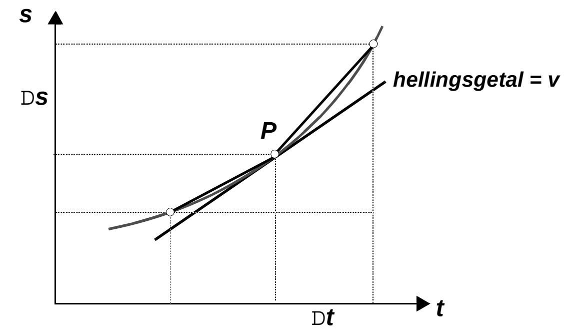
5 Verklaar nu:

$$\int_1^4 t^2\,\mathrm{d}t = 21$$

6 Gebruik het resultaat van opgave **4** en bereken de integraal: $\int_0^{10} t^3\,\mathrm{d}t$.

afstand
⇓
snelheid

Nu de tweede rode draad:



In hoofdstuk 13 heb je in een paar gevallen gezien hoe uit een formule voor s als functie van t een formule voor v als functie van t kan worden gevonden. Het idee was: neem steeds kleiner wordende tijdsintervallen rechts en links van een bepaald moment (corresponderend met het punt P op de grafiek) en bereken de bijbehorende differentiequotiënten (of gemiddelde snelheden). Zo'n gemiddelde snelheid correspondeert met het hellingsgetal van een *koorde* uitgaande van P. Bij superkleine tijdsintervalletjes benaderen de gemiddelde snelheden de momentane snelheid. Die momentane snelheid correspondeert met het hellingsgetal van een lijn door P: de *raaklijn in P* aan de grafiek. Met $v(t)$ voor de momentane snelheid op het tijdstip t, schrijven we nu:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \approx v(t)$$

voor kleine waarde van Δt.

differentiaalquotiënt

Het benaderingsproces voert (in vele gevallen) tot een exact resultaat, een zogenaamd *differentiaalquotiënt*. Leibniz schreef daarvoor:

$$\frac{ds}{dt} = v(t)$$

Deze notatie wordt nog steeds gebruikt, maar er zijn ook andere schrijfwijzen in omloop. Bijvoorbeeld:

$$\frac{d}{dt}s(t) = v(t)$$

of

$$s'(t) = v(t)$$

differentiëren

De bewerking die bij een gegeven afstandfunctie de snelheidsfunctie levert, wordt *differentiëren* genoemd.
In hoofdstuk 13 heb je een paar resultaten van differentiëren gezien, onder andere:

$$\frac{d}{dt}t^2 = 2t$$

en

$$\frac{d}{dt}t^3 = 3t^2$$

We merken op dat die resultaten verkregen zijn langs *numerieke* weg, dat wil zeggen met behulp van berekende resultaten op de GR. Zekerheid omtrent de juistheid van die formules geeft dat niet. In het volgende boekje komen we hier nader op terug.

7 **a.** Schrijf ook de andere, soortgelijke, resultaten van hoofdstuk 13 in deze vorm.
b. In sommige van deze gevallen blijkt dat v evenredig is met $\frac{s}{t}$. In welke gevallen is dat zo?

integreren = terugdifferentiëren

Misschien heb je allang begrepen dat integreren en differentiëren als het ware elkaars omgekeerde zijn.
Bijvoorbeeld:

$$t^2 \xrightarrow{\textit{differentiëren}} 2t \qquad t^2 \xleftarrow{\textit{integreren}} 2t$$

$$t^3 \xrightarrow{\textit{differentiëren}} 3t^2 \qquad t^3 \xleftarrow{\textit{integreren}} 3t^2$$

In dit boek zijn bovenstaande resultaten onafhankelijk van elkaar gevonden.
Maar het zal duidelijk zijn dat elk resultaat bij differentiëren (integreren) omgedraaid kan worden tot een resultaat bij integreren (differentiëren) .
Dat is eigenlijk net zo bij de `D`- en `S`-formules uit de eerste helft van dit boek.
Voor moeilijke `S`-formules zijn we daar uitgegaan van `D`-formules, omdat die laatste direct te vinden zijn. Zo is het ook bij differentiëren en integreren. Het differentiëren gaat direct (als je de regels kent), terwijl integreren geprobeerd kan worden via terugdifferentiëren. Dat lukt overigens lang niet altijd, maar dit terzijde.
De numerieke methode van differentiëren hoofdstuk 13, waarbij steeds een benaderingsproces is gestart, is niet erg zeker. Zij is ook niet efficiënt als het gaat om het differentiëren van meer ingewikkelde functies. We gooien het daarom over een andere boeg, gebruikmakend van algebra. Met een beperkt aantal standaardresultaten (zoals die van hoofdstuk 13 en nog een paar meer) en een aantal rekenregels om combinaties van functies aan te pakken, zal blijken dat je de hele ‘wereld’ aan kan. Daarover in het volgende deeltje dat daarom heet ‘*de techniek van het differentiëren*’.

8 In hoofdstuk 13 heb je gezien:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}2^t = c_2 \;\; 2^t \text{ met } c_2 \text{ » } 0.69315.$$

a. Ga na dat hier uit volgt:

$$\int 2^t \mathrm{d}t = \frac{1}{c_2}2^t$$

b. In opgave 10 (bladzij 33) heb je een benadering gezien van de oppervlakte onder de grafiek van $y = 2^x$ op het interval [0 , 1]. Controleer of dat resultaat in overeenstemming is met de regel hierboven.

integreren op de GR

Op de TI 82/83 zijn er twee directe mogelijkheden om integralen uit te rekenen.

1.
Via het menu MATH.
Kies optie fnInt (= 9) en maak bijvoorbeeld: fnInt(T^2, T, 1, 4).
(T via de ALPHA-toets en de toets 4).
Dit is de integraal van opgave 5 op bladzij 53. Na ENTER krijg je het resultaat 21.
Evenzo kun je bijvoorbeeld vinden: fnInt(T^3, T, 0, 10) = 2500.

Bij de snelheidsfunctie $v = t^2$ kun je een afstandsgrafiek laten tekenen op de GR.
Bijvoorbeeld: voer in Y1 = fnInt(T^2, T, 0, X). Het 'tijdsinterval' is nu [0, *x*].
Na GRAPH krijg je dan de grafiek van $y = \frac{1}{3}x^3$.

Die formule kun je natuurlijk gemakkelijk checken: kijk of de grafiek van $y = \frac{1}{3}x^3$ samenvalt met de integraalgrafiek. Als je dat doet, zie je dat de controle-grafiek veel sneller af is. Het proces van numerieke integratie vraagt meer tijd dan het rechtstreeks uitrekenen en tekenen van een derde-graadsfunctie.

2.
Via het menu CALC.
Voer bijvoorbeeld in: $Y_1 = X^2$ met venster [1 , 4] bij [0 , 20] en plot de grafiek.
Neem optie $\int f(x)\,dx$ en kies Lower Limit X = 1 (via pijltjestoets en ENTER) ; zo ook: Upper Limit X = 4.
Na ENTER krijg je de integraalwaarde (=21) en een mooi plaatje.

differentiëren op de GR

Er zijn drie directe mogelijkheden om een differentiaalquotiënt uit te rekenen.

1.
Via het menu MATH.
Kies nDeriv (optie 8) en maak bijvoorbeeld: nDeriv($T^{3,}$ T, 5, 0.001).
Dat betekent dat het differentiaalquotiënt voor $s = t^3$ wordt benaderd op het moment $t = 5$ via het intervalletje [5 - 0.001 , 5 + 0.001]. De GR geeft het reslultaat 75.000001.
Vervang je 0.001 door 0.0001 (wees slim, gebruik ENTRY), dan rondt de GR af op de exacte waarde 75 (zie voor dit voorbeeld bladzij 47).

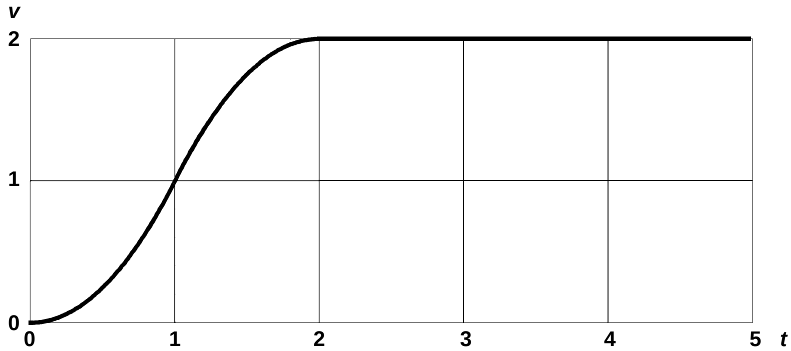
Bij de afstandsfunctie $s = t^3$ kun je de grafiek van de snelheidsfunctie laten tekenen; voer in Y1 = nDeriv($T^{3,}$ T, X, 0.001) en check of deze samenvalt met de grafiek van $v = 3t^2$.

2.
Via het menu CALC.
Voer bijvoorbeeld in: $Y_1 = X^3$ met venster [0 , 10] bij [0 , 1000] en plot de grafiek.
Na dy/dx (optie 6) staat de cursor in het punt (5 , 125). ENTER geeft nu de (benaderde) waarde van het differentiaalquotiënt bij $x = 5$.

3.
Via het menu DRAW.
Bekijk dezelfde functie op hetzelfde venster. Kies de optie Tangent (tangent is het Engelse woord voor raaklijn).
Na ENTER wordt de raaklijn getekend en verschijnt het hellingsgetal op het scherm. (De TI 83 geeft zelfs de complete vergelijking van de raaklijn).

15 Zelftoets

1 Hieronder zie je het begin van de tijd, snelheid-grafiek van een treinrit.



Gedurende de eerste minuut wordt de snelheid gegeven door de formule: $v(t) = t^2$.
De snelheidsgrafiek van de eerste twee minuten is symmetrisch t.o.v. het punt (1 , 1).
Na 2 minuten blijft de snelheid een hele poos constant.

a. Hoeveel km legt de trein af in de de eerste minuut van de rit?
b. En in de eerste vijf minuten?
c. Hoe groot is de snelheid (in km/u) op het moment $t = 1\frac{1}{2}$ volgens dit model?

2 Gebruik de formules in de samenvatting bij hoofdstuk 6 om te bewijzen dat:

$$\sum_{k=0}^{n} (3k^2 - k) = n^2 (n + 1)$$

3 Voor een beweging geldt gedurende de eerste 2 seconden de formule $s(t) = t^4$.
Hierbij is t de tijd in seconden en s de afgelegde weg in meters.

a. Bereken de gemiddelde snelheid gedurende de eerste 2 seconden.
b. Ga na of deze gemiddelde snelheid gelijk is aan de snelheid op het moment $t = 1$.

Na 2 seconden blijft de snelheid verder constant.

c. Teken de tijd,snelheid grafiek voor de eerste 5 seconden.
d. Geef een *t,s*-formule voor de afgelegde weg in het tijdsinterval [2 , 5].

4 Gegeven de meetkundige rijen:

$$1, r^2, r^4, r^6, \ldots$$
$$r, r^3, r^5, r^7, \ldots$$

S_{30} = de som van de eerste dertig getallen van de eerste rij;
T_{30} = de som van de eerste dertig getallen van de tweede rij.
Druk achtereenvolgens S_{30} , T_{30} en $S_{30} + T_{30}$ uit in r.

5 In hoofdstuk 13 heb je gezien: $\frac{d}{dt}2^t = c_2 \quad 2^t$ met c_2 » 0.69315.

Met de GR kun je ontdekken dat: $\frac{d}{dt}0{,}5^t = c_{0,5} \quad 0{,}5^t$ met $c_{0.5}$ » -0.69315.

a. Op welke manier kun je dat doen?
b. Hoe is het resultaat te verklaren uit de grafieken van $y = 2^x$ en $y = 0.5^x$?

Tips bij de opgaven

Hoofdstuk 1 Twee telproblemen

1 **c.** Om een volmaakt afvalsysteem te krijgen is een macht van 2 nodig; probeer het aantal deelnemers zo snel mogelijk terug te brengen tot een macht van 2.
d. Hoeveel verliezers heeft zo'n toernooi?

2 **c.** De grootte van de wereldbevolking is nu ongeveer 6 miljard.

Hoofdstuk 2 Sommen bij meetkundige rijen

1 **b.** Gebruik bijvoorbeeld de analogie met een tennistoernooi: voor N spelers, is het totaal aantal wedstrijden $N - 1$.

4 **a.** Vergelijk S en $5 \cdot S$.

15 Schrijf zo nodig de (enige) termen van de som op.

16 $2^{0.1k} = (2^{0.1})^k$

Hoofdstuk 4 Differenties

4 $(k+1)^3 = (k+1)(k+1)(k+1) = (k+1)(k^2 + 2k+1)$ enz.

5 **a.** Het gegeven betekent: $f(5) - f(2) = 3$.

6 **d.** $3^{k+1} = 3 \quad 3^k$.

7 **a.** Let op de groeisprongen.
c. Wat weet je van het groeipatroon van k^2? En dus van $3k^2$? Wat is de invloed van $3k+1$?

9 Bedenk bijvoorbeeld hoe de grafiek er uit kan zien.

10 **a.** Zet in gedachten het plaatje voort.

extra opgave
Pas de regel $\log a - \log b = \log \frac{a}{b}$ toe.

Hoofdstuk 5 Vierkanten en kubussen

1 Er is één vierkant van 10 bij 10. Ga na hoeveel verschillende deelvierkanten van 9 bij 9 er op het bord passen. Vervolgens kijk je naar 8 bij 8 vierkanten, enz.

Hoofdstuk 6 Drie bijzondere sommen

2 **b.** Beschouw $\sum_{k=0}^{n} k$ als onbekende, zeg S.
Je kunt nu S uitdrukken in n via de vergelijking: $(n + 1)^2 = 2S + (n + 1)$.

8 **c.** Stel (voor het gemak) de gevraagde som gelijk aan S. Breng de tweede en de derde term van de formule in **8b** naar het rechterlid; je kunt nu $n+1$ als gemeenschappelijke factor van drie termen buiten haakjes brengen en je hebt al een stukje van de eindformule.

9 **b.** Net als bij **8b** even doorzetten; gebruik ook hier in eerste instantie de gemeenschappelijke factor $n+1$.

extra opgave

a. Probeer de volgende regel van het patroon op te schrijven. Welke eigenschap hebben de getallen in het rechterlid?

b. Gebruik bijvoorbeeld het S-teken. Hoe kun je het begingetal en het eindgetal van de som in het linkerlid van de *n*-de regel uitdrukken in *n*?

Hoofdstuk 8 De inhoud van een piramide

1 Pas één van de formules uit hoofdstuk 6 toe.

Hoofdstuk 9 Kwadratuur

1 De oppervlakte van een cirkel is evenredig met het kwadraat van de straal en de evenredigheidsconstante is p (= 3.14159265...).

2 Stel voor het gemak de zijde van het vierkant = 10.

3 Voor het tekenen van de kwartcirkel: bekijk eerst de volledige cirkel met middelpunt (0 , 1) en straal 1. Een willekeurig punt (x , y) op die cirkel heeft de afstand 1 tot het punt (0 , 1) en volgens de stelling van Pythagoras geldt dan: $x^2 + (y - 1)^2 = 1^2$.
Om de formule te kunnen invoeren in de GR moet y worden uitgedrukt in x. Als je dat goed doet, krijg je twee uitdrukkingen: één voor de bovenkant en èén voor de onderkant van de cirkel. Neem de ‘onderkant-formule’.

4 a. Je kunt gebruik maken van sum seq op de GR of van een somformule uit hoofdstuk 6.

6 Bouw een ‘torentje’ van de grijze blokjes.

10 c. Dat heeft met meetkundige rijen te maken!

Hoofdstuk 11 Van snelheid naar afstand

1 Breng 0.1 buiten haakjes en pas een bekende somformule toe. Andere mogelijkheid: gebruik het’trucje’ van Gauss.

4 a. Maak bijvoorbeeld een tabel met tijdstip, valweg en hoogte.

6 Hoeveel seconden heeft het tweede zakje om de grond te treffen?

Hoofdstuk 12 Heer in het verkeer

2 a. Steilheid van de tijd-afstand-grafiek is een indicatie voor de snelheid.

b. Vergelijk de grafiek met de rechte lijn door (0 , 0) en (15 , 10).

Hoofdstuk 13 Van afstand naar snelheid

2 a. Hoe groot is g op de maan?

8 c. De GR tekent met deze instructie op het x-interval [0 , 5] de grafiek van $y = x^3$ en op het x-interval [5 , 10] de grafiek van $y = 75x - 250$. Die laatste formule kun je vinden omdat je één punt van de rechte lijn kent.

10 a. Vergeet niet de hulpfunctie Y_2 weer uit te zetten.

c. Schrijf de rij van kwadraten op en zoek de evenredigheidsfactor.

Antwoorden

Hoofdstuk 1 Twee telproblemen

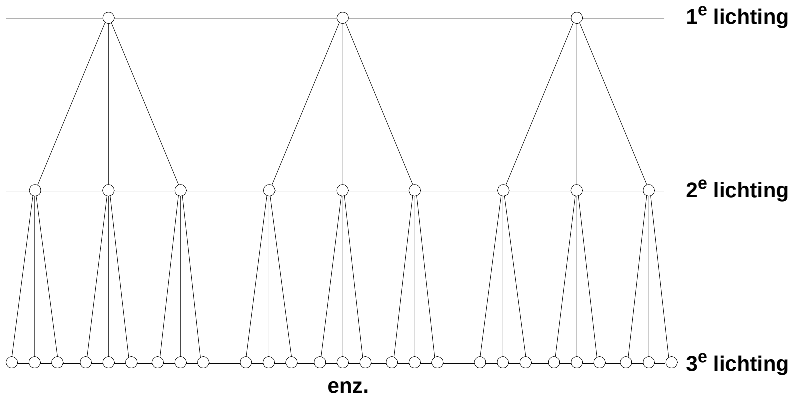
1 **a.** 127.

b. Plaats de spelers 1, 2, ..., 16 zó dat zij bij winst in de eerste drie ronden overblijven bij de laatste zestien. In de acht matches (de 'achtste finale') moet dan 1 tegen 16, 2 tegen 15, ... , 8 tegen 9 komen. Bij winst van de spelers 1, 2, ..., 8 moeten die overblijven voor de kwartinale en wel zó dat 1 tegen 8, 2 tegen 7, ... , 4 tegen 5 speelt. Bij winst van de eerste 4 nummers,moet de halve finale bestaan uit 1 tegen 4 en 2 tegen 3.

c. Een mooie oplossing is: doe net of er 64 spelers zijn en maak (in gedachten) een boom als die van Wimbledon (= 'binaire boom'). 14 spelers zijn fictief, dat betekent dat van de 50 werkelijke spelers er 14 geen tegenstander hebben in de eerste ronde. De overige 36 spelers maken in 18 partijen uit wie er samen met de 14 'vrijgestelden' in de tweede ronde uitkomen.
Voor die tweede ronde zijn er nu 18 + 14 = 32 spelers en het toernooi verloopt verder volgens de regelmaat van de binaire boom.
Het totale aantal partijen is dan gelijk aan 18 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 49.

d. Van de N deelnemers moeten er $N - 1$ worden uitgeschakeld en dat vraagt $N - 1$ partijen.

2 **a.** Een mogelijk plaatje is:



b. In 1978 is de zevende lichting: $3^7 = 2187$.
Totaal in 1978: 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 + 2187 = 3279, dat is 2 meer dan Smautf vermeldt (in de nederlandse vertaling van Perec's roman).
De twintigste generatie telt 3^{20} = 3.486.784.401, dus meer dan 3.4 miljard.

c. Die 1.16 miljard is meer dan de vorige generaties samen.
De generatie van 2020 bevat bijna 15.7 miljard. Samen met alle vorige generaties is dat meer dan 6 miljard, de huidige wereldbevolking (die in 2020 nog aanzienlijk groter zal zijn). De conclusie is waarschijnlijk wel juist.

Hoofdstuk 2 Sommen bij meetkundige rijen

1 **a.** 1 + 2 + 4 + ... + 1024 = 2047.
b. Bij n generaties (van 0 tot en met n - 1) is het totale aantal gelijk aan $2^n - 1$.
Je kunt dit beredeneren door gebruik te maken van de regel bij opgave **1d** van hoofdstuk 1.
c. n ‡ 33.

2 **a.** sum (seq (3^K, K, 0, 19, 1)) = 174339220.
b. $3^{20} - 1$ = 3486784400; correctie: delen door 2.
c. sum(seq (3^K, K, 0, 9, 1)) = 29524 en $3^{10} - 1$ = 59048;
blijkbaar geldt: $1 + 3 + 3^2 + ... + 3^9 = (3^{10} - 1) / 2$.
d. sum (seq (3^K, K, 0, 29, 1)) » 1.02945566E14 en $3^{30} - 1$ » 2.058911321E14 ;
ook nu is de tweede uitkomst 2 $\cdot$ de eerste uitkomst, maar ... het zijn afrondingen.

3 $3S - S = (3 + 3^2 + ... + 3^{29} + 3^{30}) - (1 + 3 + ... + 3^{28} + 3^{29})$, ofwel $2S = 3^{30} - 1$.

4 $5S - S = 4S = 5^{20} - 1$, dus $S = (5^{20} - 1) / 4$.

5 $2^{64} - 1$

6 **a.** * de som van de getallen 7^k, waarbij k loopt van 0 naar 100 (met stapgrootte 1);
* $1 + 7 + 7^2 + 7^3 + ... + 7^{100}$
* sum (seq (7^K, K, 0, 100, 1))
b. $7 \cdot S - S = 7^{101} - 1$, dus $S = (7^{101} - 1) / 6$.

7 1 + 10 + 100 + 1000 + 10000 + 100000 + 1000000 + 1111111;
Of met de methode van de vorige opgaven: $(10^7 - 1) / 9 = 1111111$.

8 **a.** $\sum_{k=0}^{10} 13^k$.
b. $\sum_{k=2}^{10} 13^k$.
c. $\sum_{k=8}^{22} 13^k$.

9 1998

10 **a.** Bij de laatste stap is er gedeeld door $r-1$; dit is correct mits $r-1$ „ 0 ofwel r „ 1.
b. Als $r = 1$, dan $S = 1 + 1 + ... + 1$ (n termen), dus $S = n$.

11 $\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$, mits r „ 1.

12 **a.** $\sum_{k=0}^{n-1} ar^k = a\frac{r^n - 1}{r - 1}$, mits r „ 1.
b. 0 voor n is even en a voor n is oneven.

13 a. $\sum_{k=0}^{9} 3 \;\; 4^k = 3 \;\; \frac{4^{10}-1}{4-1} = 4^{10} - 1 = 1048575.$

b. $\sum_{k=5}^{14} 3 \;\; 4^k = 3 \;\; 4^5 + 3 \;\; 4^6 + \ldots + 3 \;\; 4^{14} = 3 \;\; 4^5 \left(\sum_{k=0}^{9} 4^k \right) = 4^5(4^{10} - 1) =$ $1073740800.$

14 Som van de getallen r^k, waarbij k loopt van 10 naar 20 (stapgrootte 1) ofwel: $r^{10} + r^{11} + \ldots + r^{20}$.

Eerste manier:

$r^{10} + \ldots + r^{20} = (1 + r + \ldots + r^{20}) - (1 + r + \ldots + r^9) = \frac{r^{21}-1}{r-1} - \frac{r^{10}-1}{r-1} = \frac{r^{21}-r^{10}}{r-1}$.

Tweede manier:

$r^{10} + \ldots + r^{20} = r^{10}\,(1 + r + \ldots + r^{10}) = r^{10} \;\; \frac{r^{11}-1}{r-1} = \frac{r^{21}-r^{10}}{r-1}$.

15 $\sum_{k=15}^{32} 2^k = (2^{33} - 1) - (2^{15} - 1) = 2^{33} - 2^{15} = 8589901824$;

$\sum_{k=17}^{18} 3^k = 3^{17} + 3^{18} = 516560652$;

$\sum_{k=4}^{9} 10^{k+1} = 10^5 + \ldots + 10^{10} = 11111100000$;

$\sum_{k=4}^{9} (10^k + 1) = (10^4 + 1) + \ldots + (10^9 + 1) = 1111110006$

16 Met $r = 2^{0.1}$ geldt dat de som gelijk is aan $\frac{r^{10}-1}{r-1}$ en dat is gelijk aan: $\frac{2-1}{2^{0,1}-1}$

17 $5^0 + 5^1 + \ldots + 5^{n-1} = 5^{1-1} + 5^{2-1} + \ldots + 5^{n-1}$.

19 $3 + 3^2 + \ldots + 3^{20} = 3\,(1 + 3 + \ldots + 3^{19}) = 3 \;\; \frac{3^{20}-1}{2} = 5{,}230176600$.

extra opgave

- **a.** Eerste ronde: 6^{n-1}; tweede ronde: 6^{n-2}.
- **b.** n ronden.
- **c.** $6^n - 1$.
- **d.** Omdat iedere ‘heat’ 5 verliezers kent.
- **e.** Totaal aantal heats = aantal verliezers gedeeld door 5.

Hoofdstuk 4 Differenties

1 De wekelijkse toenamen volgens model 1 zijn: 3, 5, 7, 9 , ... ; die komen overeen met de ‘winkelhaken’ in de figuur.
Volgens model 2 zijn de wekelijkse toenamen gelijk aan de aanwezige hoeveelheid: 1, 2, 4, 8, ... ; in het plaatje kun je bij elk nieuw vierkant de vier driehoekige flappen naar binnen vouwen en zo krijg je het voorgaande vierkant.

2 $(t+2)^2 - (t+1)^2 = (t^2+4t+4) - (t^2+2t+1) = 2t+3$.
$2^{t+1} - 2^t = 2^t\ 2 - 2^t = 2^t\ (2-1) = 2^t$.

3 13 ; 11 ; 64 ; 128 ; 999 ; 59046.

4 $2k+1$; $10k+5$; $2k-1$; $2k-1$; 2 ; $6k^2+2$.

5 **a.** $(f(5)+7) - (f(2)+7) = f(5) - f(2) = 3$;
$(4f(5)) - (4f(2)) = 4 \cdot (f(5) - f(2)) = 4 \cdot 3 = 12$.
b. Een constante optellen heeft geen effect op de differenties.
c. De differenties moeten worden vermenigvuldigd met die constante.

6 **c.** De differenties zijn 2 keer zo groot als de y_1-waarden.
d. $3^{k+1} - 3^k = 3\ \ 3^k - 3^k = 2\ \ 3^k$.
e. De differenties zijn 4 keer zo groot als de y_1-waarden;
$5^{k+1} - 5^k = 5\ \ 5^k - 5^k = 4\ \ 5^k$.

7 **a.** De differenties van tweede orde gaan omhoog met sprongen van 6.
b. $(k+1)^3 - k^3 = (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$.
c. De differenties van k^2 gaan met sprongen van 2 omhoog, die van $3k^2$ dus met sprongen van 6; de differenties van $3k+1$ zijn constant; conclusie: de differenties van $3k^2 + 3k + 1$ gaan met sprongen van 6 omhoog.

8 **a.** $4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$.
b. Drie: de ‘differenties van de derde orde’ gaan omhoog met sprongen van 24.

9 Bijvoorbeeld $f(x) = 4x$.

10 **a.** $1 + 3 + 5 + ... + 19 = 10^2 = 100$.
b. $\sum_{k=0}^{9} (2k+1) = 100$.

11 $n+1$ termen.

12 **a.** $11^2 = 121$; $21^2 - 1 = 440$; $51^2 - 20^2 = 2201$.
b. Bijvoorbeeld: sum (seq (2K + 1, K , 20, 50, 1)) = 2201.

extra opgave

${}^2\log(k+1) - {}^2\log k = {}^2\log\frac{k+1}{k} = {}^2\log\left(1+\frac{1}{k}\right)$; hoe groter k, hoe kleiner $\frac{1}{k}$, en dus hoe kleiner $1+\frac{1}{k}$ en dus ook hoe kleiner ${}^2\log\left(1+\frac{1}{k}\right)$. Met andere woorden: de differenties vormen een dalende rij.

Hoofdstuk 5 Vierkanten en kubussen

1 1 + 4 + 9 + ... + 100 = 385.

2 1 + 8 + 27 + ... + 1000 = 3025.

Hoofdstuk 6 Drie bijzondere sommen

1 **a.** 2 + 4 + 6 + ... + 100 = (1 + 3 + 5 + ... + 99) + 50 = 2550.

b. $\sum_{k=1}^{50} 2k$.

c. Dit is precies gelijk aan de helft van de de vorige som, dus aan 1275.

2 **b.** Stel $2\sum_{k=0}^{n} k = S$, dan $(n+1)^2 = 2S + (n+1)$,

dus: $2S = (n+1)^2 - (n+1) = n(n+1)$.

Links en rechts delen door 2 geeft de beoogde formule.

3 5050.

4

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & + & 2 & + & & \dots & & + & n-1 & + & n \\ n & + & n-1 & + & & \dots & & + & 2 & + & 1 \\ \hline \underbrace{n+1 & + & n+1 & + & & \dots & & + & n+1 & + & n+1}_{n \text{ keer}} \end{array} +$$

Dus; 2 . (1 + 2 + ... + n) = $n(n + 1)$.
Links en rechts delen door 2 geeft de formule van Gauss.

6 De som van de ‘verschilbalkjes’ is gelijk aan het verschil tussen S(10) en $S(0)$, ofwel $3^{10} - 1$. De verschilbalkjes hebben de lengte $2\ \ 3^k$ met $k = 0, 1, ..., 9$.
Het resultaat is in overeenstemming met de somformule bij meetkundige rijen.

7 $S(n) - S(0) = n^3$ en $V(k) = (k + 1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$

8 **a.** Vervang n door $n + 1$.

b. Splits de som in het linkerlid in drieën.

c. $3\sum_{k=0}^{n} k^2 + 3\ \ \tfrac{1}{2}n(n+1) + (n+1) = (n+1)^3$, dus:

$3\sum_{k=0}^{n} k^2 = (n+1)\left((n+1)^2 - \tfrac{3}{2}n - 1\right)$.

Herleiding van het rechterlid en links en rechts delen door 3 geeft het gevraagde resultaat.

d. Voor $n = 10$ levert dit op: $\tfrac{1}{6} \cdot 10 \cdot 11 \cdot 21 = 385$.

9 a. $\sum_{k=0}^{n} V(k) = S(n+1) - S(0) = (n+1)^4$.

b. Omdat $V(k) = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$, volgt nu:

$$4\sum_{k=0}^{n} k^3 + 6\sum_{k=0}^{n} k^2 + 4\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 = (n+1)^4$$

Met gebruikmaking van eerder gevonden formules, volgt hieruit:

$$4\sum_{k=0}^{n} k^3 + n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + (n+1) = (n+1)^4$$

Breng de laatste drie vormen van het linkerlid naar rechts; herleid het nieuwe rechterlid tot $n^2(n+1)^2$; deel links en rechts door 4.

c. Voor $n = 10$ levert dit op: $\frac{1}{4} \cdot 100 \cdot 121 = 3025$.

10 b. Ze markeren kennelijk de termen met een minteken.

c. Bijvoorbeeld:

– Bernoulli schreef *nn* in plaats van n^2.
– De exponent van de hoogste n-macht rechts is steeds 1 hoger dan de exponent van de macht achter het somteken.
– De coëfficiënten van de hoogste n-macht zijn achtereenvolgens: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, enz.
– De op één na hoogste n-macht heeft steeds de coëfficiënt $\frac{1}{2}$.
– De tweede en derde som hebben 3 termen, de vierde en de vijfde hebben 4 termen, de zesde en de zevende hebben 5 termen, enz.
– De vierde en de zesde termen hebben een minteken.

d. Een formule voor de som $1^c + 2^c + 3^c + ... + n^c$.

extra opgave

a. In de linkerleden staan sommen van 1, 2, 3, 4 opvolgende oneven getallen; In het rechterlid staat steeds een derde macht.
De volgende twee regels van het schema zijn:

$$21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 125 \ (= 5^3)$$
$$31 + 33 + 35 + 37 + 39 + 41 = 216 \ (= 6^3)$$

b. De begingetallen van regel 1, 2, 3, ...zijn achtereenvolgens gelijk aan:
$2 \cdot 0 + 1$, $2 \cdot 1 + 1$, $2 \cdot (1 + 2) + 1$, $2 \cdot (1 + 2 + 3) + 1$, $2 \cdot (1 + 2 + 3 + 4) + 1$, $2 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) + 1$, enz.
Stel het begingetal van regel n is b_n en het eindgetal e_n, dan geldt (misschien):

$$b_n + (b_n + 2) + ... + e_n = n^3.$$

Hierbij is $b_n = 2(1 + 2 + ... + (n - 1)) + 1 = n^2 - n + 1$ en

$e_n = b_n + 2(n - 1) = n^2 + n - 1$

c. Stel de som in het linkerlid voor door S.
We passen nu de 'truc' van Gauss toe om de formule te bewijzen:

$$\begin{array}{rcccccc} S = & (n^2 - n + 1) & + & (n^2 - n + 2) & + ... + & (n^2 + n - 1) & \\ S = & (n^2 + n - 1) & + & (n^2 + n - 2) & + ... + & (n^2 - n + 1) & + \\ \hline 2S = & 2n^2 & + & 2n^2 & + ... + & 2n^2 & \end{array}$$

dus: $2S = n \cdot 2n^2 = 2n^3$ en dus: $S = n^3$

Hoofdstuk 7 Zelftoets

1 7629394375 en 32752 + 7174413 = 7207165.

2 75 en 45.

3 800 + 799 + ... + 1 + 0 = 0 + 1 + ... + 799 + 800.

4 **a.** Eerste rij: 13, 16; tweede rij; 48, 96; derde rij: 4, 4; vierde rij: 19, 28.

b. $\sum_{k=0}^{24}(1+3k)\,;\ \sum_{k=0}^{24}(3\ \ 2^k)\,;\ \sum_{k=0}^{24}4\,;\ \sum_{k=0}^{24}(3+k^2)\,.$

c. 925 ; 100663293 ; 100 ; 4975.

5 *k*

6 49 en 100.

7 $\sqrt{100}-\sqrt{16} = 6\,.$

8 $1^3+2^3+\ldots\ +n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2\,;$

$$(1+2+\ldots\ +n)^2 = (\tfrac{1}{2}n(n+1))^2 = \tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2\,.$$

Hoofdstuk 8 De inhoud van een piramide

1 Het aantal bouwsteentjes = $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 10^2$ = 338350; de totale inhoud is dus 0.33835 m^3.

2 Inh. piramide : Inh. kubus = 1 : 3.

Hoofdstuk 9 Kwadratuur

1 $\sqrt{25\pi} = 5\sqrt{\pi} = 8{,}86226\ldots$

2 Stel zijde vierkant = 10. Dan geldt: oppervlakte vierkant = 100, oppervlakte kwartcirkel = 0.25 $\cdot\ \pi\ \cdot$ 100 $\approx$ 78.54, dus oppervlakte A $\approx$ 21.46.

3 De kwartcirkel kun je tekenen op de GR via de formule $y = 1-\sqrt{1-x^2}\,.$

4 **a.** Eerste manier (met de TI 82 of 83):
sum seq (0.1X^2, X, 0, 0.9, 0.1) = 0.285 en sum seq (0.1X^2, X, 0.1, 1, 0.1) = 0.385.
Tweede manier (met een somformule):

$$0{,}1\ \cdot\ (0+0{,}1^2+0{,}2^2+\ldots\ +0{,}9^2) = 0{,}1^3\ \cdot\ (0^2+1^2+2^2+\ldots\ +9^2) = 0{,}285$$

$$0{,}1\ \cdot\ (0{,}1^2+0{,}2^2+\ldots\ +0{,}9^2+1) = 0{,}1^3\ \cdot\ (1^2+2^2+\ldots\ +9^2+10^2) = 0{,}385$$

b. Het gemiddelde van de ondersom en de bovensom is 0.335.

5 (0.32835 + 0.33835) / 2 = 0.33335

6 De grijze blokjes passen precies in de laatste bovenstrook. Bij een verdeling in smallere stroken wordt de som van de oppervlakten van de grijze blokjes dus kleiner. Omdat de hoogte van de laatste bovenstrook gelijk is aan 1, is de som van de grijze blokjes precies gelijk aan de strookbreedte. Bij een verdeling in 1000 even smalle strookjes is het verschil tussen boven- en ondersom dus nog maar 0.001.

7 **a.** $\frac{1}{6}\cdot 0{,}999\cdot 1{,}999 < \text{opp.}(A) < \frac{1}{6}\cdot 1{,}001\cdot 2{,}001$

b. De ‘onderschatting’ van opp.(A) komt bij voortgaande versmalling van de strookjes willekeurig dicht bij $\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2 = \frac{1}{3}$; hetzelfde kan worden gezegd van de ‘bovenschatting’. Opp.(A) wordt dus ingeklemd door getalwaarden die het getal $\frac{1}{3}$ willekeurig dicht benaderen en moet dus wel gelijk zijn aan $\frac{1}{3}$.

Voor de scherpslijpers een scherpe redenering:

Stel opp.(A) > $\frac{1}{3}$. Dan opp.(A) $\geq \frac{1}{3}$ + 0.00...01 (met een zeker aantal nullen)

Ofwel: opp.(A) $\geq \frac{1}{3} + 10^{-n}$ voor zeker natuurlijk getal n. Bij een verdeling met 10^n stroken is de bovensom gelijk aan: $\frac{1}{6}\cdot(1+10^{-n})\cdot(2+10^{-n})$.

Uitwerking levert op: $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot 10^{-n}+\frac{1}{6}\cdot 10^{-2n}$ en dat is kleiner dan $\frac{1}{3}+10^{-n}$!

Dit is in tegenspraak met het feit dat de bovensom juist groter is dan opp.(A).

De veronderstelling opp.(A) > $\frac{1}{3}$ kan dus niet waar zijn.

Op analoge wijze kan worden aangetoond dat de veronderstelling opp.(A) < $\frac{1}{3}$ tot tegenspraak leidt. Er blijft dus slechts over: opp.(A) = $\frac{1}{3}$.

8 Neem bijvoorbeeld een verdeling in 100 even smalle stroken.
De bovensom is dan gelijk aan: $0.01\cdot(0.01^3+0.02^3+\ldots+0.99^3+1^3) =$
$0.01^4\cdot(1^3+2^3+\ldots+99^3+100^3) = 0.01^4\cdot\frac{1}{4}\cdot 100^2\cdot 101^2 = \frac{1}{4}\cdot 1.01^2$.

Evenzo vinden we voor de ondersom: $\frac{1}{4}\cdot 0.99^2$.

Opp. (A) wordt nu ingeklemd door getalwaarden die bij steedsm fijnere verdeling willekeurig dicht naderen tot $\frac{1}{4}$. Opp. (A) moet dus precies gelijk zijn aan $\frac{1}{4}$.

9 De berekening verloopt geheel overeenkomstig aan de berekening van de oppervlakte onder de parabool! Van een ‘boventrappiramide’ met 100 laagjes is de inhoud gelijk aan $\frac{1}{6}\cdot 1{,}01\cdot 2{,}01$; de ‘ondertrappiramide heeft dan de inhoud $\frac{1}{6}\cdot 0{,}99\cdot 1{,}99$. Zo wordt de inhoud ingeklemd tussen getalwaarden die bij voortschrijdende verfijning willekeurig dicht naderen tot $\frac{1}{3}$. De conclusie is dat de inhoud van de piramide precies gelijk is aan het derde deel van de inhoud van de kubus.

10 **a.** Opp. onderstrook = $0.1\cdot 2^{0.4}$ = 0.132950... ;
opp. bovenstrook = $0.1\cdot 2^{0.5}$ = 0.141421...

b. Bovensom = $0.1\cdot 2^{0.1}+0.1\cdot 2^{0.2}+\ldots+0.1\cdot 2^{0.9}+0.1\cdot 2^{1} = 0{,}1\sum_{k=1}^{10} 2^{0{,}1k}$.

Ondersom = $0.1\cdot 2^{0}+0.1\cdot 2^{0.1}+\ldots+0.1\cdot 2^{0.8}+0.1\cdot 2^{0.9} = 0{,}1\sum_{k=0}^{9} 2^{0{,}1k}$.

c. $\sum_{k=0}^{9}(2^{0,1})^k = \frac{(2^{0,1})^{10}-1}{2^{0,1}-1} = \frac{2-1}{2^{0,1}-1} = \frac{1}{2^{0,1}-1}$, dus ondersom = $\frac{0{,}1}{2^{0,1}-1}$.

d. Bovensom = $2^{0.1}\cdot$ ondersom = $\frac{0{,}1\ \ 2^{0,1}}{2^{0,1}-1}$.

e. Vervang 0.1 door 0.01 (twee keer in de ondersom, drie keer in de bovensom).

f. Vijf decimalen: de oppervlakte = 1.44269... .

extra opgave

Noem het stuk onder de parabool weer A.
Als je onder- en bovensommen van A maakt, bijvoorbeeld met een breedte van $0.01a$, dan vind je: $\frac{1}{6} \cdot 0{,}99 \cdot 1{,}99 \cdot a^3 < \text{opp.}(A) < \frac{1}{6} \cdot 1{,}01 \cdot 2{,}01 \cdot a^3$.

Zo wordt duidelijk dat moet gelden opp.$(A) = \frac{1}{3}a^3$.

De oppervlakte van de rechthoek is gelijk aan $a \quad a^2$, dus aan a^3.
Inderdaad is de oppervlakte van A precies één derde van de oppervlakte van de rechthoek en dus verdeelt de parabool de rechthoek in stukken met verhouding 1 : 2.

Hoofdstuk 10 Reactieautomaat

1 **a.** De valsnelheid neemt toe gedurende de val; de valweg bij 0.01 sec wordt steeds langer.
b. Nee.

Hoofdstuk 11 Van snelheid naar afstand

1 $0 + 0.1 + 0.2 + ... + 4.9 = 0.1 \cdot (1 + 2 + ... + 49) = 0.1 \cdot 1225 = 122.5$.

2 **a.** 127.5.
b. ondersom = 124.75; bovensom = 125.25.

3 Naarmate de onderstroken smaller worden vullen ze de driehoek steeds beter: de som van de 'witte' driehoekjes wordt steeds kleiner, zelfs willekeurig klein. Ook de bovensom benadert de oppervlakte van de driehoek steeds beter en willekeurig dicht.
De oppervlakte van de driehoek = $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 50 = 125$.

4 **a.** Volgens de formule van Galileï geldt:

tijdstip (sec)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
valweg (m)	0	5	20	45	80	125	180	245	320
hoogte (m)	320	315	300	275	240	195	140	75	0

De hoogtegetallen kloppen met de figuur.
b. $v = 10t$ geeft op $t = 8$ een snelheid van 80 m/sec; dit is 288 km/u.
c. $s = 160$ leidt tot $5t^2 = 160$, dus $t = \sqrt{32}$.
Op dat moment is de snelheid $10\sqrt{32}$ » 56,6 m/sec » 203.6 km/u.
d. Hoogte eerste zakje na t sec = $320 - 5t^2$; hoogte tweede zakje = $320 - 5(t - 1)^2$.
Hoogteverschil na t sec = $10t - 5$.

5 De formule komt overeen met hoogte = 320 − valweg = $320 - 5t^2$.

6 Het tweede zakje start 1 sec later (dat zie je aan T − 1 in de formule voor Y_{2T}) en van een hoogte van 245 m.
In 7 sec legt het zakje precies die 245 m af (zie bovenstaande tabel) en komt dus gelijktijdig met het eerste zakje op de grond.

7 v is evenredig met t. Omdat s evenredig is met t^2, geldt t evenredig met $\sqrt{s}$.
Conclusie: v is evenredig met $\sqrt{s}$.

In formule: $s = 5t^2$, dus $t = \sqrt{0{,}2} \cdot \sqrt{s}$. Gecombineerd met $v = 10t$ geeft dit:

$v = 10\sqrt{0{,}2} \cdot \sqrt{s}$ » $4{,}5 \cdot \sqrt{s}$

8 a.

tijdsinterval	*valweg*
[0 , 1]	5
[1 , 2]	15
[2 , 3]	25
[3 , 4]	35
enz.	enz.

5, 15, 25, 35, ... verhouden zich als 1, 3, 5, 7, ... dus als de *oneven* getallen.

b.

tijdsinterval	*valweg*
[0.5 , 1.5]	10
[1.5 , 2.5]	20
[2.5 , 3.5]	30
[3.5 , 4.5]	40
enz.	enz.

Voor deze intervallen klopt de hypothese van Leonardo.

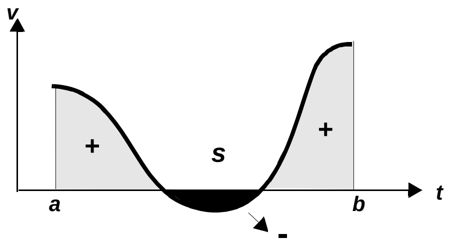
9 a. 120 km/u = 2 km/min. In het tijdsinterval [0 , 2] neemt de snelheid toe van 0 tot 2 km/min; op [33 , 35] is de snelheid constant en op [33, 35] neemt zij af van 2 tot 0 km/min. Dat verklaart de vorm van de grafiek.

b. Kritische noot: de grafiek heeft knikken bij $t = 2$ en $t = 33$; een meer vloeiend verloop lijkt waarschijnlijker.

c. De afgelegde afstand gedurende de eerste 2 minuten wordt gegeven door de oppervlakte van de driehoek onder het eerste schuine stuk (de redenering van Galileï is weer van toepassing). Die oppervlakte is 2, dus de afgelegde weg is 2 km.
De volgende 31 minuten legt de trein 62 km af. De laatste 2 minuten leveren weer 2 km op (volgens de oppervlakte van de driehoek). In totaal is dit 66 km.
Merk op dat 66 gelijk is aan de totale oppervlakte onder de snelheidsgrafiek.

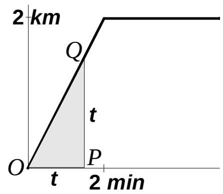
10 a. Snelheid = 0, dus deel van de grafiek valt samen met de horizontale as. Ja, want bijbehorende oppervlakte = 0 = afgelegde afstand.

b. Auto rijdt achteruit. Je zou kunnen zeggen dat de afstand tot het vertrekpunt dan kleiner wordt: je kunt de zwarte oppervlakte negatief rekenen.



extra opgave

a. Voor 0 £ t £ 2 geldt:
$s(t)$ = oppervlakte van driehoek OPQ,
dus $s(t) = \frac{1}{2} \cdot t \cdot t = \frac{1}{2}\, t^2$.



b. Op $t = 2$ geldt $s = 2$.
Voor 2 £ t £ 33 geldt: $s(t) = 2 + (t - 2) \cdot 2 = 2t - 2$.
Voor 33 £ t £ 35 is het handig om te letten op het stukje dat in de laatste $35 - t$ minuten zal worden afgelegd; via de oppervlakte van een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden $35 - t$ levert dit op: $\frac{1}{2}\,(35 - t)^2$. De reeds afgelegde afstand is dan: $s(t) = 66 - \frac{1}{2}\,(35 - t)^2$.

Hoofdstuk 12 Heer in het verkeer

1 **a.** Ik heb niks met jouw kwartier te maken! Je bent er bij Bommel, hoe is de naam?
b. Rechtlijnig.

2 **a.** Op het moment dat de overtreding werd waargenomen was de snelheid van de Oude Schicht 90 km/u. De boete was dus 200 (of 400) florijnen (gelukkig speelt geld geen rol voor een heer van stand).
b. Over een afstand van bijna 5 km had heer Bommel te hard gereden.

Hoofdstuk 13 Van afstand naar snelheid

1 **a.** 4 m/sec; 12 m/sec.
b. De grafiek is tussen de punten (0 , 0) en (5 , 20) aanzienlijk minder steil dan tussen de punten (5 , 20) en (10 , 80).

2 **a.** Bekijk de rechthoekige driehoek in de figuur op bladzij 39. Omdat op de maan blijkbaar geldt: $\frac{1}{2}g = 0.8$, weet je nu: $g = 1.6$ en $v(t) = 1.6t$.
b. Je kunt in het punt (5 , 20) de steilheid van de grafiek schatten. Stel je voor dat na $t = 5$ de snelheid niet meer zou veranderen. De grafiek zou zich dan rechtlijnig voortzetten. Probeer die rechte lijn zo goed en zo kwaad als het kan te tekenen. De richtingscoëfficiënt van die lijn moet dan 8 zijn.

3 **a.** De snelheid is constant.
b. De snelheid is 0.

5 **a.** 61 m/sec ; 91 m/sec.

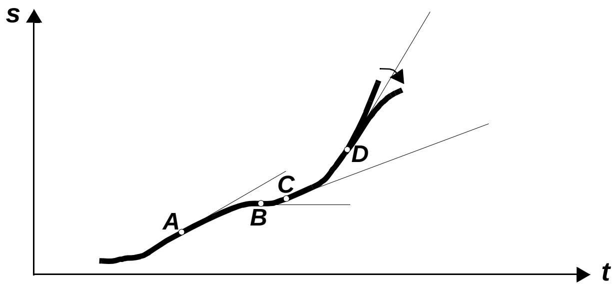
6 **a.** $\dfrac{5^3 - 4{,}9^3}{0{,}1} = 73{,}51$.
b. Zit in tussen 73.51 en 76.51.

7 **a.** 0.00001 ; 74.9998500001 ; 75.0001500001.
b. 75 m/sec.

8 **b.** Vanaf het punt (5 , 125) zou de grafiek zich voortzetten als een rechte lijn met hellingsgetal (of richtingscoëfficiënt) 75.
c. De formule bij die rechte lijn is: $y = 75x + c$ (c is constant).
Omdat (5 , 125) op die lijn moet liggen geldt: $125 = 75 \,.\, 5 + c$, dus $c = -250$.
Andere manier: de lijn moet evenwijdig zijn aan de lijn $y = 75x$ en gaan door het punt (5 , 125). Een vergelijking van de (verschoven!) lijn is: $y - 125 = 75(x - 5)$

en dit kan worden herleid tot $y = 75x - 250$.

9 **a.** De momentane snelheid is nul ('rustpunt').
b. De grafiek gaat steiler dan de raaklijn in *D*.
c. Je moet de grafiek terugbuigen zo dat zij onder de raaklijn komt.



10 **a.** De uitkomsten voor $x = 1, 2, 3, ...$ zijn nu iets lager: 2.999, 11.999, 26.999, ...
c. De snelheden 0, 3, 12, 27, 48, ... zijn evenredig met 0, 1, 4, 9, 16, ...; de evenredigheidsfactor is 3. Blijkbaar geldt: $v(t) = 3t^2$.

11 **a.** Je vind de sneheden 0, 4, 32, 108, 256, ...
b. De snelheden zijn nu evenredig met 0, 1, 8, 27, 64, ...; de evenredigheidsfactor is 4. Blijkbaar geldt: $v(t) = 4t^3$.

12 **a.** Elke uitkomst is het dubbele van zijn voorganger.
b. De snelheden zijn dus evenredig met 1, 2, 4, 8, 16, ...; echter, de evenredigheidsconstante is nu geen 'mooi' getal; bij benadering is zij gelijk aan 0.69315.
c. Nu is elke uitkomst het drievoud van zijn vooorganger en zijn de snelheden dus evenredig met 1, 3, 9, 27, 81, ... de evenredigheidsconstante is bij benadering gelijk aan 1.0986.

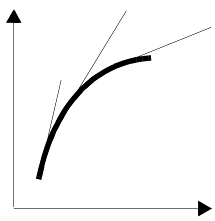
13 1.6095.
extra opgave
Breid op de GR de tabel uit met de kwadraten van Y_3. Je vindt achtereenvolgens : 0, 2.25, 4.5, 6.75, 9, ...en deze rij is evenredig met de rij 0, 1, 2, 3, 4, ...; de evenredigheidsfactor is 2.25. Blijkbaar geldt: $v^2 = 2.25t$, ofwel: $v(t) = 1{,}5\sqrt{t}$.

Hoofdstuk 14 Terugblik en vooruitzicht

1 De formule in het kader op bladzij 21. De formule geeft de mogelijkheid om via differentieformules formules voor sommen te vinden. Zo is bijvoorbeeld de som van opvolgende kwadraten gevonden.

2 Bij een *t,v*-grafiek stelt de oppervlakte onder de grafiek een afgelegde afstand voor.

3 De hellingsgetallen van de raaklijnen worden kleiner, als je van links naar rechts de grafiek volgt.



4 $s = \frac{1}{4}t^4$; $\int t^3 dt = \frac{1}{4}t^4$.

5 $\int_1^4 t^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{3}\cdot 4^3 - \frac{1}{3}\cdot 1^3 = 21 .$

6 $\int_0^{10} t^3 \mathrm{d}t = \frac{1}{4}\cdot 10^4 - \frac{1}{4}\cdot 0^4 = 2500 .$

7 **a.** $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}t^4 = 4t^3$; $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}2^t = c_2 \ 2^t$; $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}3^t = c_3 \ 3^t$; $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}5^t = c_5 \ 5^t$; $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}t\sqrt{t} = 1{,}5\sqrt{t}$.

b. v is evenredig met s / t in de gevallen dat $s = t^2, t^3, t^4, t\sqrt{t}$.

8 $\int_0^1 2^t \mathrm{d}t = \frac{2}{c_2} - \frac{1}{c_2} = \frac{1}{c_2} \gg \frac{1}{0{,}69315} \gg 1{,}44269$;

of in plaats van de laatste twee stappen:

c_2 wordt benaderd door $\frac{2^{0{,}0001}-1}{0{,}0001}$, dus $\frac{1}{c_2}$ door $\frac{0{,}0001}{2^{0{,}0001}-1}$ en dit is in overeenstemming met het benaderingsproces op bladzij 33.

Hoofdstuk 15 Zelftoets

1 **a.** 1/3 km
b. 8 km
c. 105 km/u

2

$$\sum_{k=0}^{n} 3k^2 - \sum_{k=0}^{n} k = \frac{3}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}n(n+1)\cdot 2n = n^2(n+1)$$

3 **a.** 8 m/sec
b. Nee; de momentane snelheid op t =1 is 4 m/sec
d. $s(t) = 32t - 48$

4 $S_{30} = \frac{r^{60}-1}{r^2-1}$; $T_{30} = r \ \frac{r^{60}-1}{r^2-1}$; $S_{30} + T_{30} = \frac{r^{60}-1}{r-1}$

5 **a.** Voer bijv. in: Y1 = 0.5^X, Y2 = Y1(X + 0.0001) - Y1, Y3 = Y2/0.0001 en zet TBLSET op startwaarde 0 en stapgrootte 1. Vergelijk de tabellen van Y1 en Y3, constateer de evenredigheid en lees de evenredigheidsfactor af.
b. De grafieken zijn elkaars spiegelbeeld ten op zichte van de y-as vanwege de eigenschap: $0.5^x = 2^{-x}$. De raaklijnen in twee spiegelbeeldige punten zijn dan ook elkaars spiegelbeeld en hebben daarom een tegengestelde richtingscoëfficiënt.